

Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE



Martin Slavata

Prostory spojitých funkcí v topologii bodové konvergence

Katedra matematické analýzy

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Jiří Spurný, Ph.D.

Studijní program: Matematika, Matematická analýza

Na tomto místě bych rád poděkoval vedoucímu práce, doc. RNDr. Jiřímu Spurnému, Ph.D., za veškerou poskytnutou pomoc, za množství cenných připomínek a rad.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 2. 8. 2010

Martin Slavata

Obsah

Úvod	4
Kapitola 0: Obecné vlastnosti $C_p(X, Y)$	6
Kapitola 1: Formy kompaktnosti	9
Kapitola 2: Andělskost	14
Kapitola 3: Charakteristika kompaktních podmnožin $C_p(X)$	18
Kapitola 4: Příklad andělských prostorů, jejichž součin není andělský	32
Kapitola 5: Striktní andělskost	38
Kapitola 6: Kompaktnost $C_p(X)$	45
Závěr	57
Literatura	58

Název práce: Prostory spojitých funkcí v topologii bodové konvergence

Autor: Martin Slavata

Katedra: Katedra matematické analýzy

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Jiří Spurný, Ph.D.

e-mail vedoucího: Jiri.Spurny@mff.cuni.cz

Abstrakt: Tato práce pojednává o vlastnostech prostorů spojitých funkcí s topologií bodové konvergence. Zaměřuje se zejména na charakteristiku kompaktních podmnožin těchto prostorů a na kompaktnost prostorů samotných. Popisuje vlastnosti Fremlinem zavedené třídy andělských prostorů a ukazuje, kdy do této třídy patří prostory spojitých funkcí s bodovou topologií (výsledek J. Orihuela). Tím a dalšími výsledky přináší zobecnění Grothendieckovy věty. Práce ukazuje i omezení třídy andělských prostorů – totiž fakt, že tato třída není uzavřena na topologický součin. Na to navazuje další téma práce, tím je třída striktně andělských prostorů (pojem zavedl W. Govaerts) a její průnik s třídou prostorů spojitých funkcí. V závěru se práce zabývá kompaktností celého prostoru spojitých funkcí, ukazuje, kdy tento prostor vyhovuje definicím jednotlivých forem kompaktnosti.

Klíčová slova: prostory spojitých funkcí; bodová konvergence; kompaktnost; andělskost

Title: Spaces of continuous functions with the pointwise topology

Author: Martin Slavata

Department: Department of Mathematical Analysis

Supervisor: doc. RNDr. Jiří Spurný, Ph.D.

Supervisor's e-mail address: Jiri.Spurny@mff.cuni.cz

Abstract: This thesis describes properties of spaces of continuous functions with the topology of pointwise convergence. Emphasis is put on characterizations of compact subsets of such spaces and on compactness of the spaces themselves. The thesis describes properties of the class of angelic spaces (notion by Fremlin) and shows when spaces of continuous functions with pointwise topology belong to this class (result by J. Orihuela). Thus a generalization of a theorem of Grothendieck is obtained. Also a limitation of the class of angelic spaces is shown – it is not closed under topological product. This leads to the next topic of the thesis, the class of strictly angelic spaces (introduced by W. Govaerts) and its intersection with the class of spaces of continuous functions with pointwise topology. In the end the thesis shows under which conditions the space of continuous functions satisfies the definition of the respective notions related to compactness.

Keywords: spaces of continuous functions; pointwise convergence; compactness; angelicity

Úvod

Tématem této práce jsou vlastnosti prostorů spojitých funkcí s topologií bodové konvergence. Tyto prostory jsou zajímavé z mnoha důvodů. Je možné se zabývat samotným přechodem od prostoru X k prostoru $C_p(X)$, pro diskrétní X je tato operace umocňováním, a dále je zajímavé sledovat vztahy mezi vlastnostmi X a $C_p(X)$. V tomto směru stojí za zmínku výsledek Nagaty: Tichonovovy prostory X a Y jsou homeomorfní právě tehdy, když $C_p(X)$ a $C_p(Y)$ jsou topologicky izomorfní.

Prostory spojitých funkcí s topologií bodové konvergence hrají významnou roli také z následujícího důvodu. Jedním z pilířů funkcionální analýzy je koncept Banachova prostoru se slabou topologií. Banachovy prostory představují užitečný nástroj pro studium nemetrizovatelných topologických prostorů. Velkou předností slabé topologie je také to, že čím slabší je topologie na prostoru, tím větší počet kompaktních podmnožin v prostoru najdeme. A právě pro kompaktní prostory a množiny platí některé významné výsledky z topologie. Kompaktní podprostory Banachových prostorů ve slabé topologii se nazývají Eberleinova kompakta a jsou dalším důležitým objektem ve funkcionální analýze, především pro své topologické vlastnosti. Každý Banachův prostor B vybavený slabou topologií je lineárně homeomorfní uzavřenému podprostoru $C_p(X)$ pro nějaký kompaktní Hausdorffův prostor X . Za X stačí vzít jednotkovou kouli v duálním prostoru B^* a uvažovat ji s topologií bodové konvergence na B . Potom zobrazení přiřazující $x \rightarrow (f \rightarrow f(x))$ lineárně vnoří B jako uzavřený podprostor do $C_p(X)$ a toto vnoření je homeomorfismus. Ke studiu topologických vlastností Banachových prostorů se slabou topologií se dá tedy přistupovat pomocí zkoumání prostorů spojitých funkcí.

V této práci se budeme zabývat vlastnostmi prostorů spojitých funkcí $C_p(X, Y)$ z prostoru X do Y . Zvláštní důraz bude kladen na případ $Y = \mathbb{R}$. Budeme studovat zejména vlastnosti související s kompaktností. V úvodní, nulté kapitole uvedeme nejzákladnější vlastnosti prostorů spojitých funkcí s topologií bodové konvergence. Kapitola 1 této práce shrne základní pojmy týkající se kompaktnosti prostorů a jejich podmnožin a ukáže, jak spolu jednotlivé pojmy souvisí. V druhé kapitole popíšeme vlastnosti třídy andělských prostorů, které jsou zajímavé tím, že v nich některé formy kompaktnosti splývají. Tato vlastnost usnadňuje studium kompaktních podmnožin andělských prostorů. Ve třetí kapitole uvedeme několik zobecnění Grothendieckovy věty, mj. uvedeme důležitý výsledek Orihuelly, který dává postačující podmínky pro to, aby byl prostor $C_p(X)$ andělský. Ve čtvrté kapitole

zodpovíme otázku, která poměrně dlouho po zavedení pojmu andělského prostoru Fremlinem nebyla jasná, totiž zda je součin andělských prostorů andělský. V kapitole 5 se budeme zabývat vlastnostmi třídy striktně andělských prostorů, to je podtřída prostorů andělských, která je navíc uzavřená na spočetné součiny. Ukážeme také, za jakých okolností jsou prostory spojitých funkcí s topologií bodové konvergence striktně andělské. V kapitole šesté přejdeme ke kompaktnosti celého prostoru $C_p(X)$ a ukážeme, za jakých podmínek vyhovuje $C_p(X)$ definicím jednotlivých forem kompaktnosti.

Kapitola 0: Obecné vlastnosti $C_p(X, Y)$

Symbolem $C_p(X, Y)$ značíme prostor všech spojitých funkcí z X do Y vybavený topologií bodové konvergence. Bude-li $Y = \mathbb{R}$, budeme užívat i jednoduššího označení $C_p(X)$. Nebude-li uvedeno jinak, budeme předpokládat, že všechny topologické prostory jsou Tichonovovy, tzn. úplně regulární Hausdorffovy.

Lemma 0.1

Nechť X a Y jsou topologické prostory. Nechť ε je systém podmnožin prostoru X takový, že $\emptyset \in \varepsilon$. Potom systém $P_\varepsilon = \{\langle A, U \rangle, A \in \varepsilon, U \text{ je otevřená v } Y\}$ je subbází nějaké topologie na $C(X, Y)$ – prostoru spojitých funkcí z X do Y , kde $\langle A, B \rangle = \{f \in C(X, Y), f(A) \subset B\}$.

Jde o topologii stejnoměrné konvergence na prvcích systému ε . Vezmeme-li za ε všechny konečné podmnožiny X , dostáváme topologii bodové konvergence.

Poznámka: Další významné topologie tohoto typu jsou topologie stejnoměrné konvergence – systém ε pak tvoří všechny podmnožiny prostoru X (nebo jen $\emptyset$ a X) – nebo topologie stejnoměrné konvergence na kompaktech (v ang. *compact-open topology*), v tom případě patří do ε všechny kompaktní podmnožiny X .

Lemma 0.2

Položme $W(x_1, \dots, x_k, U_1, \dots, U_k) = \{f \in C(X, Y) : f(x_i) \in U_i, i = 1, \dots, k\}$, kde $x_1, \dots, x_k \in X$, $U_1, \dots, U_k$ jsou otevřené množiny v Y . Nechť B je báze Y . Pak systém $\{W(x_1, \dots, x_k, U_1, \dots, U_k) : x_i \in X, U_i \in B, i = 1, \dots, k\}$ je bází prostoru $C_p(X, Y)$.

Lemma 0.3

Pro $k \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_k \in X$, $f \in C(X)$ a $\varepsilon > 0$ položme

$$W(f, x_1, \dots, x_k, \varepsilon) = \{g \in C(X) : |g(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon, i = 1, \dots, k\}.$$

Systém množin tohoto tvaru je bází $C_p(X)$.

Lemma 0.4

Prostor $C_p(X)$ je lokálně konvexní topologický prostor nad $\mathbb{R}$.

Lemma 0.5

Prostor $C_p(X)$ je hustým podprostorem $\mathbb{R}^X$.

Důkaz: Topologie bodové konvergence je shodná se součinnovou topologií, tedy $C_p(X)$ je podprostorem $\mathbb{R}^X$. Obecněji každý $C_p(X, Y)$ je podprostorem Y^X . Dokažme, že v případě $C_p(X)$ jde o hustý podprostor. Nechť $f \in \mathbb{R}^X$. Pro každou konečnou množinu bodů $x_1, \dots, x_k \in X$ díky úplné regularitě X existuje funkce $g \in C_p(X)$ taková, že $f(x_i) = g(x_i), i = 1, \dots, k$. Tedy $f \in \overline{C_p(X)}$.

Nechť Y je podprostor X . Označme $\pi_Y : C_p(X) \rightarrow C_p(Y)$ zobrazení, které restringuje funkci z $C_p(X)$ na Y , $\pi_Y(f) = f|_Y$. Podprostor $\pi_Y(C_p(X)) \subset C_p(Y)$ budeme značit $C_p(Y|X)$.

Lemma 0.6

Pro každý podprostor $Y \subset X$ platí následující tvrzení:

- (i) π_Y je spojitý a $\overline{\pi_Y(C_p(X))} = C_p(Y)$,
- (ii) je-li Y uzavřený v X , pak π_Y je otevřené zobrazení $C_p(X)$ na $C_p(Y|X)$,
- (iii) je-li X normální a Y uzavřený v X , pak $C_p(Y|X) = C_p(Y)$,
- (iv) je-li Y kompaktní, pak $C_p(Y|X) = C_p(Y)$,
- (v) je-li Y hustý v X , pak π_Y je prosté.

Důkaz:

- (i) Spojitost π_Y je zřejmá, dokážeme hustotu $\pi_Y(C_p(X))$ v $C_p(Y)$. Zvolme $g \in C_p(Y)$, $\varepsilon > 0$, $y_1, \dots, y_k \in Y$. Protože Y je úplně regulární, existuje funkce $f \in C_p(X)$ taková, že $f(y_i) = g(y_i), i = 1, \dots, k$. Pak ale $\pi_Y(f) \in W(g, y_1, \dots, y_k, \varepsilon)$.
- (ii) Uvažujme libovolnou $W(f, x_1, \dots, x_k, \varepsilon) \subset C_p(X)$. Předpokládejme, že $x_1, \dots, x_l \in Y$ a $x_{l+1}, \dots, x_k \in X \setminus Y$. Zřejmě je $\pi_Y(W(f, x_1, \dots, x_k, \varepsilon)) \subset W(\pi_Y(f), x_1, \dots, x_l, \varepsilon) \cap \pi_Y(C_p(X))$.

Dokážeme, že platí rovnost. To by znamenalo, že $W(\pi_Y(f), x_1, \dots, x_l, \varepsilon)$ je otevřená v $\pi_Y(C_p(X))$, a zobrazení $\pi_Y : C_p(X) \rightarrow \pi_Y(C_p(X))$ by tedy bylo otevřené. Zvolme tedy $g \in \pi_Y(C_p(X))$ tak, že $|g(x_i) - \pi_Y(f)(x_i)| < \varepsilon, i = 1, \dots, l$. Zvolme pevně $g_1 \in C_p(X)$ tak, že $\pi_Y(g_1) = g$. Protože X je úplně regulární, Y uzavřený v X a $x_{l+1}, \dots, x_k \in X \setminus Y$, existuje funkce $\phi \in C_p(X)$ taková, že $\phi(Y) = \{0\}$ a $\phi(x_j) = f(x_j) - g_1(x_j), j = l + 1, \dots, k$. Položme $h = \phi + g_1$. Potom $h \in W(f, x_1, \dots, x_k, \varepsilon)$ a $\pi_Y(h) = g$.

- (iii) Protože X je normální a Y uzavřený, každou spojitou funkci na Y lze podle Tietzeho věty spojitě rozšířit na X .
- (iv) Každý Tichonovův prostor lze homeomorfně vnořit do součinu jednotkových intervalů $J = [0, 1]^I$ pro nějaké I . Prostor J je normální a Y je kompaktní, a tedy uzavřený v J . Nyní stačí aplikovat bod (iii).
- (v) Necht' $f_1, f_2 \in C_p(X)$, $f_1 \neq f_2$. Pak z hustoty Y plyne, že $f_1|_Y \neq f_2|_Y$. Tedy π_Y je prosté zobrazení.

Kapitola 1: Formy kompaktnosti

Pojem kompaktnosti a kompaktní množiny má mnoho aplikací v různých oborech. Existuje mnoho zobecnění pojmu kompaktnosti. Uvedme v úvodu definice nejdůležitějších forem kompaktnosti a příbuzných pojmů. V definicích uvedených v této kapitole uvažujeme podmnožinu M topologického (Tichonovova) prostoru X .

Definice 1.1

Množina M je kompaktní, jestliže každé její pokrytí otevřenými množinami obsahuje konečné podpokrytí.

Definice 1.2

Množina M je sekvenciálně kompaktní, jestliže každá posloupnost v M má konvergentní podposloupnost, jejíž limita leží v M .

Definice 1.3

Množina M je spočetně kompaktní, jestliže každá posloupnost v M má hromadný bod v M .

Poznámka: Alternativně se používá ekvivalentní definice vyžadující, aby každé spočetné otevřené pokrytí mělo konečné podpokrytí. Obě verze definice ukazují určitou souvislost s kompaktností a sekvenciální kompaktností. Přesněji: kompaktnost i sekvenciální kompaktnost implikují spočetnou kompaktnost.

Definice 1.4

Množina M je relativně kompaktní, jestliže její uzávěr je kompaktní.

Poznámka: V kompaktním prostoru X jsou všechny uzavřené množiny kompaktní, a tedy všechny množiny jsou relativně kompaktní.

Definice 1.5

Množina M je relativně sekvenciálně kompaktní, jestliže každá posloupnost v M má konvergentní podposloupnost, jejíž limita leží v X .

Definice 1.6

Množina M je relativně spočetně kompaktní, jestliže každá posloupnost v M má hromadný bod v X .

Poznámka: Obecně neplatí, že M je relativně spočetně kompaktní právě tehdy, když je její uzávěr spočetně kompaktní. Protipříkladem může být reálná osa s následující topologií: množina U je otevřená, právě tehdy když $U = \emptyset$ nebo $0 \in U$. Pak množina $M = \{0\}$ je zřejmě relativně spočetně kompaktní, ale její uzávěr, to je celý prostor není, jelikož např. posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n = n$, nemá hromadný bod.

Lemma 1.7

Pro podmnožinu M topologického prostoru X platí následující podmínky:

- (i) M je kompaktní $\Rightarrow M$ je relativně kompaktní,
- (ii) M je spočetně kompaktní $\Rightarrow M$ je relativně spočetně kompaktní,
- (iii) M je sekvenciálně kompaktní $\Rightarrow M$ je relativně sekvenciálně kompaktní,
- (iv) M je kompaktní $\Rightarrow M$ je spočetně kompaktní,
- (v) M je sekvenciálně kompaktní $\Rightarrow M$ je spočetně kompaktní,
- (vi) M je relativně kompaktní $\Rightarrow M$ je relativně spočetně kompaktní,
- (vii) M je relativně sekvenciálně kompaktní $\Rightarrow M$ je relativně spočetně kompaktní.

Důkaz: Všechny implikace plynou snadno z definic.

Obecně žádné další implikace neplatí. Existují prostory, ve kterých ale jednotlivé formy kompaktnosti splývají. Typickým příkladem jsou metrické prostory. Detailněji prostory s touto vlastností popíšeme v kapitole 2. Nyní uvedeme příklady prostorů, které ukážou, že jednotlivé formy kompaktnosti obecně nesplývají.

Příklad 1.8

Existuje kompaktní prostor, který není sekvenciálně kompaktní.

Důkaz: Necht' $I = [0,1]$. Uvažujme prostor I^I funkcí z I do I . Ten je kompaktní podle Tichonovovy věty (jedná se totiž o součin kompaktních prostorů I). Uvažujme pro každé přirozené n funkce $a_n : I \rightarrow I$ definované takto:

$a_n(x) = n$ – tá číslice v binárním rozvoji $x, x \in I$. Ukážeme, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ nemá žádnou konvergentní podposloupnost. Necht' $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ je podposloupnost posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Existuje bod $y \in I$ takový, že n_k -tá číslice binárního rozvoje je 0 pro k liché a 1 pro k sudé. Posloupnost $(a_{n_k}(y))_{k=1}^{\infty}$ tedy nekonverguje. Tedy prostor I' není sekvenciálně kompaktní.

Příklad 1.9

Existuje sekvenciálně kompaktní prostor, který není kompaktní.

Důkaz: Prostor $[0, \omega_1)$ je sekvenciálně kompaktní v topologii dané uspořádáním, ale není kompaktní. Argumentace viz [19], str. 68–70.

Pro ilustraci toho, že existuje spočetně kompaktní prostor, který není ani kompaktní ani sekvenciálně kompaktní (příklad 1.11), budeme potřebovat následující lemma.

Lemma 1.10

Součin spočetně kompaktního a kompaktního prostoru je spočetně kompaktní.

Důkaz: Necht' X je kompaktní a Y spočetně kompaktní. Uvažujme spočetné pokrytí $U = \{U_i \times V_i : i \in \mathbb{N}\}$ prostoru $X \times Y$, kde U_i jsou otevřené v X a V_i jsou otevřené v Y . Pokrytí jiného tvaru uvažovat nemusíme, protože předpokládáme, že $X \times Y$ má součinovou topologii. Zvolme na chvíli pevně $x \in X$. Potom prostor $\{x\} \times Y$ je spočetně kompaktní a proto existuje konečná množina $M_x \subset \mathbb{N}$ taková, že $\{U_i \times V_i : i \in M_x\}$ je pokrytí $\{x\} \times Y$. Prvky tohoto pokrytí jsou otevřenými okolními bodu x a tedy $U(x) := \cap \{U_i : i \in M_x\}$ je také otevřené okolí x . Pokud bychom tento postup zopakovali pro všechna $x \in X$, dostali bychom otevřené pokrytí $\{U(x) : x \in X\}$ prostoru X . Jelikož je X kompaktní, existují body $x_1, \dots, x_k \in X$ tak, že $\{U(x_m) : m = 1, \dots, k\}$ je pokrytí X . Položme $U' = \{U_i \times V_i : i \in M_{x_j} ; j = 1, \dots, k\}$. To je konečná podmnožina U . Ukážeme, že jde o pokrytí. Volme bod $(p, q) \in X \times Y$. Ten je jistě prvkem množiny $U(x_m)$ pro nějaké $m \in \{1, \dots, k\}$. Tedy $p \in \cap U_j, j \in M_{x_m}$. Na druhé straně $q \in V_l$ pro nějaké $l \in M_{x_m}$. Je tedy $(p, q) \in U_l \times V_l$, a protože $l \in M_{x_m}$, dostáváme $U_l \times V_l \in U'$ a U' je tedy pokrytím $X \times Y$.

Příklad 1.11

Existuje spočetně kompaktní prostor, který není ani kompaktní, ani sekvenciálně kompaktní.

Důkaz: Uvažujme prostor $[0, \omega_1) \times I^I$, kde $[0, \omega_1)$ je prostor všech spočetných ordinálů.

Prostor $[0, \omega_1)$ je spočetně kompaktní a I^I kompaktní. Součin spočetně kompaktního a kompaktního prostoru je spočetně kompaktní dle lemmatu 1.10.

Prostor $[0, \omega_1) \times I^I$ je tedy spočetně kompaktní, ale není kompaktní ani sekvenciálně kompaktní, protože tyto vlastnosti se zachovávají při projekcích.

Nyní uvedeme definice dalších s kompaktností souvisejících pojmů.

Definice 1.12

Množina M je σ -kompaktní, jestliže je sjednocením spočetně mnoha kompaktních podmnožin.

Definice 1.13

Množina M má Lindelöfovou vlastnost, jestliže z každého jejího otevřeného pokrytí lze vybrat spočetné podpokrytí.

Definice 1.14

Množina M je pseudokompaktní, jestliže každá spojitá reálná funkce na M je omezená.

Poznámka: V metrických prostorech pseudokompaktnost splývá se spočetnou kompaktností a tedy i kompaktností a sekvenciální kompaktností.

Definice 1.15

Množina M je parakompaktní, jestliže každé její otevřené pokrytí má lokálně konečné otevřené zjemnění.

Poznámka: Zjemnění pokrytí je takové pokrytí, že každý jeho prvek je podmnožinou nějakého prvku původního pokrytí. Lokálně konečný systém podmnožin je takový, že každý bod množiny M má okolí, které protíná nejvýše konečně mnoho prvků systému.

Lemma 1.16

Pro podmnožinu M topologického prostoru X platí následující podmínky:

- (i) M je kompaktní $\Rightarrow M$ je σ -kompaktní $\Rightarrow M$ je Lindelöfova,
- (ii) M je kompaktní $\Leftrightarrow M$ je spočetně kompaktní a Lindelöfova,
- (iii) M je spočetně kompaktní $\Rightarrow M$ je pseudokompaktní.

Důkaz: Dokážeme jen třetí implikaci, ostatní jsou jasné z definic. Necht' f je spojitá reálná funkce na M . Protože množiny $S_n = \{x \in X : |f(x)| < n\}, n \in \mathbb{N}$ tvoří spočetné otevřené pokrytí množiny M , lze z něj vybrat konečné podpokrytí. Proto existuje i horní a dolní mez obrazu $f(M)$.

Kapitola 2: Andělskost

V předešlé kapitole uvedené pojmy kompaktnosti, sekvenciální kompaktnosti a spočetné kompaktnosti obecně nesplývají, nicméně existuje jistá třída prostorů, kde tomu tak je. Ve funkcionální analýze je velmi často potřeba ověřovat kompaktnost nějaké množiny, najít ale konečné podpokrytí ke každému otevřenému pokrytí nebývá snadné. Když ale můžeme počítat s ekvivalencí kompaktnosti a sekvenciální nebo spočetné kompaktnosti, můžeme při ověřování kompaktnosti pracovat s posloupnostmi a hledat jejich hromadné body nebo konvergentní podposloupnosti. Typickým příkladem takových prostorů jsou metrické prostory.

Definice 2.1

Řekneme, že Hausdorffův prostor X je andělský, jestliže pro každou jeho relativně spočetně kompaktní podmnožinu $A \subset X$ platí podmínky:

- (i) A je relativně kompaktní,
- (ii) každý bod uzávěru A je limitou nějaké posloupnosti obsažené v A .

Poznámka: Pojem andělského prostoru zavedl Fremlin, jeho vlastnosti je možné najít např. v práci [8].

Věta 2.2

a) Pro podmnožinu A andělského prostoru X je ekvivalentní:

- (i) A je kompaktní,
- (ii) A je spočetně kompaktní,
- (iii) A je sekvenciálně kompaktní.

b) Dále je ekvivalentní:

- (i) A je relativně kompaktní,
- (ii) A je relativně spočetně kompaktní,
- (iii) A je relativně sekvenciálně kompaktní.

Důkaz: Dle definice platí implikace (ii) $\Rightarrow$ (i) v bodě b), opačná implikace, stejně jako (iii) $\Rightarrow$ (ii), je zřejmá.

Dokažme implikaci (ii) $\Rightarrow$ (iii). Buď $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ posloupnost v A . Pak její hodnoty náleží do spočetné množiny $C \subset A$. Je-li C konečná, má $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ zřejmě konvergentní podposloupnost. Pokud je C nekonečná, můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $x_m \neq x_n$, kdykoli $m \neq n$. Necht' x je hromadný bod posloupnosti $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Množina C je sama relativně spočetně kompaktní, $x \in \overline{C}$. Dle definice andělského prostoru je bod x limitou nějaké posloupnosti $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ v C . Zvolíme podposloupnost posloupnosti $(y_n)_{n=1}^{\infty}$, která je zároveň podposloupností $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ má tedy konvergentní podposloupnost a platí (iii).

V bodě a) jsou zřejmé implikace (i) $\Rightarrow$ (ii) a (iii) $\Rightarrow$ (ii).

Nyní ukážeme, že za předpokladu, že platí (ii), je množina A uzavřená. Předpokládejme, že platí (ii) a mějme $x \in \overline{A}$. Podle druhé podmínky v definici andělskosti existuje posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ v A , jejíž je x limitou. Posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ má hromadný bod v A , tím je bod x , a tedy $x \in A$. Proto je množina A uzavřená.

Nyní dokážeme implikaci (ii) $\Rightarrow$ (i). Předpokládejme, že A je spočetně kompaktní, pak je i relativně spočetně kompaktní, a tedy relativně kompaktní podle definice andělskosti. Protože je množina A navíc uzavřená, je kompaktní.

Pro důkaz poslední implikace, (ii) $\Rightarrow$ (iii), si stačí uvědomit, že A je relativně sekvenciálně kompaktní podle bodu b) a uzavřená. Tedy limita každé posloupnosti bodů A musí ležet v A , a množina A je tedy sekvenciálně kompaktní.

Lemma 2.3 (andělské lemma)

Necht' X a Y jsou Hausdorffovy topologické prostory, X regulární a $\phi: X \rightarrow Y$ spojitě a prostě zobrazení. Je-li $A \subset X$ relativně spočetně kompaktní a pro každou podmnožinu $B \subset \phi(A)$ je sekvenciální uzávěr B uzavřený, tzn.

$$\overline{B} = \left\{ y \in Y : \text{existuje posloupnost } (y_n)_{n=1}^{\infty} \text{ v } B \text{ tak, že } \lim y_n = y \right\},$$

pak $\phi(\overline{A})$ je uzavřená v Y a restrikce ϕ na $\overline{A}$ je homeomorfismus.

Důkaz: Protože sekvenciální uzávěr množiny je částí jejího uzávěru a protože $\overline{A}$ je uzavřeným podprostorem X a $\phi(\overline{A})$ je uzavřeným podprostorem Y , můžeme předpokládat, že $X = \overline{A}$ a $Y = \overline{\phi(A)}$. Důkaz rozdělíme do několika kroků.

- (a) Uvědomme si, že posloupnost v topologickém prostoru konverguje k bodu x právě tehdy, když x je hromadným bodem každé její podposloupnosti. Necht' $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost obsažená v A , $y \in \overline{\phi(A)}$ a $\phi(x_n) \rightarrow y$. Vezměme libovolnou podposloupnost $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ posloupnosti $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Množina A je relativně spočetně kompaktní, a existuje tedy hromadný bod x posloupnosti (x_{n_k}) a $\phi(x)$ je zároveň hromadným bodem posloupnosti $\phi(x_{n_k})$. Ale $\phi(x_n) \rightarrow y$, musí tedy být $\phi(x) = y$. Je tedy $y \in \phi(\overline{A})$ a $x_n \rightarrow \phi^{-1}(y)$.
- (b) Pro libovolnou podmnožinu $D \subset A$ platí:

$$\phi(\overline{D}) \subset \overline{\phi(D)} = \{ \phi(x) : \exists (x_n)_{n=1}^{\infty} \text{ v } D, \phi(x_n) \rightarrow \phi(x) \} \subset \phi(\overline{D}).$$
 Poslední inkluze plyne z kroku (a). Dostáváme tedy rovnost $\phi(\overline{D}) = \overline{\phi(D)}$ a speciálně fakt, že $\phi(\overline{A})$ je uzavřená množina.
- (c) Uvažujme libovolnou uzavřenou podmnožinu $C \subset \overline{A}$. Postačí ukázat, že $\phi(C)$ je uzavřená. Prostor X je regulární, tedy $C = \bigcap \{ \overline{U} : C \subset U, U \text{ otevřená} \}$. Protože A je hustá v $\overline{A} = X$, platí pro otevřenou množinu U rovnost $\overline{U \cap A} = \overline{U}$. Podle kroku (b) je množina

$$\phi(C) = \bigcap \{ \phi(\overline{U}) : C \subset U, U \text{ otevřená} \} = \bigcap \{ \overline{\phi(U \cap A)} : C \subset U, U \text{ otevřená} \} = \bigcap \{ \overline{\phi(U \cap A)} : C \subset U, U \text{ otevřená} \}$$
 uzavřená.

Důsledek 2.4

Necht' f je spojitě prosté zobrazení z regulárního prostoru Y do andělského prostoru X . Pak Y je andělský.

Důkaz: Podle andělského lemmatu je restrikce f na libovolnou relativně spočetně kompaktní množinu $A \subset Y$ homeomorfismus. Množina $f(A) \subset X$ je relativně spočetně kompaktní díky spojitosti f a relativně kompaktní díky andělskosti X . Ale množina A je homeomorfní relativně kompaktní množině $f(A)$, je tedy také relativně kompaktní. Protože f je homeomorfismus, dostáváme rovnost $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$. Z té snadno plyne, že A splňuje i druhou podmínku z definice andělskosti.

Důsledek 2.5

Každý podprostor andělského prostoru je andělský.

Důkaz: Stačí vzít za spojité prosté zobrazení f z důsledku 2.4 identické zobrazení.

Důsledek 2.6

Je-li Y andělský, pak je andělský v každé jemnější regulární topologii.

Důkaz: Identické zobrazení z topologického prostoru (Y, τ) do prostoru (Y, σ) , kde τ je jemnější topologie než σ , je spojité a prosté.

Nabízí se otázka, jestli se andělskost zachovává i topologickým součinem, tedy zda je součin dvou (nebo více) andělských prostorů andělský. Zápornou odpověď podali autoři Boehme a Rosenfeld v [3].

Nyní uvedeme příklady některých andělských prostorů. Již jsme zmínili, že metrické prostory jsou andělské.

V. L. Šmuljan ukázal, že lokálně konvexní prostor se separabilním duálem je andělský ve slabé topologii, speciálně že separabilní normované prostory jsou andělské. Eberlein [4] dokázal totéž pro Banachovy prostory se slabou topologií. Později se Grothendieck [11], Kaplansky, Pryce [17] a De Wilde zabývali tím, kdy jsou andělské prostory spojitých funkcí s bodovou topologií. V následující kapitole uvedeme obecnější Orihuelův [16] výsledek, který zahrnuje i jejich výsledky.

Kapitola 3: Charakteristika kompaktních podmnožin $C_p(X)$

V kapitole 3 budeme hledat podmínky pro kompaktnost podmnožin prostorů spojitých funkcí, uvedeme několik zobecnění Grothendieckovy věty. Významná je v tomto směru práce Orihueley [16], který zavedl pojem web-kompaktního prostoru (definice 3.3) a dospěl k zajímavým výsledkům zobecňujícím mj. právě Grothendieckovu větu (zejména věta 3.9). V závěru kapitoly pak uvádíme výsledek Asanova a Velička [2] a Archangelského, důkazy čerpáme z Archangelského práce [1].

Definujeme pojem zaměnitelnosti dvojné limity, poprvé použitý A. Grothendieckem. Ukážeme, že tento pojem je užitečný pro charakterizaci relativně kompaktních množin.

Definice 3.1

Nechť Z je (Hausdorffův) topologický prostor, X libovolná množina a $A \subset Z^X$ množina funkcí z X do Z . Řekneme, že posloupnost $(x_n)_{n=1}^\infty$ v X a posloupnost $(f_m)_{m=1}^\infty$ v A mají zaměnitelné dvojné limity, jestliže platí $\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_m(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x_n)$, kdykoli všechny limity existují.

Řekneme, že A a X mají (v Z) zaměnitelné dvojné limity (píšeme $A \sim X$), jestliže každá posloupnost $(x_n)_{n=1}^\infty$ v X a každá posloupnost $(f_m)_{m=1}^\infty$ v A má zaměnitelné dvojné limity.

Nechť Σ je neprázdná podmnožina $\mathbb{N}^\mathbb{N}$, prostoru posloupností přirozených čísel, pak označme $S = \{(a_1, \dots, a_n) : \exists \alpha = (a_m)_{m=1}^\infty \in \Sigma, n \in \mathbb{N}\}$. Množina S je podmnožina množiny konečných posloupností přirozených čísel. Předpokládejme, že systém $\{A_\alpha : \alpha \in \Sigma\}$ neprázdných podmnožin X pokrývá X .

Pro $\alpha = (a_m)_{m=1}^\infty \in \Sigma$ a $n \in \mathbb{N}$ položme $C_{a_1, \dots, a_n} = \cup \{A_\beta : \beta = (b_m)_{m=1}^\infty \in \Sigma, b_j = a_j, j = 1, \dots, n\}$.

Systém množin $\{C_{a_1, \dots, a_n} : (a_1, \dots, a_n) \in S\}$ je spočetný.

Věta 3.2

Nechť (Z, d) je kompaktní metrický prostor a A množina funkcí z neprázdné množiny X do Z . Předpokládejme, že všechny posloupnosti v A a všechny posloupnosti v množinách $C_{a_1, \dots, a_n}, \alpha = (a_m)_{m=1}^\infty \in \Sigma, n \in \mathbb{N}$ mají zaměnitelné dvojné limity.

Pak pro každou $f \in \overline{A}$ (uzávěr v Z^X) existuje posloupnost $(f_m)_{m=1}^\infty$ v A konvergující bodově k f na X .

Důkaz: Důkaz rozdělíme do několika kroků.

- (i) Nechť jsou dány funkce $g_1, \dots, g_n \in Z^X$, $\varepsilon > 0$ a podmnožina $C \subset X$. Ukážeme, že existuje konečná množina $L \subset C$ taková, že $\min_{y \in L} \max_{k \leq n} \{d(g_k(x), g_k(y))\} \leq \varepsilon$ pro všechna $x \in C$. Uvažujme zobrazení $G: C \rightarrow Z^n$ definované předpisem $G(x) = (g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x))$. Uvažujme pokrytí prostoru $\overline{G(C)} \subset Z^n$ koulemi se středem v $G(x)$, pro $x \in C$, a poloměrem ε . Z tohoto pokrytí lze díky kompaktnosti Z^n ($\overline{G(C)}$ je také kompaktní) vybrat konečné podpokrytí a tedy konečnou množinu $L \subset C$ takovou, že pro všechna $x \in C$ platí, že $d(G(x) - G(y)) \leq \varepsilon$ pro nějaké $y \in L$. To je ovšem ekvivalentní podmínce $\min_{y \in L} \max_{k \leq n} \{d(g_k(x), g_k(y))\} \leq \varepsilon$ pro všechna $x \in C$.
- (ii) Na základě kroku (i) a za předpokladu zaměnitelnosti dvojné limity najdeme posloupnost $(f_m)_{m=1}^\infty$ ležící pro $i \geq 2$ v A , která bodově konverguje k f na X . Budeme konstruovat spočetnou množinu $L \subset X$ a posloupnost funkcí $(f_m)_{m=1}^\infty$ tak, že $\lim_{m \rightarrow \infty} f_m(y) = f(y)$ pro každé $y \in L$. Množinu L budeme konstruovat tak, aby pro každé $x \in X$ existovalo v L dost bodů „blízko x “.

Množina S je spočetná a existuje tedy bijekce $\psi: \mathbb{N} \rightarrow S$. Označme $D_n = C_{\psi(n)}$ a $f_1 = f$. Z kroku (i) plyne, že existuje konečná množina $L_1^1 \subset D_1$ taková, že $\min_{y \in L_1^1} \{d(f_1(x), f_1(y))\} \leq 1$ pro každé $x \in D_1$. Ale $f_1 = f$ leží v uzávěru A , existuje tedy $f_2 \in A$ taková, že $\max_{y \in L_1^1} \{d(f_2(y), f_1(y))\} \leq 1/2$.

- (iii) Předpokládejme nyní, že máme $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ tak, že pro každé $n < m$ existují konečné množiny $L_n^i \subset D_i$, $i \leq n$ a funkce $f_i, i = 1, \dots, m$ takové, že

$$\min_{y \in L_n^i} \max_{k \leq n} \{d(f_k(x), f_k(y))\} \leq 1/n \text{ pro } x \in D_i$$

$$\text{a } \max \{d(f_{n+1}(y), f(y)) : y \in \cup \{L_j^i : i \leq j \leq n\}\} \leq 1/(n+1).$$

Nyní zkonstruujeme $L_m^i, i \leq m$ a f_{m+1} . Podle kroku (i) existuje pro každé $i \leq m$ množina L_m^i taková, že $\min_{y \in L_m^i} \max_{k \leq m} \{d(f_k(x), f_k(y))\} \leq 1/m$ kdykoli $x \in D_i$. Protože $f \in \bar{A}$, existuje $f_{m+1} \in A$ taková, že

$$\max \{d(f_{m+1}(y), f(y)) : y \in \cup \{L_j^i : i \leq j \leq m\}\} \leq 1/(m+1).$$

- (iv) Indukcí jsme zkonstruovali posloupnost $(f_n)_{n=1}^\infty$, pro kterou platí, že $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(y) = f(y)$ pro $y \in \cup \{L_j^i : i \leq j = 1, 2, \dots\}$. Tento vztah nyní zobecníme na všechna $x \in X$. Volme $x \in X$ a $\alpha = (a_m)_{m=1}^\infty \in \Sigma$ tak, že $x \in A_\alpha$. Položme $P = \psi^{-1}(\{(a_1, \dots, a_n) : n = 1, 2, \dots\})$. Množina P je nekonečná podmnožina množiny přirozených čísel. Bod x náleží každému D_p pro $p \in P$. Buď tedy dáno $p \in P$ a přirozené $n \geq p$. Pak existuje $y_{n,p} \in L_n^p$ tak, že $\max_{k \leq n} \{d(f_k(x), f_k(y_{n,p}))\} \leq 1/n$. Položme $y_p = y_{p,p}$ a dostáváme $\max_{k \leq p} \{d(f_k(x), f_k(y_p))\} \leq 1/p$.

Ukážeme, že pro všechna $p \in P$ je $y_p \in L_p^p \subset D_p$ a posloupnost $\{y_p : p \in P\}$ je až na konečně mnoho prvků částí $C_{a_1, \dots, a_n}$. Necht' totiž $m \in \mathbb{N}$ a $p_j = \psi^{-1}((a_1, \dots, a_j))$ pro $j = 1, \dots, m$. Je-li $p \in P$ a $p \neq p_j, j = 1, \dots, m$, pak $y_p \in D_p = C_{a_1, \dots, a_{m_0}}$ pro nějaké $m_0 > m$. Protože $C_{a_1, \dots, a_{m_0}} \subset C_{a_1, \dots, a_m}$, dostáváme požadovanou inkluzi.

- (v) Nyní ukážeme pomocí zaměnitelnosti limit, že $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$. Protože Z je kompaktní, stačí ukázat, že $f(x)$ je jediným hromadným bodem posloupnosti $(f_n(x))_{n=1}^\infty$. Necht' y je hromadným bodem posloupnosti $(f_n(x))_{n=1}^\infty$ a necht' $(n_k)_{k=1}^\infty$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel taková, že $\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x) = y$. Protože P je nekonečná množina, existuje rostoucí posloupnost $(p_j)_{j=1}^\infty$ obsažená v P . Z již dokázané nerovnosti $\max_{k \leq p} \{d(f_k(x), f_k(y_p))\} \leq 1/p$ plyne, že

$$\lim_{j \rightarrow \infty} f_{p_j}(y) = f(x) \text{ pro } k = 1, 2, \dots$$

Platí tedy

$$y = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{j \rightarrow \infty} f_{n_k}(y_{p_j}) = \lim_{j \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(y_{p_j}) = \lim_{j \rightarrow \infty} f(y_{p_j}) = \lim_{j \rightarrow \infty} f_1(y_{p_j}) = f_1(x) = f(x).$$

Tím je důkaz věty 3.2 dokončen.

Nechť X je topologický prostor a Z kompaktní metrický prostor. Nechť A je relativně spočetně kompaktní podmnožina prostoru $C_p(X, Z)$. Pak A je relativně kompaktní právě tehdy, když uzávěr A v Z^X je částí $C(X, Z)$.

Najdeme-li posloupnosti v A konvergující bodově k funkcím v uzávěru A , zaručí nám relativní spočetná kompaktnost A v $C_p(X, Z)$, že tyto limity budou spojitými funkcemi. Existenci takových posloupností nám zaručuje za určitých předpokladů předchozí věta 3.2. V dalším textu se budeme snažit najít takové podmínky na prostor X , které zaručí splnění předpokladů věty 3.2. To vede k definici web-kompaktního prostoru.

Definice 3.3

Řekneme, že topologický prostor X je web-kompaktní, jestliže existují $\Sigma \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ a systém $\{A_\alpha : \alpha \in \Sigma\}$ podmnožin X tak, že při označení

$$C_{a_1, \dots, a_n} = \cup \left\{ A_\beta : \beta = (b_m)_{m=1}^\infty \in \Sigma, b_j = a_j, j = 1, \dots, n \right\} \text{ jsou pro každé } \alpha = (a_m)_{m=1}^\infty \in \Sigma \text{ a } n \in \mathbb{N}$$

splněny podmínky:

- (i) $\overline{\cup \{A_\alpha : \alpha \in \Sigma\}} = X$,
- (ii) kdykoli $\alpha = (a_n)_{n=1}^\infty \in \Sigma$ a $x_n \in C_{a_1, \dots, a_n}$, posloupnost $(x_n)_{n=1}^\infty$ má hromadný bod v X .

Nyní uvedeme několik vlastností web-kompaktních prostorů. V dalším textu bude prostor $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ vybaven obvyklou součinnou topologií, při které je polským prostorem – separabilním úplně metrizovatelným prostorem.

Věta 3.4

Topologický prostor X je web-kompaktní právě tehdy, když je splněna podmínka:

Existuje metrizovatelný separabilní prostor P a zobrazení $T : P \rightarrow \mathcal{P}(X)$ (potence X) tak, že platí:

- (i) $\overline{\cup \{Tx : x \in P\}} = X$,

- (ii) kdykoli posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ konverguje v P , pak $\cup\{Tx_n : n \in \mathbb{N}\}$ je relativně spočetně kompaktní v X .

Důkaz: Necht' X je web-kompaktní. Položme $P = \Sigma$ s topologií indukovanou prostorem $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ a $T\alpha = A_{\alpha}$, $\alpha \in \Sigma$. Potom $\cup\{T\alpha : \alpha \in \Sigma\} = T(\Sigma) = \cup\{A_{\alpha} : \alpha \in \Sigma\}$. Tím je dokázána podmínka (i).

Pro důkaz (ii) předpokládejme, že posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty} = (\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ konverguje v $P = \Sigma$ k nějaké posloupnosti $\alpha = (\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \in \Sigma$. Uvažujme nyní posloupnost $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ prvků $\cup\{Tx_n : n \in \mathbb{N}\} = \cup\{A_{\alpha_n} : n \in \mathbb{N}\}$. Zřejmě tedy pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje $N_k \in \mathbb{N}$ takové, že $y_k \in A_{\alpha_{N_k}}$. Nyní je třeba rozlišit dvě možnosti: buď existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že $N \geq N_k$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$, nebo takové číslo neexistuje. Pokud by neexistovalo, můžeme po vhodném přechíslování vybrat z posloupnosti $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ podposloupnost splňující předpoklad uvedený v podmínce (ii) z definice 3.3. Tím bychom ukázali, že posloupnost $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ má hromadný bod a množina $\cup\{Tx_n : n \in \mathbb{N}\} = \cup\{A_{\alpha_n} : n \in \mathbb{N}\}$ je relativně spočetně kompaktní.

Pokud by však existovalo $N \in \mathbb{N}$ takové, že $N \geq N_k$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$, pak z posloupnosti $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ můžeme vybrat podposloupnost $(z_l)_{l=1}^{\infty}$, která je obsažena v množině A_{α_m} pro nějaké $m \in \mathbb{N}$. Uvědomíme-li si, že $A_{\alpha_m} \subseteq C_{a_{m,1}, \dots, a_{m,i}}$ pro každé $i \in \mathbb{N}$, dostáváme opět podle bodu (ii) z definice 3.3 existenci hromadného bodu posloupnosti $(z_l)_{l=1}^{\infty}$.

Předpokládejme nyní naopak, že platí podmínky (i) a (ii) a dokažme, že X je web-kompaktní. Každý polský prostor je spojitý obraz prostoru $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ([12], Theorem 7.9, str. 38), existuje tedy spojitě zobrazení φ z $\Sigma \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ na P . Položme $A_{\alpha} = T\varphi(\alpha)$. Protože $\overline{\cup\{Tx : x \in P\}} = X$, je i $\overline{\cup\{A_{\alpha} : \alpha \in \Sigma\}} = X$.

Zvolme libovolně $\alpha \in \Sigma$ a $x_n \in C_{a_1, \dots, a_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Zvolme pro každé $n \in \mathbb{N}$ posloupnost α_n shodující se s posloupností α na prvních n místech. Tyto posloupnosti volíme tak, aby $x_n \in A_{\alpha_n}$ pro $n \in \mathbb{N}$. Zřejmě $\alpha_n \rightarrow \alpha$ a tedy $\varphi(\alpha_n) \rightarrow \varphi(\alpha)$. Nyní je podle podmínky (ii) $\cup\{Tx_n : n \in \mathbb{N}\}$ relativně spočetně kompaktní množina, a tedy má posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ hromadný bod.

Příklad 3.5

Nechť X je topologický prostor a $\{A_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^\mathbb{N}\}$ je systém relativně spočetně kompaktních podmnožin X takový, že $\overline{\cup\{A_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}^\mathbb{N}\}} = X$ a pro $\alpha = (a_n)_{n=1}^\infty$ a $\beta = (b_n)_{n=1}^\infty$, $a_n \leq b_n, n = 1, 2, \dots$ (píšeme $\alpha \leq \beta$) platí $A_\alpha \subset A_\beta$. Pak X je web-kompaktní.

Důkaz: Nechť $(\alpha_n)_{n=1}^\infty$ konverguje k $\alpha \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$. Pak existuje $\beta \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ takové, že $\alpha_n \leq \beta$ pro $n = 1, 2, \dots$, tedy $\cup\{A_{\alpha_n} : n = 1, 2, \dots\} \subset A_\beta$. Tím je splněna podmínka (ii) z věty 3.4.

Příklad 3.6

Každý K-spočetně determinovaný prostor je web-kompaktní.

Poznámka: Prostor X je K-spočetně determinovaný, jestliže existuje podmnožina Σ prostoru $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ a zobrazení $T : \Sigma \rightarrow K(X)$, kde $K(X)$ je systém všech kompaktních podmnožin X , tak, že platí:

- (i) $\cup\{Ta : a \in \Sigma\} = X$ a
- (ii) pro každé okolí V množiny Ta existuje okolí U bodu $a \in \Sigma$ tak, že $T(U) \subset V$.

Důkaz: Dokážeme, že platí předpoklady podmínky (i) a (ii) z věty 3.4. Položme $P = \Sigma$ s topologií indukovanou prostorem $\mathbb{N}^\mathbb{N}$. Podmínka (i) z věty 3.4 zřejmě plyne z podmínky (i) tohoto tvrzení. Dokažme nyní podmínku (ii). Nechť je v $P = \Sigma$ dána posloupnost $(x_n)_{n=1}^\infty$ konvergující k bodu $x \in X$. Položme $L = \{x\} \cup \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$. Potom L je kompaktní. Ukážeme, že i $T(L)$ je kompaktní. Nechť $\{G_\beta, \beta \in B\}$ je otevřené pokrytí $T(L)$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je Tx_n kompaktní, Tx je také kompaktní a tedy existují konečné podmnožiny $B_n \subset B, n \in \mathbb{N}$ a $B_0 \subset B$ tak, že $Tx_n \subset \cup\{G_\beta, \beta \in B_n\}$ a $Tx \subset \cup\{G_\beta, \beta \in B_0\}$. Podle předpokladu (ii) existuje pro každé $n \in \mathbb{N}$ otevřená množina U_n a otevřená množina U_0 tak, že $T(U_n) \subset \cup\{G_\beta, \beta \in B_n\}$ a $T(U_0) \subset \cup\{G_\beta, \beta \in B_0\}$. Protože je množina L kompaktní, najdeme konečnou množinu $M \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$ tak, že $L \subset \cup\{U_i, i \in M\}$. Pak ovšem $T(L) \subset \cup\{T(U_i), i \in M\} \subset \cup\{G_\beta, \beta \in B_i, i \in M\}$. A tedy je $T(L)$ kompaktní. Pak ovšem $\{Tx_n, n \in \mathbb{N}\} \subset T(L)$ je relativně spočetně kompaktní.

Příklad 3.7

Každý kvazi-Suslinův prostor je web-kompaktní.

Poznámka: Hausdorffův prostor X je kvazi-Suslinův, jestliže existuje polský prostor P a zobrazení $T : P \rightarrow \mathcal{P}(X)$ tak, že platí:

- (i) $\bigcup \{Tx : x \in P\} = X$ a
- (ii) kdykoli posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ obsažená v P konverguje k $x \in P$ a $z_n \in Tx_n$, $n \in \mathbb{N}$, má posloupnost $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ hromadný bod v Tx .

Důkaz: Ukážeme, že z (ii) plyne podmínka (i) z věty 3.4, důkaz podmínky (i) je zřejmý.

Mějme tedy posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ v P konvergující k $x \in P$. Necht' je dána posloupnost $(z_k)_{k=1}^{\infty}$ v množině $\bigcup \{Tx_n, n \in \mathbb{N}\}$. Nyní nastává jeden ze dvou případů: buď existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $z_k \in Tx_{n_0}$ pro nekonečně mnoho k nebo je pro každé $n \in \mathbb{N}$ množina $\{k, z_k \in Tx_n\}$ konečná.

V prvním případě uvažujme posloupnost $(y_j)_{j=1}^{\infty}$, pro kterou platí $y_j = x_{n_0}$ pro každé $j \in \mathbb{N}$.

Tato posloupnost zřejmě konverguje k x_{n_0} a platí $z_{k_j} \in Tx_{n_0}$ pro každé $j \in \mathbb{N}$. Tedy má posloupnost $(z_{k_j})_{j=1}^{\infty}$ hromadný bod, tedy i posloupnost $(z_k)_{k=1}^{\infty}$ má hromadný bod a množina

$\bigcup \{Tx_n, n \in \mathbb{N}\}$ je relativně spočetně kompaktní (posloupnost $(z_k)_{k=1}^{\infty}$ jsme totiž volili libovolně).

V druhém případě položíme $j_1 = 1$ a najdeme $n_1 \in \mathbb{N}$ tak, že $z_{j_1} \in Tx_{n_1}$. Dále budeme indukcí

konstruovat rostoucí posloupnosti $(n_l)_{l=1}^{\infty}$ a $(j_l)_{l=1}^{\infty}$ takové, že $z_{j_l} \in Tx_{n_l}$ pro všechna $l \in \mathbb{N}$.

Předpokládejme, že jsme v souladu s těmito předpoklady našli čísla j_l a n_l pro $l \leq N$.

Zvolme nyní j_{N+1} a n_{N+1} tak, že $j_{N+1} > j_N$, $n_{N+1} > n_N$ a $z_{j_{N+1}} \in Tx_{n_{N+1}}$. Takové $z_{j_{N+1}}$ jistě existuje, protože množina $\bigcup \{Tx_l, l = 1, \dots, N+1\}$ obsahuje z_m jen pro konečně mnoho $m \in \mathbb{N}$.

Podle předpokladů má tedy posloupnost $(z_{j_l})_{l=1}^{\infty}$ hromadný bod v Tx . Ovšem $(z_{j_l})_{l=1}^{\infty}$ je

podposloupností posloupnosti $(z_k)_{k=1}^{\infty}$, ta má tedy také hromadný bod a množina

$\bigcup \{Tx_n, n \in \mathbb{N}\}$ je relativně spočetně kompaktní.

Důsledek 3.8

Kompaktní, σ -kompaktní a σ -spočetně kompaktní prostory jsou web-kompaktní. Prostory obsahující hustou, σ -kompaktní nebo σ -spočetně kompaktní podmnožinu jsou web-kompaktní. Separabilní prostory jsou web-kompaktní.

Věta 3.9 (Orihuela)

Nechť X je web-kompaktní prostor. Pak prostor $C_p(X)$ je andělský.

Poznámka: Tato věta obsahuje výsledky Grothendiecka [11] (pro X kompaktní), Pryce [17] (pro X obsahující hustou σ -kompaktní podmnožinu), Floreta [7] (pro X obsahující hustou σ -spočetně kompaktní podmnožinu).

Důkaz: Nechť $\overline{\mathbb{R}}$ značí kompaktifikaci $\mathbb{R}$ obsahující navíc dva body $+\infty$ a $-\infty$. Uvažujme zobrazení $\psi: C_p(X, \mathbb{R}) \rightarrow C_p(X, \overline{\mathbb{R}})$, definované předpisem $\psi(f) = f$. To je zřejmě spojitě a prostě. Podle andělského lemmatu (lemma 2.3) a jeho důsledku 2.4 stačí dokázat tvrzení věty 3.9 pro prostor $C_p(X, Z)$, kde Z je libovolný kompaktní metrický prostor. Nechť $\{A_\alpha: \alpha \in \Sigma\}$ je systém podmnožin X , který vytváří jeho web-kompaktní strukturu. Označme $Y = \cup \{A_\alpha: \alpha \in \Sigma\}$. Uvažujme zobrazení $\phi: C_p(X, Z) \rightarrow Z^Y$. Prostor Z^Y uvažujeme s topologií bodové konvergence, zobrazení ϕ je definováno jako restrikce funkcí z $C_p(X, Z)$ na Y . Zobrazení ϕ je spojitě, a protože Y je hustá podmnožina X , je i prostě. Nechť A je relativně spočetně kompaktní podmnožina $C_p(X, Z)$. Ukážeme, že každá posloupnost v A má zaměnitelnou dvojnou limitu s každou posloupností v X , která má v X hromadný bod. Nechť tedy $(x_n)_{n=1}^\infty$ je posloupnost bodů X s hromadným bodem $x \in X$ a nechť $(f_m)_{m=1}^\infty$ je posloupnost funkcí z A s hromadným bodem $f \in C_p(X, Z)$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $f(x_n)$ hromadným bodem posloupnosti $(f_m(x_n))_{m=1}^\infty$. Pokud ale existuje limita $\lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x_n)$, pak jediným hromadným bodem této posloupnosti je právě zmíněná limita, tedy $\lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x_n) = f(x_n)$. Podle předpokladu existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ a tedy posloupnost $(f(x_n))_{n=1}^\infty$ má jediný hromadný bod. Ze spojitosti funkce f a z toho, že x je hromadným bodem posloupnosti $(x_n)_{n=1}^\infty$, plyne, že $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$. Naproti tomu pro každé $m \in \mathbb{N}$ je $f_m(x)$ hromadným bodem posloupnosti $(f_m(x_n))_{n=1}^\infty$. Má-li tato posloupnost limitu, může jí být

jedině $f_m(x)$, tedy $\lim_{n \rightarrow \infty} f_m(x_n) = f_m(x)$. Protože f je hromadným bodem posloupnosti $(f_m)_{m=1}^{\infty}$, je $f(x)$ hromadným bodem posloupnosti $(f_m(x))_{m=1}^{\infty}$. Tato posloupnost má však podle předpokladu limitu.

Dostáváme tak vztah $\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_m(x_n) = f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x_n)$, a tím zaměnitelnost dvojné limity.

$\phi(A)$ je tedy množina funkcí, která splňuje předpoklady věty 3.2. Pro každou $B \subset \phi(A)$ tedy platí: $\overline{B} = \left\{ f \in Z^Y : \text{existuje posloupnost } (f_n) \text{ v } B \text{ tak, že } \lim f_n = f \text{ bodově} \right\}$. Podle andělského lemmatu je množina $\phi(\overline{A})$ uzavřená v Z^Y , tedy kompaktní, a restrikce ϕ na $\overline{A}$ je homeomorfismus. Uzávěr A v $C_p(X, Z)$ je tedy kompaktní a každý jeho bod je dosažitelný posloupnostmi v A .

Věta 3.10 (Fremlin)

Nechť $C_p(X, \mathbb{R})$ je andělský. Pak je $C_p(X, Z)$ andělský pro každý metrický prostor (Z, d) .

Důkaz: Nechť $A \subset C_p(X, Z)$ je relativně spočetně kompaktní. Díky shodě topologie bodové konvergence a součinnové topologie jsou množiny $A(x_0) = \{f(x_0) : f \in A\}$, $x_0 \in X$ relativně spočetně kompaktní v Z . Jsou dokonce relativně kompaktní, protože Z je metrický. Podle Tichonovovy věty je i $A \subset Z^X$ relativně kompaktní. Zbývá ukázat, že každá $f \in \overline{A}$ je spojitá a dosažitelná posloupnostmi v A .

Pro důkaz spojitosti f volme pevně $x_0 \in X$, pak zobrazení $T : Z \rightarrow \mathbb{R}$ definované předpisem $T(z) = d(z, f(x_0))$ je spojitě. Zobrazení $T^* : Z^X \rightarrow \mathbb{R}^X$ definované vztahem $T^*(g) = T \circ g$ je také spojitě a $T^*(C(X, Z)) \subset C(X, \mathbb{R})$. Množina $T^*(A)$ je relativně spočetně kompaktní v andělském prostoru $C_p(X, \mathbb{R})$. To ale znamená, že

$d(f(\bullet), f(x_0)) = T^*(f) \in \overline{T^*(A)} \subset C(X, \mathbb{R})$ je spojitě zobrazení. Z toho plyne, že f je spojitá v bodě x_0 .

Nyní budeme hledat posloupnost v A , která konverguje k f . Zobrazení $S : C_p(X, Z) \rightarrow C_p(X, \mathbb{R})$ definované předpisem $S(g) = d(g(\bullet), f(\bullet))$ je spojitě. Množina $S(A)$ je tedy relativně kompaktní v $C_p(X, \mathbb{R})$ a $0 = S(f) \in \overline{S(A)} \subset \overline{S(A)}$. Andělskost

$C_p(X, \mathbb{R})$ zaručuje existenci posloupnosti $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ v A takové, že $S(g_n) \rightarrow 0$. Neboli $g_n \rightarrow f$ v $C_p(X, Z)$.

Lemma 3.11

Nechť X je web-kompaktní prostor. Pak $C_p(X, Z)$ je andělský pro každý Z metrický.

Důkaz: Snadný důsledek věty 3.9 a Fremlinovy věty 3.10.

Nyní uvedeme důsledek předešlé stati pro věty Eberlein-Šmuljanova typu, které zkoumají, kdy je lokálně konvexní prostor ve slabé topologii andělský. Buď E lokálně konvexní prostor a E' jeho topologický duál. Protože E se slabou topologií je podprostorem prostoru $C_p(E')$, dostáváme jako důsledek věty 3.9 a andělského lemmatu (resp. jeho důsledku 2.5) následující výsledek.

Věta 3.12

Nechť E je lokálně konvexní prostor a nechť jeho duál je web-kompaktní. Pak je E andělský ve slabé topologii.

Vraťme se nyní k podmnožinám $C_p(X)$.

Definice 3.13

Množina $A \subset X$ je omezená v X , jestliže každá reálná spojitá funkce na X je omezená na A .

Poznámka: Rozdíl mezi omezeností a pseudokompaktností (definice 1.14) spočívá v tom, že omezenost množiny závisí na prostoru, v kterém množina je, zatímco pseudokompaktní množina je omezená v libovolném prostoru, do kterého je vnořena. Zároveň platí, že pseudokompaktnost množiny je ekvivalentní omezenosti v sobě samé.

Uvedme nyní znění Grothendieckovy věty.

Věta 3.14

Nechť X je spočetně kompaktní a nechť $A \subset C_p(X)$ je relativně spočetně kompaktní. Pak A je relativně kompaktní.

V předchozím textu jsme Grothendieckovu větu a jí příbuzné výsledky zobecňovali v tom smyslu, že jsme oslabovali podmínky kladené na prostor X . Tím jsme dospěli k požadavku, aby X byl web-kompaktní. Zároveň jsme dokázali i o něco víc než ekvivalenci spočetné kompaktnosti a relativní kompaktnosti (viz vlastnosti andělskosti). Nyní se pokusíme dosáhnout zobecnění v jiném směru – budeme klást menší nároky na množinu A . Nejprve však zformulujeme tři pomocná tvrzení.

Lemma 3.15

Nechť X je spočetně kompaktní prostor. Pak každý lokálně konečný systém podmnožin X je konečný.

Důkaz: Předpokládejme, že $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ je nekonečný lokálně konečný systém podmnožin X .

Pro každé přirozené n zvolme libovolně bod $b_n \in B_n$. Množina $B = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ je nekonečná.

Jinak by totiž pro nějaký bod $x \in X$ platilo pro nekonečně mnoho n , že $x = b_n$, a tedy $x \in B_n$.

To by odporovalo předpokladu lokální konečnosti. Dále množina B nemá hromadný bod.

Kdyby totiž bod x byl hromadným bodem B , libovolné okolí x by obsahovalo bod b_n pro nekonečně mnoho n , to by byl opět spor s lokální konečností. Tyto dva fakty ale odporují spočetné kompaktnosti X , tedy každý lokálně konečný systém ve spočetně kompaktním prostoru je konečný.

Lemma 3.16

Bud' X metrizovatelný prostor, $A \subset X$ omezená uzavřená podmnožina. Pak A je kompaktní.

Důkaz: Předpokládejme, že množina A je omezená a uzavřená, ale není kompaktní. Jelikož v metrických prostorech splývá kompaktnost a spočetná kompaktnost, není množina A ani spočetně kompaktní. Existuje tedy v A posloupnost $(x_n)_{n=1}^\infty$, která nemá hromadný bod v A .

Potom je množina $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ uzavřená v X a existuje na ní neomezená spojitá funkce.

Prostor X je normální (Dieudonného věta, viz [15], věta 41.1, str. 253) a proto lze každou spojitou funkci na A spojitě rozšířit na X podle Tietzeho věty. To je spor s omezeností množiny A .

Lemma 3.17

Nechť X je topologický prostor, Y jeho spočetný podprostor X a F omezená množina v $C_p(X)$. Označme $F_Y = \{f|_Y : f \in F\}$ a $\Phi_Y = \overline{F_Y}$. Pak Φ_Y je kompaktní v $C_p(Y)$.

Důkaz: Zobrazení π přiřazující každé funkci z $C_p(X)$ její restrikcí na Y je spojitě, $\pi(F) = F_Y$. Při spojitěm zobrazení z X do Y je obraz omezené množiny omezený, množina F_Y je tedy omezená v $C_p(Y)$. Prostor $C_p(Y)$ je podprostorem R^Y , který je metrizovatelný, a tedy i $C_p(Y)$ je metrizovatelný. Podle lemmatu 3.16 je tedy Φ_Y kompaktní.

Věta 3.18 (Asanov a Veličko)

Nechť X je spočetně kompaktní prostor a $A \subset C_p(X)$ omezená v $C_p(X)$. Pak A je relativně kompaktní.

Důkaz: Množina A je bodově omezená, tzn. pro každé $x \in X$ je množina $\{f(x) : f \in A\}$ omezená v $\mathbb{R}$. (Jinak by pro nějaké $x \in X$ byla spojitá funkce $\psi_x : C_p(X) \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná předpisem $\psi_x(f) = f(x)$ neomezená na A .) Položme $B_x = \overline{\{f(x) : f \in A\}}$ pro $x \in X$. Množiny B_x jsou kompaktní a $A \subset \prod \{B_x : x \in X\}$. Tento součin je součinem kompaktních množin a jako takový je podle Tichonovovy věty také kompaktní. Uzávěr $\bar{A}$ v $\mathbb{R}^X$ je tedy kompaktní. Zbývá ukázat, že $\bar{A} \subset C_p(X)$.

Předpokládejme, že $\bar{A} \setminus C_p(X) \neq \emptyset$, a volme pevně $f \in \bar{A} \setminus C_p(X)$. Potom $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ je nespojitá, a existují tedy bod $x^* \in X$ a množina $M \subset X$ takové, že $x^* \in \bar{M}$ ale $f(x^*) \notin \overline{f(M)}$. Uvažujme otevřené množiny U a G v $\mathbb{R}$ takové, že $f(x^*) \in U$, $f(M) \subset G$ a $\bar{U} \cap \bar{G} = \emptyset$. Najdeme posloupnosti $(x_n)_{n=1}^\infty$ bodů M , $(V_n)_{n=1}^\infty$ otevřených množin v X a $(f_n)_{n=1}^\infty$ prvků A takové, že pro každé přirozené n platí:

- (i) $x^* \in V_n$,
- (ii) $\overline{V_{n+1}} \subset V_n$,
- (iii) $f_n(V_n) \subset U$,
- (iv) $f_{n+1}(x_i) \in G$ pro $i = 1, \dots, n$,
- (v) $x_n \in V_n \cap M$.

Tyto posloupnosti budeme konstruovat induktivně. Protože $f \in \bar{A}$ a $f(x^*) \in U$, existuje $f_1 \in A$ taková, že $f_1(x^*) \in U$. Položme $V_1 = f_1^{-1}(U)$. Množina V_1 je otevřená a $x^* \in V_1$. Zvolme $x_1 \in V_1 \cap M$.

Nechť nyní existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \leq N$ existují objekty splňující podmínky (i)–(v). Najdeme je i pro $N+1$. Protože $f \in \bar{A}$ a $f(x^*) \in U$, existuje v A funkce f_{N+1} taková, že $f_{N+1}(x^*) \in U$ a $f_{N+1}(x_i) \in G, i = 1, \dots, N$. Bud' V_{N+1} taková otevřená množina v X , že platí $x^* \in V_{N+1} \subset f_{N+1}^{-1}(U)$ a $\overline{V_{N+1}} \subset V_N$. Vyberme bod $x_{N+1} \in V_{N+1} \cap M$. Tím dostáváme posloupnosti $(x_n)_{n=1}^\infty$ bodů M , $(V_n)_{n=1}^\infty$ otevřených množin v X a $(f_n)_{n=1}^\infty$ prvků A , pro které platí podmínky (i) – (v).

Protože X je spočetně kompaktní, má posloupnost $(x_n)_{n=1}^\infty$ hromadný bod x_∞ . Navíc $x_\infty \in \Phi = \bigcap \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$. Podle (iii) dokonce $\Phi = \bigcap \{\overline{V_n} : n \in \mathbb{N}\}$. Z (ii) a (v) plyne, že $x_i \in V_n$ pro $i > n$. Tedy $x_\infty \in \overline{V_n}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $x_\infty \in \Phi$. Platí $f_n(x_\infty) \in f_n(\bigcap \{\overline{V_n} : n \in \mathbb{N}\}) \subset f_n(\overline{V_n}) \subset \overline{U}$.

Položme $Y = \{x_\infty\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ a $g_n = f_n|_Y$. Pak je množina $\{\overline{g_n} : n \in \mathbb{N}\}$ kompaktní v $C_p(Y)$. To plyne z lemmatu 3.17. Díky metrizovatelnosti $C_p(Y)$ existuje funkce $g \in C_p(Y)$, která je limitou nějaké podposloupnosti posloupnosti $(g_n)_{n=1}^\infty$. Protože $g_n(x_i) = f_n(x_i) \in G$ pro $n > i$, dostáváme $g(x_i) \in \overline{G}$ pro všechna přirozená i . Je tedy i $g(x_\infty) \in \overline{G}$. Naproti tomu $g_n(x_\infty) = f_n(x_\infty) \in \overline{U}$, a tedy $g(x_\infty) \in \overline{U}$. Z toho plyne, že $g(x_\infty) \in \overline{U} \cap \overline{G} = \emptyset$, což je spor.

Následující lemma nám umožní další zobecnění věty 3.18.

Lemma 3.19

Nechť X a Z jsou topologické prostory, Y hustý podprostor X a nechť $f : X \rightarrow Z$ je zobrazení, jehož restrikce na každý podprostor tvaru $Y \cup \{x\}, x \in X$ je spojitá. Pak f je spojitá.

Důkaz: Uvažujme otevřenou množinu W obsahující obraz bodu x při zobrazení f . Díky regularitě prostoru Z existuje otevřená množina V , pro kterou platí $f(x) \in V$ a $\overline{V} \subset W$. Zřejmě je $f|_{Y \cup \{x\}}(x) \in V$. Funkce $f|_{Y \cup \{x\}}$ je spojitá a tedy existuje otevřené okolí U bodu x takové, že $f((Y \cup \{x\}) \cap U) \subset V$. Protože Y je hustý v X , je $\overline{Y \cap U} = \overline{U}$. Uvažujme bod $u \in U$. Pak v $Y \cap U$ existuje posloupnost $(u_i)_{i \in I}$ konvergující k u . Potom $(f(u_i))_{i \in I}$ je

posloupnost v množině V konvergující k $f(u)$ a $f(u) \in \overline{V}$. Tedy $f(U) \subset \overline{V} \subset W$ a funkce f je tedy spojitá v bodě x .

Definice 3.20

Topologický prostor X je spočetně prakompaktní, jestliže existuje hustý podprostor $Y \subset X$ takový, že každá nekonečná množina $A \subset Y$ má hromadný bod v X .

Věta 3.21

Nechť X je spočetně prakompaktní. Pak každá omezená podmnožina $A \subset C_p(X)$ je relativně kompaktní.

Důkaz: Důkaz bude za přispění lemmatu 3.19 probíhat stejně jako důkaz věty 3.18. Lemma 3.19 nám totiž umožňuje předpokládat, že množina A z věty 3.18 leží v daném hustém podprostoru Y prostoru X při označení stejném jako v definici 3.20. V takovém případě pak stále platí, že posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ má hromadný bod x_{∞} a přitom nám lemma 3.19 zajišťuje spojitost funkce f .

Není těžké dokázat, že každý spočetně prakompaktní prostor je pseudokompaktní. Zobecnit větu 3.18 pro pseudokompaktní prostory ale není možné. V kapitole 6 zkonstruujeme příklad pseudokompaktního prostoru X , pro který $C_p(X)$ obsahuje uzavřenou pseudokompaktní, a tedy omezenou množinu, která není kompaktní.

Kapitola 4: Příklad andělských prostorů, jejichž součin není andělský

V této kapitole uvedeme příklad dvou andělských prostorů, jejichž součin není andělský. Tím negativně zodpovíme otázku položenou Prycem v [17] a zároveň získáme motivaci pro kapitolu 5. Tento příklad uvedli autoři Boehme a Rosenfeld v [3]. Je třeba poznamenat, že autoři předpokládají platnost hypotézy kontinua.

Definice 4.1

Topologický prostor X je Fréchetův, jestliže pro každou podmnožinu $A \subset X$ a každý bod $x \in \overline{A}$ existuje v A posloupnost konvergující k x .

Poznámka: Často se užívá i pojmu Fréchet-Urysohnův prostor.

Zkonstruujeme příklad dvou kompaktních Hausdorffových Fréchetových prostorů, jejichž součin není Fréchetův. Nejprve ukážeme souvislost těchto pojmů s andělskostí.

Lemma 4.2

Každý kompaktní Hausdorffův Fréchetův prostor je andělský.

Důkaz: Ověříme přímo podmínky (i) a (ii) z definice andělského prostoru. Necht' A je relativně spočetně kompaktní podmnožina kompaktního Hausdorffova Fréchetova prostoru X . Pak uzávěr A je uzavřená podmnožina kompaktního prostoru, tedy je kompaktní a A je relativně kompaktní. Podmínka (ii) je identická s definicí Fréchetova prostoru.

Lemma 4.3

Necht' X je kompaktní a není Fréchetův. Pak X není andělský.

Důkaz: Buď A taková podmnožina X , že existuje $x \in \overline{A}$, který není limitou žádné posloupnosti v A . Jelikož je prostor X kompaktní, je uzávěr A také kompaktní, A relativně (spočetně) kompaktní. Prostor X tedy není andělský.

Zkonstruujeme-li tedy dva kompaktní Hausdorffovy Fréchetovy prostory, jejichž součin není Fréchetův prostor, získáme zároveň příklad andělských prostorů, jejichž součin není andělský. Přejdeme nyní ke konstrukci zmíněných prostorů.

Základem konstrukce bude množina přirozených čísel $\mathbb{N}$.

(1) Nejdříve zkonstruujeme systém Σ nekonečných podmnožin $\mathbb{N}$, který splňuje následující podmínky:

- (i) $S_1 \in \Sigma, S_2 \in \Sigma, S_1 \neq S_2 \Rightarrow S_1 \cap S_2$ je konečný,
- (ii) Σ je maximální systém nekonečných podmnožin $\mathbb{N}$ vzhledem k vlastnosti (i),
- (iii) pro libovolnou podmnožinu $A \subset \mathbb{N}$ platí: buď A lze pokrýt konečným počtem prvků Σ , nebo existuje $S \in \Sigma$ takové, že $S \subset A$.

Poznámka: Budeme užívat i pojmu skoro disjunktí systém pro takový systém, který splňuje podmínku (i).

Zvolme dobré uspořádání množiny $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha < \Omega\}$ všech podmnožin $\mathbb{N}$. Pro každé α sestrojíme skoro disjunktí spočetný systém Σ_α nekonečných podmnožin $\mathbb{N}$, který splňuje podmínku

- (iii α) pro libovolnou $A_\beta, \beta \leq \alpha$ platí: buď lze A_β pokrýt konečným počtem prvků Σ_α , nebo existuje $S \in \Sigma_\alpha$ tak, že $S \subset A_\beta$.

Začneme s konstrukcí systému Σ_1^* , který je dělením $\mathbb{N}$ na nekonečně mnoho nekonečných podmnožin. Pokud je možné množinu A_I pokrýt konečným počtem prvků systému Σ_1^* , položíme $\Sigma_1 = \Sigma_1^*$. V opačném případě očíslovujeme prvky systému Σ_1^* , tedy

$\Sigma_1^* = \{T_n : n \in \mathbb{N}\}$. Množina $A_I - \bigcup_{i=1}^N T_i$ je tedy nekonečná pro každé přirozené N . Zvolme

$a_1 \in A_I - T_1$ a pro každé $N > I$ zvolme $a_N \in A_I - (\bigcup_{i=1}^N T_i \cup \{a_1, \dots, a_{N-1}\})$. Položíme

$S_1 = \{a_1, a_2, \dots\}$ a $\Sigma_1 = \Sigma_1^* \cup \{S_1\}$. V tomto případě je zřejmě $S_1 \subset A_I$ a průnik množiny S_1 s libovolnou množinou T_n je konečný. Systém Σ_1 tak splňuje podmínky (i) a (iii).

Předpokládejme nyní, že byl vybrán systém Σ_β pro $\beta < \alpha$. Položíme $\Sigma_\alpha^* = \bigcup_{\beta < \alpha} \Sigma_\beta$. Pokud lze množinu A_α pokrýt konečně mnoha prvky Σ_α^* , buď $\Sigma_\alpha = \Sigma_\alpha^*$. Pokud ne, očíslovujeme

prvky Σ_α^* přirozenými čísly, $\Sigma_\alpha^* = \{T_n^\alpha : n \in \mathbb{N}\}$. Pro každé N je množina $A_\alpha - \bigcup_{i=1}^N T_i^\alpha$

nekonečná. Zvolme $a_1^\alpha \in A_\alpha - T_1^\alpha$ a pro $N > 1$ $a_N^\alpha \in A_\alpha - (\bigcup_{i=1}^N T_i^\alpha \cup \{a_1^\alpha, \dots, a_{N-1}^\alpha\})$. Položme $S_\alpha = \{a_1^\alpha, a_2^\alpha, \dots\}$ a $\Sigma_\alpha = \Sigma_\alpha^* \cup \{S_\alpha\}$. Argumentace uvedená pro Σ_1 je platná i pro ostatní Σ_α , a všechny Σ_α tak splňují podmínky (i) a (iii). Položme $\Sigma^* = \bigcup_{\alpha < \Omega} \Sigma_\alpha$. I tento systém splňuje podmínky (i) a (iii). Necht' Σ je libovolný systém nekonečných podmnožin $\mathbb{N}$ obsahující Σ^* a necht' je maximální vzhledem k podmínce (i). Pak Σ splňuje podmínky (i), (ii) a (iii).

(2) Nyní zkonstruujeme prostory $\mathbb{N}_a$ a $\mathbb{N}_b$

Pro každou $S \in \Sigma$ necht' S_a a S_b jsou nekonečné disjunktní podmnožiny S , jejichž sjednocení je S . Necht' $\Sigma_a = \{S_a : S \in \Sigma\}$ a $\Sigma_b = \{S_b : S \in \Sigma\}$. Pak $\Sigma_a \cup \Sigma_b$ je maximální skoro disjunktní systém nekonečných podmnožin $\mathbb{N}$. Pokud nelze $A \subset \mathbb{N}$ pokrýt konečně mnoha prvky $\Sigma_a \cup \Sigma_b$, existují $S_1 \in \Sigma_a$ a $S_2 \in \Sigma_b$ takové, že $S_1 \cup S_2 \subset A$.

Definujeme prostory $\mathbb{N}_a$ a $\mathbb{N}_b$ takto: $\mathbb{N}_a = \mathbb{N} \cup \Sigma_a$ a $\mathbb{N}_b = \mathbb{N} \cup \Sigma_b$.

Topologie těchto prostorů bude vypadat následovně: každý bod $x \in \mathbb{N}$ je otevřená množina a báze okolí množiny $S \in \Sigma_a$ je tvaru $\{S\} \cup (S/F)$, kde F je konečná množina. Analogicky vypadá i topologie Σ_b .

Lemma 4.4

Oba prostory jsou lokálně kompaktní, Hausdorffovy a mají spočetnou lokální bázi.

Důkaz:

Nejprve dokážeme lokální kompaktnost. Pro bod $x \in \mathbb{N}$ je jeho kompaktním okolím sám tento bod (body $x \in \mathbb{N}$ jsou otevřené množiny). Množina $S \cup \{S\}$ je zřejmě okolím $S \in \Sigma_a$.

Kompaktnost pak plyne z podmínky (iii) v konstrukci prostorů $\mathbb{N}_a$ a $\mathbb{N}_b$.

Nyní ukážeme, že prostory $\mathbb{N}_a$ a $\mathbb{N}_b$ jsou Hausdorffovy. Pro $x \in \mathbb{N}$ je možnost oddělení disjunktními okolími zřejmá. Pro $S_1, S_2 \in \Sigma_a$ využijeme faktu, že $S_1 \cap S_2$ je konečný. Hledaným okolím S_1 bude tedy množina $\{S_1\} \cup S_1 - (S_1 \cap S_2)$ a pro S_2 půjde o množinu $\{S_2\} \cup S_2 - (S_1 \cap S_2)$.

Nakonec ukážeme, že oba prostory mají spočetnou lokální bázi. Uvažujme posloupnost $(U_n)_{n=1}^\infty$ okolí množiny S , kde $U_n = \{S\} \cup (S - \{s_1, \dots, s_n\})$ a s_i jsou jednotlivé prvky S .

Nyní zkonstruujeme bázi kompaktních množin prostorů $\mathbb{N}_a$ a $\mathbb{N}_b$.

Definice 4.5

Systém $\kappa = \{K_\alpha \subset X : \alpha \in I\}$ nazveme bázi kompaktních množin prostoru X , jestliže pro každé $\alpha \in I$ je množina K_α kompaktní a pro každou kompaktní množinu $K \subset X$ existuje $\alpha \in I$ tak, že $K \subset K_\alpha$.

Lemma 4.6

Položme $V_S = S \cup \{S\}$.

Pak množina $\kappa = \left\{ K : K = \bigcup_{i=1}^n V_{S_i} \cup \{x_1, \dots, x_m\}, S_1, \dots, S_n \in \Sigma_a, x_1, \dots, x_m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N} \right\}$ je bázi kompaktních množin prostoru $\mathbb{N}_a$.

Poznámka: Analogicky vypadá i báze kompaktních množin prostoru $\mathbb{N}_b$.

Důkaz: Všechny prvky systému κ jsou kompaktní. $\{V_S : S \in \Sigma_a\} \cup \{\{x\} : x \in \mathbb{N}\}$ je pokrytí $\mathbb{N}_a$. Bud' $K \subset \mathbb{N}_a$ kompaktní, pak $\{V_S : S \in \Sigma_a\} \cup \{\{x\} : x \in \mathbb{N}\}$ je pokrytí K . Z něj lze vybrat konečné podpokrytí. Sjednocení prvků tohoto podpokrytí je zřejmě prvkem systému κ a je nadmnožinou K .

Lemma 4.7

Nechť $A \subset \mathbb{N}$ není obsažená v žádném prvku báze kompaktních množin prostoru $\mathbb{N}_a$, pak $A \cap S$ je nekonečný pro nějaké $S \in \Sigma_b$.

Důkaz: Podle podmínky (iii) uvedené v konstrukci systémů Σ_a a Σ_b je buď A možné pokrýt konečným počtem prvků $\Sigma_a \cup \Sigma_b$, nebo existuje $S \in \Sigma$ tak, že $S \subset A$.

Předpokládejme první případ: Nechť S_i jsou takové množiny, že $A \subset \bigcup_{i=1}^N S_i$ a pro $i = 1, \dots, M$ $S_i \in \Sigma_a$ a pro $i = M+1, \dots, N$, $S_i \in \Sigma_b$. Vzhledem k tvaru základních kompaktních množin je $A - \bigcup_{i=1}^M S_i$ nekonečná. Pak musí být $A \cap S_i$ nekonečná množina pro nějaké $i \in \{M+1, \dots, N\}$, tedy S_i je hledaná množina.

V druhém případě plyne z konstrukce systémů Σ_a a Σ_b , že $S_1 \cup S_2 \subset A$ pro nějaká $S_1 \in \Sigma_a$ a $S_2 \in \Sigma_b$. Zřejmě tedy $S_2 \subset A$.

Označme $\mathbb{N}_a^*$ a $\mathbb{N}_b^*$ jednobodové kompaktifikace prostorů $\mathbb{N}_a$ a $\mathbb{N}_b$. Tyto prostory jsou kompaktní Hausdorffovy prostory. Dokážeme, že splňují i poslední předpoklad – fréchetovskost.

Lemma 4.8

Prostory $\mathbb{N}_a^*$ a $\mathbb{N}_b^*$ jsou Fréchetovy prostory.

Důkaz: Důkaz provedeme pouze pro prostor $\mathbb{N}_a^*$, pro druhý prostor by probíhal identicky. $\mathbb{N}_a$ je otevřená podmnožina $\mathbb{N}_a^*$ a $\mathbb{N}_a^*$ má spočetnou lokální bázi ve všech bodech, možná s výjimkou bodu ∞ . Postačí proto dokázat, že kdykoli $A \subset \mathbb{N}_a^*$ a $\infty \in \overline{A}$, existuje v A posloupnost konvergující k ∞ .

Pokud existuje nekonečně mnoho různých $S_n \in \Sigma_a$ takových, že $S_n \in A$, pak $S_n \rightarrow \infty$.

Pokud naopak $A \cap \Sigma_a$ je konečný, pak ∞ je hromadným bodem množiny $A \cap \mathbb{N}$. Množina $A \cap \mathbb{N}$ tak není obsažena v žádném prvku báze kompaktních množin a podle lemmatu 4.6 má $A \cap \mathbb{N}$ nekonečný průnik s nějakým $S \in \Sigma_b$. Necht' $(x_n)_{n=1}^\infty$ je posloupnost obsažená v množině $A \cap \mathbb{N} \cap S$. Protože S je skoro disjunktní se všemi prvky systému Σ_a , je posloupnost $(x_n)_{n=1}^\infty$ mimo jakýkoli prvek báze kompaktních množin, a tedy $x_n \rightarrow \infty$.

Nyní dokážeme, že součin prostorů $\mathbb{N}_a^*$ a $\mathbb{N}_b^*$ není Fréchetův prostor.

Lemma 4.9

$\mathbb{N}_a^* \times \mathbb{N}_b^*$ není Fréchetův prostor.

Důkaz: Dokážeme, že diagonála $D = \{(x, x) : x \in \mathbb{N}\}$ má hromadný bod (∞_a, ∞_b) , ale že žádná posloupnost v D nekonverguje k (∞_a, ∞_b) .

Nejdříve ukážeme, že (∞_a, ∞_b) je hromadným bodem D . Necht' $S = \{x_1, x_2, \dots\} \in \Sigma_b$. Pak $x_n \rightarrow S$ v $\mathbb{N}_b^*$, ale posloupnost $(x_n)_{n=1}^\infty$ není obsažena v žádném prvku báze kompaktních množin prostoru $\mathbb{N}_a$. Tedy $x_n \rightarrow \infty_a$ v $\mathbb{N}_a^*$. Tedy bod $(\infty_a, S) \in \overline{D}$ pro všechna $S \in \Sigma_b$. Necht'

$(S_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost různých prvků Σ_b . Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ dostáváme, že $(\infty_a, S_n) \in \overline{D}$ a $(\infty_a, S_n) \rightarrow (\infty_a, \infty_b)$.

V druhém kroku důkazu ukážeme, že žádná posloupnost v D nekonverguje k (∞_a, ∞_b) . Necht' $(x_n, x_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost různých bodů D . Protože $\Sigma_a \cup \Sigma_b$ je maximální skoro disjunktí systém nekonečných podmnožin $\mathbb{N}$, má posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ podposloupnost konvergující buď k nějakému $S_a \in \Sigma_a$, nebo k $S_b \in \Sigma_b$. Posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tak nemůže konvergovat k ∞_a v $\mathbb{N}_a^*$ a k ∞_b v $\mathbb{N}_b^*$ současně.

Podle lemmat 4.2 a 4.3 jsme našli příklad andělských prostorů, jejichž součin není andělský, byť za předpokladu platnosti hypotézy kontinua. Simon [18] našel takový příklad i v Zermelo-Fraenkelově teorii množin s axiomem výběru.

Existuje ale podtřída andělských prostorů, které tuto vlastnost mají, tedy podtřída uzavřená na konečné a dokonce spočetné součiny. Jde o tzv. striktně andělské prostory, které zavedl W. Govaerts v [10].

Kapitola 5: Striktní andělskost

V kapitole 5 se budeme zabývat třídou striktně andělských prostorů a jejich vlastnostmi. Tato třída je podtřídou andělských prostorů, která je navíc uzavřená na spočetný topologický součin. Ukážeme také, kdy mají vlastnost striktní andělskosti prostory spojitých funkcí v bodové topologii. Výsledků v této kapitole dosáhl Govaerts v práci [10].

Definice 5.1

Řekneme, že prostor X je striktně andělský, jestliže

- (i) každá relativně spočetně kompaktní podmnožina $A \subset X$ je relativně kompaktní,
- (ii) je-li $x \in \overline{A}$ a A je relativně kompaktní podmnožina X , pak existuje spočetná množina $D \subset A$ taková, že $x \in \overline{D}$,
- (iii) každá separabilní kompaktní podmnožina $A \subset X$ je G_δ -prostor (body jsou množiny typu G_δ).

Místo podmínky (iii) je možno pracovat s ekvivalentní podmínkou

- (iiia) každý bod separabilní kompaktní podmnožiny $A \subset X$ má spočetnou bázi okolí.

Dokážeme nyní, že jde o ekvivalentní podmínky. Začneme s implikací (iii) $\Rightarrow$ (iiia). Zvolme tedy libovolně bod $x \in A$. Dle podmínky (iii) existují otevřené množiny U_n , $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\{x\} = \bigcap \{U_n, n \in \mathbb{N}\}$. Položme $V_n = \bigcap \{U_i, i = 1, \dots, n\}$. Ukážeme, že systém $\{V_n, n \in \mathbb{N}\}$ tvoří bázi okolí bodu x . Zvolme tedy libovolné okolí V bodu x . Tvrdíme, že existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $V_n \in V$. Předpokládejme opak, tedy že takové n neexistuje. Tedy existuje bod $y \in A$ takový, že $y \in U_i \setminus V$ pro všechna $i \in \mathbb{N}$. Pak ale $y \in \bigcap \{U_n, n \in \mathbb{N}\}$ a přitom $y \neq x$, protože $x \in V$ a $y \notin V$. Přejdeme k důkazu opačné implikace. Necht' $U_n, n \in \mathbb{N}$ jsou otevřené množiny tvořící bázi okolí bodu $x \in A$. Zřejmě $x \in \bigcap \{U_n, n \in \mathbb{N}\}$. Zvolme nyní libovolně bod $y \in A$, $y \neq x$. Množina $A \setminus \{y\}$ je otevřená v A a obsahuje bod x . Existuje tedy prvek báze – množina U_m pro nějaké $m \in \mathbb{N}$ tak, že $U_m \subset A \setminus \{y\}$. Z toho plyne, že $y \notin U_m$, tedy $y \notin \bigcap \{U_n, n \in \mathbb{N}\}$ a $\{x\} = \bigcap \{U_n, n \in \mathbb{N}\}$.

Věta 5.2

Prostor X je striktně andělský právě tehdy, když je andělský a platí podmínka (iii) z definice.

Důkaz: Andělský prostor, pro který platí podmínka (iii), je zřejmě striktně andělský. Dokážeme opačnou implikaci: necht' X je striktně andělský a A relativně spočetně kompaktní podmnožina X . Podle bodu (i) v definici je A relativně kompaktní. Necht' $x \in \overline{A}$. Podle bodu (ii) v definici striktně andělského prostoru existuje spočetná $D \subset A$, pro niž platí $x \in \overline{D}$. $\overline{D}$ je separabilní kompaktní množina, takže podle (iii) existují v $\overline{D}$ okolí $(U_n)_{n=1}^\infty$ bodu x taková, že $\bigcap_{n=1}^\infty U_n = \{x\}$. Zvolme $d_n \in \left(\bigcap_{i=1}^n U_i\right) \cap D$. Protože posloupnost $(d_n)_{n=1}^\infty$ je obsažena v množině $\overline{U_1} \cap \overline{D}$, což je kompaktní, má každá její podposloupnost hromadný bod. Pokud existuje podposloupnost, jejímž hromadným bodem je jiný bod než x , dostáváme spor s rovností $\bigcap_{n=1}^\infty U_n = \{x\}$. Tedy všechny podposloupnosti posloupnosti $(d_n)_{n=1}^\infty$ konvergují k x .

Poznámka: Tato věta je významná pro studium prostorů spojitých funkcí s topologií bodové konvergence. Dává totiž podmínku pro to, aby andělský prostor byl striktně andělský. Později ukážeme, které andělské prostory $C_p(X)$ tuto podmínku splňují.

Věta 5.3

Necht' f je spojitě prosté zobrazení z regulárního prostoru Y do striktně andělského prostoru X . Pak Y je striktně andělský.

Důkaz: S odkazem na předchozí větu a andělské lemma 2.3, resp. jeho důsledek 2.4, stačí ověřit podmínku (iii) z definice 5.1. Necht' $A \subset Y$ je kompaktní separabilní množina a necht' $y \in A$. Podle andělského lemmatu 2.3 víme, že restrikce f na A je homeomorfismus, a tedy množina $f(A) \subset X$ je kompaktní a separabilní. Necht' $x = f(y)$. Potom existují otevřené množiny $U_n \subset X, n \in \mathbb{N}$ takové, že $\{x\} = \bigcap \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$. Vzory množin $U_n, n \in \mathbb{N}$ jsou ovšem otevřené a jejich průnikem je bod y .

Důsledek 5.4

- (i) Je-li prostor X striktně andělský s topologií τ , je striktně andělský i s každou jemnější topologií.
- (ii) Podprostor striktně andělského prostoru je striktně andělský.

Důkaz: Viz důsledky 2.5 a 2.6 a věta 5.3.

Věta 5.5

Součin spočetně mnoha striktně andělských prostorů je striktně andělský.

Důkaz: Položme $X = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$, kde X_i jsou striktně andělské prostory pro všechna $i \in \mathbb{N}$.

Dokažme nejprve, že pro X platí podmínka (i) z definice 5.1. Necht' tedy A je relativně spočetně kompaktní podmnožina $X = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$. Obrazy A při projekcích na jednotlivé prostory X_i jsou relativně spočetně kompaktní, a tedy relativně kompaktní. Označme je A_{X_i} . Součin jejich uzávěrů $\prod_{i \in \mathbb{N}} \overline{A_{X_i}}$ je kompaktní a $\prod_{i \in \mathbb{N}} \overline{A_{X_i}} = \overline{\prod_{i \in \mathbb{N}} A_{X_i}}$. Uzávěr množiny A je částí $\prod_{i \in \mathbb{N}} \overline{A_{X_i}}$. Jakožto uzavřená podmnožina kompaktní množiny je také kompaktní, tedy A je relativně kompaktní.

Nyní dokážeme, že v $X = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$ platí podmínka (iii) z definice striktní andělskosti.

Necht' množina $A \subset X$ je kompaktní a separabilní a $x = (x_1, x_2, \dots) \in A$. Obrazy množiny A při projekcích na jednotlivé prostory X_i jsou kompaktní a separabilní. Tedy pro každé $i \in \mathbb{N}$ existují otevřené množiny $U_n^i \subset X_i, n \in \mathbb{N}$ takové, že $\{x_i\} = \bigcap \{U_n^i : n \in \mathbb{N}\} \cap A_{X_i}$. Vzory množin $U_n^i, n \in \mathbb{N}$ při projekcích jsou opět otevřené množiny, označme je $V_n^i, n \in \mathbb{N}$. Potom $A \cap \bigcap_{i, n \in \mathbb{N}} V_n^i = \{x\}$.

Podmínku (ii) z definice 5.1 ověříme nejprve pro dva striktně andělské prostory X a Y . Necht' $A \subset X \times Y$ je relativně kompaktní a necht' $a = (a_1, a_2) \in \overline{A}$. Označme π_1 a π_2 projekce $X \times Y$ na X a Y .

Necht' U je libovolné okolí a_1 v X . Protože $\pi_1(\overline{A})$ je regulární, existuje okolí U' bodu a_1 takové, že $\overline{U' \cap \pi_1(\overline{A})} \subseteq U$.

Zřejmě je $a_2 \in \pi_2(A \cap (U' \times Y))$. Z vlastnosti (ii) v definici 5.1 vyplývá existence posloupnosti bodů množiny A $((x_i^U, y_i^U))_{i=1}^{\infty}$ takové, že $x_i^U \in U'$ a $y_i^U \rightarrow a_2$ pro $i \rightarrow \infty$. Necht' a_1^U je hromadným bodem $(x_i^U)_{i=1}^{\infty}$, potom $a_1^U \in \overline{U' \cap \pi_1(\overline{A})} \subseteq U$.

Položme $D_U = \{(x_i^U, y_i^U), i = 1, 2, \dots\}$. D_U je spočetná podmnožina A a $(a_1^U, a_2) \in \overline{D_U}$.

Označme $V = \{a_1^U, U \text{ je okolím } a_1\}$. Pak $a_1 \in \overline{V}$. Necht' $(U_i)_{i=1}^{\infty}$ je taková posloupnost okolí,

že $a_1^U \rightarrow a_1$ pro $i \rightarrow \infty$. Položme $D = \bigcup_{i=1}^{\infty} D_{U_i}$. Pak D je spočetná podmnožina A a $a = (a_1, a_2) \in \overline{D}$.

Nechť nyní $X = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$, kde X_i jsou striktně andělské prostory. Nechť $A \subset X$ je relativně kompaktní a $x = (x_i)_{i=1}^{\infty} \in \overline{A}$. Pro každé přirozené n uvažujme projekci $\pi_n : X \rightarrow \prod_{i=1}^n X_i$. Podle prvního kroku důkazu je prostor $\prod_{i=1}^n X_i$ striktně andělský. Protože projekce π_n jsou spojité a $\pi_n(A)$ je hustá podmnožina $\pi_n(\overline{A})$, je $\pi_n(A)$ relativně kompaktní a existuje tedy (podle bodu (ii) z definice 5.1) spočetná množina $D_n^* \subset \pi_n(A)$, pro kterou platí $\pi_n(x) \in \overline{D_n^*}$.

Dále zvolme pro každé přirozené n spočetnou množinu $D_n \subset A$, pro kterou je $\pi_n(D_n) = D_n^*$. Potom je množina $D = \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i$ spočetná a $x \in \overline{D}$.

Příklad 5.6

Existuje nespočetný systém striktně andělských prostorů, jejichž součin není striktně andělský.

Důkaz: Nechť $I = [0, 1]$. Prostor I je metrický, a tedy striktně andělský. Ovšem prostor I^I je kompaktní a není sekvenciálně kompaktní. To podle příkladu 1.8 a věty 2.2 znamená, že I^I není andělský, a tedy ani striktně andělský.

Lemma 5.7

Nechť X je kompaktní prostor a $A \subset C_p(X)$ separabilní a kompaktní. Pak A je metrizable.

Důkaz: Označme $D = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ spočetnou hustou podmnožinu množiny A . Uvažujme zobrazení $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ definované předpisem: $\varphi(x) = \{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}, x \in X$. Označme $Y = \varphi(X)$. Prostor Y je metrizable a kompaktní, protože je podprostorem metrizable $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ a spojitým obrazem kompaktního X . Pro každé $a \in A$ existuje právě jedno $b_a \in C(Y)$ takové, že $a = b_a \circ \varphi$. Označme $B = \{b_a : a \in A\} \subset C_p(Y)$. Množina B je

zřejmě homeomorfní množině A . Protože Y je metrizovatelný a kompaktní, je i separabilní. V Y tedy existuje spočetná hustá podmnožina $\{y_k \in Y : k \in \mathbb{N}\}$, která odděluje prvky množiny B . Zobrazení $\beta : B \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ definované předpisem: $\beta(b) = \{b(y_1), b(y_2), \dots\}$ je spojitě a prostě. Množinu B lze tedy spojitě vnořit do $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, a proto je B metrizovatelná.

Věta 5.8

Nechť X je kompaktní prostor. Pak $C_p(X)$ je striktně andělský.

Důkaz: V kapitole 3 bylo dokázáno, že $C_p(X)$ je andělský. Podle věty 5.2 stačí dokázat, že $C_p(X)$ splňuje podmínku (iii) z definice striktní andělskosti, tedy že všechny body separabilní kompaktní podmnožiny prostoru $C_p(X)$ jsou množiny typu G_δ . Podle předchozího lemmatu jsou ale separabilní kompaktní podmnožiny $C_p(X)$ metrizovatelné.

Lemma 5.9

Nechť X je prostor s hustou relativně spočetně kompaktní podmnožinou D . Pak $C_p(X)$ je striktně andělský.

Důkaz: Stejně jako v předchozím případě víme, že $C_p(X)$ je andělský a splňuje tedy podmínku (i) z definice striktně andělských prostorů. Povšimněme si, že prostor je striktně andělský, jestliže splňuje podmínku (i) z definice a všechny jeho kompaktní podprostory jsou striktně andělské – to plyne snadno z definice. Nechť B je kompaktní podprostor $C_p(X)$. Definujme zobrazení $\Phi_1 : X \rightarrow \mathbb{R}^B$ předpisem $(\Phi_1(x))(b) = b(x)$. Zobrazení Φ_1 je spojitě zobrazení do $C_p(B)$. Navíc $\Phi_1(D)$ je relativně spočetně kompaktní v $C_p(B)$, a tedy relativně kompaktní – B je kompaktní a $C_p(B)$ tedy (striktně) andělský. Položme $H = \overline{\Phi_1(D)}$. Prostor H je tedy kompaktní. Uvažujme dále zobrazení $\Phi_2 : B \rightarrow \mathbb{R}^H$ definované předpisem $(\Phi_2(b))(h) = h(b)$. Jde o prosté spojitě zobrazení z B do $C_p(H)$. Tedy B je homeomorfní kompaktnímu podprostoru $C_p(H)$, kde H je kompaktní. Prostor $C_p(H)$ je striktně andělský, a B tedy také. B byl libovolný kompaktní podprostor $C_p(X)$ a $C_p(X)$ je tedy striktně andělský.

Následující lemmata rozšiřují třídu prostorů X , pro které je $C_p(X)$ striktně andělský.

Lemma 5.10

Nechť D je hustý podprostor X a nechť $C_p(D)$ je striktně andělský. Pak i $C_p(X)$ je striktně andělský.

Důkaz: Restrikce na D je prosté spojitě zobrazení z $C_p(X)$ do $C_p(D)$. Z toho plyne podle andělského lemmatu 2.3, jeho důsledku 2.4 a věty 5.3 striktní andělskost $C_p(X)$.

Lemma 5.11

Nechť $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$ a pro každé $i \in \mathbb{N}$ je prostor $C_p(X_i)$ striktně andělský. Pak je $C_p(X)$ striktně andělský.

Důkaz: Součin $\prod_{i=1}^{\infty} C_p(X_i)$ je striktně andělský podle věty 5.5. Uvažujme libovolné spojitě prosté zobrazení $\Phi : C_p(X) \rightarrow \prod_{i=1}^{\infty} C_p(X_i)$ a argumentujme opět andělským lemmatem 2.3, jeho důsledkem 2.4 a větou 5.3.

Nyní dokážeme zformulovat pro striktně andělské prostory tvrzení obdobné větě 3.9. Pro striktní andělskost $C_p(X)$ jsme dokázali postačující podmínku, že X obsahuje hustou σ -relativně spočetně kompaktní podmnožinu. Pro andělské prostory se nám ale podařilo docílit ještě většího zobecnění v podobě web-kompaktních prostorů.

Nyní podobně jako u andělských prostorů dokážeme, že kdykoli je $C_p(X)$ striktně andělský, je striktně andělský i prostor $C_p(X, Z)$ pro každý metrický prostor Z .

Lemma 5.12

Je-li $C_p(X)$ striktně andělský, je prostor $C_p(X, Z)$ striktně andělský pro každý metrický prostor (Z, d) .

Důkaz: Stačí ukázat, že pro $C_p(X, Z)$ platí podmínka (iii) z definice striktní andělskosti a odvolat se na Fremlinovu větu 3.10 a větu 5.2.

Nechť tedy $A \subset C_p(X, Z)$ je kompaktní a separabilní a nechť $f \in A$. Definujme zobrazení $T : C_p(X, Z) \rightarrow C_p(X)$ takto: $T(g)(\bullet) = d(f(\bullet), g(\bullet))$. Zobrazení T je spojitě a $T(C_p(X, Z)) \subset C_p(X, \mathbb{R})$. Protože $C_p(X)$ je striktně andělský existují v $C_p(X, Z)$ otevřené

množiny $U_n, n \in \mathbb{N}$ takové, že $\{f\} = \cap \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$. Položme $V_n = T^{-1}(U_n), n \in \mathbb{N}$. Množiny V_n jsou otevřené pro každé $n \in \mathbb{N}$ a pro $g \in C_p(X, Z)$ platí:

$$g \in \cap \{V_n : n \in \mathbb{N}\} \cap A \Rightarrow Tg = 0 \Rightarrow g = f.$$

Kapitola 6: Kompaktnost $C_p(X)$

V kapitole 6 budeme zkoumat, kdy celý prostor splňuje některou z definic jednotlivých forem kompaktnosti.

Je-li $X \neq \emptyset$, není $C_p(X)$ kompaktní. Slabší vlastnost σ -kompaktnost má prostor $C_p(X)$ pouze v triviálních případech.

Věta 6.1

Nechť Y je hustý podprostor X . Je-li $C_p(Y|X)$ σ -spočetně kompaktní, pak X je pseudokompaktní a Y je P-prostor.

Poznámka: Připomeňme, že $C_p(Y|X) = \{f|_Y : f \in C_p(X)\}$, viz kapitola 0. P-prostor je takový prostor, v němž jsou všechny množiny typu G_δ otevřené.

Důkaz: Protože $C_p(Y|X)$ je σ -spočetně kompaktní, můžeme psát $C_p(Y|X) = \cup \{Z_i : i \in \mathbb{N}\}$, kde Z_i je spočetně kompaktní pro každé $i \in \mathbb{N}$.

Nejprve dokážeme, že X je pseudokompaktní. Stačí dokázat, že v X neexistuje nekonečný diskrétní systém otevřených množin (každý bod X má okolí, které protne nejvýše jeden prvek tohoto systému). Ukážeme, že neexistence takového systému implikuje pseudokompaktnost. Předpokládejme naopak, že X není pseudokompaktní, tedy existuje spojitá funkce $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, která není omezená. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že f není shora omezená. Položme $V_i = f^{-1}((2i, 2i+1))$. Množiny V_i jsou otevřené, disjunktní a nekonečně mnoho z nich je neprázdných. Zvolme libovolně bod $x \in X$ a označme $y = f(x)$. Buď $V = (y - \frac{1}{2}, y + \frac{1}{2})$. Pak ze spojitosti f existuje U okolí x tak, že $f(U) \subset V$. Ovšem $V \cap V_i \neq \emptyset$ nejvýše pro jedno $i \in \mathbb{N}$ a tedy $\{V_i, i \in \mathbb{N}\}$ je nekonečný diskrétní systém otevřených množin.

Předpokládejme nyní, že $\xi = \{U_i : i \in \mathbb{N}\}$ je (nekonečný) diskrétní systém otevřených množin. Z hustoty Y v X plyne, že $U_i \cap Y \neq \emptyset$ pro všechna přirozená i . Pro každé $i \in \mathbb{N}$ zvolme pevně $y_i \in U_i \cap Y$. Množiny $B_i = \{f(y_i) : f \in Z_i\}$ jsou omezené v $\mathbb{R}$, jde o obrazy

spočetně kompaktních množin Z_i při spojitém zobrazení. Je tedy $B_i \neq \mathbb{R}$ a můžeme zvolit $a_i \in \mathbb{R} \setminus B_i$. Z úplné regularity prostoru X a toho, že ξ je diskrétní systém, plyne existence spojitě funkce $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ takové, že $g(y_i) = a_i$ pro všechna $i \in \mathbb{N}$. Pak $g(y_i) \notin B_i$, tedy $g|_Y \notin Z_i$ pro žádné i přirozené. $g|_Y \notin \bigcup \{Z_i : i \in \mathbb{N}\} = C_p(Y|X)$, což je spor. Prostor X je tedy pseudokompaktní.

Nyní přejdeme k druhé části důkazu – ukážeme, že Y je P-prostor. Předpokládejme opak. Využijeme dualitu pojmů G_δ a F_σ množin. Necht' tedy existuje $y^* \in Y$ a spočetný systém uzavřených množin $\{F_i : i \in \mathbb{N}\}$ takový, že $F_i \subset F_{i+1}$, $y^* \notin F_i$ pro žádné přirozené i a $y^* \in \overline{\bigcup \{F_i : i \in \mathbb{N}\}}$. Uvažujme podprostor $Z' = \{f \in C_p(Y|X), f(y^*) = 0\}$ prostoru $C_p(Y|X)$. Prostor Z' je uzavřený, a tedy σ -spočetně kompaktní. Lze tedy psát $Z' = \bigcup \{Z'_k : k \in \mathbb{N}\}$, kde Z'_k jsou spočetně kompaktní. Nyní zformulujeme pomocné lemma, které budeme potřebovat k dokončení důkazu.

Lemma 6.2

Při výše uvedeném značení zvolme pevně $\varepsilon > 0$ a $k \in \mathbb{N}$. Pak existuje $i_k \in \mathbb{N}$ takové, že pro každou $f \in Z'_k$ existuje bod $y_f \in F_{i_k}$, pro který $f(y_f) < \varepsilon$.

Důkaz: Předpokládejme opak. Pak pro každé $i \in \mathbb{N}$ můžeme zvolit funkci $f_i \in Z'_k$ takovou, že $f_i(y) \geq \varepsilon$ pro všechna $y \in F_i$. Protože Z'_k je spočetně kompaktní, existuje $f \in Z'_k \subset C_p(Y)$, která je limitou posloupnosti $(f_i)_{i=1}^\infty$ v topologii $C_p(Y)$. Zřejmě je $f(y) \geq \varepsilon$ pro všechna $y \in \bigcup \{F_i : i \in \mathbb{N}\}$. Využíváme toho, že $F_i \subset F_{i+1}$. Protože f je spojitá a $y^* \in \overline{\bigcup \{F_i : i \in \mathbb{N}\}}$, dostáváme $f(y^*) \geq \varepsilon > 0$. Ale $f \in Z'_k \subset Z'$ a je tedy $f(y^*) = 0$, což je spor.

Pokračujeme v důkazu věty 6.1. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ a $\varepsilon = 2^{-k}$ volíme $i_k \in \mathbb{N}$ v souladu s lemmatem 6.2. Na X existují (díky úplné regularitě) pro všechna $k \in \mathbb{N}$ reálné spojitě funkce g_k takové, že $g_k(y^*) = 0$, $0 \leq g_k(x) \leq 2^{-k}$ pro všechna $x \in X$ a $g_k(x) = 2^{-k}$ pro $x \in F_{i_k}$.

Definujme spojitou funkci $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem $g(x) = \sum \{g_k(x) : k \in \mathbb{N}\}$ pro všechna

$x \in X$. $g(y^*) = \sum_{k \in \mathbb{N}} g_k(y^*) = 0$ a tedy $g|_Y \in Z'$. Nicméně podle definice funkce g je

$g(y) \geq 2^{-k}$ pro všechna $y \in F_{i_k}$. Tedy $g|_Y \notin Z'_k$ pro žádné $k \in \mathbb{N}$. Dostáváme $g|_Y \notin \bigcup \{Z'_k : k \in \mathbb{N}\}$, tedy spor. Tím je dokončen důkaz věty 6.1.

Lemma 6.3

Každý pseudokompaktní P-prostor je konečný.

Důkaz: Necht' X je pseudokompaktní P-prostor. Nejprve ukážeme, že každá spočetná množina v X je uzavřená a diskrétní. Začneme s uzavřeností. Bud' $A \subset X$ spočetná množina. Jednobodové množiny jsou uzavřené, tedy doplněk A je množina typu G_δ , v P-prostoru tedy otevřená. Pak ovšem A musí být uzavřená. Nyní ukážeme, že A je diskrétní. Zvolme libovolně bod $x \in A$. Pak $B = A \setminus \{x\}$ je spočetná a tedy uzavřená množina. Díky úplné regularitě prostoru X najdeme reálnou spojitou funkci f tak, že $f(x) = 0$ a $f(B) = \{1\}$. Položme $U = f^{-1}((-1/2, 1/2))$. Pak U je okolí x , které protíná množinu A pouze v bodě x .

Předpokládejme nyní, že X je nekonečný. Uvažujme spočetnou podmnožinu $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset X$. Definujme funkci $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ předpisem $f(x_n) = n$. Ta je spojitá, protože D je diskrétní. Nyní najdeme spojitě rozšíření této funkce na celý prostor X . Nejprve najdeme (díky úplné regularitě X) spojitou reálnou funkci g_1 tak, že $g_1(x_1) = 1$ a $g_1(x_i) = 0$ pro $i \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Označme $U_1 = \{x \in X, g_1(x) > 0\}$. Dále pro každé $n \in \mathbb{N}$ položme $V_{n+1} = \bigcup \{x_i, i \in \mathbb{N} \setminus \{1, \dots, n\}\} \cup \{\overline{U_j}, j \in \{1, \dots, n\}\}$ a najdeme spojitou reálnou funkci g_{n+1} tak, že $g_{n+1}(x_{n+1}) = 1$ a $g_{n+1}(V_{n+1}) = \{0\}$. Položme $U_{n+1} = \{x \in X, g_{n+1}(x) > 0\}$. Definujme funkci $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ takto: $g(x) = ng_n(x)$ pro $x \in \overline{U_n}, n \in \mathbb{N}$ a $g(x) = 0$ pro $x \in X \setminus \bigcup \{\overline{U_n}, n \in \mathbb{N}\}$. Je zřejmé že $g|_D = f$, ukážeme, že g je spojitá. Jelikož $\overline{U_i} \cap \overline{U_j} = \emptyset$ pro $i \neq j$, je g spojitá na $\bigcup \{\overline{U_n}, n \in \mathbb{N}\}$. Volme tedy $x \in X \setminus \bigcup \{\overline{U_n}, n \in \mathbb{N}\}$. Zřejmě je $g(x) = 0$. Ovšem protože X je P-prostor, je $\bigcup \{\overline{U_n}, n \in \mathbb{N}\}$ uzavřená a $X \setminus \bigcup \{\overline{U_n}, n \in \mathbb{N}\}$ tedy otevřená. Proto existuje okolí U bodu x takové, že $U \subset X \setminus \bigcup \{\overline{U_n}, n \in \mathbb{N}\}$. Tedy g je nulová i na U a tedy spojitá v x . Tím jsme na X našli neomezenou spojitou funkci, a to je spor s pseudokompaktností X .

Důsledek 6.4

Je-li prostor $C_p(X)$ σ -spočetně kompaktní, pak X je konečný.

Pokud bychom předpokládali pouze σ -pseudokompaktnost $C_p(X)$, závěr věty 6.1 neplatí. Uvedeme příklad 6.16 nekonečného pseudokompaktního prostoru zkonstruovaného D. B. Šachmatovem, pro který je $C_p(X)$ σ -pseudokompaktní. Tato práce nicméně čerpá z [1]. Dále ukážeme, jaké vlastnosti prostoru X můžeme očekávat, je-li $C_p(X)$ σ -pseudokompaktní. K těmto výsledkům dospěl Tkačuk v práci [20]. Nejprve ale zformulujeme dvě pomocná lemmata, která využijeme při důkazu pozdějších tvrzení. V důkazu prvního z nich využijeme faktorizační lemma ([1], Lemma 0.2.3., s. 7), které nyní zformulujeme:

Bud' $Y = \prod (Y_\alpha, \alpha \in A)$ součinem prostorů se spočetnou bází, X jeho hustý podprostor a f reálná spojitá funkce na X . Pak existuje spočetná množina $B \subset A$ a spojitá reálná funkce g na $\pi_B(X)$ tak, že $f = g \circ \pi_B$.

Lemma 6.5

Nechť X je hustá podmnožina I^τ . Pak X je pseudokompaktní právě tehdy, když $\pi_B(X) = I^B$ pro každou spočetnou $B \subset \tau$.

Důkaz: Je-li $\pi_B(X) = I^B$ pro každou spočetnou $B \subset \tau$, můžeme každou funkci $f \in C_p(X)$ napsat jako $f = g \circ \pi_{B_0}$, kde $|B_0| = \omega$ a $g \in C_p(I^{B_0})$. Protože I^{B_0} je podle Tichonovovy věty kompaktní, je $f(X) = g(I^{B_0})$ omezená množina v $\mathbb{R}$ a X je tedy pseudokompaktní.

Předpokládejme nyní naopak, že X je pseudokompaktní. $\pi_B(X)$ je hustá podmnožina I^B a zároveň $\pi_B(X)$ je pseudokompaktní a má spočetnou bází – jde o podprostor I^B . Dokážeme, že $\pi_B(X)$ je kompaktní. Prostory se spočetnou bází jsou andělské, a tedy kompaktnost splývá se spočetnou kompaktností. Předpokládejme, že $\pi_B(X)$ není kompaktní, tedy ani spočetně kompaktní. Existuje tedy spočetná podmnožina $A \subset \pi_B(X)$, která nemá hromadný bod. Uvažujme reálnou funkci g na A definovanou předpisem $g(a_n) = n$. Ta je neomezená a spojitá na A , kterou uvažujeme s diskrétní topologií. Podle Tietzeho věty lze g rozšířit na spojitou funkci na celém $\pi_B(X)$. Pak by ale $\pi_B(X)$ nebyl pseudokompaktní prostor, a to je spor. $\pi_B(X)$ je tedy kompaktní a proto $\pi_B(X) = I^B$.

Definice 6.6

Prostor X je b-diskrétní, jestliže každá spočetná množina $A \subset X$ je diskrétní a každou spojitou omezenou reálnou funkci na A lze spojitě rozšířit na celý prostor X .

Věta 6.7

Prostor X je b-diskrétní právě tehdy, když $C_p(X, I)$ je pseudokompaktní.

Důkaz: Uvědomme si, že $C_p(X, I)$ je hustý v I^X , a aplikujme lemma 6.5. Potřebujeme tedy dokázat, že prostor X je b-diskrétní právě tehdy, když $\pi_B(C_p(X, I)) = I^B$ pro každou spočetnou $B \subset X$. Necht' tedy $B \subset X$ je spočetná množina a předpokládejme, že X je b-diskrétní. Protože B je diskretní množina, je $C_p(B, I) = I^B$. A protože každá funkce z $C_p(B, I)$ má spojitě rozšíření na celý prostor X , dostáváme rovnost $\pi_B(C_p(X, I)) = I^B$. Dokažme nyní opačnou implikaci. Důkaz toho, že každou spojitou omezenou funkci na B lze spojitě rozšířit na celý prostor je zřejmý. Dokažme tedy, že B je diskretní. Zvolme libovolně $x \in B$. Zvolme funkci $f \in C_p(X, I)$ tak, že $f(x) = 1$, $f(y) = 0$ pro $y \in B \setminus \{x\}$. Taková funkce jistě existuje díky předpokladu $\pi_B(C_p(X, I)) = I^B$. Položme $U = f^{-1}((\frac{1}{2}, \frac{3}{2}))$. Pak U je okolím x , které množinu B protíná pouze v bodě x .

Lemma 6.8

Pro prostor X uvažujme podmínky:

- (i) X je b-diskrétní,
- (ii) $C_p(X, I)$ je pseudokompaktní,
- (iii) $C_p(X, I)$ je σ -pseudokompaktní,
- (iv) $C_p^*(X)$ je σ -pseudokompaktní,
- (v) $C_p(X, I)$ je σ -omezený,
- (vi) $C_p^*(X)$ je σ -omezený.

Pak platí:

$$(i) \Leftrightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Leftrightarrow (iv) \Rightarrow (v) \Leftrightarrow (vi).$$

Poznámka: Symbolem $C_p^*(X)$ značíme prostor omezených spojitých funkcí na X s topologií bodové konvergence.

Důkaz: První ekvivalence je tvrzení předchozí věty, implikace $(ii) \Rightarrow (iii)$, $(iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (vi)$, $(iii) \Rightarrow (v) \Rightarrow (vi)$ jsou zřejmé. Dokažme nejprve implikaci $(iv) \Rightarrow (iii)$. Definujme funkci

$\xi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takto: $\xi(x) = x$ pro $\xi(x) = x$, $\xi(x) = 1$ pro $x > 1$ a $\xi(x) = -1$ pro $x < -1$. Potom složené zobrazení $r: f \rightarrow \xi \circ f$ definované pro každou $f \in C_p(X)$ je retrakcí $C_p(X)$ na $f \in C_p(X, I)$. Zřejmě restringovaná funkce $r|_{C_p^*(X)}$ je retrakcí prostoru $C_p^*(X)$ na $C_p(X, I)$. Protože obraz σ -pseudokompaktního prostoru při spojitým surjektivním zobrazení je σ -pseudokompaktní, je důkaz dokončen. Důkaz implikace (vi) $\Rightarrow$ (v) je obdobný.

Poznámka: Pokud dokážeme, že ze σ -omezenosti $C_p(X, I)$ plyne jeho pseudokompaktnost, bude možné všechny implikace nahradit ekvivalencemi. Tento důkaz rozdělíme do několika kroků.

Lemma 6.9

Nechť Y je omezený podprostor Z a $\gamma = (U_n)_{n=1}^\infty$ je klesající posloupnost neprázdných otevřených množin $(\overline{U_{n+1}} \subset U_n)$ s prázdným průnikem. Pak $\{n: Y \cap U_n \neq \emptyset\}$ je konečná.

Důkaz: Nechť $\gamma = (U_n)_{n=1}^\infty$ je posloupnost, pro kterou neplatí závěr lemmatu. Pak existuje rostoucí posloupnost přirozených čísel $(m_n)_{n=1}^\infty$ a posloupnost $(x_n)_{n=1}^\infty$ obsažená v Y takové, že $x_n \in U_{m_n} \cap Y$ a $x_n \notin \overline{U_{m_n+1}}$ pro všechna přirozená n . Množina $\{U_{m_n}: n \in \mathbb{N}\}$ tvoří klesající posloupnost neprázdných otevřených množin s prázdným průnikem. Systém $\gamma_1 = \{U_{m_n} \setminus \overline{U_{m_{n+1}}}: n \in \mathbb{N}\}$ je tedy diskrétní. Jelikož Y je omezený, musí být $(U_{m_n} \setminus \overline{U_{m_{n+1}}}) \cap Y \neq \emptyset$ pro nejvýše konečně mnoho n . Ale $x_n \in (U_{m_n} \setminus \overline{U_{m_{n+1}}}) \cap Y$ pro každé přirozené n , to je spor.

Lemma 6.10

Je-li $C_p(X, I)$ σ -omezený, pak jsou všechny spočetné podmnožiny X uzavřené.

Důkaz: Nechť $C_p(X, I) = \bigcup_{i=1}^\infty F_i$, kde všechny množiny F_i jsou omezené. Předpokládejme, že tvrzení neplatí, a existuje tedy spočetná množina $A \subset X$ a bod $x_0 \in \overline{A} \setminus A$. Definujme funkci $\xi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takto: $\xi(x) = x$ pro $x \in I$, $\xi(x) = 1$ pro $x > 1$ a $\xi(x) = -1$ pro $x < -1$. Potom zobrazení přiřazující $f(x) \rightarrow \xi(f(x) - f(x_0))$ zobrazuje $C_p(X, I)$ na

$Z = \{f \in C_p(X, I) : f(x_0) = 0\}$. Množina Z je tedy σ -omezená. Nyní budeme potřebovat pomocné tvrzení, které nám umožní dokončit důkaz lemmatu 6.10.

Seřaďme prvky spočetné množiny A z lemmatu 6.10, tedy $A = \{x_1, x_2, \dots\}$.

Lemma 6.11

Pro každý omezený $Y \subset Z$ a $\varepsilon \in (0, 1)$ existuje $k = k(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tak, že $f \notin Y$, kdykoli $f(x_i) \geq \varepsilon$ pro $i = 1, \dots, k$.

Důkaz: Uvažujme otevřené množiny $U_n = \left\{f \in C_p(X) : f(x_i) \in (\varepsilon - \frac{1}{n}, 1], i = 1, \dots, k\right\} \cap Z$ pro $n > \varepsilon^{-1}$. Zřejmě $\overline{U_{n+1}} \subset U_n$. Označme $\gamma = \{U_n : n > \varepsilon^{-1}\}$. Kdyby $f \in \cap \gamma$, bylo by $f(x_i) \geq \varepsilon$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Ale $f(x_0) = 0$. Tedy f by musela být nespojitá. Je tedy $\cap \gamma = \emptyset$ a podle lemmatu 6.10 existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že $U_n \cap Y = \emptyset$ pro $n \geq k$. Každá $f \in Z$, pro kterou je $f(x_i) \geq \varepsilon$ pro $i = 1, \dots, k$, je prvkem U_k . Je tedy $f \in U_k \subset Z \setminus Y$.

Pokračujme s důkazem lemmatu 6.10. Zapišme σ -omezenou množinu Z jako $Z = \bigcup_{i=1}^{\infty} Z_i$, kde Z_i jsou omezené. Podle předchozího lemmatu existuje rostoucí posloupnost přirozených čísel $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ taková, že $f \in Z \setminus Z_n$ kdykoli $f(x_i) \geq 2^{-n}$ pro $i = 1, \dots, k_n$. Zvolme spojitou nezápornou funkci $f_n \in Z$, pro kterou je $f_n(x_i) = 1$ pro $i = 1, \dots, k_n$. Položme $f = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} f_n$. Nepochybně $f \in Z$. Ale pro všechna n a všechna $i \leq k_n$ je $f(x_i) \geq 2^{-n} f_n(x_i) = 2^{-n}$. Tedy pro všechna n $f \notin Z_n$, to je spor s tím, že $Z = \bigcup_{i=1}^{\infty} Z_i$. Tím je dokázáno lemma 6.10.

Pokračujme dalším pomocným tvrzením, které nám umožní dokázat, že ze σ -omezenosti $C_p(X, I)$ plyne jeho pseudokompaktnost.

Lemma 6.12

Pro prostor X je ekvivalentní:

- (i) X je b-diskrétní,
- (ii) uzávěr každé spočetné $A \subset X$ v kompaktifikaci βX je homeomorfní kompaktifikaci βA a zároveň A je uzavřená v X ,
- (iii) každá spočetná $A \subset X$ je uzavřená v X a pro všechny disjunktní spočetné $A, B \subset X$ jsou disjunktní i jejich uzávěry v βX .

Důkaz:

- (i) $\Rightarrow$ (ii) $\overline{A}^{\beta X}$ je kompaktifikace A a každou omezenou funkci na A lze spojitě rozšířit na X , to znamená, že $\overline{A}^{\beta X} = \beta A$ až na homeomorfismus (viz [5], kap. d-17, str. 210). Uzavřenost A plyne definice b-diskrétnosti.
- (ii) $\Rightarrow$ (i) Pro $A \subset X$ platí $\overline{A}^{\beta X} = \beta A \Leftrightarrow$ každou omezenou spojitou funkci na A lze spojitě rozšířit na X (viz [5], kap. d-17, str. 210). Dokážeme, že A je diskretní, důkaz je obdobný jako v případě věty 6.7. Zvolme libovolně $x \in A$. Zvolme spojitou funkci f tak, že $f(x) = 1$, $f(y) = 0$ pro $y \in A \setminus \{x\}$. Takovou funkci najdeme díky tomu, že X je úplně regulární a $A \setminus \{x\}$ uzavřená. Položme $U = f^{-1}((\frac{1}{2}, \frac{3}{2}))$. Pak U je okolím x , které množinu A protíná pouze v bodě x .
- (i) $\Rightarrow$ (iii) Necht' $A, B \subset X$ jsou spočetné množiny. Pak i $A \cup B$ je spočetná a tedy diskretní. Definujme funkci $f: A \cup B \rightarrow \mathbb{R}$ takto: $f(x) = 1$ pro $x \in A$, $f(x) = 0$ pro $x \in B$. Tato funkce je spojitá na $A \cup B$, protože $A \cup B$ je diskretní, a lze ji spojitě rozšířit na X . Pak jsou ovšem uzávěry množin A a B v βX disjunktní ([6], tvrzení 3.6.2., s. 173).
- (iii) $\Rightarrow$ (ii) Prostor $\overline{A}^{\beta X}$ je kompaktifikací A , která splňuje podmínku, že pro všechny disjunktní spočetné $A_1, A_2 \subset A$ jsou disjunktní i jejich uzávěry v βX . Pak je ovšem podle Engelkinga ([6], tvrzení 3.6.2., s. 173) $\overline{A}^{\beta X}$ homeomorfní βA .

Věta 6.13

Je-li prostor $C_p(X, I)$ σ -omezený, pak X je b-diskrétní.

Důkaz: Ukážeme, že pro disjunktní spočetné podmnožiny X jsou jejich uzávěry v kompaktifikaci βX disjunktní, potom se odvoláme na lemmata 6.10 a 6.12.

Předpokládejme opak, uvažujme tedy disjunktní spočetné množiny $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ a $B = \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ a bod $z \in \overline{A}^{\beta_X} \cap \overline{B}^{\beta_X}$. Nyní ukážeme, že množiny A a B lze oddělit otevřenými okolími. Pro každé $i \in \mathbb{N}$ najdeme otevřenou množinu M_i takovou, že $x_i \in M_i$ a $\overline{M_i} \subset X \setminus B$. To jistě lze díky regularitě prostoru X . Symetricky najdeme otevřené množiny N_i takové, že $y_i \in N_i$ a $\overline{N_i} \subset X \setminus A$ pro $i \in \mathbb{N}$. Položme $H_i = \cup \{\overline{N_k}, k \leq i\}$ pro $i \in \mathbb{N}$. Položme $U = \cup \{M_i \setminus H_i, i \in \mathbb{N}\}$. Množina U je zřejmě otevřená a je nadmnožinou množiny A – každý prvek A totiž patří do M_i pro nějaké $i \in \mathbb{N}$ a nepatří do H_i pro žádné $i \in \mathbb{N}$. Označíme-li $V = \text{int}(X \setminus U)$, pak U a V jsou hledaná okolí oddělující množiny A a B . V další argumentaci budeme potřebovat pouze důsledek oddělitelnosti A a B a to sice ten, že existují posloupnosti otevřených množin $\gamma = (U_n)_{n=1}^\infty$ a $\eta = (V_n)_{n=1}^\infty$ takové, že $(\cup \gamma) \cap (\cup \eta) = \emptyset$ a $x_n \in U_n, y_n \in V_n, n = 1, 2, \dots$.

Nyní zformulujeme pomocné lemma.

Lemma 6.14

Nechť Y je omezená podmnožina $C_p(X, I)$ a $\varepsilon \in (0, 1)$. Pak existuje $k = k(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ takové, že $f \in C_p(X, I) \setminus Y$, kdykoli $f(x_i) \geq \varepsilon, f(y_i) \leq -\varepsilon$ pro $i = 1, \dots, k(\varepsilon)$.

Důkaz: Uvažujme pro každé $n > \varepsilon^{-1}$ otevřené množiny

$$U_n = \left\{ f \in C_p(X) : f(x_i) \in (\varepsilon - \frac{1}{n}, 1], f(y_i) \in [-1, -\varepsilon + \frac{1}{n}), i = 1, \dots, n \right\}.$$

Evidentně množiny $(U_n)_{n=1}^\infty$ tvoří klesající posloupnost. Kdyby $f \in \cap U_n$, bylo by $f(x_i) \geq \varepsilon, f(y_i) \leq -\varepsilon$ pro každé $i > \varepsilon^{-1}$. Protože $z \in \overline{A}^{\beta_X} \cap \overline{B}^{\beta_X}$, nešlo by funkci f spojitě rozšířit na $X \cup \{z\}$. Proto musí být $\cap U_n = \emptyset$. Použijeme-li stejnou argumentaci jako v důkazu lemmatu 6.10, dostáváme, že $U_n \cap Y \neq \emptyset$ pro nejvýše konečně mnoho $n \in \mathbb{N}$. Tedy existuje $k \in \mathbb{N}$, pro které $U_k \cap Y = \emptyset$, to je hledané číslo $k(\varepsilon)$.

Vraťme se k důkazu věty 6.13. Předpokládejme, že $C_p(X, I) = \bigcup_{i=1}^n F_i$, kde F_i jsou omezené.

Užitím lemmatu 6.14 dostáváme existenci rostoucí posloupnosti přirozených čísel $(k_n)_{n=1}^\infty$, pro kterou platí, že $f \notin F_n$, pokud $f(x_i) \geq 2^{-n}$, $f(y_i) \leq -2^{-n}$ pro $i = 1, \dots, k_n$.

Zvolme funkce $f_n, g_n \in C_p(X, I)$ takové, že

$$f_n \geq 0, g_n \leq 0 \text{ a } f_n^{-1}(I \setminus \{0\}) \subset U_n, g_n^{-1}(I \setminus \{0\}) \subset V_n, f_n(x_n) = -g_n(x_n) = 1.$$

Položme $d_n = 2^{-n} \left(\sum_{i=1}^{k_n} f_i \right)$ a $s_n = 2^{-n} \left(\sum_{i=1}^{k_n} g_i \right)$. Potom funkce $h = \sum_{n=1}^\infty d_n + \sum_{n=1}^\infty s_n$ je prvkem

$C_p(X, I)$. Ale $h(x_i) \geq f_i(x_i)2^{-n} = 2^{-n}$ a $h(y_i) \leq g_i(y_i)2^{-n} = 2^{-n}$ pro všechna $i = 1, \dots, k_n$. Tedy

$h \notin F_n$ pro žádné n přirozené, což je spor s rovností $C_p(X, I) = \bigcup_{i=1}^n F_i$. Tím je dokázána věta

6.13.

Nyní jsme schopni všechny implikace v lemmatu 6.8 nahradit ekvivalencemi. Pokračujme Tkačukovým výsledkem, který dává podmínky pro σ -pseudokompaktnost, a dokonce σ -omezenost $C_p(X)$.

Věta 6.15

Pro prostor X je ekvivalentní:

- (i) X je pseudokompaktní a b-diskrétní,
- (ii) $C_p(X)$ je σ -pseudokompaktní,
- (iii) $C_p(X)$ je σ -omezený.

Důkaz:

(i) $\Rightarrow$ (ii) X je pseudokompaktní, což implikuje, že $C_p^*(X) = C_p(X)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Zřejmě platí.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Je-li $C_p(X)$ σ -omezený, je σ -omezený i $C_p(X, I)$ (viz lemma 6.8), X je tedy b-diskrétní. Uspenskij [21] dokázal, že X je pseudokompaktní právě tehdy, když uniformní prostor $C_p(X)$ je σ -totálně omezený. K dokončení důkazu stačí ukázat, že každá omezená množina B v $C_p(X)$ je totálně omezená pro každou kompatibilní uniformitu. Kdyby tomu tak nebylo, existovala by na $C_p(X)$ stejnoměrně spojitá pseudometrika d a posloupnost $(f_n)_{n=1}^\infty$ v B tak, že

$d(f_n, f_m) > 1$ pro $m \neq n$. Funkce $\Phi : \{f_n : n \in \mathbb{N}\} \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná předpisem $\Phi(f_n) = n$ má spojitě rozšíření na celý prostor $C(X)$ s topologií indukovanou pseudometrikou d . Toto rozšíření je ale spojitě i v topologii bodové konvergence. Tedy B není omezená v $C_p(X)$, což je spor.

Nyní uvedeme příklad nekonečného prostoru, pro který je $C_p(X)$ σ -pseudokompaktní. Tím ukážeme, že větu 6.1 a důsledek 6.4 nelze zobecnit na σ -pseudokompaktní prostory.

Příklad 6.16

Existuje nekonečný pseudokompaktní prostor X_τ , takový, že $C_p(X_\tau)$ je σ -pseudokompaktní.

Důkaz: Necht' M značí minimální dobře uspořádanou množinu kardinality 2^ω a necht' $I^M = \prod \{I_\alpha : \alpha \in M\}$ je Tichonovova krychle váhy 2^ω . Pro $B \subset M$ necht' π_B značí obvyklou projekci $I^M \rightarrow I^B$.

Necht' $G = \{x \in I^M : |\{\alpha \in M : \pi_\alpha(x) \neq 0\}| \leq \omega\} \subset I^M$. Pak $|G| = |M| = 2^\omega$. Očíslujme prvky množiny G , tedy zapišme G jako $G = \{g_\alpha : \alpha \in M\}$ tak, aby pro každý $g \in G$ platilo $|\{\alpha \in M : g = g_\alpha\}| = 2^\omega$. Necht' E značí systém všech nejvýše spočetných podmnožin M . Očíslujme prvky systému E , $E = \{A_\beta : \beta \in M\}$ tak, aby $|\{\beta \in M : A = A_\beta\}| = 2^\omega$ pro všechny $A \in E$. Pro každé $\alpha \in M$ zvolíme bod $x_\alpha \in I^M$ následovně:

$$\begin{aligned} \pi_\gamma(x_\alpha) &= \pi_\gamma(g_\alpha) && \text{pro } \gamma \leq \alpha, \\ \pi_\gamma(x_\alpha) &= 1 && \text{pro } \gamma > \alpha, \alpha \in A_\gamma, \\ \pi_\gamma(x_\alpha) &= 0 && \text{pro } \gamma > \alpha, \alpha \notin A_\gamma. \end{aligned}$$

Hledaným prostorem X_τ je prostor $X_\tau = \{x_\alpha : \alpha \in M\} \subset I^M$. Ukážeme, že pro každou spočetnou množinu $B \subset M$ je $\pi_B(X) = I^B$, tím podle lemmatu 6.5 dokážeme pseudokompaktost X_τ . Buď tedy $g \in I^B$. Existuje $\alpha > \sup\{\delta : \chi \in B\}$ tak, že $g = \pi_B(g_\alpha)$. Proto $g = \pi_B(x_\alpha)$.

Nyní dokážeme, že X_τ je b-diskrétní. Dokážeme, že pro X_τ platí podmínka (iii) z věty 6.12. Mějme tedy disjunktní spočetné množiny $M_1, M_2 \subset X_\tau$. Zvolme $\theta \in M$ tak, že $\theta > \sup M_1 \cup M_2$ a $A_\theta = M_1$. Potom pro $\alpha \in M_1$ dostáváme $\pi_\theta(x_\alpha) = 1$ a pro $\alpha \in M_2$ platí

$\pi_\theta(x_\alpha) = 0$. Tedy množiny $\{x_\alpha : \alpha \in M_1\}$ a $\{x_\alpha : \alpha \in M_2\}$ je možné oddělit spojitou funkcí. Kompaktifikací prostoru X_τ je prostor I^M . Funkci π_θ je možné dle Tietzeho věty spojitě rozšířit na celý prostor I^M , a tedy lze oddělit i množiny $\overline{\{x_\alpha : \alpha \in M_1\}}^{I^M}$ a $\overline{\{x_\alpha : \alpha \in M_2\}}^{I^M}$. Jakožto vzory uzavřených množin $\{0\}$ a $\{1\}$ při spojitém zobrazení jsou množiny $\{x_\alpha : \alpha \in M_1\}$ a $\{x_\alpha : \alpha \in M_2\}$ uzavřené v X_τ . Tím jsme ukázali, že je splněna podmínka (iii) z věty 6.12. To znamená, že X_τ je b-diskrétní, a to s již dokázanou pseudokompaktností podle věty 6.15 implikuje, že $C_p(X_\tau)$ je σ -pseudokompaktní.

Závěr

Cílem této práce bylo podat ucelenou formou poznatky o prostorech spojitých funkcí s topologií bodové konvergence. Hlavním předmětem zájmu byla charakteristika kompaktních podmnožin těchto prostorů. Nejdůležitějšími výsledky uvedenými v této práci jsou věty 3.9 (výsledek J. Orihuela) a 3.18 (výsledek M. O. Asanova a N. V. Velička), které ve dvou různých směrech zobecňují Grothendieckovu větu. Věta 3.9 klade slabší podmínky na prostor, v němž pracujeme, věta 3.18 naopak na určitou množinu spojitých funkcí na daném prostoru, jejíž relativní kompaktnost věty dokazují (věta 3.9 dokazuje dokonce o něco více). Věta 3.18 je dále zobecněna větou 3.21. Závěry těchto vět se ale obecně nezachovávají topologickým součinem (jak ukazuje kapitola 4). Částečnou nápravou jsou výsledky W. Govaertse uvedené v kapitole 5, zejména lemmata 5.9 – 5.11, byť jejich předpoklady jsou silnější než u vět Grothendieckova typu. Tato lemmata vymezují podtřídu prostorů, pro které platí závěr obdobný závěru věty 3.9, a která je uzavřená i na topologický součin.

Od studia kompaktních podmnožin prostorů spojitých funkcí jsme přešli ke zkoumání kompaktnosti celého prostoru, což bylo náplní kapitoly 6. Ukázalo se, že pojem kompaktnosti je příliš silný a prostory spojitých funkcí mají tuto vlastnost jen v triviálních případech, další studium se proto věnovalo obecnějším pojmům souvisejícím s kompaktností, jako je spočetná kompaktnost a pseudokompaktnost. Nejvýznamnějším výsledkem kapitoly je věta 6.15 (V. V. Tkačuk), která charakterizuje prostor X , je-li prostor $C_p(X)$ σ -pseudokompaktní, a dále věta 6.1 (A. V. Archangelskij) v kontrastu s příkladem 6.16 (D. B. Šachmatov). Ty společně vymezují jakousi hranici mezi jednotlivými formami kompaktnosti. Věta 6.1 a její důsledky na jedné straně říká, že za určitých předpokladů na prostor $C_p(X)$ je prostor X konečný (a tedy poměrně nezajímavý), naopak příklad 6.16 jen za mírně zeslabených předpokladů ukazuje existenci bohaté třídy netriviálních prostorů. Příklad 6.16 navíc ukazuje, že větu 3.21 nelze dále zobecnit na pseudokompaktní prostory.

Literatura

- [1] Arkhangel'skii, A. V.: *Topological function spaces*, Kluwer Academic Publishers, 1992.
- [2] Asanov, M. O., Velichko, N. V.: *Compact sets in $C_p(X)$* , Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae roč. 22 (1981), č. 2, s. 255–266.
- [3] Boehme, T. K., Rosenfeld, M.: *An example of two compact Hausdorff Fréchet spaces whose product is not Fréchet*, Journal of London Math. Soc., roč. 8 (1974), s. 339-344.
- [4] Eberlein, W. F.: *Weak compactness in Banach spaces I*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, roč. 33 (1947), s. 51-53.
- [5] *Encyclopaedia of general topology*, ed. Hart, K. P., Nagata, J., Vaughan, J. E., Elsevier, 2004.
- [6] Engelking, R.: *General Topology*, Heldermann, 1989.
- [7] Floret, K.: *Weakly Compact Sets*, Springer-Verlag, 1980.
- [8] Fremlin, D. H.: *Topological measure spaces*, Vol. 4, Torres Fremlin, 2003, §462, s. 532-538.
- [9] Gillman, L., Jerison M.: *Rings of continuous functions*, D. van Nostrand company, 1960.
- [10] Gowaerts, W.: *A productive class of angelic spaces*, Journal of London Math. Soc., roč. 22 (1980), s. 355-364.
- [11] Grothendieck, A.: *Criteres de compacite dans les espaces fonctionnels generaux*, American Journal of Mathematics, roč. 74 (1952), č. 1, s. 168-186.
- [12] Kechris, A. S.: *Classical Descriptive Set Theory*, Springer-Verlag, 1995
- [13] Khavkine, I.: *Solutions for Rings of Continuous Functions by L. Gillman and M. Jerison* [online], verze 1.0, poslední revize 24. 6. 2003, cit. 25. 6. 2009, dostupné z <http://aux.planetmath.org/files/books/46/rocf-sols.pdf>.
- [14] McCoy, R. A., Ibula, N.: *Topological properties of spaces of continuous functions*, Springer-Verlag, 1988.
- [15] Munkres, J. R., *Topology*, Prentice-Hall, 2000.
- [16] Orihuela, J.: *Pointwise compactness in spaces of continuous functions*, Journal of London Math. Soc., roč. 36 (1987), s. 143-152.

- [17] Pryce, J. D.: *Pointwise compactness in spaces*, Proc. London Math. Soc., roč. 23 (1971), s. 532-546.
- [18] Simon, P.: *A compact Fréchet space whose square is not Fréchet*, Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, roč. 21 (1980), s. 749-753.
- [19] Steen, L. A., Seebach, J. A., *Counterexamples in topology*, Holt, Rinehart and Winston, 1970.
- [20] Tkačuk, V. V.: *The spaces $C_p(X)$: Decomposition into a countable union of bounded subspaces and completeness properties*, Topology and its Applications, roč. 22 (1986), s. 241-256.
- [21] Uspenskii, V. V.: *A characterization of compactness in terms of uniform structure in a function space*, Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, roč. 24 (1983), s. 121-126.