Oponentský posudek diplomové práce
Martin Slavata: „Prostory spojitých funkcí v topologii bodové konvergence“

Předložená práce se zabývá prostory spojitých funkcí na topologických prostorech v topologii bodové konvergence, s důrazem na kompaktnost a příbuzné vlastnosti. V Kapitole 0 jsou shrnuty některé obecné vlastosti prostorů $C_p(X, Y)$, v Kapitole 1 se zavádí kompaktnost a příbuzné slabší vlastnosti, Kapitola 2 je věnována andělským topologickým prostorům. V Kapitole 3 se zkoumá jednak andělskost $C_p(X)$ (Orihuelova věta) a jednak relativní kompaktnost omezených množin (věta Asanova a Velička). Kapitola 4 obsahuje příklad dvou andělských kompaktních prostorů, jejichž součin není andělský. Kapitola 5 se zabývá třídou striktně andělských prostorů, která je uzavřená vůči spočetným součinům. V Kapitole 6 se zkoumá, kdy prostor $C_p(X)$ a některé jeho důležité podprostory mají některé vlastnosti příbuzné kompaktnosti.

Jde o kompilační práci, jejíž téma je netriviální, místy i obtížné. Při dobrém a srozumitelném zpracování by mohla vzniknout velmi dobrá diplomová práce. Předložená práce je přepracovanou verzí práce podané před rokem a následně stažené ze zdravotních důvodů. Nová verze je mnohem lepší než původní text – některé chyby byly opraveny (část závažných chyb a většina drobných chyb), některá chybějící vysvětlení byla doplněna. Nicméně v práci zůstalo stále nemalé množství chyb – některé z důvodu neopravení původního textu, některé v důsledku nedostatečné či špatné opravy, a několik chyb přibylo v nově dodaných vysvětleních.

Dále uvádím seznam závažných chyb a opomenutí, které jsem našel:

1. Strana 11, důkaz Lemmatu 1.10: Důkaz je špatně. Přesněji: Je správně dokázáno, že z každého spočetného pokrytí otevřenými obdélníky lze vybrat konečné. Ale není vysvětleno, proč toto implikuje spočetnou kompaktnost. A ono ji to přitom neimplikuje:

(i) Je pravda, že otevřené obdélníky tvoří bázi součinové topologie. Ale pro spočetnou kompaktnost, na rozdíl od kompaktnosti, neplatí, že vybírání konečných podpokrytí stačí testovat pro pokrytí prvky báze. Snadnou ilustrací je nespočetný diskrétní prostor. Ten jistě není spočetně kompaktní. Přitom jednobodové množiny tvoří bázi. A z každého spočetného pokrytí prvky báze lze vybrat konečné, jelikož žádné takové spočetné pokrytí neexistuje.

(ii) Skutečnost, že nestačí uvažovat otevřené obdélníky, dokazuje fakt, že v důkazu se nevyužila kompaktnost X, ale jen spočetná kompaktnost. To proto, že pokrytí $\{U(x) : x \in X\}$ je ve skutečnosti spočetné. Přitom součin dvou spočetně kompaktních prostorů nemusí být spočetně kompaktní.

2. Strana 16, důkaz Důsledku 2.4: Závěr důkazu je špatně. Zde mi připadá, že autor původní text vůbec neopravil. Je třeba použít celé tvrzení andělského lemmatu. Z pouhého faktu, že $f|_A$ je homeomorfisums A na $f(A)$ a že $f(A)$ je relativně kompaktní, ještě neplyne, že A je relativně kompaktní a že $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.

3. Strana 19: Formulace Věty 3.2 není srozumitelná. Konkrétně, jejím předpokladům tak, jak jsou napsané, rozumím takto: Pro každou posloupnost $(a_1, \ldots, a_n) \in S$ mají A a $C_{a_1,\ldots,a_n}$ zaměnitelné dvojné limity. Pak je sice důkaz správný, ale potíže jsou s aplikací věty (viz další bod).

4. Strana 26, řádek 6: Není jasné, proč by $\phi(A)$ měla splňovat předpoklady Věty 3.2. Bylo dokázáno, že zaměnitelnost limit platí za předpokladu existence hromadných bodů. Pokud je ale Věta 3.2 formulována tak, jak je formulována, pak dle mého porozumění (viz předchozí bod) by se mělo ověřit, že pro každou posloupnost $(a_1, \ldots, a_n) \in S$ má každá posloupnost v množině $C_{a_1,\ldots,a_n}$ hromadný bod v X. To ale nevidím, jak by mělo plynout z předpokladu web-kompaktnosti.

5. Strana 31, důkaz Věty 3.21: Zde bylo oproti původní verzi doplněno vysvětlení, ale zmatené. Množina A leží v $C_p(X)$, ne v X. Spíše by se mělo pomocí Lemmatu 3.19 ukázat, že množinu M lze volit v Y.

6. Strana 33: Mělo by se vysvětlit, kde a jak se využívá hypotéza kontinua. Co je to Ω? Má to být ω_1, tj. první nespočetný ordinál? Proč je Σ^*_α spočetná?

7. Strana 34, řádky 7-3 zdola: Kompaktnost neplyne z podmínky (iii), ale z definice topologie. V důkazu toho, že prostor je Hausdorffův, je opomenuto oddělení bodů $x \in \mathbb{N}$ a $S \in \Sigma_a$.

8. Strana 38, řádky 9-8 zdola: Proč existuje takový bod y? Prostou negací to nedostaneme. Jde o negaci výroku $\exists n : V_n \subset V$, tedy o výrok $\forall n : V_n \setminus V \neq \emptyset$, což není totéž jako existence zmíněného bodu y. Je třeba použít kompaktnost A.

9. Strana 39, řádky 6-9: Důkaz je nesrozumitelný. Kdyby se použilo, že v kompaktním prostoru jsou všechny body G_δ, právě když má prostor spočetný charakter, byl by důkaz snadný.

10. Strana 40, řádek 5 zdola: a_2 je v uzávěru té množiny, nikoli nutně v té množině. Je to sice snadné, ale chtělo by to dokázat. Dále se používá nejen vlastnost (ii), ale i (iii), nebo ještě lépe andělskost striktně andělských prostorů. Obdobně na straně 41, řádek 1, kde navíc chybí index i u U.

11. Strana 47, řádky 7-6 zdola: Je třeba ukázat nejen, že g je spojitá na $\bigcup_n \overline{U_n}$ (standardně je tímto výrazem myšlena spojitost restrikce; ani ta však není dokázána), ale že g je spojitá v každém bodě této množiny (vzhledem k X). I k tomu je potřeba použít, že X je P-prostor, podobně jako v případě spojitosti v bodech doplňku.

12. Strana 50, důkaz Lemmatu 6.9: γ_1 nemusí být diskrétní, ale je sjednocení dvou diskrétních systémů.

13. Strana 55, řádek 5 zdola: Místo χ má být δ a je třeba použít fakt, že mohutnost kontinua má nespočetnou kofinalitu.

Kromě těchto závažnějších nedostatků je v práci i řada chyb drobnějšího charakteru. Z nich zejména typografické chyby a mnohé formulační nedostatky ani neuvádím, protože neoslabují srozumitelnost a není jich málo. Uvádím zejména nedostatky týkající se obsahu či narušující srozumitelnost:

(i) Strana 8, řádek 1: Má být $\pi_Y(W(f, x_1, \ldots, x_l, \varepsilon))$.
(ii) Strana 10, poznámka za Definicí 1.6: Příklad je správný, ale prostor není ani Hausdorffův, třebaže na začátku práce autor říká, že všechny uvažované prostory budou Tichonovovy (str. 6).
(iii) Strana 10-11, Příklad 1.8: Binární rozvoj není jednoznačně určen.
(iv) Strana 18, Definice 3.1, řádek 3: Spíše „jestliže“ než „kdykoli“.
(v) Strana 19, bod (i) důkazu: Má být „$d(G(x), G(y))$“.
(vi) Strana 20, bod (v) důkazu: Mělo by se říci, že posloupnost $(f_n(x))$ má alespoň jeden hromadný bod díky kompaktnosti Z.
(vii) Strana 21, řádky 5-6: Tato charakterizace relativní kompaktnosti platí pro každou A, relativní spočetná kompaktnost zde nehraje roli.
(viii) Strana 22, řádek 7 zdola: Chybí specifikace $\alpha \in \Sigma$.
(ix) Strana 22, řádek 4 zdola: Spíše „můžeme volit“ než „volíme“.
(x) Strana 22, řádek 2 zdola: Ne „Tx_n“, ale $T\varphi(\alpha_n)$.
(xi) Strana 23, poslední řádek: Chybí znak $\bigcup$.
(xii) Strana 25, řádek 3: Čárka je tam navíc.
(xiii) Strana 27, Lemma 3.11: Je to sice důsledek, ale při důkazu Věty 3.4 se vlastně dokazovalo Lemma 3.11.
(xiv) Strana 28, řádek 5 zdola: Nikoli „A“, ale „$\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$“.
(xv) Strana 29, řádek 2: Nevhodné použití symbolů X a Y k označení obecných prostorů, ačkoli zde mají tyto symboly konkrétní význam.
(xvi) Strana 30, poslední řádek: Nikoli posloupnost, ale zobecněná posloupnost neboli net. Důkaz lze ovšem provést i bez použití netů.
(xvii) Strana 34, řádek 3: Spíše (iiiα) než (iii).
(xviii) Strana 34, řádky 4-5: Mlčky se používá Zornovo lemma.
(xix) Strana 34, řádek 13: Nikoli S/F, ale $S \setminus F$, případně $S - F$, jak autor někdy píše.

(xx) Strana 35, řádek 11: Není zdůrazněno, že jde o otevřené pokrytí.

(xxi) Strana 39, řádky 9-8 zdola: Andělské lemma je zbytečně silný nástroj pro důkaz toho, že prosté spojité zobrazení na kompaktním prostoru je homeomorfismus.

(xxii) Strana 40 dole: Dvakrát se používá $\overline{X}$ místo X.

(xxiii) Strana 43, důkaz Lemmatu 5.10 a Lemmatu 5.11: Stačí Věta 5.3.

(xxiv) Strana 43, poslední řádek: Na konci nemá být Z, ale $\mathbb{R}$.

(xxv) Strana 44, řádek 1: Rovnost $\{f\} = ...$ zde býti nemá. Místo f má být 0 a na pravé straně chybí průnik s $T(A)$.

(xxvi) Strana 46, řádek 8 zdola: Ne limitou, ale hromadným bodem.

(xxvii) Strana 48, důkaz Lemmatu 6.5: Využívá se výše zmíněné faktorizační lemma, aniž je to explicitně zmíněno.

(xxviii) Strana 51, důkaz Lemmatu 6.11: Je tam odkaz na Lemma 6.10, přitom se používá Lemma 6.9.

(xxix) Strana 52, řádek 4: Nejen homeomorfní, ale kanonicky homeomorfní.

(xxx) Strana 52, důkaz Věty 6.13: Nejprve je třeba použít Lemma 6.10, pak provést konstrukci a na závěr použít Lemma 6.12.

(xxxi) Strana 54, řádek 1: Sjednocení má být do ∞.

(xxxii) Strana 54, řádek 6 zdola: Používá se nikoli Lemma 6.8, ale jeho důkaz.

(xxxiii) Strana 55, poslední řádek: Místo M_1 a M_2 mají být množiny indexů bodů z těchto množin.

(xxxiv) Strana 56, řádek 2: Tietzeho věta není třeba, funkce π_θ je již definována na celém součinu.

(xxxv) Strana 56, řádek 5-6: Podmínka je splněna pro nějakou kompaktifikaci. Z toho plyne, že je splněna i pro β-obal. Ale chtělo by to zmínit a vysvětlit.

Závěr: Téma práce je netriviální, místy i obtížné. Při dobrém zpracování by výsledkem mohla být velmi dobrá diplomová práce. Práce však obsahuje nemalé množství chyb, a to i závažných. Proto se domnívám, že se pohybuje na hranici přijatelnosti. Nicméně, pokud student při obhajobě nejzávažnější nedostatky vysvětlí a prokáže, že se v problematice orientuje a rozumí ji, doporučil bych práci uznat jako diplomovou. Zejména by měl adekvátně reagovat na výše uvedené připomínky 1-5, 8, 9 a 11.

V Praze dne 24. srpna 2010

Doc. RNDr. Ondřej Kalenda, Ph.D.
KMA MFF UK