

Posudek vedoucího na diplomovou práci
Vlastnosti zobrazení s konečnou distorzí

Autor práce: Daniel Campbell

Vedoucí práce: Stanislav Hencel

V této diplomové práci je studován problém spojitosti zobrazení s konečnou distorzí. Ukazuje se, že tyto třídy zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$ mohou sloužit jako vhodné modely v teorii nelineární elasticity pro $n = 3$, a proto je spojitost takovýchto zobrazení nesmírně důležitým pojmem. Z fyzikálního hlediska nám říká, za jakých podmínek se materiál při deformaci netrhá a nevznikají v něm dutiny (tzv. kavitace).

V prvních kapitolách, které mají spíše kompilační charakter, je připomenut důkaz známých tvrzení o spojitosti zobrazení s konečnou distorzí v Sobolevově prostoru $W^{1,n}$ a spojitost zobrazení s exponenciálně integrovatelnou vnitřní distorzí $\exp(\lambda K_O) \in L^1$. Studentovi se podařilo sestavit důkaz obsahující všechny kroky tohoto relativně obtížného důkazu, který obsahuje vlastnosti slabě monotónních funkcí a distributivního jakobiánu.

V další kapitole jsou nalezeny různé protipříklady ukazující nutnost všech podmínek předchozích vět. Dále je zde ukázáno, že podmínka na exponenciální integrovatelnost vnitřní distorze nelze příliš zeslabit. Nejlepších a zcela původních výsledků je dosaženo ve zbývajících kapitolách 6 a 7.

Nedávný výsledek Onnina ukazuje, že pro spojitost stačí i jakási exponenciální integrovatelnost vnější distorze, pokud parametr λ splňuje dodatečnou podmínku $\lambda > (n - 1)^2 - 1$. Tato podmínka je nutná pro techniku důkazu, ale nezdá se být přirozená. Veškeré protipříklady na spojitost v teorii zobrazení s konečnou distorzí jsou homeomorfismy a zobrazují kouli bez středu na mezikouli. Dan Campbell v šesté kapitole ukázal, že libovolné takovéto zobrazení (homeomorfismus zobrazující na mezikouli) už nemůže mít exponenciálně integrovatelnou distorzi pro libovolné $\lambda > 0$. Tedy standartní protipříklad určitě nelze sestavit. Na základě tohoto pozorování nyní věříme a po osobní konzultaci s námi souhlasí i Onninen, že jeho věta platí i bez dodatečného předpokladu. Důkaz takového tvrzení ovšem nelze dostat standartními technikami a je potřeba najít nové nástroje.

Nejdůležitější i když nejkratší kapitolou je kapitola sedmá, která obsahuje publikovatelné výsledky. V sérii nedávných prací Iwaniec, Koskela, Onninen a Zhong zkoumali odhad modulu spojitosti pro zobrazení s exponenciálně integrovatelnou distorzí až nakonec dokázali

následující odhad

$$|f(x) - f(y)| \leq C \frac{C}{\log^{\lambda/n}(1/|x - y|)}.$$

Přesný modul spojitosti bývá většinou podmínka s otevřeným koncem a nejpřirozenější příklad s tímto modulem spojitosti

$$f(x) = \frac{x}{|x|} \frac{1}{\log^{\lambda/n}(1/|x|)}$$

nesplňuje podmínku na exponenciální integrovatelnost distorze. Proto by se dalo očekávat, že existuje ještě nějaký lepší odhad obsahující nějaké dodatečné $\log \log$ členy. Po detailní analýze předchozích komplikovaných důkazů se podařilo sestavit příklad funkce, který má požadovaný modul spojitosti a distorze je exponenciálně integrovatelná. Tedy předchozí odhady již nelze vůbec vylepšit. Toto je velmi překvapivé a překvapilo to i Koskelu, Onninen a Zhonga, kterým jsem výsledek již ukazoval. V navazujících pracích od Koskela a jeho studentů by totiž takový výsledek byl velmi užitečný a Koskela a jeho studenti existenci lepšího odhadu očekávali a hledali jeho důkaz. Poznamenejme ještě, že podobně lze sestavit příklad na ostrý modul spojitosti i pro zobrazení, jehož distorze splňuje $\exp(\mathcal{A}(K_O)) \in L^1$, pro nějakou vhodnou Orliczovu funkci $\mathcal{A}$.

Práce jak svou obtížností tak i originalitou bohatě splňuje podmínky kladené na diplomovou práci. Po vědecké stránce se jedná o mimořádně kvalitní práci obsahující mnoho původních výsledků a například poslední sedmou kapitolu jsme spolu sepsali jako článek a tento brzy vyjde v *Ann. Acad. Sci. Fenn.* Dovolím si také připomenout, že tato práce obsadila druhé místo ve studentské soutěži SVOČ. Na druhou stranu bych uvítal trochu větší samostatnost a preciznost při odlaďování průběžných verzí. Práce je dobře čitelná a snadno se v ní orientuje a nemám k ní žádné připomínky.

V Praze dne 18.2.2011

Stanislav Hencel