

Posudek vedoucího diplomové práce

Jaroslav Hančl: Obecná enumerace číselných rozkladů

Diplomová práce pana Hančla se zabývá číselnými rozklady a jejich enumerací. Připomeňme, že *(číselný) rozklad* přirozeného čísla n je multimnožina $\lambda = \{\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k \geq 1\}$ přirozených čísel, jejichž součet je n . *Rozkladový ideál* je taková (typicky nekonečná) množina rozkladů X , která s každým rozkladem obsahuje i všechny jeho podrozklady, to jest když $\lambda \in X$ a κ je libovolný rozklad, v němž má každé číslo násobnost menší či rovnou násobnosti v λ , pak i $\kappa \in X$. Například rozklady používající jako části pouze lichá čísla nebo rozklady, v nichž se části neopakují, tvoří rozkladové ideály. Tématem práce bylo zkoumat *počítací funkce rozkladových ideálů*, což jsou funkce $p(n, X)$ počítající rozklady čísla n v X , a konkrétněji zkoumat maximální růst funkce $p(n, X)$ pro $n \rightarrow \infty$, který ještě umožňuje, aby $p(n, X)$ nabývala nekonečně často nulovou hodnotu.

Původní hlavní výsledky práce jsou tři, všechny ve třetí kapitole.

1. (Theorem 3.2.4.) Je sestrojen takový rozkladový ideál X , že na jednu stranu $p(n, X) = 0$ pro nekonečně mnoho n , ale na druhou stranu na nekonečné posloupnosti $1 \leq n_1 < n_2 < \dots$ platí, že $p(n_i, X) = p(n_i + o(n_i))$. Zde $p(n)$ označuje klasickou funkci počítající všechny rozklady čísla n , s asymptotikou $p(n) \sim (4n\sqrt{3})^{-1} \exp(\pi\sqrt{2n/3})$.
2. (Theorem 3.3.2.) Je-li X tzv. řádný rozkladový ideál a navíc pro nějaké přirozené číslo r pro každé dostatečně velké k nějaký rozklad čísla kr na násobky r leží v X , potom $p(n, X) = 0$ pro nekonečně mnoho n vynucuje, že $p(n, X)$ neroste rychleji než $p(n/2)$.
3. (Theorem 3.4.5.) Tato věta tvrdí, že každý rozkladový ideál X zadaný konečnou množinou zakázaných podrozkladů má počítací funkci $p(n, X)$ s asymptotikou tvaru $cn^\kappa \exp(\pi\sqrt{2n/3})$.

Věcná a matematická stránka práce. Výsledek 2 je vpořádku, ale důkazy výsledků 1 a 3 obsahují podstatný omyl v důkazu Lemmatu 3.2.3. Zde se nesprávně argumentuje, že pokud mají dvě posloupnosti $a_1(n)$ a $a_2(n)$ pro $n \rightarrow \infty$ asymptotiky $b_1(n)$ a $b_2(n)$, potom má rozdílová posloupnost $a_1(n) - a_2(n)$ asymptotiku $b_1(n) - b_2(n)$. To bez další informace o chybových členech samozřejmě obecně neplatí a právě v tomto případě rozkladových asymptotik nejsou chybové členy dostatečně malé. Na tento omyl, který přehlédl autor i vedoucí, nás laskavě upozornil oponent. Myslím, že idea konstrukce dokazující výsledek 1 je správná a že důkaz by bylo nepříliš složité opravit, už proto, že by stačilo slabší pomocné tvrzení než Lemma 3.2.3. V případě výsledku 3 je má jistota menší a opravy by musely být rozsáhlejší.

Sám výsledek 1 považuju za zajímavý a pokud by byl dále zesílen a hlavně správně dokázán i za potenciálně publikovatelný.

Práce obsahuje další tři kapitoly, vesměs přehledové. Kapitola 1 je úvodem do teorie číselných rozkladů, obsahuje základní definice a identity a obecnou metaidentitu Cohena a Remmela. Kapitola 2 je přehledem některých klasických asymptotických výsledků o rozkladech, například Schurovy asymptotiky počtu rozkladů na části z dané konečné množiny. Konečně kapitola 4 podává přehled některých enumerativních výsledků o ideálech diskrétních kombinatorických struktur, například grafů, permutací a slov, které sloužily jako motivační pro téma současné diplomové práce.

Jazyková a formální stránka práce. Práce je přehledně členěna a obsahuje málo překlepů. Je sepsána v anglickém jazyce, s nímž autor do jisté míry zapásil a ještě ho potřebuje vylepšit, ale výsledek je srozumitelný a slušně čitelný.

Celkové hodnocení. Práce má zajímavé téma a hlavní výsledek resp. výsledky, ale při jejím hodnocení nelze pominout skutečnost, že ve své současné podobě důkaz větší části hlavních výsledků obsahuje závažnou mezeru a není správně; zbytek je dokázán správně. Přes tento vážný nedostatek jsem názoru, že se panu Hančlovi podařilo naplnit míru nutnou k uznání práce jako diplomové.

Navrhuji práci uznat jako diplomovou a pro její hodnocení navrhuji známku .

V Praze 16. 5. 2011

Doc. RNDr. Martin Klazar, Dr.