

Posudek diplomové práce

Autor práce: Bc. Jaroslav Hančl

Název práce: Obecná enumerace číselných rozkladů

Autor posudku: RNDr. Vít Jelínek, Ph.D. (oponent)

Diplomová práce se zabývá studiem počítacích funkcí ideálů číselných rozkladů. Číselným rozkladem velikosti n se rozumí nerostoucí posloupnost přirozených čísel $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$, jejichž součet je roven n . Rozklad $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_\ell)$ je *podrozklad* rozkladu $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$, pokud $\mu_1, \dots, \mu_\ell$ je podposloupnost $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. *Rozkladový ideál* je množina rozkladů X taková, že pokud λ náleží do X , tak i všechny podrozklady λ náleží do X .

Cílem práce je zkoumat hodnoty počítací funkce $p(n, X)$, definované jako počet rozkladů velikosti n náležících do rozkladového ideálu X . Autor se soustředí na ideály, jejichž počítací funkce je rovna nule pro nekonečně mnoho n .

První dvě kapitoly práce jsou věnovány stručnému přehledu známých výsledků o kombinatorice číselných rozkladů. Třetí kapitola obsahuje vlastní výsledky autora. Čtvrtá kapitola obsahuje přehled předchozích výsledků o počítacích funkcích jiných kombinatorických struktur a jejich srovnání s výsledky dosaženými v této práci.

Hlavní problém práce je, že některé důkazy autorových výsledků jsou chybné. Konkrétně důkaz Lemmatu 3.2.3 obsahuje závažnou mezeru, způsobenou tím, že autor při práci s asymptotickými odhady počítacích funkcí nevzal v úvahu chybové členy, které jsou v asymptotických odhadech implicitně obsažené. Obávám se, že důkaz tohoto lemmatu nelze snadno opravit, a je otázka, jestli Lemma 3.2.3 vůbec platí.

Lemma 3.2.3 se bohužel využívá v důkazech několika klíčových výsledků této práce, i když v některých případech se dá jeho použití poměrně snadno obejít a tím důkazy opravit. Je proto možná škoda, že se autor rozhodl práci obhajovat v její současné podobě, místo toho, aby se pokusil opravit chyby v důkazech.

První hlavní výsledek práce je Věta 3.2.4, kde se konstruktivně dokazuje existence rozkladového ideálu X , jehož počítací funkce $p(n, X)$ je rovna nule pro nekonečně mnoho hodnot n , a zároveň pro libovolnou konstantu $\beta < 1$ platí, že $p(n, X) > p(\beta n)$ pro nekonečně mnoho n , kde $p(n)$ je počet všech rozkladů velikosti n . Jinými slovy, počítací funkce ideálu X může oscilovat od nuly až téměř k maximální možné hodnotě $p(n)$. Toto je možná nejdůležitější výsledek celé práce. Bohužel i v jeho důkazu se jako jeden krok používá Lemma 3.2.3, ale ve skutečnosti je zde potřeba jen mnohem slabší speciální verze tohoto lemmatu, kterou lze dokázat samostatně. Odhlédneme-li od tohoto problému, je důkaz Věty 3.2.4 zajímavý a netriviální.

Další autorův výsledek, Věta 3.3.2, dokazuje horní odhad $p(n, X) \leq p(n/2)$ pro libovolný rozkladový ideál X splňující následující tři podmínky.

1. $p(n, X) = 0$ pro nekonečně mnoho n .
2. X je tzv. *proper ideal*, což znamená, že každému číslu $i \in \mathbb{N}$ lze přiřadit maximální multiplicitu $m_i \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ tak, že X obsahuje přesně ty rozklady, v nichž se každé číslo $i \in \mathbb{N}$ vyskytuje nejvýš m_i -krát.
3. Existuje číslo r takové, že pro každé dostatečně velké k platí, že X obsahuje rozklad velikosti kr jehož všechny členy jsou násobky r .

Odhad $p(n/2)$ je zde nejlepší možný, jak ukazuje rozkladový ideál obsahující rozklady, jejichž všechny členy jsou sudé. Zároveň je vidět, že podmínka číslo 3 je nezbytná, protože rozklad zkonstruovaný v důkazu Věty 3.2.4 splňuje první dvě podmínky, a přitom pro něj neplatí odhad $p(n, X) \leq p(n/2)$.

Je otázka, jestli i podmínka číslo 2 je ve Větě 3.3.2 nezbytná. Lze nahlédnout, že podmínka 2 je ekvivalentní následující vlastnosti: pro každé dva rozklady $\mu, \nu \in X$ existuje rozklad $\lambda \in X$ obsahující μ i ν . Tato vlastnost se občas označuje jako ‘joint embedding property’ a hraje důležitou roli při studiu částečných uspořádání mezi kombinatorickými strukturami. Zároveň je ale tato vlastnost poměrně restriktivní a bylo by zajímavé (i když možná dost náročné) dokázat Větu 3.3.2 bez této podmínky, případně ukázat, že i tato podmínka je nezbytná.

Důkaz Věty 3.3.2 nevyužívá Lemma 3.2.3 a zdá se být korektní.

Další výsledky z kapitoly 3, konkrétně Věta 3.4.3 a Věta 3.4.5, ve svých důkazech podstatně využívají Lemma 3.2.3 a nejsem si jistý, jestli je možné jejich důkazy opravit.

Domnívám se, že navzdory problémům v důkazech jsou výsledky této práce matematicky přínosné. Věřím, že by po odstranění chyb v důkazech mohly tvořit základ pro kvalitní odborný článek.

Celkové zpracování práce se mi zdá dostatečně pečlivé, práce je psána jasně a srozumitelně a překlepů není mnoho. Drobné jazykové chyby se objevují o něco častěji, ale nebrání porozumění textu. Můj názor je, že navzdory všem výše zmíněným nedostatkům je možné tuto práci uznat jako diplomovou.

Vít Jelínek, Vídeň, 18. 5. 2011