Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Vojtěch Novotný

Rozšiřování zobrazení do Banachových prostorů

Katedra matematické analýzy

Vedoucí diplomové práce: prof. RNDr. Miroslav Hušek, DrSc.
Studijní program: Matematika, Matematická analýza

2010

Poděkování

Děkuji všem, kteří mě podporovali během studia a při psaní této práce. Především mým rodičům, příbuzným a známým, kteří mi dodávali odvahu překonat nesnáze a byli mi opravdovou oporou po stránce materiální i duševní. Děkuji svému vedoucímu diplomové práce prof. RNDr. Miroslavu Huškovi, DrSc., že mi nabídl toto zajímavé téma, nebál se mě usměrnit, když se stáčelo nesprávným směrem, a při konzultacích mi poskytl celou řadu námětů, rad a poznámek. Děkuji svým vyučujícím, kteří mi na Matematicko-fyzikální fakultě představili množství problémů s jejich řešeními. Děkuji prof. RNDr. Petru Simonovi, DrSc. za přednášky z Obecné topologie a prof. RNDr. Jaroslavu Lukešovi, DrSc. za upozornění na dva netradiční přístupy, které jsem mohl využít ve své práci. Děkuji kamarádům, kteří mi pomáhali s překladem z francouzštiny a jazykovou korekturou textu, autorům jednotlivých důkazů za jejich bohaté myšlenky a institucím, které jednotlivé články zveřejnily na internetu. Děkuji svým spolužákům i všem, které jsem zde nevyjmenoval a kteří mi jakýmkoliv způsobem pomohli.

Předně děkuji za požehnání, bez nějž by tato práce, natož ve stanoveném termínu, nemohla vzniknout.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Chrudimi dne 14. dubna 2010 Vojtěch Novotný

Obsah

1 Úvod **6**
1.1 Základní pozorování 6

2 Rozšiřování omezených reálných funkcí z metrických prostorů **8**
2.1 Lebesgue 1907 8
2.2 Tietze 1915 11
2.3 Poussin 1916 15
2.4 Brouwer 1918 16
2.5 Bohr 1918 16
2.6 Hausdorff 1919 17
2.7 Kerékjártó 1923 19

3 Rozšiřování omezených reálných funkcí z obecnějších topologických prostorů **21**
3.1 Hausdorff 1919 21
3.2 Urysohn 1925 22
3.3 Čech 1937 a Stone 1947 25
3.4 Tong 1952 26
3.5 Katětov 1953 28
3.6 Grabiner 1986 35

4 Rozšiřování neomezených spojitých funkcí **37**
4.1 Bohr 1918 37
4.2 Hausdorff 1919 38
4.3 Gillman a Jerison 1960 39

5 Rozšiřování zobrazení z metrických prostorů do obecnějších topologických prostorů **41**
5.1 Poussin 1916 41
5.2 Brouwer 1918 43
5.3 Dugundji 1951 44

6 Rozšiřování pseudometrik **48**
6.1 Hausdorff 1930 49
6.2 Arens 1953 55
6.3 Isbell 1959 57

6.4 Čech 1966 58
6.5 Gantner 1969 59

7 Pomocná tvrzení **61**

8 Závěrečné shrnutí **64**

Literatura **66**

Název práce: Rozšiřování zobrazení do Banachových prostorů
Autor: Vojtěch Novotný
Katedra: Katedra matematické analýzy
Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Miroslav Hušek, DrSc.
E-mail vedoucího: `mhusek@karlin.mff.cuni.cz`

Abstrakt: Diplomová práce se zabývá rozšiřováním spojitých a stejnoměrně spojitých zobrazení. Představuje přístupy od Lebesguea a Tietzeho v metrických prostorech přes Urysohnovu větu na normálních topologických prostorech, Katětovovu práci o stejnoměrně spojitých funkcích až po Dugundjiho tvrzení a vztah mezi spojitým rozšiřováním pseudometrik a zobrazení. Spojuje články devatenácti matematiků dvacátého století, mnoho z nich uvádí do obecnější podoby a ukazuje, že mohly být dokázány dříve nebo jiným způsobem.

Klíčová slova: Rozšiřování zobrazení, spojitá zobrazení, stejnoměrně spojitá zobrazení

Title: Extension of mappings into Banach spaces
Author: Vojtěch Novotný
Department: Department of Mathematical Analysis
Supervisor: prof. RNDr. Miroslav Hušek, DrSc.
Supervisor's e-mail address: `mhusek@karlin.mff.cuni.cz`

Abstract: This diploma thesis deals with extending continuous and uniformly continuous mappings. It studies Lebesgue's and Tietze's work in metric spaces through Urysohn's theorem in normal topological spaces, Katětovs' papers about uniformly continuous functions up to Dugundji's theorem and relationship between continuous extending of pseudometrics and mappings. It connects the articles of nineteen mathematicians of the twentieth century, presents plenty of theorems in more general form and shows that they could be formulated earlier or proved in another way.

Keywords: Extending mappings, continuous mappings, uniformly continuous mappings

Kapitola 1

Úvod

Cílem této diplomové práce je sledovat vývoj „rozšiřovacích vět“ a bohatou škálu jejich důkazů. Předpokládejme, že máme dány topologické prostory X a Y a uzavřenou množinu A v X. Naším úkolem je určit podmínky, aby každé spojité zobrazení f z A do Y mohlo být spojitě rozšířeno na zobrazení $F: X \to Y$, které se na A shoduje s f. V následujících kapitolách si představíme pestrost přístupů, které nám matematici ve dvacátém století zanechali. Zároveň je uvedeme v obecnější podobě, než byly vysloveny, a použijeme dnes běžně užívaná označení. V poznámkách budeme zjišťovat, zda se nemohly podobné důkazy využít i pro stejnoměrnou spojitost. Uvidíme, že mnoho výsledků bylo možné získat dříve, než se jim na začátku padesátých let začal věnovat Miroslav Katětov.

V této úvodní části uvedeme základní pozorování. Kapitola 2 se zaměří na situaci, kdy bude X metrický prostor, zatímco následující oddíl 3 již tento předpoklad vynechá. V obou budeme prozatím uvažovat omezené reálné funkce f a neomezenými funkcemi se začneme zabývat v kapitole 4. Další část 5 nám představí výsledky týkající se obecnějších, nejen reálných zobrazení. Předvedeme si také výsledky ohledně rozšiřování pseudometrik v části 6. Oddíl 7 uvede pomocná tvrzení, která se v průběhu předešlých částí využijí, a získané výsledky shrneme v závěrečné kapitole 8 do přehledného diagramu.

1.1 Základní pozorování

Běžně budeme využívat definice z Engelkingovy Obecné topologie (General Topology, [11]). Na úvod však uveďme některá základní označení pro následující pasáže.

Definice 1.1.1. ($B(A,r)$.) Jestliže (X,ϱ) je metrický prostor, bod x v X a r je kladné reálné číslo, pak jako *otevřenou kouli se středem v bodě x a poloměrem r* označíme množinu $B(x,r) = \{y \in X : \varrho(x,y) < r\}$. Pro $A \subseteq X$ nechť

$$B(A,r) = \{y \in X : y \in B(x,r) \text{ pro nějaké } x \in A\}.$$

Definice 1.1.2. (Spojité a stejnoměrně spojité zobrazení.) Nechť (X,τ) a (Y,σ) jsou dva topologické prostory a $A \subseteq B \subseteq X$. Zobrazení $f: A \to Y$ je *spojité na A vzhledem k B*,

jestliže pro každé $x \in X$ a $V \in \sigma$ okolí $f(x)$ existuje $U \in \tau$ takové, že je $f(U \cap B) \subseteqq V$. Pokud $B = A$, říkáme, že f je *spojité na* A, a pokud $A = X$, stručně nazveme f *spojitým zobrazením.*

Pokud $(X,\mathcal{U})$ a $(Y,\mathcal{V})$ jsou uniformní prostory a A, B dvě podmnožiny X takové, že $A \subseteqq B \subseteqq X$. Zobrazení $f: A \to Y$ je *stejnoměrně spojité na* A *vzhledem k* B, pokud k libovolnému $V \in \mathcal{V}$ existuje $U \in \mathcal{U}$, pro něž platí $(f(x), f(y)) \in V$, jakmile $x \in A$, $y \in B$ a $(x, y) \in U$. Stejnoměrně spojitá zobrazení na A vzhledem k A budeme nazývat *stejnoměrně spojitá na* A.

Poznámka 1.1.3. Uvědomme si, že jsou-li X, Y_1, ..., Y_n topologické prostory, $n \in \mathbb{N}$, pak zobrazení $f = (f_1, \ldots, f_n)$ z X do $\prod_{k=1}^{n} Y_k = Y_1 \times \cdots \times Y_n$ je spojité, právě když všechna $f_1: X \to Y_1$, ..., $f_n: X \to Y_n$ jsou spojitá. Dokážeme-li proto, že spojité zobrazení definované na uzavřené podmnožině A prostoru X do Y lze spojitě rozšířit na $F: X \to Y$, pak pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ také každé spojité zobrazení $\tilde{f}: A \to Y^n$ půjde spojitě rozšířit na $\tilde{F}: X \to Y^n$. Speciálně umíme-li rozšiřovat spojitá zobrazení z A do $\mathbb{R}$, pak rovněž umíme rozšiřovat spojitá zobrazení z A do $\mathbb{C}$.

Podobně existuje-li pro uniformní prostory $(X,\mathcal{U})$ a $(Y,\mathcal{V})$ a podmnožinu A v X ke stejnoměrně spojitému zobrazení $f: A \to Y$ stejnoměrně spojité zobrazení $F: X \to Y$, $F|_A = f$, pak k libovolnému stejnoměrně spojitému $\tilde{f}: A \to Y^n$, $n \in \mathbb{N}$, existuje stejnoměrně spojité $\tilde{F}: X \to Y^n$ takové, že $F|_A = f$.

Poznámka 1.1.4. Pokud pro topologický prostor X (resp. uniformní prostor $(X,\mathcal{U})$), ve kterém leží neprázdná podmnožina A, umíme spojitě rozšířit spojitou (resp. stejnoměrně spojitou) funkci $f: A \to \mathbb{R}$ na $\tilde{F}: X \to \mathbb{R}$, pak existuje její spojité (resp. stejnoměrně spojité) rozšíření F na X, pro které navíc

$$\inf_{x \in X} \{F(x)\} = \inf_{a \in A} \{f(a)\}, \qquad \sup_{x \in X} \{F(x)\} = \sup_{a \in A} \{f(a)\}.$$

Stačí definovat

$$F(x) = \min\left\{\max\left\{\tilde{F}(x), \inf_{a \in A}\{f(a)\}\right\}, \sup_{a \in A}\{f(a)\}\right\}.$$

Pokud je f omezená, je i F omezená.

Kapitola 2

Rozšiřování omezených reálných funkcí z metrických prostorů

V této kapitole dokážeme mnoha způsoby slavnou Tietzeovu větu, která říká, že je-li (X, ϱ) metrický prostor a A jeho uzavřená podmnožina, pak každou omezenou spojitou reálnou funkci definovanou na A lze spojitě rozšířit na celé X.

2.1 Lebesgue 1907

První, jehož práci ohledně rozšiřování spojitých funkcí si předvedeme, je Henri Lebesgue. Jeho motivace se týkala studia Dirichletova problému. Uvedl, že je-li A omezená perfektní množina v rovině $\mathbb{R}^2$, na níž je definovaná spojitá omezená funkce f, potom existuje F spojitě rozšiřující f na celé $\mathbb{R}^2$. V důkaze rozložil síť čtverců s neprotínajícími se vnitřky a délkou strany $\frac{1}{2^n}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Funkci F definoval předpisem, který si uvedeme v důkazu, a pak zobrazení lineárně rozšířil na úsečky. My zde Lebesgueovu základní myšlenku z [24] zobecníme na $\mathbb{R}^n$ podle Tietzeova pozdějšího podobného přístupu ze článku [29].

Věta 2.1.1. *Jestliže A je uzavřená podmnožina eukleidovského prostoru $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, a f omezená spojitá reálná funkce definovaná na A, pak lze f spojitě rozšířit na zobrazení $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.*

Důkaz. Předpokládejme, že A je neprázdné, jinak tvrzení platí triviálně. Nechť $\mathcal{K}_0$ značí systém n–dimenzionálních krychlí s délkou hrany 1 a vrcholy s celočíselnými souřadnicemi, které neprotínají A. Symbolem $\mathcal{K}_1$ označujme systém n–dimenzionálních krychlí, které mají délku hrany $\frac{1}{2}$ a vrcholy se souřadnicemi z množiny $\left\{\frac{z}{2} : z \in \mathbb{Z}\right\}$, které neprotínají A a nejsou obsaženy v $\mathcal{K}_0$. Obecně máme-li definované $\mathcal{K}_0$, $\mathcal{K}_1$ až $\mathcal{K}_k$ pro nějaké $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, pak nechť $\mathcal{K}_{k+1}$ je systém n–dimenzionálních krychlí K s délkou hrany $\frac{1}{2^{k+1}}$ a vrcholy v množině $\left(\left\{\frac{z}{2^{k+1}} : z \in \mathbb{Z}\right\}\right)^n$ neprotínajících A a takových, že $K \not\subset \bigcup\limits_{i=0}^{k} \mathcal{K}_i \left(= \bigcup\limits_{i=0}^{k} \bigcup\limits_{H \in \mathcal{K}_i} H\right)$. Označme $\mathcal{K} = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} \mathcal{K}_i$.

Ve vrcholu $x \in X \setminus A$ nějaké krychle $K \in \mathcal{K}$ zadefinujme

$$F(x) = \lim_{\gamma \to 0+} \inf_{\{z \in A:\ \varrho(x,z) < \varrho(x,A)+\gamma\}} \{f(z)\}.$$

Označme $e_1 = [1, 0, \ldots, 0], e_2 = [0, 1, 0, \ldots 0], \ldots, e_n = [0, \ldots, 0, 1]$ kanonickou bázi v $\mathbb{R}^n$. Nechť $x = [x_1, \ldots, x_n]$ a $y = [y_1, \ldots, y_n]$ jsou dva body, v nichž jsme definovali F, se stejnými $(n-1)$ souřadnicemi (bez újmy na obecnosti $x_1 < y_1$ a $x_2 = y_2, \ldots, x_n = y_n$) a takové, že v žádném bodě $z = [z_1, x_2, \ldots, x_n]$, $x_1 < z_1 < y_1$, ještě F definované není. Pak jej lineárně rozšiřme na celou úsečku mezi body x, y.

Uvažujme, že máme F definované na stranách obdélníku $K \in \mathcal{K}$ bez újmy na obecnosti s vrcholy v bodech $[x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n]$, $[x_1 + a_1, x_2, x_3, \ldots, x_n]$, $[x_1, x_2 + a_2, x_3, \ldots, x_n]$ a $[x_1 + a_1, x_2 + a_2, x_3, \ldots, x_n]$ pro nějaká $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Potom jej pro z_1 v intervalu (x_1, y_1) mezi body $[z_1, x_2, x_3, \ldots, x_n]$ a $[z_1, x_2 + a_2, x_3, \ldots, x_n]$ definujme lineárně.

Obecně je-li F známé ve stěnách k–rozměrného kvádru z $\mathcal{K}$, $k \in \{1, \ldots, n\}$, tzn. pro $[x_1, \ldots, x_n] \in \mathbb{R}^n$ a nějaká reálná $a_1, \ldots, a_k > 0$ např. ve všech bodech

$$[x_1, x_2, \ldots, x_n] + \sum_{j=1}^{k} t_j a_j e_j : \qquad \text{kde } t_1, \ldots, t_k \in [0,1],\ t_1 = 0 \text{ nebo } t_1 = 1$$
$$\text{nebo } \ldots \text{ nebo } t_k = 0 \text{ nebo } t_k = 1,$$

a uvnitř tohoto kvádru zatím definované není, pak jej zde mezi body

$$[z_1, \ldots, z_{k-1}, x_k, \ldots, x_n] \quad \text{a} \quad [z_1, \ldots, z_{k-1}, x_k + a_k, \ldots, x_n],$$

kde $z_1 \in [x_1, x_1 + a_1], \ldots, z_{k-1} \in [x_{k-1}, x_{k-1} + a_{k-1}]$ (a aspoň jedno leží uvnitř intervalu), lineárně dodefinujeme.

Protože každý bod $x \in X \setminus A$ má kladnou vzdálenost δ od A a platí-li pro nějaké $k \in \mathbb{N}$, že $\frac{\sqrt{n}}{2^k} < \delta$, pak x určitě leží uvnitř nebo na hranici některé krychle z $\bigcup_{i=0}^{k} \mathcal{K}_i$. To znamená, že jsme v něm F určitě definovali. Na A položme $F = f$.

Jestliže x leží na hranici A, pak ke kladnému ε existuje $\delta > 0$ takové, že $|f(x) - f(z)| < \varepsilon$ pro všechna $z \in B(x, \delta) \cap A$. Označme k takové přirozené číslo, aby $\frac{\sqrt{n}}{2^k} < \frac{\delta}{4}$. Krychlí z $\bigcup_{i=0}^{k} \mathcal{K}_i$ protínajících $B\left(x, \frac{\delta}{4}\right)$ může být jenom konečně mnoho. Každá z nich má kladnou vzdálenost od x. Pokud existuje alespoň jedna, položme

$$\tilde{\delta} = \min_{\left\{K \in \bigcup_{i=0}^{n} \mathcal{K}_i:\ K \cap B\left(x, \frac{\delta}{4}\right) \neq \emptyset\right\}} \{\varrho(x, K)\},$$

v opačném případě $\tilde{\delta} = \frac{\delta}{4}$. Každý bod z množiny $B\left(x, \tilde{\delta}\right) \cap (X \setminus A)$ leží v krychli $K \in \mathcal{K}$, která je celá obsažená v $B\left(x, \frac{\delta}{2}\right)$.

Nechť y je vrchol některé krychle z $\mathcal{K}$ celé ležící v $B\left(x, \frac{\delta}{2}\right)$. Pro kladné γ menší než $\frac{\delta}{2} - \varrho(x, y)$ a bod $z \in A$ takový, že $\varrho(y, z) < \varrho(y, A) + \gamma$, je vzdálenost $\varrho(y, z) < \frac{\delta}{2}$. Proto $\varrho(x, z) \leqq \varrho(x, y) + \varrho(y, z) < \delta$, díky čemuž $f(z)$ leží v intervalu $(f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)$. Pro všechna y z $B\left(x, \tilde{\delta}\right) \cap (X \setminus A)$ tak musí platit

$$F(x) - \varepsilon \leqq F(y) \leqq F(x) + \varepsilon.$$

Na $X \setminus A$ vyplývá spojitost z toho, že každý bod leží v nejvýše 2^n krychlích z $\mathcal{K}$. Pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ a $K \in \mathcal{K}$ je restrikce $F|_K$ lipschitzovská s konstantou[1] $2^{k+1}M$, pokud $|f| \leqq M$ na A, protože F ve dvou sousedních vrcholech K, které jsou od sebe vzdáleny $\frac{1}{2^k}$, může nabývat hodnot M a $-M$, takže na úsečce s těmito krajními body má lipschitzovskou konstantu $2^{k+1}M$. Kdyby existovaly body $x, y \in K$ takové, že $|F(x) - F(y)| > 2^{k+1}M$, nebylo by $|F|$ omezené konstantou M. $\square$

Poznámka 2.1.2. Ačkoliv si Lebesgue tuto otázku nepokládá, zkusme nastíněný přístup použít za předpokladu, že na omezené[2] podmnožině A v metrickém prostoru (X, ϱ) máme omezenou stejnoměrně spojitou funkci f. Lze ji stejnoměrně spojitě rozšířit na $\mathbb{R}^n$? Odpověď zní, že ano.

Důkaz. Nechť $A \neq \emptyset$. Díky poznámce 7.0.2 můžeme o A můžeme předpokládat, že je uzavřená. Pro $\varepsilon > 0$ je možné najít $\delta > 0$ takové, aby pro všechna $x, y \in A$ ve vzdálenosti $\varrho(x, y) < \delta$ platilo $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Zvolme $k \in \mathbb{N}$, aby $\frac{\sqrt{n}}{2^k} < \delta$. Díky omezenosti A existuje pouze konečný počet krychlí z $\bigcup\limits_{i=0}^{k} \mathcal{K}_i$, které protínají $B\left(A, \frac{\delta}{2}\right)$. Nechť $\delta' \in (0, \delta)$ navíc splňuje

$$\delta' < \min_{\left\{K \in \bigcup\limits_{i=0}^{k} \mathcal{K}_i:\ K \cap B\left(A, \frac{\delta}{2}\right) \neq \emptyset\right\}} \{\varrho(K, A)\}.$$

Jelikož existence krychle $K \in \bigcup\limits_{i=0}^{k} \mathcal{K}_k$ se vzdáleností menší než $\frac{\delta'}{2}$ od A, tj. také protínající $B\left(A, \frac{\delta}{2}\right)$, vede ke sporu $\delta' < \varrho(K, A) < \frac{\delta'}{2}$, proto každé $y \in B\left(A, \frac{\delta'}{2}\right)$ leží jen v krychlích $K \in \mathcal{K}$ s délkou hrany nejvýše $\frac{1}{2^{n+1}} < \frac{\delta}{2}$. Takže každá taková krychle K je celá obsažena v δ–okolí A, tj. v $B(A, \delta)$, a odtud $|F(x) - F(y)| \leqq \varepsilon$, kdykoliv $x \in A$ a $y \in B\left(x, \frac{\delta'}{2}\right)$, čili F je stejnoměrně spojitá na A vzhledem k $\mathbb{R}^n$.

Pro pevné $r > 0$ nechť $k \in \mathbb{N}$ splňuje $\frac{1}{2^k} < r$. Každé $x \in \mathbb{R}^n \setminus B(A, r)$ leží v nějaké krychli $\mathcal{K}$ s délkou hrany alespoň r, tj. $x \in \bigcup\limits_{i=0}^{k} \mathcal{K}_i$. Z předchozího důkazu víme, že na každé krychli $K \in \bigcup\limits_{i=0}^{k} \mathcal{K}_i$ je $F|_K$ lipschitzovská s konstantou $2^{k+1}M$, pokud $|f| \leqq M$ na A. Pro každé $\delta \in \left(0, \frac{1}{2^k}\right)$ proniká δ–okolí bodu $x \in \bigcup\limits_{i=0}^{k} \mathcal{K}_i$ nejvýše 2^n krychlí z $\mathcal{K}$, a tak $F|_{\bigcup\limits_{i=0}^{k} \mathcal{K}_i}$ a odtud $F|_{X \setminus B(A,r)}$ jsou stejnoměrně spojité na $X \setminus B(A, r)$.

Díky poznámce 7.0.4 víme, že je F stejnoměrně spojitá na celém prostoru $\mathbb{R}^n$. $\square$

Příklad 2.1.3. Důkaz předchozí poznámky by selhal, kdyby A nebylo omezené, jak

[1] Reálná funkce F definovaná na metrickém prostoru (X, ϱ) je *lipschitzovská s konstantou* $L > 0$, pokud $|F(x) - F(y)| \leqq L \cdot \varrho(x, y)$ pro všechna $x, y \in X$. Každé lipschitzovské zobrazení je stejnoměrně spojité.

[2] Jak uvidíme později, tvrzení platí na metrických prostorech i pro neomezené podmnožiny A, avšak v tomto důkazu musíme sáhnout k výjimce, aby bylo možné pro $n \in \mathbb{N}$ najít δ–okolí A, které nebude protínat žádná krychle z $\bigcup\limits_{k=0}^{n} \mathcal{K}_k$. Že se jedná o důležitý předpoklad, ukazuje následující příklad 2.1.3.

ukazuje v rovině $\mathbb{R}^2$ diskrétní množina

$$A = \left\{ \left(2k, 1 - \frac{1}{k}\right),\ \left(2k + \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{k}\right),\ \left(2k + 1, 1 - \frac{1}{k}\right) \in \mathbb{R}^2 :\ k \in \mathbb{N} \right\}$$

a funkce

$$f\left(2k, 1 - \frac{1}{k}\right) = 0, \quad f\left(2k + \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{k}\right) = 1 \quad \text{a} \quad f\left(2k + 1, 1 - \frac{1}{k}\right) = 0 \qquad \text{pro } k \in \mathbb{N}.$$

Funkce F je nulová ve všech vrcholech s druhou souřadnicí větší nebo rovnou 1, a tak je nulová na celé množině $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ y \geqq 1\}$. Jenže v $\left\{f\left(2k + \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{k}\right) :\ k \in \mathbb{N}\right\}$ musí mít hodnotu 1, a tak F nemůže být stejnoměrně spojitá.

2.2 Tietze 1915

Následující oddíl se zakládá na práci [29] Heinricha Tietzeho, který se zabýval studiem Carathéodoryho–Fejérova problému o rovinných Jordanových křivkách. Pro zajímavost uveďme, že ji publikoval v roce 1915, když působil v Brně. Zatímco obvykle užívaná Tietzeova věta 2.2.7 hovoří o spojité funkci f definované na A, sám autor nejprve předpokládá, že f je definovaná na celém X a spojitá na A (nejen vzhledem k A, ale vzhledem k celému X) a tvrdí, že potom existuje funkce F spojitá na X, která se na A shoduje s f. K důkazu klasické Tietzeovy věty pak postačí spojitou funkci na A rozšířit na celé X, aby spojitost zůstala zachována i na hranici.

Předvedeme si dva důkazy prvního tvrzení. První z nich je vztažený k eukleidovskému prostoru $X = \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, ve kterém rozložíme síť n–dimenzionálních krychlí a funkci F postupně definujeme ve vrcholech, hranách, 2–dimenzionálních, ..., $(n-1)$–dimenzionálních stranách. Podobá se postupu Henriho Lebesguea z části 2.1 – Lebesgueův důkaz jsme zobecnili právě v duchu Tietzeho přístupu – avšak Tietze uvedený článek necituje a patrně tento výsledek neznal.

Věta 2.2.1. *Předpokládejme, že A je uzavřená podmnožina $\mathbb{R}^n$. Ke každé omezené reálné funkci $f :\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ spojité na A existuje $F :\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ spojitá na celém $\mathbb{R}^n$, která se na A shoduje s f a na jeho doplňku nabývá vyšších hodnot než f.*

Důkaz. Předpokládejme, že $A \neq \emptyset$, jinak je tvrzení triviální. Stejně jako ve větě 2.1.1 mějme systém $\mathcal{K} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{K}_i$ n–dimenzionálních krychlí takových, že pro libovolné $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ mají krychle z $\mathcal{K}_k$ vrcholy v množině $\left(\left\{\frac{z}{2^k} :\ z \in \mathbb{Z}\right\}\right)^n$, délku hrany $\frac{1}{2^k}$, neprotínají A a $K \not\subset \bigcup_{i=0}^{k-1} \mathcal{K}_i$. Pro $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ nechť

$$M_k = \sup_{\{y \in K:\ K \in \mathcal{K}_k\}} \{f(y)\}.$$

Jestliže $x \in X \setminus A$ je vrchol nějaké krychle $K \in \mathcal{K}$, definujme

$$G(x) = \max_{\{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}:\ x \in \mathcal{K}_k\}} \{M_k\}.$$

Indexů $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ takových, že $x \in \mathcal{K}_k$, může být nejvýše 2^n. V každém vrcholu krychle $K \in \mathcal{K}$ má z definice G hodnotu větší nebo rovnu funkční hodnotě v libovolném bodě této krychle. Nyní stejně jako v citované větě G postupně lineárně dodefinujme na hrany krychlí, potom stěny, ... a nakonec na celé krychle z $\mathcal{K}$. Na A položme $G = f$.

Jestliže x leží na hranici A, pak ke kladnému ε existuje $\delta > 0$ takové, že $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ pro všechna $y \in B(x, \delta)$. Speciálně všechny krychle z $\mathcal{K}$, které obsahují $y \in B\left(x, \frac{\delta}{2\sqrt{n}}\right)$, leží v $B(x, \delta)$, což implikuje $|G(x) - G(y)| \leqq \varepsilon$ a spojitost G na A. Na $X \setminus A$ vyplývá spojitost z toho, že jsme G konstruovali lineárně mezi jednotlivými body.

Požadujeme-li $F > f$ na $X \setminus A$, stačí pro $x \in X$ položit $F(x)$ jako součet $G(x)$ a vzdálenosti x od A. $\square$

Poznámka 2.2.2. Doplňme, že pokud je f stejnoměrně spojitá na omezené podmnožině A metrického prostoru (X, ϱ), pak je G (a tím pádem i F) stejnoměrně spojitá na celém $\mathbb{R}^n$.

Důkaz. Nechť $A \neq \emptyset$. Podobně jako v důkazu poznámky 2.1.2 je vidět, že je G stejnoměrně spojitá, stačí se obrátit k poznámce 7.0.4. K ukázání stejnoměrné spojitosti na A (vzhledem k $\mathbb{R}^n$) najděme k $\varepsilon > 0$ takové $\delta > 0$, aby pro všechna $x \in A$ a $y \in B(x, \delta)$ platilo $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Dále ať $k \in \mathbb{N}$ splňuje $\frac{\sqrt{n}}{2^k} < \delta$ a pro $\delta' \in (0, \delta)$ platí

$$\delta' < \min_{\left\{K \in \bigcup_{i=0}^{k} \mathcal{K}_i:\ K \cap B\left(A, \frac{\delta}{2}\right) \neq \emptyset\right\}} \{\varrho(K, A)\}.$$

Pak $|G(x) - G(y)| \leqq \varepsilon$, kdykoliv $x \in A$ a $y \in B\left(x, \frac{\delta'}{2}\right)$.

Pro pevné $r > 0$ je $F|_{X \setminus B(A,r)}$ lipschitzovská a stejnoměrně spojitá na $X \setminus B(A, r)$. $\square$

Příklad 2.2.3. Ukažme si, že předpoklad omezenosti množiny A v předchozí poznámce byl klíčový. V rovině $X = \mathbb{R}^2$ nechť

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \in [n, n+1),\ y \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right] \text{ pro nějaké } n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Definujme

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R},\ y \leqq \frac{3}{2}, \\ 1, & x \in \mathbb{R},\ y > \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Množina A je uzavřená v X, ale není omezená, a funkce f je stejnoměrně spojitá na A vzhledem k X. Jenže v každém bodě $[n, 1]$, $n \in \mathbb{N}$, má G hodnotu 1, neboť supremum f přes čtverec s vrcholy $[n, 1]$, $[n+1, 1]$, $[n+1, 2]$, $[n, 2]$ má hodnotu 1. Ale v bodě $z = \left[n, 1 - \frac{1}{n}\right]$, $n \in \mathbb{N}$, nabývá G hodnoty $f(z) = 0$, takže G není stejnoměrně spojitá na A.

Elegantnější a především obecnější důkaz věty 2.2.1 pro metrický prostor X podává Tietze v tomtéž článku.

Věta 2.2.4. *Nechť A je uzavřená podmnožina metrického prostoru (X, ϱ) a $f :\ X \to \mathbb{R}$ omezená reálná funkce, která je spojitá na A. Potom existuje funkce $F :\ X \to \mathbb{R}$ spojitá na celém X taková, že $F = f$ na A a $F > f$ na $X \setminus A$.*

Důkaz. V případě, že A je prázdná množina, můžeme F definovat jako konstantní funkci s libovolnou hodnotou větší než $\sup\limits_{z\in X}\{f(z)\}$. Pro $A \neq \emptyset$ bez újmy na obecnosti předpokládejme, že existují $\lambda > 0$ a $M > 0$ tak, že $M \geqq f > \lambda$ na X. Definujme

$$G(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A, \\ \sup\limits_{z\in X}\left\{\frac{f(z)}{(1+\varrho(x,z))^{\frac{1}{\varrho(x,A)}}}\right\}, & x \in X \setminus A. \end{cases}$$

Vidíme, že $G(x) \geqq f(x)$ na X.

Ukažme, že G je spojitá na A. Na vnitřku A se shoduje s f a z předpokladu je spojitá. Nechť x leží na hranici A a je dáno kladné $\varepsilon < \frac{\lambda}{2}$. Množina

$$U_1 \;=\; \{z \in X:\; f(x) - \varepsilon < f(z) < f(x) + \varepsilon\}$$

je díky spojitosti f na A okolím x. Nechť $\vartheta > 0$ je poloměr koule $B(x,\vartheta)$, která leží v U_1, a nechť $\delta > 0$ tak, že

$$\left(1 + \frac{\vartheta}{2}\right)^{\frac{1}{\delta}} > \frac{2M}{\lambda}.$$

Pokračujme definicí $U_2 = B\left(x, \frac{\vartheta}{2}\right) \cap B(x,\delta)$. Pro $y \in U_2 \cap (X \setminus A)$ a $z \in X \setminus U_1$ je

$$\frac{f(z)}{(1+\varrho(y,z))^{\frac{1}{\varrho(y,A)}}} \leqq \frac{M}{\left(1+\frac{\vartheta}{2}\right)^{\frac{1}{\delta}}} < \frac{M}{\frac{2M}{\lambda}} < \frac{\lambda}{2} < f(x) - \frac{\lambda}{2} < f(x) - \varepsilon.$$

Jelikož $G(y) \geqq f(y) > f(x) - \varepsilon$, potom

$$\begin{aligned} f(x) - \varepsilon \;&<\; f(y) \leqq G(y) = \sup_{z\in X}\left\{\frac{f(z)}{(1+\varrho(y,z))^{\frac{1}{\varrho(y,A)}}}\right\} = \\ &=\; \sup_{z\in U_1}\left\{\frac{f(z)}{(1+\varrho(y,z))^{\frac{1}{\varrho(y,A)}}}\right\} \leqq \sup_{z\in U_1}\{f(z)\} \leqq f(x) + \varepsilon \end{aligned}$$

a funkce G je spojitá v $x \in A$.

Zobrazení G je spojité na $X \setminus A$, protože je stejnoměrně spojité na $X \setminus B(A,r)$ pro každé $r > 0$. Každá metrika ϱ je podle poznámky 7.0.5 stejnoměrně ekvivalentní omezené metrice $\min\{\varrho, 1\}$, a proto bez újmy na obecnosti předpokládejme, že ϱ je omezená číslem 1. Definujme pro $x \in X \setminus A$ a $z \in X$

$$h(x,z) = (1+\varrho(x,z))^{\frac{1}{\varrho(x,A)}} = \exp\left(\frac{\log(1+\varrho(x,z))}{\varrho(x,A)}\right).$$

Jelikož je čitatel i jmenovatel exponentu omezený a stejnoměrně spojitý na $(X \setminus B(A,r)) \times A$, je i funkce $h|_{(X\setminus B(A,r))\times A}$ stejnoměrně spojitá na $(X \setminus B(A,r)) \times A$. K libovolnému $\varepsilon > 0$ speciálně existuje $\delta > 0$ takové, že pro libovolné $z \in X$ a všechna $x, y \in X \setminus B(A,r)$ ve vzdálenosti $\varrho(x,y) < \delta$ platí

$$|h(x,z) - h(y,z)| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Pro $x \in X \setminus B(A,r)$ existuje $z_x \in X$ takové, že $G(x) < f(z_x)\, h(x, z_x) + \varepsilon$. Vezměme libovolné $y \in B(x,\delta) \setminus B(A,r)$, pro něž $G(x) \geqq G(y)$. Pak

$$G(x) - G(y) < f(z_x)\, h(x, z_x) + \varepsilon - f(z_x)\, h(y, z_x) \leqq M \cdot \frac{\varepsilon}{M} + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

a tak, ať vezmeme $r > 0$ jakékoliv, funkce $G|_{X \setminus B(A,r)}$ je stejnoměrně spojitá na $X \setminus B(A,r)$.

Na závěr víme, že $x \mapsto \varrho(x, A)$ je stejnoměrně spojité zobrazení nulové na A a s kladnými hodnotami na $X \setminus A$. Zbývá položit

$$F(x) = G(x) + \varrho(x, A), \qquad x \in X.$$

□

Poznámka 2.2.5. K Tietzeho práci doplňme poznámku o stejnoměrné spojitosti. Jestliže (X, ϱ) je metrický prostor s podmnožinou A a f omezené zobrazení z X do $\mathbb{R}$, které je stejnoměrně spojité na A vzhledem k X, pak existuje funkce $F : X \to \mathbb{R}$ stejnoměrně spojitá na A, která na $X \setminus A$ nabývá větších hodnot než f.

Důkaz. Díky poznámce 7.0.2 můžeme opět předpokládat, že A je uzavřená v X, navíc neprázdná a definovat funkci G stejným předpisem jako v minulém důkazu. Protože $G|_{X \setminus B(A,r)}$ je stejnoměrně spojitá pro jakékoliv $r > 0$, podle poznámky 7.0.4 stačí ověřit stejnoměrnou spojitost G na A vzhledem k X. Pro $\varepsilon > 0$ existuje $\vartheta > 0$, že pro libovolné $x \in A$ a $y \in B(x, \vartheta)$ platí $f(x) - \varepsilon < f(z) < f(x) + \varepsilon$. Nechť $\delta > 0$ je takové, aby $\left(1 + \frac{\vartheta}{2}\right)^{\frac{1}{\delta}} > \frac{2M}{\lambda}$. Pro libovolné $x \in A$, $y \in B\left(x, \frac{\vartheta}{2}\right) \cap B(x, \delta) \cap (X \setminus A)$ a $z \in X$ splňující $f(z) \notin (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)$ je vzdálenost $\varrho(y, z)$ alespoň $\frac{\vartheta}{2}$, čili

$$\frac{f(z)}{(1 + \varrho(y,z))^{\frac{1}{\varrho(y,A)}}} \leqq \frac{M}{\left(1 + \frac{\vartheta}{2}\right)^{\frac{1}{\delta}}} < \frac{M}{\frac{2M}{\lambda}} < \frac{\lambda}{2} < f(x) - \frac{\lambda}{2} < f(x) - \varepsilon.$$

Opět jako v důkazu věty

$$f(x) - \varepsilon < G(y) = \sup_{\{z \in X:\ f(z) \in (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)\}} \left\{ \frac{f(z)}{(1 + \varrho(y,z))^{\frac{1}{\varrho(y,A)}}} \right\} \leqq f(x) + \varepsilon.$$

□

Ať už na základě předešlé věty 2.2.4 či v eukleidovském prostoru tvrzení 2.2.1 můžeme přednést tradiční Tietzeovu větu. Uveďme ji jako důsledek následujícího pozorování.

Věta 2.2.6. *Nechť A je uzavřená podmnožina metrického prostoru (X, ϱ) a nechť ke každé omezené funkci $g : X \to \mathbb{R}$, která je spojitá na A vzhledem k X, existuje funkce $G : X \to \mathbb{R}$ spojitá na celém X taková, že $G|_A = g|_A$. Potom libovolná spojitá omezená reálná funkce f definovaná na A lze spojitě rozšířit na F spojitou na X.*

Důkaz. Uvažme, že můžeme předpokládat $A \neq \emptyset$. Abychom mohli využít předpoklad tvrzení, stačí dodefinovat f na celé X tak, aby bylo omezené a spojité na A (vzhledem

k X). K libovolnému $x \in A$ a $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $z \in B(x, \delta) \cap A$ je $|f(z) - f(x)| < \varepsilon$. Nechť $y \in B\left(x, \frac{\delta}{3}\right)$. Potom všechna $z \in A$ taková, že $\varrho(y, z) < \varrho(y, A) + \frac{\delta}{3}$, leží v $B(x, \delta)$, protože

$$\varrho(x, z) \leqq \varrho(x, y) + \varrho(y, z) < \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} = \delta.$$

Zobrazení g definujeme jako

$$g(y) = \begin{cases} f(y), & y \in A, \\ \lim\limits_{\delta \to 0+} \sup\limits_{\{z \in A:\ \varrho(y,z) < \varrho(y,A) + \delta\}} \{f(z)\}, & y \in X \setminus A. \end{cases}$$

To je omezené, spojité na A vzhledem k X a na A se shoduje s f. Podle předpokladu existuje spojitá funkce F na X, která se s $g|_A$ shoduje na A. □

Důsledek 2.2.7. *Je-li (X, ϱ) metrický prostor a A jeho uzavřená podmnožina, pak každá spojitá omezená funkce f na A lze spojitě rozšířit na celý prostor X.*

Důkaz. Tvrzení vyplývá z vět 2.2.4 a 2.2.6. □

Poznámka 2.2.8. Autor neudává obdobnou variantu předchozího důsledku pro stejnoměrnou spojitost: Předpokládejme, že (X, ϱ) je metrický prostor s podmnožinou A a že ke každé omezené reálné funkci g z X do $\mathbb{R}$, která je stejnoměrně spojitá na A vzhledem k X, existuje stejnoměrně spojitá funkce $G: X \to \mathbb{R}$ taková, že $G|_A = g|_A$. Potom každá omezená stejnoměrně spojitá reálná funkce f definovaná na A lze stejnoměrně spojitě rozšířit na X.

Důkaz. Opět definujme stejnoměrně spojitou funkci

$$g(y) = \begin{cases} f(y), & y \in A, \\ \lim\limits_{\delta \to 0+} \sup\limits_{\{z \in A:\ \varrho(y,z) < \varrho(y,A) + \delta\}} \{f(z)\}, & y \in X \setminus A, \end{cases}$$

Podle existuje stejnoměrně spojité zobrazení $F: X \to \mathbb{R}$ takové, že

$$F|_A = g|_A = f.$$

□

Poznámka 2.2.9. Z poznámek 2.2.5 a 2.2.8 vyplývá, že každou omezenou stejnoměrnou spojitou reálnou funkci f definovanou na podmnožině metrického prostoru (X, ϱ) lze stejnoměrně spojitě rozšířit na celé X.

2.3 Poussin 1916

Chronologicky zaujímá další místo Charles Jean de la Vallée Poussin, který ukázal, že je-li A uzavřená perfektní podmnožina $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, potom každou omezenou spojitou reálnou funkci na A lze spojitě rozšířit na $\mathbb{R}^n$. Tvrzení lze však uvést v obecnější podobě, jak si představíme v podkapitole 5.1.

2.4 Brouwer 1918

Podobný případ nastává u Brouwerovy práce z roku 1918. Autor tvrdí, že omezená reálná funkce definovaná na uzavřené podmnožině $\mathbb{R}^n$ lze spojitě prodloužit na celé $\mathbb{R}^n$. Opět lze tvrzení zobecnit i na zobrazení do jiných prostorů a tímto tématem se budeme zabývat v části 5.2.

2.5 Bohr 1918

Další přístup objevíme v Carathéodoryově knize [4]. V předmluvě připisuje autor důkaz Haraldu Bohrovi. Nejprve se tvrzení ukazuje pro omezené funkce a pak jej zobecňuje na nezáporné a i neomezené funkce, jak si předvedeme v části 4.1. Harald Bohr vyslovuje, že každou omezenou reálnou spojitou funkci f z uzavřené podmnožiny A v $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, lze spojitě rozšířit na celé $\mathbb{R}^n$, ale bez problémů můžeme tvrzení vyslovit pro obecný metrický prostor.

Věta 2.5.1. *Nechť (X, ϱ) je metrický prostor a nechť A je jeho uzavřená podmnožina. Každé spojité zobrazení $f: A \to [0,1]$ lze spojitě rozšířit na $F: X \to [0,1]$.*

Důkaz. Pokud $A \neq \emptyset$, definujme pro $x \in X \setminus A$ a $r > 0$

$$\psi(x,r) = \begin{cases} 0, & A \cap B(x,r) = \emptyset, \\ \sup\limits_{y \in A \cap B(x,r)} \{f(y)\}, & A \cap B(x,r) \neq \emptyset. \end{cases}$$

Obor hodnot této funkce leží v intervalu $[0,1]$. Ukážeme, že

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A, \\ \frac{1}{\varrho(x,A)} \int\limits_{\varrho(x,A)}^{2\varrho(x,A)} \psi(x,r)\, dr, & x \in X \setminus A, \end{cases}$$

je spojitým rozšířením f na X.

Pro $\delta > 0$, $x \in X \setminus A$ a $y \in B(x,\delta) \cap (X \setminus A)$ dostáváme $B(y,r) \subset B(x, r+\delta)$ pro libovolné $r > 0$ a $\varrho(x,A) \leqq \varrho(y,A) + \delta \leqq \varrho(x,A) + 2\delta$, takže platí

$$\begin{aligned} \int\limits_{\varrho(y,A)}^{2\varrho(y,A)} \psi(y,r)\, dr &\leqq \int\limits_{\varrho(y,A)}^{2\varrho(y,A)} \psi(x, r+\delta)\, dr = \int\limits_{\varrho(y,A)+\delta}^{2\varrho(y,A)+\delta} \psi(x,r)\, dr \leqq \\ &\leqq \int\limits_{\varrho(x,A)}^{2\varrho(x,A)+3\delta} \psi(x,r)\, dr \leqq \int\limits_{\varrho(x,A)}^{2\varrho(x,A)} \psi(x,r)\, dr + 3\delta. \end{aligned}$$

Symetricky získáváme

$$\int\limits_{\varrho(x,A)}^{2\varrho(x,A)} \psi(x,r)\, dr \leqq \int\limits_{\varrho(y,A)}^{2\varrho(y,A)} \psi(y,r)\, dr + 3\delta,$$

takže díky (stejnoměrné) spojitosti $x \mapsto \varrho(x,A)$ je F spojité na $X \setminus A$.

Nechť $x \in A$ a $\varepsilon > 0$. Pak existuje $\delta > 0$ takové, že

$$f(x) - \varepsilon < f(y) < f(x) + \varepsilon \qquad \text{pro } y \in B(x, 3\delta) \cap A.$$

Speciálně pro všechna $y \in B(x, \delta)$ a $r \in (\varrho(y, A), 2\varrho(y, A))$ je $B(y, r) \subset B(x, 3\delta)$, takže

$$f(x) - \varepsilon < \psi(y, r) \leqq f(x) + \varepsilon \qquad \text{a} \qquad f(x) - \varepsilon < F(y) \leqq f(x) + \varepsilon.$$

□

Poznámka 2.5.2. Dále lze uvedený postup využít i pro stejnoměrnou spojitost: každou stejnoměrně spojitou funkci z libovolné podmnožiny $A \subseteqq X$ do $[0, 1]$ můžeme stejnoměrně spojitě rozšířit na X.

Důkaz. Jak jsme viděli, k $\varepsilon > 0$ lze najít $\delta > 0$, aby pro všechna $x \in A$ a $y \in B(x, \delta)$ bylo $f(x) - \varepsilon < F(y) < f(x) + \varepsilon$. Zobrazení $x \mapsto \frac{1}{\varrho(x,A)}$ a $x \mapsto \int\limits_{\varrho(x,A)}^{2\varrho(x,A)} \psi(x, r)\, dr$ jsou stejnoměrně spojitá a omezená na $X \setminus B(A, r)$ pro libovolné $r > 0$. Podle poznámky 7.0.3 je $F|_{X \setminus B(A,r)}$ stejnoměrně spojité. Odvolejme se na poznámku 7.0.4, podle níž je pak i F stejnoměrně spojité na X. □

2.6 Hausdorff 1919

Felix Hausdorff v roce 1919 dokázal ve své práci [16] Tietzeovu větu dvěma způsoby. První přístup lze zobecnit i mimo metrické prostory a předvedeme si jej v odstavci 3.1. Neomezenými funkcemi se budeme zabývat v podkapitole 4.2. Nyní uveďme do podrobností autorův přímý důkaz Tietzeovy věty pro metrické prostory pomocí jednoduchého předpisu.

Věta 2.6.1. *Ke každé omezené spojité reálné funkci f z uzavřené podmnožiny A metrického prostoru (X, ϱ) existuje její spojité rozšíření F na X.*

Důkaz. Hledanou funkci můžeme definovat předpisem

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A, \\ \inf\limits_{a \in A} \left\{ f(a) + \frac{\varrho(x,a)}{\varrho(x,A)} - 1 \right\}, & x \in X \setminus A. \end{cases}$$

Jestliže $|f|$ je omezená konstantou M, pak i $|F|$ je omezená konstantou M, neboť pro $x \in X \setminus A$ je $\left(\frac{\varrho(x,a)}{\varrho(x,A)} - 1\right)$ nezáporné a existují $a \in A$ taková, že rozdíly $\left(\frac{\varrho(x,a)}{\varrho(x,A)} - 1\right)$ jsou libovolně malé.

Pro libovolné $r > 0$ ukažme lipschitzovskost zobrazení $F|_{X \setminus B(A,r)}$, z čehož vyplývá spojitost F na $X \setminus A$. Buďte x a y dva body z $X \setminus B(A, r)$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme $F(x) \geqq F(y)$. Pro jakékoliv $\varepsilon > 0$ existuje $a_y \in A$ takové, že

$$F(y) > f(a_y) + \frac{\varrho(y, a_y)}{\varrho(y, A)} - 1 - \varepsilon.$$

Pak

$$\begin{aligned} F(x) - F(y) &< \left(f(a_y) + \tfrac{\varrho(x,a_y)}{\varrho(x,A)} - 1\right) - \left(f(a_y) + \tfrac{\varrho(y,a_y)}{\varrho(y,A)} - 1 - \varepsilon\right) = \\ &= \tfrac{\varrho(x,a_y)}{\varrho(x,A)} - \tfrac{\varrho(y,a_y)}{\varrho(y,A)} + \varepsilon = \tfrac{\varrho(x,a_y)\cdot\varrho(y,A) - \varrho(y,a_y)\cdot\varrho(x,A)}{\varrho(x,A)\cdot\varrho(y,A)} + \varepsilon = \\ &= \tfrac{\varrho(x,a_y)\cdot(\varrho(y,A) - \varrho(x,A)) + \varrho(x,A)\cdot(\varrho(x,a_y) - \varrho(y,a_y))}{\varrho(x,A)\cdot\varrho(y,A)} + \varepsilon \leqq \\ &\leqq \tfrac{\varrho(x,a_y) + \varrho(x,A)}{\varrho(x,A)\cdot\varrho(y,A)} \cdot \varrho(x,y) + \varepsilon \end{aligned}$$

Pokud $\varrho \leqq 1$ na $X \times X$, pak pro libovolná $x, y \in X \setminus B(A,r)$ platí $|F(x) - F(y)| \leqq \frac{2}{r^2} \cdot \varrho(x,y)$. tudíž $F|_{X \setminus B(A,r)}$ je lipschitzovská vzhledem k metrice $\min\{\varrho, 1\}$ a podle poznámky 7.0.5 je $F|_{X \setminus B(A,r)}$ vzhledem k metrice ϱ stejnoměrně spojitá.

Funkce F je spojitá na A vzhledem k X. K důkazu tohoto kroku zvolme $x \in A$, $\tilde{\delta} > 0$ a $y \in B\left(x, \tilde{\delta}\right) \cap (X \setminus A)$. Nyní existuje $a_y \in A$ takové, že

$$F(y) > f(a_y) + \tfrac{\varrho(y,a_y)}{\varrho(y,A)} - 1 - \tilde{\delta},$$

Pak

$$\begin{aligned} \varrho(y,a_y) &< \varrho(y,A) \cdot \left(F(y) - f(a_y) + 1 + \tilde{\delta}\right) < \tilde{\delta} \cdot \left(2M + 1 + \tilde{\delta}\right), \\ \varrho(x,a_y) &< \varrho(x,y) + \varrho(x,a_y) < \tilde{\delta} \cdot \left(2M + 2 + \tilde{\delta}\right). \end{aligned}$$

Funkce f je spojitá na A, a tak k libovolnému $x \in A$ a $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, že pro $a \in B(x,\delta) \cap A$ platí $|f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Pro $x \in A$ zvolme proto $\tilde{\delta} \in \left(0, \frac{\varepsilon}{2}\right)$, aby $\tilde{\delta} \cdot \left(2M + 2 + \tilde{\delta}\right) < \delta$. Pak

$$F(y) > f(a_y) + \frac{\varrho(y,a_y)}{\varrho(y,A)} - 1 - \frac{\varepsilon}{2} > f(x) - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varrho(y,a_y)}{\varrho(y,A)} - 1 - \frac{\varepsilon}{2} \geqq F(x) - \varepsilon.$$

Dále pro $y \in B\left(x, \frac{\delta}{3}\right) \cap (X \setminus A)$ nalezneme $b_y \in A$ ve vzdálenosti $\varrho(y,b_y) < \varrho(y,A) \cdot \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Protože

$$\varrho(x,b_y) \leqq \varrho(x,y) + \varrho(y,b_y) < \varrho(x,y) + \varrho(y,A) \cdot \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) < \frac{\delta \cdot \left(2 + \frac{\varepsilon}{2}\right)}{3},$$

pokud $\varepsilon < 2$, leží $b_y \in B(x,\delta)$, takže podle definice platí

$$F(y) \leqq f(b_y) + \frac{\varrho(y,b_y)}{\varrho(y,A)} - 1 < f(x) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varrho(y,A) \cdot \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)}{\varrho(y,A)} - 1 = F(x) + \varepsilon.$$

□

Poznámka 2.6.2. Ani Hausdorff se nezabýval stejnoměrnou spojitostí. Přesto i z jeho předpisu funkce F vyplývá, že jestliže je navíc f stejnoměrně spojitá na A (přičemž A je libovolná, ne nutně uzavřená podmnožina X), pak je zkonstruovaná F stejnoměrně spojitá na X.

Důkaz. Nejprve díky poznámce 7.0.2 můžeme bez újmy na obecnosti přepokládat, že A je uzavřená. Funkce F je stejnoměrně spojitá na A vzhledem k X: pro $\varepsilon > 0$ nechť je $\delta > 0$

tak, aby bylo $\frac{\delta}{2M+2+\delta} < \frac{\varepsilon}{2}$ a aby pro všechna $x, a \in A$ ve vzdálenosti $\varrho(x,a) < \delta$ platilo $|f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Zvolme libovolné $x \in A$, $y \in B(x,\delta) \cap (X \setminus A)$ a k němu najděme $a_y \in A$ splňující

$$F(y) > f(a_y) + \frac{\varrho(y,a_y)}{\varrho(y,A)} - 1 - \frac{\delta}{2M+2+\delta}.$$

Pak

$$F(y) > f(a_y) + \frac{\varrho(y,a_y)}{\varrho(y,A)} - 1 - \frac{\delta}{2M+2+\delta} > f(x) - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} \geqq F(x) - \varepsilon.$$

Pro $y \in B\left(x, \frac{\delta}{3}\right)$ a $\varepsilon \in (0,2)$ díky $b_y \in A$ takovému, že $y \in B(x,\delta) \cap (X \setminus A)$, získáváme

$$F(y) < f(x) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varrho(y,A) \cdot \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)}{\varrho(y,A)} - 1 = F(x) + \varepsilon.$$

Protože z předchozího důkazu víme, že pro libovolné $r > 0$ je $F|_{X \setminus B(A,r)}$ stejnoměrně spojitá, podle poznámky 7.0.4 je F na celém X stejnoměrně spojitá. □

Popsaný přístup se dá využít také k důkazu tvrzení podobného větě 2.2.4.

Věta 2.6.3. *Ke každé zdola omezené reálné funkci $f: X \to \mathbb{R}$ definované na metrickém prostoru (X, ϱ) a spojité na uzavřené podmnožině A prostoru X existuje funkce $F: X \to \mathbb{R}$ spojitá na celém X, která se na A rovná s f a na doplňku $F(x) < f(x)$, $x \in X \setminus A$.*

Důkaz. Podobně jako v důkazu předešlé věty lze přímo využít předpis

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A, \\ \inf\limits_{z \in X} \left\{ f(z) + \frac{\varrho(x,z)}{\varrho(x,A)} \right\} - \varrho(x,A), & x \in X \setminus A. \end{cases}$$

□

2.7 Kerékjártó 1923

Elegantní předpis pro omezené funkce předkládá Béla Kerékjártó roku 1923 ve článku [23]. Později jej přebírá Jean Dieudonné ve své knize [8], podle níž důkaz uvedeme my.

Věta 2.7.1. *Nechť (X, ϱ) je metrický prostor a A jeho uzavřená podmnožina. Každá omezená spojitá funkce $f: A \to \mathbb{R}$ lze spojitě rozšířit na $F: X \to \mathbb{R}$.*

Důkaz. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že podmnožina A je neprázdná a že platí $1 \leqq f \leqq 2$. Slíbená funkce F je pak tvaru

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A, \\ \frac{\inf\limits_{a \in A} \{f(a) \cdot \varrho(x,a)\}}{\varrho(x,A)}, & x \in X \setminus A. \end{cases}$$

Pro ni platí $1 \leqq \inf\limits_{a\in A}\{f(a)\} \leqq F(x)$ pro $x \in X$. Protože pro $x \in X \setminus A$ a libovolné $\varepsilon > 0$ existuje $a_x \in A$ takové, že $\frac{\varrho(x,a_x)}{\varrho(x,A)} < 1 + \frac{\varepsilon}{2}$, je

$$F(x) < \frac{f(a_x)\cdot\varrho(x,a_x)}{\varrho(x,A)} < f(a_x) + \varepsilon \leqq \sup_{a\in A}\{f(a)\} + \varepsilon,$$

takže $\sup\limits_{x\in X}\{F(x)\} = \sup\limits_{a\in A}\{f(a)\} \leqq 2$.

Funkce F je spojitá na $X \setminus A$, neboť $F|_{X\setminus B(A,r)}$ je pro každé $r > 0$ podle poznámky 7.0.5 stejnoměrně spojitá, neboť je dokonce vzhledem k metrice $\min\{\varrho, 1\}$ lipschitzovská. Podobně jako v průběhu důkazu věty 2.6.1 totiž pro $\varepsilon > 0$, $x, y \in X \setminus B(A,r)$, $F(x) \geqq F(y)$ a $a_y \in A$ takové, že $F(y) \leqq \frac{f(a_y)\cdot\varrho(y,a_y)}{\varrho(y,A)} + \varepsilon$, dostaneme vztah

$$\begin{aligned} F(x) - F(y) &< \tfrac{f(a_y)\cdot\varrho(x,a_y)}{\varrho(x,A)} - \tfrac{f(a_y)\cdot\varrho(y,a_y)}{\varrho(y,A)} + \varepsilon \leqq \\ &\leqq f(a_y)\cdot\left(\tfrac{\varrho(x,a_y)}{\varrho(x,A)} - \tfrac{\varrho(y,a_y)}{\varrho(y,A)}\right) + \varepsilon \leqq \\ &\leqq 2\cdot\tfrac{\varrho(x,a_y)+\varrho(x,A)}{\varrho(x,A)\cdot\varrho(y,A)}\cdot\varrho(x,y) + \varepsilon \end{aligned}$$

Zbývá ověřit spojitost na A. K $x \in A$ a $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $a \in B(x,\delta) \cap A$ je $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Pro $y \in B\left(x, \frac{\delta}{4}\right) \cap (X \setminus A)$ platí

$$\inf_{a\in A\setminus B(x,\delta)}\{f(a)\cdot\varrho(y,a)\} \geqq \inf_{a\in A\setminus B(x,\delta)}\{\varrho(x,a) - \varrho(x,y)\} \geqq \frac{3}{4}\delta,$$

zatímco $f(x)\cdot\varrho(y,x) \leqq \frac{\delta}{2}$, takže

$$F(y) = \frac{\inf\limits_{a\in A}\{f(a)\cdot\varrho(y,a)\}}{\varrho(y,A)} = \frac{\inf\limits_{a\in B(x,\delta)\cap A}\{f(a)\cdot\varrho(y,a)\}}{\varrho(y,A)}$$

a

$$\begin{aligned} F(y) &\geqq \frac{(f(x)-\varepsilon)\cdot\inf\limits_{a\in B(x,\delta)\cap A}\{\varrho(y,a)\}}{\varrho(y,A)} = (f(x)-\varepsilon)\cdot\tfrac{\varrho(y,A)}{\varrho(y,A)} = F(x) - \varepsilon, \\ F(y) &\leqq \frac{(f(x)+\varepsilon)\cdot\inf\limits_{a\in B(x,\delta)\cap A}\{\varrho(y,a)\}}{\varrho(y,A)} = (f(x)+\varepsilon)\cdot\tfrac{\varrho(y,A)}{\varrho(y,A)} = F(x) + \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Poznámka 2.7.2. Tvrzení lze rozšířit i na stejnoměrnou spojitost: každá stejnoměrně spojitá omezená reálná funkce f definovaná na podmnožině A metrického prostoru (X, ϱ) může být stejnoměrně spojitě rozšířena na $F: X \to \mathbb{R}$.

Důkaz. Díky poznámce 7.0.2 předpokládejme, že $A \neq \emptyset$ je uzavřená. Jak již z důkazu víme, je F stejnoměrně spojitá na $X \setminus B(A,r)$ pro jakékoliv $r > 0$ (zde se dokonce ještě nevyužívá ani spojitost f). Protože f je stejnoměrně spojitá na $A \subseteq X$, k $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, že

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \qquad \text{pro všechna } x, a \in A,\ \varrho(x,a) < \delta.$$

Pak pro libovolné $x \in A$ a $y \in B(x,\delta)$ platí

$$F(x) - \varepsilon \leqq F(y) \leqq F(x) + \varepsilon$$

a F je stejnoměrně spojitá na A vzhledem k X, a tudíž (podle poznámky 7.0.4) i na celém prostoru X. □

Kapitola 3

Rozšiřování omezených reálných funkcí z obecnějších topologických prostorů

Tietze dokázal své tvrzení pro metrický prostor, přesto se v literatuře hojně označuje za Tietzeovu větu Urysohnův výsledek z roku 1925. T_1–topologický prostor je normální, právě když každou spojitou omezenou funkci na jeho uzavřené podmnožině lze spojitě rozšířit na celý prostor. V této kapitole si předvedeme tvrzení, v nichž o X nebudeme předpokládat metrizovatelnost.

3.1 Hausdorff 1919

Zatímco dříve uvedené důkazy rozšiřování nelze jednoduše zobecnit na nemetrizovatelné prostory, Felix Hausdorff v textu [16] uvedl důkaz, jehož myšlenku lze použít i v obecnějších prostorech. K tomuto účelu zaveďme následující definici.

Definice 3.1.1. (Prostor splňující IB–podmínku.) Řekneme, že topologický prostor X *splňuje IB–podmínku* (z anglického *inbetween theorem*), pokud pro každou zdola omezenou shora polospojitou reálnou funkci g na X a každou shora omezenou zdola polospojitou reálnou funkci[1] h na X takovou, že $g \leqq h$, existuje spojitá funkce $f: X \to \mathbb{R}$, pro niž $g \leqq f \leqq h$ na X.

Autor v celém svém článku předpokládá, že X je metrický prostor, avšak na základě jeho důkazu můžeme ukázat níže uvedené tvrzení.

Věta 3.1.2. *Nechť X je topologický prostor splňující IB–podmínku a A jeho uzavřená podmnožina. Předpokládejme, že f je spojitá reálná funkce na A a $|f|$ je omezená konstantou $M \geqq 0$, tj. $f: A \to [-M, M]$. Pak existuje její spojité rozšíření $F: X \to [-M, M]$.*

[1] Reálná funkce h na topologickém prostoru X je *zdola polospojitá*, pokud pro každé $c \in \mathbb{R}$ je množina $\{x \in X: h(x) > c\}$ otevřená. Funkce $g: X \to \mathbb{R}$ je *shora polospojitá*, pokud $(-g)$ je zdola polospojitá.

Důkaz. Definujme

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A, \\ -M, & x \in X \setminus A, \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A, \\ M, & x \in X \setminus A, \end{cases}$$

Díky spojitosti f a otevřenosti množiny $X \setminus A$ je g shora polospojitá, h zdola polospojitá a $g \leqq h$ na X. Existuje tudíž spojitá funkce $F : X \to \mathbb{R}$ sevřená mezi nimi $g \leqq F \leqq h$, omezená konstantou M na X a shodující se s $f = g = h$ na A. □

Felix Hausdorff ve své práci dále jiným způsobem dokazuje Hahnovo tvrzení, že metrický prostor splňuje IB–podmínku. To ovšem platí například obecněji pro normální prostory, jak si předvedeme v obecnější podobě od Hinga Tonga v podkapitole 3.4 a od Miroslava Katětova v 3.5.

Pro úplnost se vraťme do metrických prostorů a uveďme důkaz podobné věty 2.2.4.

Věta 3.1.3. *Mějme definovanou omezenou funkci $f : X \to \mathbb{R}$ z metrického prostoru (X, ϱ) do reálných čísel, která je spojitá na uzavřené podmnožině A množiny X. Potom existuje funkce $F : X \to \mathbb{R}$ spojitá na celém X taková, že $F = f$ na A a $F < f$ na $X \setminus A$.*

Důkaz. Nechť $M \in \mathbb{R}$ je taková konstanta, že $f \geqq M$ na X. Nyní pro

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A, \\ M, & x \in X \setminus A, \end{cases} \qquad h(x) = \lim_{\delta \to 0+} \inf_{z \in B(x,\delta)} \{f(z)\}, \quad x \in X.$$

platí $g \leqq h \leqq f$ na X a $g = h = f$ na A. Funkce g je shora polospojitá. Ukažme, že h je zdola polospojitá. Nechť $c \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta. Předpokládejme, že v bodě $x \in X$ je $h(x) > c$ a vezměme kladné $\varepsilon < h(x) - c$. Z definice existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\inf_{z \in B(x,\delta)} \{f(z)\} \leqq h(x) < \inf_{z \in B(x,\delta)} \{f(z)\} + \varepsilon.$$

Pro libovolné y z okolí $B(x, \delta)$ bodu x je

$$h(y) = \lim_{\delta' \to 0+} \inf_{z \in B(y,\delta')} \{f(z)\} \geqq \inf_{z \in B(x,\delta)} \{f(z)\} > h(x) - \varepsilon > c.$$

Podle věty 3.1.2 existuje funkce $\tilde{F}$ spojitá na X taková, že $g \leqq \tilde{F} \leqq h \leqq f$. Na závěr položme

$$F(x) = \tilde{F}(x) - \varrho(x, A), \qquad x \in X.$$

□

3.2 Urysohn 1925

Heinrich Tietze zavedl roku 1923 v [30] axiomy oddělování. Paul Urysohn o dva roky později zobecnil Tietzeovu větu a charakterizoval normální topologické prostory.[2] Přesto se za

[2]Topologický prostor X je *normální*, pokud pro jakékoliv dvě disjunktní uzavřené množiny F a H v X existují otevřené množiny $U, V \subseteq X$, které jsou rovněž disjunktní a splňují $F \subseteq U$, $H \subseteq V$, a pokud je zároveň T_1, tj. pro každé dva různé body $x, y \in X$ existuje otevřená množina $U \subseteq X$, pro níž $U \cap \{x, y\} = \{x\}$.

Tietzeovu větu někde uvádí Urysohnova věta 3.2.2 (kde lze vynechat předpoklad omezenosti funkce f). Tvrzení 3.2.1 v literatuře nazývá jako Urysohnovo lemma. Ocitujeme tradiční důkaz z [32].

Věta 3.2.1. *(Urysohnovo lemma.) T_1–topologický prostor X je normální, právě když pro každé dvě jeho disjunktní uzavřené podmnožiny F, H a existuje spojitá funkce $f: X \to [0,1]$ taková, že $f|_F \equiv 0$ a $f|_H \equiv 1$.*

Důkaz. Nejprve předpokládejme, že X je normální, a hledejme spojitou funkci oddělující F a H. V X existuje otevřená množina U_1 tak, že

$$F \subseteqq U_1 \subseteqq \overline{U_1} \subseteqq X \setminus H.$$

Podobně F je uzavřená v U_1 a U_1 je otevřená, takže existuje otevřená množina $U_{\frac{1}{2}}$ splňující

$$F \subseteqq U_{\frac{1}{2}} \subseteqq \overline{U_{\frac{1}{2}}} \subseteqq U_1.$$

Postupně definujme $U_{\frac{k}{2^n}}$ pro dyadicky racionální čísla $\frac{k}{2^n}$, kde $n \in \mathbb{N}$ a $k = 1, 2, \ldots, 2^n - 1$. Předpokládejme, že známe $U_{\frac{k}{2^n}}$ a $U_{\frac{k+1}{2^n}}$ pro $n \in \mathbb{N}$ a $k \in \{1, 2, \ldots, 2^{n-1}\}$, že jsou obě otevřené a

$$F \subseteqq U_{\frac{k}{2^n}} \subseteqq \overline{U_{\frac{k}{2^n}}} \subseteqq U_{\frac{k+1}{2^n}} \subseteqq X \setminus H.$$

Díky normalitě existuje otevřená množina $U_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}}$ vnořená

$$\overline{U_{\frac{k}{2^n}}} \subseteqq U_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}} \subseteqq \overline{U_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}}} \subseteqq U_{\frac{k+1}{2^n}}.$$

Ze stejného důvodu existuje otevřená $U_{\frac{1}{2^{n+1}}}$ splňující

$$F \subseteqq U_{\frac{1}{2^{n+1}}} \subseteqq \overline{U_{\frac{1}{2^{n+1}}}} \subseteqq U_{\frac{1}{2^n}}.$$

Kdykoliv jsou p a q kladná dyadicky racionální čísla nepřesahující jedničku, pak jednak $F \subseteqq U_p$, a za druhé $p < q$, právě když $U_p \subseteqq \overline{U_p} \subseteqq U_q$.

Přistupme k definici funkce $f: X \to [0,1]$. Použijeme pro ni předpis

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \notin U_1, \\ \inf\{p : p \text{ dyadicky racionální}, p \in (0,1], x \in U_p\}, & x \in U_1. \end{cases}$$

Samozřejmě platí $f|_F \equiv 0$ a $f|_H \equiv 1$. Jediné, co zbývá ověřit, je spojitost. Nechť $x \in X$. Pokud $f(x) \in (0,1)$, pak pro $\varepsilon > 0$ nalezneme dyadicky racionální čísla p a q splňující

$$f(x) - \varepsilon < p < f(x) < q < f(x) + \varepsilon.$$

Množina $U_q \setminus \overline{U_p}$ je otevřená v X a $x \in U_q \setminus \overline{U_p}$. Pro každé další $y \in U_q \setminus \overline{U_p}$ platí $f(y) \geqq p$ a $f(y) \leqq q$, tedy

$$f\left(U_q \setminus \overline{U_p}\right) \subseteqq [p, q] \subseteqq (y - \varepsilon, y + \varepsilon).$$

Pro $y = 1$ a $\varepsilon > 0$ existuje dyadicky racionální číslo p v intervalu $(1 - \varepsilon, 1)$. Potom platí $f\left(X \setminus \overline{U_p}\right) \subseteqq [p, 1] \subseteqq (1 - \varepsilon, 1]$. Pro $y = 0$ a $\varepsilon > 0$ obdobně najdeme dyadicky racionální q v intervalu $(0, \varepsilon)$, že $f(U_q \setminus F) \subseteqq [0, q] \subseteqq [0, \varepsilon)$. Zobrazení f je spojité.

Naopak ukažme implikaci $\Leftarrow$. Definujme $U = f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{2}\right)\right)$ a $V = f^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}, 1\right]\right)$. Okamžitě vidíme, že U je otevřené okolí F, V je otevřené okolí H a obě jsou navzájem disjunktní. $\square$

Věta 3.2.2. *T_1–topologický prostor X je normální, právě když pro každou jeho uzavřenou podmnožinu A a spojité zobrazení $f:\ A \to [-1,1]$ existuje spojité rozšíření $F:\ X \to [-1,1]$.*

Důkaz. Nejdříve dokazujme část $\Rightarrow$. Označme $F_1 = f^{-1}\left(\left[-1, -\frac{1}{3}\right]\right)$, $H_1 = f^{-1}\left(\left[\frac{1}{3}, 1\right]\right)$. Podle Urysohnova lemmatu existuje spojitá funkce $f_1:\ X \to \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$ taková, že

$$f_1(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3}, & x \in F_1, \\ \frac{1}{3}, & x \in H_1. \end{cases}$$

Na množině A se liší od f v absolutní hodnotě nejvýše o $\frac{2}{3}$, tj. platí $|f(x) - f_1(x)| \leqq \frac{2}{3}$ pro $x \in A$.

Dále budeme postupovat indukcí. Předpokládejme, že je-li $n \in \mathbb{N}$ pevně zvolené, máme pro všechna $m = 1, \ldots, n$ definovaná spojitá zobrazení $f_m:\ X \to \left[-\frac{1}{3^m}, \frac{1}{3^m}\right]$, která na A splňují

$$\left| f(x) - \sum_{m=1}^{n} f_m(x) \right| \leqq \frac{2}{3^n} \qquad \text{pro } x \in A.$$

V následujícím kroku budeme aproximovat rozdíl $m_n(x) = f(x) - \sum\limits_{m=1}^{n} f_m(x)$. Definujeme

$$F_{n+1} = \left\{ x \in A, m_n \leqq -\frac{2}{3^{n+1}} \right\} \qquad \text{a} \qquad H_{n+1} = \left\{ x \in A, m_n \geqq \frac{2}{3^{n+1}} \right\}.$$

Opět sáhneme po Urysohnově lemmatu. Jelikož jsou obě F_{n+1} a H_{n+1} uzavřené, existuje spojité zobrazení $f_{n+1}:\ X \to \left[-\frac{2}{3^{n+1}}, \frac{2}{3^{n+1}}\right]$, pro které

$$f_{n+1}(x) = \begin{cases} -\frac{2}{3^{n+1}}, & x \in F_{n+1}, \\ \frac{2}{3^{n+1}}, & x \in H_{n+1}. \end{cases}$$

Na množině A se m_n a f_{n+1} neliší v absolutní hodnotě o více než $\frac{2}{3^{n+1}}$.

Na závěr označme $F(x) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} f_m(x)$, $x \in X$. Jelikož se jedná o součet spojitých funkcí a každá $|f_m|$ je omezena číslem $\frac{2}{3^n}$, s využitím Weierstrassova M–testu, věty 7.0.1, získáváme spojitost F na X. Navíc $F(x) = f(x)$ pro $x \in A$.

Krátce se věnujme obrácené implikaci. Předpokládejme, že F' a H' jsou dvě disjunktní uzavřené podmnožiny v X. Jejich sjednocení je rovněž uzavřené a podle předpokladu má funkce

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \in F', \\ 1, & x \in H', \end{cases}$$

spojité rozšíření $F:\ X \to [-1,1]$. Množiny $U = f^{-1}([-1,0))$ a $V = f^{-1}((0,1])$ jsou hledaná disjunktní otevřená okolí F' a H'. $\square$

3.3 Čech 1937 a Stone 1947

Eduard Čech se ve článku [5] z roku 1937 věnoval situaci, kdy X je úplně regulární topologický prostor[3] s kompaktní podmnožinou A. V důkazu, který si předvedeme v poznámce 3.3.2, využívá Urysohnovu větu 3.2.2. O deset let později se Arthur Harold Stone v [28] bez ní obešel a nahradil ji Stoneovou–Weierstrassovou větou. Protože v poznámce 3.5.9 ukážeme, že z Čechovy věty vyplývá Katětovova věta, a v poznámce 3.5.6, že z Katětovovy věty vyplývá Urysohnova věta, představme si nejprve Stoneův důkaz nepotřebující Urysohnovo lemma.

Věta 3.3.1. *Každá spojitá reálná funkce na kompaktním podprostoru A úplně regulárního prostoru X může být spojitě rozšířena na X.*

Důkaz. Předpokládejme, že množina A je neprázdná, jinak je tvrzení zřejmé. Protože A je kompakt v X, je funkce f omezená. Systém $\mathcal{A} = \{g|_A : \ g \in \mathcal{C}(X)\} \subseteqq \mathcal{C}(A)$ splňuje podmínky Stoneovy–Weierstrassovy věty,[4] a tedy $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{C}(A)$.

Ukažme, že systém $\mathcal{A}$ je uzavřený ke stejnoměrným limitám: mějme cauchyovskou posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ v $\mathcal{A}$ (a formálně $f_0 = 0$ na A) konvergující k f. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $|f_{n+1}(x) - f_n(x)| < \frac{1}{2^{n+1}}$ pro všechna $x \in X$ a $n \in \mathbb{N}$. Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ leží $f_n - f_{n-1}$ v $\mathcal{A}$, a tudíž existuje spojitá funkce $\tilde{G}_n$ na X taková, že $\tilde{G}_n\Big|_A = f_n - f_{n-1}$. Když položíme

$$G_n(x) = \min\left\{\max\left\{\tilde{G}_n(x), \inf_{a\in A}\{f_n(a) - f_{n-1}(a)\}\right\}, \sup_{a\in A}\{f_n(a) - f_{n-1}(a)\}\right\}, \qquad x \in X,$$

získáme spojitou funkci na X, která nabývá stejné normy na X jako na A a která se rovná $f_n - f_{n-1}$ na A. Nyní zbývá definovat

$$\begin{aligned} F_0(x) &= 0, & x \in X, \\ F_n(x) &= G_n(x) + F_{n-1}(x), & x \in X, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Matematickou indukcí zjišťujeme, že $F_n|_A = f_n$. Pro případ $n = 1$ vyjde požadovaná rovnost hned. Pokud již platí pro $n \in \mathbb{N}$, pak

$$F_{n+1}(x) = G_{n+1}(x) + F_n(x) = f_{n+1}(x) - f_n(x) + f_n(x) = f_{n+1}(x), \qquad x \in A.$$

Posloupnost $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská, protože pro $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$, je

$$\|F_m - F_n\| = \|G_m + G_{m-1} + \cdots + G_{n+1} + F_n - F_n\| \leqq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|G_k\| < \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n}.$$

Tudíž má jako limitu spojitou funkci F na X, jejíž restrikce na A je rovna $\lim_{n\to\infty} f_n = f$, a tedy f leží v $\mathcal{A}$. Jelikož $\mathcal{A} = \mathcal{C}(A)$, lze každou spojitou funkci na A spojitě rozšířit na celé X. □

[3] Topologický prostor X je *úplně regulární*, jestliže je T_1 a pro libovolný bod $x \in X$ a okolí U bodu x existuje spojitá funkce $f : X \to \mathbb{R}$ taková, že $f(x) = 0$ a pro všechny $y \in U$ platí $f(y) = 1$.

[4] Stoneova–Weierstrassova věta je například dokázána v Engelkingově knize General Topology [11] na straně 144.

Poznámka 3.3.2. Eduard Čech sepsal s využitím Urysohnovy věty 3.2.2 kratší důkaz. Každý úplně regulární prostor X má kompaktifikaci[5] cX a každý kompaktní prostor je normální.[6] A tak existuje spojitá funkce $F: cX \to \mathbb{R}$, která rozšiřuje f, a tudíž $F|_X$ je požadovaným spojitým rozšířením f na X.

3.4 Tong 1952

V roce 1919 zjistil Felix Hausdorff, že pokud topologický prostor splňuje IB–podmínku, pak lze spojitou reálnou funkci na jeho uzavřené podmnožině spojitě rozšířit na celý prostor. Tento výsledek jsme si představili ve větě 3.1.2, resp. se zobecněním i na neomezené funkce v 4.2.3. Uvedený výsledek byl již znám pro metrické prostory (důkaz podal Hahn roku 1917 v [15] či – jak jsme již dříve avizovali – o dva roky později jiným způsobem Hausdorff v [16]) a pro parakompaktní prostory (to ukázal Dieudonné roku 1944 v [7]). Tvrzení pro normální prostory avizuje Hing Tong v roce 1948 v [19], ale důkaz zveřejňuje až v roce 1952 [31]. Miroslav Katětov předložil roku 1951 svoji první studii problematiky [21], ale mylné lemma musel o dva roky později v [22] nahradit ve stylu, který si uvedeme v odstavci 3.5. Náznak důkazu Tongova přístupu uvádí i Engelking v [11] jako příklad 1.7.15.

Lemma 3.4.1. *Nechť (X, ϱ) je normální topologický prostor a $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost spojitých zobrazení z X do $[0,1]$. Pokud $g_0(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \{g_n(x)\}$ a $h_0(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \{h_n(x)\}$, $x \in X$, splňují $g_0(x) \leqq h_0(x)$ pro každé $x \in X$, potom existuje spojitá funkce $f: X \to [0,1]$ taková, že $g_0 \leqq f \leqq h_0$ na X.*

Důkaz. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že posloupnost $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ je v každém bodě nerostoucí a naopak $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ neklesající. Můžeme totiž pro $x \in X$ a $n \in \mathbb{N}$ definovat $g'_n(x) = \min_{k=1,\dots,n} \{g_k(x)\}$, $h'_n(x) = \max_{k=1,\dots,n} \{h_k(x)\}$. Pak platí $g_0(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \{g'_n(x)\}$ a $h_0(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \{h'_n(x)\}$ pro $x \in X$.

Mějme zadané libovolné $\varepsilon > 0$ a pevný bod $x \in X$. Z $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ vyberme stejně označenou podposloupnost, pro níž předpokládejme $g_{n+1}(x) > g_n(x) - \varepsilon$ na X pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Pro přirozené $n \in \mathbb{N}$ definujme neklesající posloupnost $\{k_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$

$$k_n(x) = \max_{k=1,\dots,n} \{\min\{g_k(x), h_k(x)\}\}$$

a pro $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$

$$l_n(x) = \max\{k_{n-1}(x), g_n(x)\}.$$

Díky $g_0(x) \leqq h_0(x)$ nalezněme $n_0 \in \mathbb{N}$ nejnižší takové, že $g_{n_0}(x) < h_{n_0}(x) + \varepsilon$. Pro $n < n_0$ je $g_n(x) > h_n(x)$, takže

$$\begin{aligned} k_n(x) &= \max_{k=1,\dots,n} \{h_k(x)\} = h_n(x) \leqq h_{n_0-1}(x) < g_{n_0-1}(x) < g_{n_0}(x) + \varepsilon, \\ l_n(x) &\geqq g_n(x) \geqq g_{n_0}(x). \end{aligned}$$

[5] Topologický prostor cX je *kompaktifikací* topologického prostoru X, $cX \supseteqq X$, pokud je kompaktní a $\overline{X} = cX$.

[6] Tyto výsledky uvádí Engelking jako tvzení 3.5.1 a 3.1.9 v [11].

Odhadněme

$$\begin{aligned} k_{n_0}(x) &\geqq \min\{g_{n_0}(x), h_{n_0}(x)\} > g_{n_0}(x) - \varepsilon, \\ k_{n_0}(x) &\leqq \max\{k_{n_0-1}(x), g_{n_0}(x)\} = \max\{h_{n_0-1}(x), g_{n_0}(x)\} \leqq \\ &\leqq \max\{g_{n_0-1}(x), g_{n_0}(x)\} < g_{n_0}(x) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Pro $n \geqq n_0$ máme

$$\max_{k=n_0,\dots,n} \{\min\{g_k(x), h_k(x)\}\} \leqq \max_{k=n_0,\dots,n} \{g_k(x)\} = g_{n_0}(x),$$

takže $k_n(x) < g_{n_0}(x) + \varepsilon$. Protože je $g_{n_0}(x) - \varepsilon < k_{n_0}(x) \leqq k_n(x) \leqq g_{n_0}(x) + \varepsilon$, získáváme

$$\begin{aligned} l_{n_0}(x) &\geqq g_{n_0}(x), \\ l_n(x) &= \max\{k_{n-1}(x), g_n(x)\} \leqq k_{n-1}(x) > g_{n_0}(x) - \varepsilon, \quad n > n_0. \end{aligned}$$

Konečně i díky $k_{n_0-1}(x) < g_{n_0}(x) + \varepsilon$ je $l_{n_0}(x) < g_{n_0}(x) + \varepsilon$ a

$$\begin{aligned} g_{n_0}(x) - \varepsilon &< \sup_{n\in\mathbb{N}} \{k_n(x)\} < g_{n_0}(x) + \varepsilon, \\ g_{n_0}(x) - \varepsilon &< \inf_{n\in\mathbb{N}} \{l_n(x)\} < g_{n_0}(x) + \varepsilon, \end{aligned}$$

takže $f(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \{k_n(x)\} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \{l_n(x)\}$ definuje spojitou funkci na X mezi g_0 a h_0. □

Věta 3.4.2. *Každý normální topologický prostor X splňuje IB–podmínku, neboli pro g zdola omezenou shora polospojitou a h zdola omezenou shora polospojitou funkci na X s hodnotami $g \leqq h$ existuje spojitá funkce $f: X \to \mathbb{R}$, $g \leqq f \leqq h$.*

Důkaz. Vzhledem k předepsané omezenosti můžeme předpokládat $g, h: X \to (0,1)$. Pro přirozená n a k, $k < n$, definujme

$$A_{k,n} = \left\{x \in X: h(x) \leqq \frac{k}{n}\right\}, \qquad B_{k,n} = \left\{x \in X: g(x) \geqq \frac{k}{n} + \frac{1}{2n}\right\}.$$

Spojitou funkci, která má na $A_{k,n}$ hodnotu $\frac{k}{n} + \frac{1}{2n}$ a na $B_{k,n}$ hodnotu 1 zaručenou Urysohnovým lemmatem 3.2.1, označme $g_{k,n}$. Nechť bez újmy na obecnosti $g_{k,n}: X \to \left[\frac{k}{n} + \frac{1}{2n}, 1\right]$. Nechť $g_n(x) = \min_{k=1,\dots,n-1} \{g_{k,n}(x)\}$, $x \in X$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Ověříme, že $g_n(x) < h(x)$ nebo $|g_n(x) - h(x)| < \frac{3}{2n}$.

Pokud v bodě $x \in X$ je $h(x) > \frac{n-1}{n}$, pak $g_{n-1,n}(x) \geqq \frac{n-1}{n} + \frac{1}{2n}$, takže můžeme odhadnout $|g_{n-1,n}(x) - h(x)| < \frac{1}{2n}$. Pro $k = 1, \dots, n-2$ leží $x \in B_{k,n}$, takže zde má $g_{k,n}(x)$ hodnotu 1 a od $h(x)$ se liší nejvýše o $\frac{1}{2n}$.

Pokud $h(x) \leqq \frac{n-1}{n}$, najděme $k \in \{1, \dots, n-1\}$ takové, aby $\frac{k-1}{n} < h(x) \leqq \frac{k}{n}$. Díky $g_{k,n}(x) = \frac{k}{n} + \frac{1}{2n}$ platí $|g_{k,n}(x) - h(x)| < \frac{3}{2n}$. Pokud $g_n(x) \geqq h(x)$, platí $|g_n(x) - h(x)| < \frac{3}{2n}$.

Také $g_n(x) \geqq g(x)$. Předpokládejme naopak, že existuje $k \in \{1, \dots, n-1\}$, pro něž $g_{k,n}(x) < g(x)$. Jednak $x \notin B_{k,n}$, neboli $g(x) < \frac{k}{n} + \frac{1}{2n}$, ale za druhé také $g_{k,n}(x) \geqq \frac{k}{n} + \frac{1}{2n}$, čímž jsme přišli ke sporu.

Označme tedy $g_0(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \{g_n(x)\}$, čímž $g(x) \leqq g_0(x) \leqq h(x)$. Uvedený postup využijme pro funkce $-h$ a $-g_0$. Tím získáme posloupnost spojitých funkcí $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ na X

takových, že pro $h_0(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \{h_n(x)\}$ máme zaručeno $g_0 \leqq h_0 \leqq h$. Předchozí lemma říká, že existuje spojitá funkce f na X, pro níž

$$g \leqq g_0 \leqq f \leqq h_0 \leqq h.$$

□

3.5 Katětov 1953

Do vývoje námi sledované oblasti se zapojil i matematik Miroslav Katětov, první děkan Matematicko–fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze, který jiným způsobem dokázal tvrzení jako Hing Tong v podkapitole 3.4 s přínosem, že nevyužívá Urysohnovo lemma. Navíc jako první vyslovil tvrzení i pro stejnoměrně spojitá zobrazení na obecném uniformním prostoru, které, jak píše v úvodu, pravděpodobně už bylo známé dříve, jen nebylo publikované. Jeho důkazy uvedeme v originálním znění.

Definice 3.5.1. (Konečná interpolační vlastnost.) Předpokládejme, že R je množina, na níž je definovaná binární relace ϱ. Pro dvě podmnožiny $M, N \subseteqq R$ budeme pod symbolem $M\varrho N$ rozumět, že pro všechna $x \in M$ a $y \in N$ platí $x\varrho y$. Dále zavedeme na R relaci $\overline{\varrho}$ předpisem

$$x\overline{\varrho}y,\ x, y \in R, \qquad \text{právě když} \qquad \begin{array}{l}[y\varrho v,\ v \in R \Rightarrow x\varrho v \\ \text{a } u\varrho x,\ u \in R \Rightarrow u\varrho y]\,.\end{array}$$

Nechť R a T jsou množiny a ϱ, resp. τ binární relace na R, resp. na T. Soubor všech zobrazení z T do R značme jako R^T. Na R^T definujme binární relaci ϱ^τ pro $f_1, f_2 \in R^T$ předpisem

$$f_1\varrho^\tau f_2, \qquad \text{právě když} \qquad [t_1\tau t_2,\ t_1, t_2 \in T \Rightarrow f_1(t_1)\,\varrho f_2(t_2)]\,.$$

Řekněme, že binární relace ϱ na R splňuje *konečnou interpolační vlastnost*, pokud existence dvou konečných množin $M, N \subseteqq R$ splňujících $M\varrho N$ (tj. $x\varrho y$ pro všechna $x \in M$ a $y \in N$) implikuje existenci $z \in R$ takového, že $M\varrho z$ a $z\varrho N$ ($x\varrho z$ a $z\varrho y$ platí pro všechna $x \in M$ a $y \in N$).

Pro účely této podkapitoly ještě řekněme, že binární relace ϱ na množině R splňuje

- *vlastnost (I)*, jestliže pro konečné nebo nejvýše spočetné podmnožiny $M, N \subseteqq R$ a $a, b \in R$ takové, že $M\overline{\varrho}a$, $a\varrho N$, $M\varrho b$ a $b\overline{\varrho}N$, existuje $c \in R$ s $M\varrho c$ a $c\varrho N$,
- *vlastnost (L)*, pokud pro každou konečnou podmnožinu $A \subseteqq R$ existují $a, b \in R$ taková, že
$$(A\varrho x,\ x \in R \Rightarrow A\overline{\varrho}a,\ a\varrho x) \qquad \text{a} \qquad (x\varrho A,\ x \in R \Rightarrow b\overline{\varrho}A,\ x\varrho b)\,.$$

Poznámka 3.5.2. Pro libovolnou relaci ϱ na libovolné množině R je $\overline{\varrho}$ tranzitivní.

Lemma 3.5.3. *Buď X množina, $R = \{P :\ P \subseteqq X\}$ a ϱ binární relace na R, pro kterou nastávají následující podmínky*

1. *ϱ splňuje konečnou interpolační vlastnost,*

2. *jestliže x a y jsou podmnožiny X takové, že $x \subseteqq y$, pak platí $x\overline{\varrho}y$,*

3. *pokud $x\varrho y$, $x, y \in R$, pak je $x \subseteqq y$.*

Potom ϱ má vlastnosti (I) i (L).

Důkaz. Nejprve se věnujme vlastnosti (I). Nechť M je bez újmy na obecnosti spočetná množina sestávající z prvků $a_i \in R$, $i \in \mathbb{N}$, a podobně nechť N sestává z $b_j \in R$, $j \in \mathbb{N}$. Předpokládejme, že dále a a b jsou dva prvky z R a platí

$$M\overline{\varrho}a, \qquad a\varrho N, \qquad M\varrho b \qquad \text{a} \qquad b\overline{\varrho}N.$$

Z $a\varrho b_1$ a $a_1\overline{\varrho}a$ vyplývá $a_1\varrho b_1$. Přidáme-li předpoklad $a_1\varrho b$, díky konečné interpolační vlastnosti existuje $c_1 \in R$ takové, že $a_1\varrho c_1$, $c_1\varrho b_1$ a $c_1\varrho b$. Z posledního vztahu a poznatku $a\varrho b_1$ opět díky konečné interpolační vlastnosti existuje $d_1 \in R$, pro které $c_1\varrho d_1$, $a\varrho d_1$ a $d_1\varrho b_1$. Tím máme

$$a_1\varrho c_1, \qquad c_1\varrho b, \qquad c_1\varrho d_1, \qquad a\varrho d_1 \qquad \text{a} \qquad d_1\varrho b_1.$$

Matematickou indukcí ověříme, že pro každé přirozené n platí

$$a_i\varrho c_i, \qquad c_i\varrho b, \qquad c_i\varrho d_j, \qquad a\varrho d_j \qquad d_j\varrho b_j \qquad \text{kdykoliv } i, j = 1, \ldots, n-1.$$

Předpokládejme, že vztah platí pro n, a vyvoďme zde platnost pro $(n+1)$. Jelikož $a\varrho d_j$ a $a_n\overline{\varrho}a$, máme $a_n\varrho d_j$ pro $j = 1, \ldots, n-1$. Z konečné interpolační vlastnosti pro množiny $\{a_n\}$ a $\{b, d_1, \ldots, d_{j-1}\}$ existuje $c_n \in R$, pro které $a_n\varrho c_n$, $c_n\varrho b$ a $c_n\varrho d_j$, $j = 1, \ldots, n-1$. Je-li $i = 1, \ldots, n-1$, pak $c_i\varrho b_n$ (neboť $c_i\varrho b$ a $b\overline{\varrho}b_n$) a $c_n\varrho b_n$ (neboť $c_n\varrho b$ a $b\overline{\varrho}b_n$). Přidáme-li fakt $a\varrho b_n$, díky konečné interpolační vlastnosti existuje $d_n \in R$, že $a\varrho d_n$, $c_i\varrho d_n$ a $d_n\varrho b_n$ pro $i = 1, \ldots, n$, tedy požadovaný vztah platí i pro $(n+1)$.

Jestliže položíme $c = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ a zvolíme $k \in \mathbb{N}$, platí $c_k \subseteqq c$. Jelikož $a_k\varrho c_k$, díky podmínce 2 také $a_k\varrho c$ (nebo stručně $A\varrho c$). Pro k a j přirozená z $c_k\varrho d_j$ a podmínky 3 vyplývá $c_k \subseteqq d_j$, tudíž $c \subseteqq d_j$ a $c\overline{\varrho}d_j$ (díky 2). Na závěr stačí z $d_j\varrho b_j$ vyvodit $c\varrho b_j$ (tj. $c\varrho B$).

Ve druhé části, kdy chceme ověřit vlastnost (L), předpokládejme, že máme danou n-prvkovou podmnožinu $A = \{a_1, \ldots, a_n\} \subseteqq R$, $n \in \mathbb{N}$. Definujme $a = \bigcup\limits_{i=1}^{n} a_i$ a $b = \bigcap\limits_{i=1}^{n} b_i$. Z $a_i \subseteqq a$ díky podmínce 2 vyplývá $a_i\overline{\varrho}a$, $i = 1, \ldots, n$, čili $A\overline{\varrho}a$. Mějme prvek $x \in R$, pro nějž $A\varrho x$. Z konečné interpolační vlastnosti existuje $y \in R$, že $A\varrho y$ a $y\varrho x$. Podle podmínky 3 je $a \subseteqq y$ a podle 2 je $a\overline{\varrho}y$. Protože $y\varrho x$, pak $a\varrho x$.

Naprosto obdobně lze dostat $b\overline{\varrho}A$ a $x\varrho b$, pokud $x\varrho A$, $x \in R$. □

Lemma 3.5.4. *Jestliže ϱ je binární relace na množině R s vlastnostmi (I) a (L), τ je tranzitivní nereflexivní binární relace*[7] *na spočetné množině T a $g, h \in R^T$ splňují $h\varrho^\tau g$, $h\,(\overline{\varrho})^\tau\, h$ a $g\,(\overline{\varrho})^\tau\, g$, pak existuje $f \in R^T$ takové, že $h\varrho^\tau f$, $f\varrho^\tau f$ a $f\varrho^\tau g$.*

[7] Binární relace τ na množině T je *tranzitivní*, pokud pro všechna $t, s, u \in T$ splňující $t\tau s$ a $s\tau u$ platí $t\tau u$, a je *nereflexivní*, jestliže pro žádné $t \in T$ není $t\tau t$.

Důkaz. Prvky v T označme t_n, $n \in \mathbb{N}$, a položme $T_n = \{t_k : \ k = 1, \ldots, n-1\}$, $U_n = \{t \in T : \ t\tau t_n\}$ a $V_n = \{t \in T : \ t_n \tau t\}$. Jak ukážeme matematickou indukcí, pro každé přirozené $n \geqq 2$ a všechna $k = 1, \ldots, n-1$ existuje $f(t_k)$ tak, že

$$\begin{aligned} t\tau t_k,\ t \in T &\Rightarrow h(t)\,\varrho f(t_k)\,, \\ t_k \tau t,\ t \in T &\Rightarrow f(t_k)\,\varrho g(t)\,, \\ t_i \tau t_j,\ i,j \in \{1,\ldots,n-1\} &\Rightarrow f(t_i)\,\varrho f(t_j)\,. \end{aligned}$$

Nejprve ukažme vztah pro $n = 2$. Definujme

$$M = h(U_1) = \{h(t) : \ t \in T,\ t\tau t_1\}\,, \quad N = g(V_1) = \{g(t) : \ t \in T,\ t_1 \tau t\}\,.$$

Díky vlastnosti (L) existují $a, b \in R$, že $h(t_1)\,\overline{\varrho} a$, $b\overline{\varrho} g(t_1)$ a $h(t_1)\,\varrho x \Rightarrow a\varrho x$, resp. $x\varrho g(t_1) \Rightarrow x\varrho b$ pro $x \in R$. Jelikož pro $t \in R$, $t_1 \tau t$, platí $g(t_1)\,\overline{\varrho} g(t)$ (neboť $g\,(\overline{\varrho})^{\tau}\,g$), potom z tranzitivity $\overline{\varrho}$ vyplývá $b\overline{\varrho} g(t)$, tj. $b\overline{\varrho} N$. Navíc díky $h\varrho^{\tau} g$ je $h(t_1)\,\varrho g(t)$, kdykoliv $t \in R$, $t_1 \tau t$, tzn. $h(t_1)\,\varrho N$, a tudíž $a\varrho N$. Stejně také díky $h\,(\overline{\varrho})^{\tau}\,h$ a $h\varrho^{\tau} g$ dostáváme $M\overline{\varrho} a$, a $M\varrho g(t_1)$ a $N\varrho b$. Z $M\overline{\varrho} a$, $a\varrho N$, $M\varrho b$, $b\overline{\varrho} N$ a vlastnosti (I) dostáváme existenci $c_1 = f(t_1)$ takového, že

$$t\tau t_1,\ t \in T \Rightarrow h(t)\,\varrho f(t_1) \qquad \text{a} \qquad t_1 \tau t,\ t \in T \Rightarrow f(t_1)\,\varrho g(t)\,.$$

Protože jsme na τ kladli požadavek nereflexivity, je pravdivá implikace $t_1 \tau t_1 \Rightarrow f(t_1)\,\varrho f(t_1)$, jelikož není splněn její předpoklad, a tím máme hotový první krok indukce.

Předpokládejme, že pozorování platí pro nějaké přirozené $n \geqq 2$, a vyvoďme jej pro $(n+1)$. Nechť

$$\begin{aligned} M &= f(T_n \cap U_n) \cup h(U_n)\,, & A &= f(T_n \cap U_n) \cup h(t_n)\,, \\ N &= f(T_n \cap V_n) \cup g(V_n)\,, & B &= f(T_n \cap V_n) \cup g(t_n)\,. \end{aligned}$$

Nyní ukažme, že $M\varrho B$ (podobně $A\varrho N$). Jestliže $i, j \in \{1, \ldots, n-1\}$, $t_i \tau t_n$ a $t_n \tau t_j$, díky tranzitivitě τ a indukčnímu předpokladu $f(t_i)\,\varrho f(t_j)$. Také $f(t_i)\,\varrho g(t_n)$ a $f(T_n \cap U_n)\,\varrho B$. Dále jestliže $t \in U_n$, pak $t\tau t_j$ a $h(t)\,\varrho f(t_j)$. Uvědomíme-li si $h(t)\,\varrho g(t_n)$, získáme $h(U_n)\,\varrho B$ a celkově $M\varrho B$.

Množina B je konečná, z vlastnosti (L) proto existuje $b \in B$ takové, že ke každému $x \in R$, $x\varrho B$, platí jednak $b\overline{\varrho} B$ a za druhé $x\varrho b$. Protože pro $m \in M$ platí $m\varrho B$, potom také $m\varrho b$ a $M\varrho b$.

Z $g(t_n) \in B$ a $b\overline{\varrho} B$ vyplývá $b\overline{\varrho} g(t_n)$, z $g\,(\overline{\varrho})^{\tau}\,g$ získáváme $g(t_n)\,\overline{\varrho} g(V_n)$, z tranzitivity $\overline{\varrho}$ pak $b\overline{\varrho} g(V_n)$ a z $B \subseteqq N \cup g(V_n)$ a $b\overline{\varrho} B$ konečně $b\overline{\varrho} N$.

Přirozeně existuje také $a \in R$, pro něž $a\varrho N$ a $M\overline{\varrho} a$. Díky vlasnosti (I) existuje $c_n \in R$, které $M\varrho c_n$ a $c_n \varrho N$. Položením $f(t_n) = c_n$ jsme ověřili krok $(n+1)$. $\square$

Věta 3.5.5. *Každý normální topologický prostor X splňuje IB–podmínku.*

Důkaz. Mějme g shora polospojitou funkci a h zdola polospojitou funkci na X splňující $g \leqq h$, a k nim hledejme spojitou funkci f sevřenou mezi nimi. Na množině $R = \{P : \ P \subseteqq X\}$ všech podmnožin X definujme relaci ϱ předpisem

$$M, N \subseteqq X \ (\text{tj. } M, N \in R) : \qquad M\varrho N, \quad \text{právě když} \quad \overline{M} \subseteqq \operatorname{int} N.$$

Relace ϱ má konečnou interpolační vlastnost: jestliže $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ jsou konečné podmnožiny R, tj. konečné množiny podmnožin X, které pro $M \in \mathcal{M}$ a $N \in \mathcal{N}$ splňují $M \varrho N$, tj. $\overline{M} \subseteqq \operatorname{int} N$, pak také

$$\overline{\left(\bigcup_{M \in \mathcal{M}} M\right)} = \bigcup_{M \in \mathcal{M}} \overline{M} \subseteqq \bigcap_{N \in \mathcal{N}} \operatorname{int} N = \operatorname{int}\left(\bigcap_{N \in \mathcal{N}} N\right).$$

Z normality X existuje množina $K \subseteqq X$, pro kterou platí

$$\overline{\left(\bigcup_{M \in \mathcal{M}} M\right)} \subseteqq \operatorname{int} K \subseteqq \overline{K} \subseteqq \operatorname{int}\left(\bigcap_{N \in \mathcal{N}} N\right),$$

čili $\mathcal{M} \varrho K$ a $K \varrho \mathcal{N}$.

Je splněna i podmínka 2 z lemmatu 3.5.3, protože jsou-li M, N, U, V podmnožiny v X, $M \subseteqq N$, a platí-li $N \varrho V$ či $U \varrho M$, pak

$$\overline{M} \subseteqq \overline{N} \subseteqq \operatorname{int} V, \text{ tj. } M \varrho V, \qquad \text{resp. } \overline{U} \subseteqq \operatorname{int} M \subseteqq \operatorname{int} N, \text{ tj. } U \varrho N,$$

čili $M \overline{\varrho} N$. Snadno si poradíme i s vlastností 3, neboť

$$M \subseteqq \overline{M} \subseteqq \operatorname{int} N \subseteqq N, \qquad \text{jakmile } M \varrho N.$$

Podle uvedeného lemmatu má ϱ vlasnosti (I) a (L).

Na množině $T = \mathbb{Q}$ racionálních čísel mějme relaci τ určenou tradičním uspořádáním $q_1 \tau q_2$ pro $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$, kdykoliv je $q_1 < q_2$. Jestliže vezmeme libovolné $q \in \mathbb{Q}$, pak je množina

$$\begin{array}{rrcl} & H(q) & = & \{x \in X : \ h(x) \leqq q\} \text{ uzavřená} \\ \text{a} & G(q) & = & \{x \in X : \ g(x) < q\} \text{ otevřená.} \end{array}$$

Pro racionální čísla $q_1 < q_2$ je $H(q_1) \subseteqq H(q_2)$ a $G(q_1) \subseteqq G(q_2)$, odkud $H(q_1) \overline{\varrho} H(q_2)$ a $G(q_1) \overline{\varrho} G(q_2)$, neboli $H (\overline{\varrho})^{\tau} H$ a $G (\overline{\varrho})^{\tau} G$. Pokud dále $x \in H(q_1)$, pak leží x také v $G(q_2)$, neboť platí

$$g(x) \leqq h(x) \leqq q_1 < q_2.$$

Odtud vyplývá $H \varrho^{\tau} G$. Jsou splněny všechny předpoklady lemmatu 3.5.4. Existuje proto $F \in R^{\mathbb{Q}}$ takové, že $H \varrho^{\tau} F$, $F \varrho^{\tau} F$ a $F \varrho^{\tau} G$. Pokud $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$, $q_1 < q_2$, pak

$$H(q_1) \subseteqq \operatorname{int} F(q_2), \quad \overline{F(q_1)} \subseteqq \operatorname{int} F(q_2) \quad \text{a} \quad \overline{F(q_1)} \subseteqq G(q_2).$$

Funkci f definujme předpisem

$$\begin{array}{rrcl} f: & X & \to & \mathbb{R}, \\ & x & \mapsto & \inf\limits_{\{q \in \mathbb{Q}:\ x \in F(q)\}} \{q\}. \end{array}$$

Je-li $x \in F(q)$ pro $q \in \mathbb{Q}$ a je-li $q' > q$ libovolné racionální číslo, pak x leží v $G(q')$, což znamená $g(x) < q'$ a v důsledku $g(x) \leqq q$. Budeme-li brát v úvahu infimum z $\{q \in \mathbb{Q} : \ x \in F(q)\}$, obdržíme odhad $g(x) \leqq f(x)$. Podobně $x \in X \setminus F(q)$ a $q' < q$ pro $q, q' \in \mathbb{Q}$ zařídí, že ani q' neleží v $H(q')$, tedy $h(x) > q'$, $h(x) \geqq q$ a $h(x) \geqq f(x)$.

Pro $x \in X$ a $q \in \mathbb{Q}$ vyhovující podmínce $x \in \overline{F(q)}$ leží x ve všech $F(q')$, $q' \in \mathbb{Q}$, $q' > q$, a tudíž $f(x) \leqq \inf\limits_{\{q' \in \mathbb{Q},\ q' > q\}} \{q'\} = q$. Naopak jestliže $x \notin \operatorname{int} F(q)$ pro $q \in \mathbb{Q}$, pak $x \notin F(q')$ pro žádné racionální $q' < q$ a $f(x) \geqq \inf\limits_{\{q' \in \mathbb{Q},\ q' \geqq q\}} \{q'\} = q$.

Z předchozích úvah vyplývá, že pro $x \in X$ a racionální čísla $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ taková, že $q_1 < f(x) < q_2$, máme $x \in \operatorname{int} F(q_2) \setminus \overline{F(q_1)}$ a obráceně pro $y \in \operatorname{int} F(q_2) \setminus \overline{F(q_1)}$ zase $q_1 \leqq f(y) \leqq q_2$. Tím jsme ověřili spojitost funkce f v bodě x, když jsme našli jeho okolí $\left(\operatorname{int} F(q_2) \setminus \overline{F(q_1)}\right)$, na němž $q_1 \leqq f \leqq q_2$. $\square$

Poznámka 3.5.6. Díky Hausdorffovu tvrzení 3.1.2 z Katětovovy věty 3.5.5 vyplývá Urysohnova věta 3.2.2.

Katětovův přínos spočívá také v následující větě věnující se stejnoměrně spojitým zobrazením na obecném uniformním prostoru X.

Věta 3.5.7. *Za předpokladů, že A je podmnožina uniformního prostoru $(X, \mathcal{U})$ a funkce $f: A \to \mathbb{R}$ je omezená a stejnoměrně spojitá na A, existuje stejnoměrně spojitá funkce F definovaná na celém X, která se na A shoduje s f.*

Důkaz. Jako v minulém důkazu označme $R = \{P:\ P \subseteqq X\}$ systém podmnožin v X. Pro dvě množiny $M, N \in R$ zaveďme relaci ϱ předpisem

$$M \varrho N, \text{ právě když existuje } U \in \mathcal{U} \text{ takové, že jakmile } x \in M \text{ a } (x,y) \in U \text{ pro } y \in X, \text{ pak již nutně } y \in N.$$

Protože pro každé $x \in X$ a $U \in \mathcal{U}$ platí $(x,x) \in U$, automaticky získáváme $M \subseteqq N$ (vlastnost 3 v lemmatu 3.5.3). Jestliže $M \subseteqq N \subseteqq X$, $V_1, V_2 \subseteqq X$, $V_1 \varrho M$ a $N \varrho V_2$, existují $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$, pro která

$$\begin{array}{rl} & x \in V_1,\ y \in X,\ (x,y) \in U_1 \ \Rightarrow\ y \in M \ \Rightarrow\ y \in N, \\ \text{resp.} & x \in N,\ y \in X,\ (x,y) \in U_2 \ \Rightarrow\ y \in V_2, \\ \text{speciálně} & x \in M,\ y \in X,\ (x,y) \in U_2 \ \Rightarrow\ y \in V_2, \end{array}$$

takže $V_1 \varrho N$, $M \varrho V_2$ a stručně $M \overline{\varrho} N$ (vlastnost 2). Konečně tato relace splňuje také konečnou interpolační vlastnost (vlastnost 1): ať $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ jsou konečné podmnožiny R a ať pro každé $M \in \mathcal{M}$ a $N \in \mathcal{N}$ platí $M \varrho N$, tj. existuje k nim $U_{MN} \in \mathcal{U}$, že

$$x \in M,\ y \in X,\ (x,y) \in U_{MN} \Rightarrow y \in N.$$

Definujme $U = \bigcap\limits_{M \in \mathcal{M}} \bigcap\limits_{N \in \mathcal{N}} U_{MN}$. Díky konečnosti $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ tento průnik leží v uniformitě $\mathcal{U}$. Pro libovolné $N \in \mathcal{N}$, $x \in \bigcup\limits_{M \in \mathcal{M}} M$, $y \in X$ a $(x,y) \in U$ existuje $M \in \mathcal{M}$, že $x \in M$, pro něj $(x,y) \in U_{MN}$, takže $y \in N$. Jelikož N bylo libovolné v $\mathcal{N}$, získáváme $\left(\bigcup\limits_{M \in \mathcal{M}} M\right) \varrho \left(\bigcap\limits_{N \in \mathcal{N}} N\right)$. Z definice uniformity také existuje $V \in \mathcal{U}$ takové, že jestliže (x,z) i (z,y) leží ve V, $z \in X$, pak $(x,y) \in U$. Označíme-li Z množinu všech $z \in X$ takových, že $(x,z) \in V$ pro všechna $x \in \left(\bigcup\limits_{M \in \mathcal{M}} M\right)$, pak

- $\left(\bigcup_{M\in\mathcal{M}} M\right)\varrho Z$, neboť jestliže pro $x \in \bigcup_{M\in\mathcal{M}} M$ a $z \in X$ platí $(x,z) \in V$, pak $z \in Z$,

- $Z\varrho\left(\bigcap_{N\in\mathcal{N}} N\right)$, neboť jestliže pro $z \in Z$ a $y \in X$ platí $(z,y) \in V$, pak pro libovolné $x \in \bigcup_{M\in\mathcal{M}} x$ dostaneme také $(x,z) \in V$, tudíž $(x,y) \in U$ a konečně $y \in \bigcap_{N\in\mathcal{N}} N$ díky $M\varrho N$.

Pro libovolná $M \in \mathcal{M}$ a $N \in \mathcal{N}$ tak platí $M\varrho Z$ a $Z\varrho N$. Jsou splněny předpoklady prvního lemmatu 3.5.3.

Opět vezměme $T = \mathbb{Q}$ s relací $\tau =<$, označme

$$\alpha = \inf_{x\in A}\{f(x)\}, \qquad \beta = \sup_{x\in A}\{f(x)\}$$

a definujme

$$\begin{aligned} K(q) &= \begin{cases} \emptyset, & q \in \mathbb{Q},\ q < \alpha, \\ \{x \in A:\ f(x) \leqq q\}, & q \in \mathbb{Q},\ q \in [\alpha,\beta], \\ X, & q \in \mathbb{Q},\ q > \beta, \end{cases} \\ L(q) &= \begin{cases} \emptyset, & q \in \mathbb{Q},\ q < \alpha, \\ A(q) \cup (X \setminus A), & q \in \mathbb{Q},\ q \in [\alpha,\beta], \\ X, & q \in \mathbb{Q},\ q > \beta. \end{cases} \end{aligned}$$

Díky stejnoměrné spojitosti f na A k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje $U \in \mathcal{U}$, že $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, kdykoliv $(x,y) \in U$. Odtud vyplývá, že pro $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$, $\alpha \leqq q_1 < q_2 \leqq \beta$, najdeme takové $U \in \mathcal{U}$, že jakmile $y \in A$ a $(x,y) \in U$, pak $f(y) \leqq q_2$. Spolu s dalšími možnými triviálními případy ($y \in X \setminus A$, resp. $q_1 < \alpha$ či $q_2 > \beta$) získáváme

$$q_1 < q_2,\ q_1, q_2 \in \mathbb{Q} \ \Rightarrow\ K(q_1)\,\varrho L(q_2), \qquad \text{neboli } K\varrho^\tau L.$$

Triviálně $K(\overline{\varrho})^\tau K$ a $L(\overline{\varrho})^\tau L$. Podle lemmatu 3.5.4 existuje $M \in R^T$, že $K\varrho^\tau M$, $M\varrho^\tau M$ a $M\varrho^\tau L$.

Definujme $F(x) = \inf_{\{q\in\mathbb{Q}:\ x\in M(q)\}}\{q\}$, $x \in X$. Pokud $q_1 < q_2 < \alpha$, $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$, pak $M(q_1)\,\varrho L(q_2)$ nás vede k $M(q_1) \subseteqq L(q_2) = \emptyset$, tedy $F(x) \geqq \alpha$. Podobně $M(q) = X$ pro všechna $q > \beta$, $q \in \mathbb{Q}$, a $F(x) \leqq \beta$.

Pokud pro $x \in A$ uzavřeme $f(x)$ mezi hodnoty $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$, $q_1 < f(x) < q_2$, pak dostaneme $x \in K(q_2)\setminus L(q_1)$ a díky $M\varrho^\tau M$ také $x \in M(q_2')\setminus M(q_1')$ pro $q_1' < q_1 < q_2 < q_2'$, kde $q_1', q_2' \in \mathbb{Q}$. Odtud

- $q_1' \leqq F(x) \leqq q_2'$,

- $q_1 \leqq F(x) \leqq q_2$ (přechodem přes $\sup_{\{q_1'\in\mathbb{Q}:q_1'<q_1\}}$ a $\inf_{\{q_2'\in\mathbb{Q}:q_2'>q_2\}}$),

- $F(x) = f(x)$ (přechodem přes $\sup_{\{q_1\in\mathbb{Q}:q_1<f(x)\}}$ a $\inf_{\{q_2\in\mathbb{Q}:q_2>f(x)\}}$).

K dokončení důkazu ukažme stejnoměrnou spojitost F. Mějme dáno $\varepsilon > 0$ a vezměme konečně mnoho bodů $q_0, \ldots, q_{n+1} \in \mathbb{Q}$ takových, že

$$\begin{aligned} & q_0 < q_1 < \alpha < q_2 < \cdots < q_{n-1} < \beta = q_n < q_{n+1} \\ \text{a} \quad & 0 < q_{k+1} - q_k < \tfrac{\varepsilon}{2} \quad \text{pro } k = 0, 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Protože pro libovolné $k = 0, 1, \ldots, n$ platí $M(q_k)\, \varrho M(q_{k+1})$, existuje $U_k \in \mathcal{U}$ takové, že pro všechna $x \in M(q_k)$ a $y \in X$ splňující $(x, y) \in U_k$ již $y \in M(q_{k+1})$. Z definice uniformity množina $U = \bigcup_{k=0}^{n} U_k$ leží v $\mathcal{U}$. K bodu $x \in X$ existuje $k \in \{2, \ldots, n\}$, že $q_{k-1} < F(x) \leqq q_k$, tj. $x \in M(q_k)$. Pro $y \in X$ musí $F(y)$ ležet v $M(q_{k+1})$, a odtud $F(y) \leqq q_{k+1}$. Navíc $F(y) > q_{k-2}$, jinak by $y \in M(q_{k-2})$ a $x \in M(q_{k-1})$. Tím jsme ověřili, že pro $(x, y) \in U$ platí nerovnost $|F(x) - F(y)| < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. □

Na závěr ukažme, jak souvisí Katětovova věta 3.5.7 s ostatními tvrzeními.

Poznámka 3.5.8. Z Katětovovy věty 3.5.7 vyplývá Urysohnova věta 3.2.2.

Důkaz. Nechť $(X, \mathcal{O})$ je normální topologický prostor a $\mathcal{U}$ univerzální uniformita, tj. nejjemnější uniformita na X. Pak $\mathcal{U}$ indukuje topologii $\mathcal{O}$, a tedy každé omezené spojité zobrazení $f : A \to \mathbb{R}$ je zároveň stejnoměrně spojité vzhledem k uniformitě $\mathcal{U}|_{A \times A}$.[8] Podle Katětovovy věty existuje stejnoměrně spojité zobrazení $F : (X, \mathcal{U}) \to \mathbb{R}$ rozšiřující f. To je ovšem vzhledem k původní topologii $\mathcal{O}$ spojité. □

Poznámka 3.5.9. Katětovova věta 3.5.7 je ekvivalentní s Čechovým tvrzením 3.3.1.

Důkaz. Ukažme nejprve Čechovu větu za předpokladu, že máme dokázáno Katětovovo tvrzení. Nechť X je úplně regulární topologický prostor s kompaktním podprostorem A. Označme cX kompaktifikaci X. Protože cX je kompaktní prostor, existuje jediná uniformita $\mathcal{U}$ na cX indukující původní topologii na cX.[9] Jestliže f byla omezená spojitá na A, pak je vzhledem k $\mathcal{U}$ stejnoměrně spojitá na A. Podle Katětovovy věty existuje $\tilde{F} : (cX, \mathcal{U}) \to \mathbb{R}$ stejnoměrně spojitá rozšiřující f a $F = \tilde{F}\Big|_X$ je tudíž spojité rozšíření f.

Nyní z Čechova tvrzení ukažme Katětovu větu. Předpokládejme, že A je podmnožina uniformního prostoru $(X, \mathcal{U})$ a f stejnoměrně spojitá reálná funkce na A. Jako $p\mathcal{U}_A$ označme prekompaktní modifikaci $\mathcal{U}|_{A \times A}$ a jako $p\mathcal{U}$ prekompaktní modifikaci $\mathcal{U}$.[10] Nechť $(\widetilde{A, p\mathcal{U}_A})$ a $(\widetilde{X, p\mathcal{U}})$ jsou jejich zúplnění. Funkci f tak můžeme nyní stejnoměrně spojitě rozšířit na omezenou funkci $\tilde{f} : (\widetilde{A, p\mathcal{U}_A}) \to \mathbb{R}$. Protože $(\widetilde{A, p\mathcal{U}_A})$ a $(\widetilde{X, p\mathcal{U}})$ jsou totálně omezené úplné prostory, jsou podle tvrzení 8.3.12 a 8.3.16 v General Topology [11] Ryszarda Engelkinga kompaktní. Podle Čechovy věty 3.3.1 existuje spojité rozšíření $\tilde{F} : (\widetilde{X, p\mathcal{U}}) \to \mathbb{R}$. Jelikož je výchozí prostor kompaktní, je $\tilde{F}$ zároveň stejnoměrně spojité. Položíme-li $F = \tilde{F}\Big|_X$, pak je

[8] Tvrzení je obsaženo v příkladě 8.1.B Engelkingovy General Topology [11].

[9] Jako tvrzení 8.3.13 je toto dokázáno v Engelkinově General Topology [11].

[10] Báze prekompaktní modifikace $p\mathcal{U}$ na prostoru X je tvořena konečnými uniformními pokrytími X. Identické zobrazení $\mathrm{id} : (X, \mathcal{U}) \to (X, p\mathcal{U})$ je stejnoměrně spojité.

F stejnoměrně spojité z $(X, p\mathcal{U})$ do $\mathbb{R}$ a v důsledku $F \circ \mathrm{id}$ také stejnoměrně spojité z $(X, \mathcal{U})$ do $\mathbb{R}$. $\square$

3.6 Grabiner 1986

Předveďme si jeden důkaz Urysohnovy věty 3.2.2 využívající přístup z funkcionální analýzy přes otevřená zobrazení a Urysohnovo lemma 3.2.1. Autorem této myšlenky je Sandy Grabiner [14].

Lemma 3.6.1. *Nechť $(E, \|\cdot\|_E)$ a $(F, \|\cdot\|_F)$ jsou Banachovy prostory a T omezený lineární operátor $T : E \to F$. Předpokládejme, že existují $m > 0$ a $r \in (0, 1)$ tak, že ke každému $y \in F$ existuje $x_0 \in E$ splňující*

$$\|x_0\|_E \leqq m \|y\|_F \qquad \text{a} \qquad \|y - Tx_0\|_F \leqq r \|y\|_F . \tag{3.1}$$

Potom existuje $x \in E$ takové, že

$$Tx = y \qquad \text{a} \qquad \|x\|_E \leqq \frac{m}{1-r} \cdot \|y\|_F .$$

Důkaz. Mějme libovolné $y \in Y$. Matematickou indukcí dokážeme, že pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ lze najít $x_n \in E$, pro něž

$$\|x_n\|_E \leqq mr^n \|y\|_F \qquad \text{a} \qquad \|y - Tx_0 - \cdots Tx_n\|_F \leqq r^{n+1} \|y\|_F .$$

Pro $n = 0$ vyplývá vztah přímo z předpokladu. Dále předpokládejme, že již pro nějaké $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí. Vzorec 3.1 aplikujme na prvek $(y - Tx_0 - \cdots - Tx_n)$: existuje $x_{n+1} \in E$, které má

$$\begin{aligned} \|x_{n+1}\|_E &\leqq m \|y - Tx_0 - \cdots - Tx_n\|_F &&\leqq mr^{n+1} \|y\|_F , \\ \|y - Tx_0 - \cdots - Tx_n - Tx_{n+1}\|_F &\leqq r \|y - Tx_0 - \cdots - Tx_n\|_F &&\leqq r^{n+2} \|y\|_F . \end{aligned}$$

Díky první nerovnosti je

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} x_n \right\|_E \leqq \sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|_E \leqq \sum_{n=0}^{\infty} mr^n \|y\|_F = \frac{m}{1-r} \cdot \|y\|_F < \infty,$$

v Banachově prostoru jsme tedy oprávněni definovat $x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$. Druhý odhad nám při $n \to \infty$ zajišťuje $\|y - Tx\|_F = 0$, čili $y = Tx$. $\square$

Věta 3.6.2. *Je-li X normální topologický prostor s uzavřenou podmnožinou A, pak každá spojitá omezená reálná funkce f lze spojitě rozšířit na X.*

Důkaz. Prostory $\mathcal{C}^b(X)$ omezených spojitých funkcí na X se supremovou normou, resp. $\mathcal{C}^b(A)$ omezených spojitých funkcí na A, jsou Banachovy prostory. Předpisem

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathcal{C}^b(X) & \to & \mathcal{C}^b(A), \\ & g & \mapsto & g|_A, \end{array}$$

definujme omezený lineární operátor. Nechť $f \in \mathcal{C}^b(A)$ má normu rovnu M. Disjunktní množiny $H_1 = f^{-1}\left(\left[-M, -\frac{M}{3}\right]\right)$ a $H_2 = f^{-1}\left(\left[\frac{M}{3}, M\right]\right)$ jsou uzavřené v A. Podle Urysohnova lemmatu 3.2.1 existuje spojitá funkce G na X taková, že $G|_{H_1} \equiv -\frac{M}{3}$ a $G|_{H_2} \equiv \frac{M}{3}$. Funkce G má normu rovnu $\frac{1}{3}M$ a na A se od f liší nejvýše o $\frac{2}{3}M$. Jsou splněny předpoklady předchozího lemmatu s konstantami $m = \frac{1}{3}$ a $r = \frac{2}{3}$, a proto existuje $F \in \mathcal{C}^b(X)$, pro niž $TF = f$ (F je tedy spojitým rozšíření f) a $\|F\| \leqq \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{2}{3}} \cdot \|f\| = \|f\|$. $\square$

Kapitola 4

Rozšiřování neomezených spojitých funkcí

V předešlých kapitolách 2 a 3 jsme se zabývali omezenými zobrazeními. Nyní tyto výsledky zkusíme zobecnit i na neomezený případ. Vyjdeme ze situace, kdy pro topologický prostor X s uzavřenou podmnožinou A známe podmínky, že každé spojité zobrazení $g: A \to [-M, M]$, $M > 0$, je možné spojitě rozšířit na $G: X \to [-M, M]$. Rádi bychom za stejných předpokladů na X spojitě rozšiřovali libovolná (i neomezená) spojitá zobrazení $f: A \to \mathbb{R}$ na celé X. Uvedeme různé postupy, které nám k tomu matematici zanechali.

Příklad 4.0.1. Hned na úvod kapitoly uveďme důležitou poznámku, že obecně nelze stejnoměrně spojitě rozšiřovat neomezená stejnoměrně spojitá zobrazení ani na $X = \mathbb{R}$. K funkci $x \mapsto x^2$ definované na množině $A = \mathbb{N}$ všech přirozených čísel nenalezneme stejnoměrně spojité rozšíření na $\mathbb{R}$.

4.1 Bohr 1918

Harald Bohr se nejprve zabýval rozšiřováním omezených reálných funkcí, jak jsme viděli v odstavci 2.5 z již citované Carathéodoryovy publikace [4]. Jako první předkládá Bohr také důkaz pro neomezené funkce.

Věta 4.1.1. *Předpokládejme, že A je uzavřená podmnožina topologického prostoru X a že ke každé omezené spojité reálné funkci g z A do $[0,1]$ existuje její spojité rozšíření na X, které je nenulové na $X \setminus A$. Potom k libovolné (i neomezené) spojité funkci $f: A \to \mathbb{R}$ existuje spojité rozšíření $F: X \to \mathbb{R}$ splňující $F|_A = f$.*

Důkaz. Nejprve předpokládejme, že $f \geqq 0$, a funkci f rozložme na

$$f = f_1 \cdot f_2, \qquad \text{kde } f_1 = \min\{f, 1\} \text{ a } f_2 = \max\{f, 1\}.$$

Potom $f_1: A \to [0,1]$ a $\frac{1}{f_2}: A \to [0,1]$ jsou omezené spojité funkce, a podle předpokladu mají spojitá rozšíření F_1 a F_2, navíc F_2 je na celém X nenulové. Definujme $F = F_1 \cdot \frac{1}{F_2}$. Jedná

se o spojitou funkci, která pro $x \in A$ nabývá hodnoty

$$F(x) = F_1(x) \cdot \frac{1}{F_2(x)} = f_1(x) \cdot f_2(x) = f(x).$$

Jestliže f může nabývat i záporných hodnot, rozložíme ji na kladnou a zápornou část $f = f^+ - f^-$. Ke každé z nich existuje díky předešlému odstavci spojité rozšíření F_+, resp. F_- a stačí definovat $F = F_+ - F_-$. □

Důsledek 4.1.2. *Každá spojitá reálná funkce $f : A \to \mathbb{R}$ definovaná na uzavřené podmnožině A metrického prostoru (X, ϱ) lze spojitě rozšířit na $F : X \to \mathbb{R}$.*

Důkaz. Nechť je množina A neprázdná. Díky Bohrově větě 2.5.1 lze každou omezenou funkci $g : A \to [0,1]$ spojitě rozšířit na $\tilde{G} : X \to \mathbb{R}$. Funkce $G(x) = \max\left\{\tilde{G}(x), \varrho(x, A)\right\}$, $x \in X$, je také spojitým rozšířením g a navíc $G > 0$ na $X \setminus A$, takže jsou splněny předpoklady předchozí věty. □

4.2 Hausdorff 1919

Do třetice citujme Hausdorffův článek [16], který se zabývá i neomezenými reálnými funkcemi. Každá spojitá funkce z uzavřené podmnožiny metrického prostoru (X, ϱ) lze spojitě rozšířit na celé X. Jak si ukážeme, tvrzení lze zobecnit na normální prostory.

Věta 4.2.1. *Mějme dán normální topologický prostor X a v něm uzavřenou podmnožinu A. Jestliže ke každé omezené spojité reálné funkci $g : A \to [-1,1]$ existuje spojité rozšíření $G : X \to [-1,1]$, pak i každá neomezená spojitá reálná funkce f definovaná na A lze spojitě rozšířit na $F : X \to \mathbb{R}$.*

Důkaz. Položme

$$g(x) = \frac{f(x)}{1 + |f(x)|}, \qquad x \in A.$$

Tato funkce je v absolutní hodnotě ostře omezená konstantou 1. Z předpokladu víme, že existuje její spojité rozšíření $G : X \to [-1,1]$. Jelikož je X normální, existují spojité (jak vidíme z Urysohnova lemmatu 3.2.1) funkce $c_1, c_2 : X \to [0,1]$, pro něž $c_1(G^{-1}(\{-1\})) = 0$ a $c_1|_A \equiv 1$, resp. $c_2(G^{-1}(\{1\})) = 0$ a $c_2|_A \equiv 1$. Jestliže položíme

$$\tilde{G}(x) = c_1(x) \cdot c_2(x) \cdot G(x),$$

obdržíme spojitou funkci z X do otevřeného intervalu $(-1,1)$. Na závěr definujeme

$$\begin{array}{rccc} F: & X & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{\tilde{G}(x)}{1-\left|\tilde{G}(x)\right|}. \end{array}$$

Pro $x \in A$ potom

$$F(x) = \frac{\tilde{G}(x)}{1 - \left|\tilde{G}(x)\right|} = \frac{G(x)}{1 - |G(x)|} = \frac{g(x)}{1 - |g(x)|} = \frac{\frac{f(x)}{1+|f(x)|}}{1 - \left|\frac{f(x)}{1+|f(x)|}\right|} = f(x).$$

□

Poznámka 4.2.2. V roce 1919 ještě nebylo Urysohnovo lemma vvyslovené. Místo něj definuje Hausdorff v metrickém prostoru (X, ϱ) pro $A \neq \emptyset$ funkci $\tilde{G}$ vzorcem

$$\tilde{G}(x) = \frac{G(x)}{1 + \varrho(x, A)}, \qquad x \in X.$$

Důsledek 4.2.3. *Každá spojitá reálná funkce na uzavřené podmnožině normálního topologického prostoru lze spojitě rozšířit na celý prostor.*

Důkaz. Tvrzení plyne z vět 3.1.2, 3.5.5 a 4.2.1. □

4.3 Gillman a Jerison 1960

Leonard Gillman a Meyer Jerison v roce 1960 charakterizovali, kdy lze rozšiřovat neomezená spojitá zobrazení. Představíme si důkaz, který uvedli v [13] a z něhož vyplývá Urysohnova věta i pro neomezená zobrazení. V zásadě se přístup přes arkustangens a tangens běžně uvádí při zobecňování výsledku pro omezené funkce na neomezené.

Věta 4.3.1. *Předpokládejme, že A je podmnožina topologického prostoru X a že každá omezená spojitá reálná funkce $g: A \to \mathbb{R}$ lze spojitě prodloužit na $G: X \to \mathbb{R}$. Potom každá (i neomezená) spojitá funkce $f: A \to \mathbb{R}$ lze spojitě rozšířit na $F: X \to \mathbb{R}$ právě tehdy, když pro každou nulovou množinu*[1] *Z disjunktní s A existuje spojitá funkce h na X, která na A nabývá hodnoty 1 a na Z je nulová.*

Důkaz. Na začátek dokažme implikaci $\Rightarrow$. Jestliže Z je nulová množina disjunktní s A, pak existuje spojitá funkce u, která nabývá nuly právě na množině A. Funkce $f(x) = \frac{1}{u(x)}$ definovaná na A je spojitá a podle předpokladu má spojité rozšíření $F: X \to \mathbb{R}$. Potom funkce $h = F \cdot u$ je spojitá na X, v bodě $a \in A$ nabývá hodnoty $\frac{1}{u(a)} \cdot u(a) = 1$ a v $z \in Z$ je nulová, neboť je zde u nulová.

Nyní předpokládejme, že platí podmínka napravo a ukažme směr $\Leftarrow$. Ke každé spojité funkci f na A je i $g(x) = \operatorname{arctg}(f(x))$, $x \in A$, spojitá a navíc omezená, a tudíž má spojité rozšíření G na X. Množina $Z = \left\{x \in X : |g(x)| \geqq \frac{\pi}{2}\right\}$ je disjunktní s A a nulová, protože spojitá funkce

$$x \mapsto \max\left\{\frac{\pi}{2} - |g(x)|, 0\right\}, \qquad x \in X,$$

se právě nuluje na Z. Díky předpokladu existuje spojitá funkce u na X, která na A nabývá hodnoty 1 a na Z je nulová. Navíc můžeme požadovat $|u| \leqq 1$. Dále $|G(x) \cdot u(x)| < \frac{\pi}{2}$ na X a $G(a) \cdot u(a) = \operatorname{arctg}(f(a))$ pro $a \in A$. Zobrazení

$$\begin{array}{rccl} F: & X & \to & \mathbb{R}, \\ & x & \mapsto & \operatorname{tg}(G(x) \cdot u(x)), \end{array}$$

[1] Podmnožina Z topologického prostoru X je *nulová*, pokud existuje spojitá reálná funkce u na X taková, že $Z = u^{-1}(\{0\})$.

je tudíž slíbeným spojitým rozšířením f. $\square$

Důsledkem uvedené věty je zobecnění Urysohnovy věty i pro neomezená zobrazení.

Důsledek 4.3.2. *T_1–topologický prostor X je normální právě tehdy, když pro libovolnou uzavřenou množinu A ležící v X má libovolné spojité zobrazení $f: A \to \mathbb{R}$ spojité rozšíření $F: X \to \mathbb{R}$.*

Důkaz. Směr $\Leftarrow$ platí díky již dokázané Urysohnově větě 3.2.2, a tak zbývá ukázat $\Rightarrow$. Z Urysohnovy věty 3.2.2 víme, že tvrzení platí pro omezená zobrazení. Každá nulová množina Z je uzavřená, neboť je vzorem uzavřené množiny $\{0\}$ při spojitém zobrazení. Pokud je Z disjunktní s A, díky Urysohnovu lemmatu 3.2.1 existuje funkce h, která na A nabývá jedničky a na Z nuly, a tak jsou splněny předpoklady předchozí věty a libovolná spojitá funkce f na A lze spojitě rozšířit na prostor X. $\square$

Kapitola 5

Rozšiřování zobrazení z metrických prostorů do obecnějších topologických prostorů

Nyní se opět vrátíme do metrických prostorů, ale již se nebudeme zabývat pouze reálnými funkcemi. Představíme si několik prací, které je možné využít též pro zobrazení do obecnějších topologických prostorů Y. Jak na začátku další kapitoly 6 uvidíme, všechna vyslovená tvrzení lze rovněž aplikovat pro pseudometrické prostory (X, ϱ).

5.1 Poussin 1916

V tomto odstavci zobecníme postup Charlese Jean de la Vallée Poussina z roku 1916 [26]. Uvedeme jej v obecnější podobě, než že každá omezená spojitá funkce naomezená perfektní podmnožině v $\mathbb{R}^n$ může být spojitě rozšířena na celé $\mathbb{R}^n$. Pro prostor X je kromě metrizovatelnosti klíčový předpoklad separability. Za tento ústupek jsme odměněni tím, že můžeme za cílový prostor vzít nejen reálná čísla, ale libovolný Banachův prostor. Poussinova motivace je jiná než u Tietzeho: každá α–baireovská funkce definovaná na uzavřené podmnožině A v X lze rozšířit na X pro $\alpha > 0$. Předvedeným důkazem zjišťujeme, že ji lze rozšířit rovněž v případě $\alpha = 0$ (neboli jedná-li se o spojitou funkci).

Věta 5.1.1. *Nechť (X, ϱ) je separabilní metrický prostor, ve kterém je A jeho uzavřená podmnožina. Nechť $(Y, \|\cdot\|)$ je Banachův prostor, tj. úplný normovaný vektorový prostor nad tělesem reálných či komplexních čísel. Jestliže $f : A \to Y$ je spojité omezené zobrazení, potom existuje jeho spojité rozšíření $F : X \to Y$.*

Důkaz. Předpokládejme, že A je neprázdná, neboť v opačném případě můžeme F definovat jako libovolnou konstantu v Y. Jestliže je $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ spočetná hustá podmnožina v A, položme pro $x \in X \setminus A$ a $n \in \mathbb{N}$

$$r_n(x) = \varrho(a_n, X \setminus B(x, 2\varrho(x, A))).$$

Všimněme si, že $r_n(x)$ nenabývá hodnoty větší než $2\varrho(x, A)$ a že r_n je stejnoměrně spojitou

funkcí na $X \setminus A$: vezměme $\delta > 0$, $x \in X \setminus A$ a $y \in B(x,\delta) \cap (X \setminus A)$. Pro libovolný prvek $b \in X \setminus B(x, 2\varrho(x,A))$, tzn. $\varrho(x,b) \geqq 2\varrho(x,A)$, je

$$\varrho(y,b) \geqq \varrho(x,b) - \varrho(x,y) > 2\varrho(x,A) - \delta > 2\varrho(y,A) - 3\delta,$$

tj. $b \in X \setminus B(y, 2\varrho(y,A) - 3\delta)$. Pro $n \in \mathbb{N}$

$$\varrho(a_n, X \setminus B(y, 2\varrho(y,A))) \quad \leqq \quad \varrho(a_n,b) + \varrho(b, X \setminus B(y, 2\varrho(y,A))) \leqq \varrho(a_n,b) + 3\delta$$

a v důsledku $r_n(y) \leqq r_n(x) + 3\delta$.

Zobrazení

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A, \\ \dfrac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{r_n(x) f(a_n)}{n^2}}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{r_n(x)}{n^2}}, & x \in X \setminus A, \end{cases}$$

díky omezenosti f, hustotě $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ v A (tzn. pro každé $x \in X \setminus A$ existuje $n \in \mathbb{N}$, že $r_n(x) > 0$) a tomu, že Y je Banachův prostor, dobře definuje $F(x)$ jako prvek Y i pro $x \in X \setminus A$.

Ukažme spojitost F na A. K bodu $x \in A$ a k $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $z \in B(x,\delta) \cap A$ platí $\|f(x) - f(z)\| < \varepsilon$. Pro $y \in B\left(x, \frac{\delta}{2}\right) \setminus A$ takové, že $r_n(y) > 0$, leží a_n v $B(y, 2\varrho(y,A))$, speciálně $a_n \in B(x,\delta)$. Pro něj

$$\|F(x) - F(y)\| = \left\| f(x) - \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{r_n(y) f(a_n)}{n^2}}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{r_n(y)}{n^2}} \right\| \leqq \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{r_n(y) \|f(x) - f(a_n)\|}{n^2}}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{r_n(y)}{n^2}} < \varepsilon.$$

Zbývá dokončit důkaz spojitosti na $X \setminus A$. Postačí pro libovolné $k > 0$ dokázat spojitost na množině $\{x \in X \setminus A : \ \varrho(x,A) < k\}$. Na této množině je každá r_n omezená konstantou $2k$, takže na stejnoměrně spojitá zobrazení $x \mapsto \frac{r_n(x) f(a_n)}{n^2}$ a $x \mapsto \frac{r_n(x)}{n^2}$ můžeme použít Weierstrassův M–test 7.0.1, díky němuž je F spojité na $\{x \in X \setminus A : \ \varrho(x,A) < k\}$ a tedy i na $X \setminus A$. □

Poznámka 5.1.2. Tvrzení lze modifikovat i pro stejnoměrnou spojitost: jestliže f je stejnoměrně spojité a omezené na A (přičemž v tomto případě nemusí být A uzavřené), pak lze zkonstruovat F stejnoměrně spojité na X takové, že $F|_A = f$.

Důkaz. Prohodí se pořadí kvantifikátorů: pro $\varepsilon > 0$ nalezneme $\delta > 0$, aby pro každé $x \in A$ a $z \in B(x,\delta) \cap A$ platilo $\|f(x) - f(z)\| < \varepsilon$. Definujme pro $M \geqq 0$ spojité zobrazení χ_M, které zmenší vektor $y \in Y$ tak, aby měl normu menší nebo rovnu M, předpisem

$$\begin{array}{rccl} \chi_M : & Y & \to & Y \\ & y & \mapsto & \begin{cases} y, & \|y\| \leqq M, \\ M \cdot \frac{y}{\|y\|}, & \|y\| > M. \end{cases} \end{array}$$

Pro $y \in B\left(A, \frac{\delta}{2}\right)$ odhadneme

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n(y)}{n^2} < 1 + \frac{\delta \pi^2}{6} \qquad \text{a} \qquad \left\| 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n(x) f(a_n)}{n^2} \right\| < 1 + \frac{\delta M \pi^2}{6},$$

kde za M pokládáme konstantu omezenosti $|f|$.

Definujme

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A, \\ \dfrac{\chi_M\left(1+\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{r_n(x)f(a_n)}{n^2}\right)}{\min\left\{1+\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{r_n(x)}{n^2}, 1+\frac{\delta\pi^2}{6}\right\}}, & x \in X \setminus A. \end{cases}$$

Potom $a_n \in B(x,\delta)$, kdykoliv $x \in A$, $y \in B\left(x, \frac{\delta}{2}\right)$ a $r_n(y) > 0$, a proto $\|F(x) - F(y)\| < \varepsilon$, takže F je stejnoměrně spojitá na A vzhledem k X.

Dále pro každé $r > 0$, $\delta' > 0$, $x \in X \setminus B(A,r)$ a $y \in B(x,\delta') \cap (X \setminus B(A,r))$ se $r_n(x)$ a $r_n(y)$ pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ liší maximálně o $3\delta'$, takže

$$\begin{aligned} \left\|\left(1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n(x)f(a_n)}{n^2}\right) - \left(1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n(y)f(a_n)}{n^2}\right)\right\| &\leqq \left\|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(r_n(x)-r_n(y))f(a_n)}{n^2}\right\| \leqq \\ &\leqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|r_n(x)-r_n(y)\|\cdot\|f(a_n)\|}{n^2} \leqq \frac{3\delta' M\pi^2}{6}, \\ \left\|\left(1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n(x)}{n^2}\right) - \left(1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n(y)}{n^2}\right)\right\| &\leqq \left\|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n(x)-r_n(y)}{n^2}\right\| \leqq \frac{3\delta'\pi^2}{6}. \end{aligned}$$

Zobrazení

$$h_1 : \ x \mapsto \chi_M\left(1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n(x)f(a_n)}{n^2}\right), \quad h_2 : \ x \mapsto \min\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n(x)}{n^2}, 1+\frac{\delta\pi^2}{6}\right\}$$

jsou stejnoměrně spojitá na $X \setminus B(A,r)$, přičemž h_1 a $\frac{1}{h_2}$ jsou omezená všude na $X \setminus A$. Díky poznámce 7.0.3 je nejdříve F stejnoměrně spojité na $X \setminus B(A,r)$, a tudíž podle poznámky 7.0.4 i na celém X. □

5.2 Brouwer 1918

Do třetice se věnujme rozšiřování spojitých zobrazení z uzavřené podmnožiny A eukleidovského prostoru $\mathbb{R}^n$. V roce 1918 zveřejnil Luitzen Egbertus Jan Brouwer článek [3], v němž narozdíl od Lebesgueova (podkapitola 2.1) a Tietzeho prvního přístupu (podkapitola 2.2, věta 2.2.4) nepotřeboval supremum či infimum, a lze tudíž zobecnit na zobrazení do libovolného topologického vektorového prostoru (i když sám se zabýval pouze spojitými omezenými reálnými funkcemi).

Jeho důkaz modifikujme: zatímco na $X \setminus A$ rozkládá síť simplexů, my zde využijeme přístup z vyjmenovaných případů a rozložíme síť n–dimenzionálních krychlí. Brouwer však Lebesgueovy a Tietzeho výsledky necituje, jen chce přednést jiný důkaz než Charles Jean de la Valée Poussin (podkapitola 5.1) a Harald Bohr (podkapitola 2.5) a nepoužívat při něm nekonečný proces.

Věta 5.2.1. *Jestliže je A uzavřená podmnožina eukleidovského prostoru $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, Y topologický vektorový prostor a f spojité zobrazení z A do Y, pak existuje spojité zobrazení $F : \ X \to Y$, které rozšiřuje f.*

Důkaz. Důkaz je prakticky totožný jako u věty 2.1.1. Jediný rozdíl spočívá v tom, že ve vrcholu x krychle $K \in \mathcal{K}$ za funkční hodnotu $F(x)$ zvolíme libovolný prvek z množiny $\{f(z) : \ z \in A, \ \varrho(x,z) < 2\varrho(x,A)\}$.

Ke spojitosti na A předpokládejme, že pro $x \in A$, U otevřené okolí $f(x)$ existuje $\delta > 0$ takové, že $f(z) \in U$, kdykoliv $z \in B(x,\delta) \cap A$. Pokud y je vrchol některé krychle z $\mathcal{K}$, která je celá obsažená v $B\left(x, \frac{\delta}{3}\right)$ (a víme, že systém těchto krychlí tvoří okolí bodu $x \in A$), pak funkční hodnota $F(y)$ je rovna $f(z)$ pro nějaký bod $z \in A$, který není od y vzdálen více než $2\varrho(y,A)$. Protože

$$\varrho(x,z) \leqq \varrho(x,y) + \varrho(y,z) < \frac{\delta}{3} + \frac{2\delta}{3} = \delta,$$

leží $F(y) = f(z)$ v U.

Spojitost F na $X \setminus A$ je obdobně jako ve větě 2.1.1 díky postupnému lineárnímu definování zřejmá. □

5.3 Dugundji 1951

Na začátku padesátých let dvacátého století představil James Dugundji slavný výsledek, větu 5.3.5. V původním článku [9] rozšiřoval spojitá zobrazení z uzavřené podmnožiny metrického prostoru do lokálně konvexního topologického prostoru Y. My si jej předvedeme podle autorovy pozdější učebnice topologie [10], kde za Y lze brát obecnější třídu prostorů.[1]

Lemma 5.3.1. *Nechť A je uzavřený podprostor metrického prostoru (X,ϱ) a $A' \subseteqq A$ je hustá podmnožina A. Pak existuje $\mathcal{U}$ lokálně konečné otevřené pokrytí $X \setminus A$ a soubor bodů $\{a_U : U \in \mathcal{U}\}$ v A' tak, že*

- *pro každé $U \in \mathcal{U}$ a $x \in U$ platí $\varrho(x,a_U) \leqq 2\varrho(x,A)$,*
- *je-li $U_n \in \mathcal{U}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a je-li $\lim\limits_{n\to\infty} \varrho(U_n,A) = 0$, pak také $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{diam}(U_n) = 0$.*

Důkaz. Označme $\mathcal{B} = \left\{B\left(x, \frac{1}{4}\varrho(x,A)\right) : x \in X \setminus A\right\}$ soubor otevřených koulí v $X \setminus A$. Jelikož je A uzavřené v X, je $\mathcal{B}$ otevřeným pokrytím $X \setminus A$ a díky parakompaktnosti[2] $X \setminus A$ má lokálně konečné otevřené zjemnění $\mathcal{U}$. To znamená, že pro libovolné $U \in \mathcal{U}$ nalezneme $x_U \in X \setminus A$, pro něž bude $U \subseteqq B\left(x_U, \frac{1}{4}\varrho(x_U,A)\right)$.

Množina A' je hustá v A, čili pro každé $U \in \mathcal{U}$ existuje $a_U \in A'$ takové, že platí odhad $\varrho(x_U,a_U) \leqq \frac{5}{4}\varrho(x_U,A)$. Nyní můžeme přistoupit k ověření obou požadovaných vlastností.

- Mějme libovolná $U \in \mathcal{U}$ a $x \in U$. Pro ně díky předešlým odhadům platí

$$\begin{aligned}
\varrho(x,a_U) &\leqq \varrho(x,x_U) + \varrho(x_U,a_U) \leqq \frac{1}{4}\varrho(x_U,A) + \frac{5}{4}\varrho(x_U,A) = \frac{3}{2}\varrho(x_U,A), \\
\varrho(x_U,A) &\leqq \varrho(x_U,x) + \varrho(x,A) \leqq \frac{1}{4}\varrho(x_U,A) + \varrho(x,A).
\end{aligned}$$

[1] Zpracováno rovněž podle van Millovy knihy [25].

[2] Topologický prostor X je *parakompaktní*, pokud je Hausdorffův a každé otevřené pokrytí X má lokálně konečné otevřené zjemnění. Podle Stoneovy věty je každý metrizovatelný prostor parakompaktní, vizme tvrzení 5.1.3, resp. 4.4.1 v Engelkingově General Topology [11].

Poslední mezivýsledek se nám ještě bude hodit u druhého bodu, upravme jej na

$$\frac{3}{4}\varrho\left(x_U, A\right) \leqq \varrho\left(x, A\right). \tag{5.1}$$

Dosadíme-li jej do prvního řádku, vyplyne požadovaná nerovnost

$$\varrho\left(x, a_U\right) \leqq 2\varrho\left(x, A\right).$$

- Předpokládejme $\{U_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteqq \mathcal{U}$ a $\lim\limits_{n\to\infty} \varrho\left(U_n, A\right) = 0$. Vezměme posloupnost $\{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ takovou, že $p_n \in U_n$ pro $n \in \mathbb{N}$ a navíc $\lim\limits_{n\to\infty} \varrho\left(p_n, A\right) = 0$. Vraťme se k odhadu (5.1) z předešlého bodu. Díky němu

$$\lim_{n\to\infty} \varrho\left(x_{U_n}, A\right) \leqq \lim_{n\to\infty} \frac{4}{3}\varrho\left(p_n, A\right) = 0.$$

Na závěr si uvědomme, že $\mathcal{U}$ zjemňuje $\mathcal{B}$, a tudíž $U_n \subseteqq B\left(x_{U_n}, \frac{1}{4}\varrho\left(x_{U_n}, A\right)\right)$. Proto

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}\left(U_n\right) = 0.$$

□

Otevřené pokrytí $\mathcal{U}$ a soubor bodů $\{a_U : U \in \mathcal{U}\}$ z lemmatu nazývejme *Dugundjiho systém pro X a A.*

Poznámka 5.3.2. T_1–prostor X je parakompaktní, právě když ke každému otevřenému pokrytí $\mathcal{V}$ existuje podřízený rozklad jednotky, tzn. existují spojité reálné funkce $\kappa_U \geqq 0$, $U \in \mathcal{U}$ (kde $\mathcal{U}$ je indexová množina) takové, že pro každé $x \in X$ existuje nejvýše spočetně mnoho $U \in \mathcal{U}$ obsahujících x, $\sum\limits_{U\in\mathcal{U}} \kappa_U\left(x\right) = 1$ a pokrytí $\left\{\kappa_U^{-1}\left((0,1]\right)\right\}_{U\in\mathcal{U}}$ prostoru X zjemňuje $\mathcal{V}$. Tvrzení vyslovené jako věta 5.1.9 je dokázané v Engelkingově General Topology [11].

V případě, kdy X je metrický prostor s metrikou ϱ, který je podle Stoneovy věty parakompaktní a v němž má $\mathcal{V}$ lokálně konečné zjemnění $\mathcal{U}$, můžeme definovat zobrazení $\kappa_U : X \to \mathbb{R}$, $U \in \mathcal{U}$, pro $x \in X$ předpisem[3]

$$\kappa_U\left(x\right) = \frac{\varrho\left(x, X \setminus U\right)}{\sum\limits_{V\in\mathcal{U}} \varrho\left(x, X \setminus V\right)}.$$

Než vyslovíme první část Dugundjiho věty, uveďme definici.

Definice 5.3.3. (Afinní prostor typu m.) O topologickém prostoru X řekneme, že má *spočetný charakter*, pokud každý bod $x \in X$ má lokální spočetnou otevřenou bázi (tj. pro

[3]Vypořádejme se nejprve s patologickou možností, kdy bude X jednobodový prostor $\{x\}$. Potom stačí vzít $\kappa_U\left(x\right) = \frac{1}{|\{U\in\mathcal{U}\}|}$. V ostatních případech zjemněme $\mathcal{V}$ otevřenými množinami, aby pro každé $x \in X$ existovala $V \in \mathcal{V}$ s kladnou vzdáleností od x, a formálně dodefinujme $\varrho\left(x, \emptyset\right) = 0$, kdykoliv $x \in X$. Tím bude jmenovatel zlomku vždy kladný.

každý bod $x \in X$ existují $U_1, U_2, \ldots \subseteqq X$ okolí x taková, že pro každou otevřenou G obsahující x existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $U_n \subseteqq G$). Reálný vektorový prostor Y je *afinní*, pokud indukuje eukleidovskou topologii na konečnědimenzionálních podprostorech. Navíc jej nazveme *afinním typu* m, jestliže pro každý prostor X se spočetným charakterem, libovolné spojité zobrazení $f: X \to Y$, pro každé $x \in X$ a V okolí $f(x)$ existuje U okolí bodu x v X a konvexní množina $C \subseteqq V$ taková, že $f(U) \subseteqq C$.

Poznámka 5.3.4. Každý lokálně konvexní topologický vektorový prostor[4] Y je afinní typu m. Nechť X je prostor se spočetným charakterem, $f: X \to Y$ spojité, $x \in X$ pevně dané a V okolí $f(x)$. Díky lokální konvexitě existuje C konvexní okolí $f(x)$ v Y, které leží ve V. Potom položme $U = f^{-1}(C)$.

Ne každý afinní prostor typu m je lokálně konvexní. Jak uvádí James Dugundji v prvním dodatku (4.1 až 4.5) učebnice [10], reálný vektorový prostor s konečnou topologií (slabou topologií určenou eukleidovskou topologií na konečnědimenzionálních podprostorech) nemusí být dokonce ani topologický vektorový prostor.

Poznamenejme, že v našem následujícím tvrzení za X bereme metrický prostor, který má automaticky spočetný charakter (pro $x \in X$ je systém $\{B(x,r): r > 0, r \in \mathbb{Q}\}$ spočetnou bází okolí x).

Věta 5.3.5. *Buď Y afinní prostor typu m. Mějme v metrickém prostoru (X, ϱ) uzavřenou podmnožinu $A \subseteqq X$. Pak ke každému spojitému zobrazení $f: A \to Y$ existuje spojité rozšíření $F: X \to Y$ tak, že $F|_A = f$. Navíc $F(X)$ leží v konvexním obalu $f(A)$.*

Důkaz. Předpokládejme, že lokálně konečné otevřené pokrytí $\mathcal{U}$ prostoru $X \setminus A$ a soubor $\{a_U : U \in \mathcal{U}\} \subseteqq A$ tvoří Dugundjiho systém pro X a A (v tomto případě bereme $A' = A$). Nechť systém funkcí $\kappa_U: X \setminus A \to \mathbb{R}$, $U \in \mathcal{U}$, tvoří podle poznámky 5.3.2 rozklad jednotky vzhledem k pokrytí $\mathcal{U}$. Definujme zobrazení $F: X \to Y$ předpisem

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A, \\ \sum\limits_{U \in \mathcal{U}} \kappa_U(x) \cdot f(a_U), & x \in X \setminus A. \end{cases}$$

Nejprve ověříme, že F je spojitá v $X \setminus A$. Vezměme libovolný bod $x \in X \setminus A$. Díky lokální konečnosti $\mathcal{U}$ existuje okolí W bodu x v $X \setminus A$, které protíná pouze konečně mnoho prvků z $\mathcal{U}$, řekněme $U_1, \ldots, U_n$. Pro $U \in \mathcal{U}$ disjunktní s W je $\kappa_U|_W = 0$. Čili

$$F(y) = \sum_{k=1}^{n} \kappa_{U_k}(y) \cdot f(a_{U_k}), \qquad y \in W,$$

což znamená, že $F(y)$ je konvexní kombinací bodů z $f(A)$, tj. $F(y)$ leží v konvexním obalu $f(A)$. Protože jsou κ_U spojité pro $U \in \mathcal{U}$, pak i $F|_W$ je spojitá.

[4]Topologický vektorový prostor je *lokálně konvexní*, pokud má každý bod lokální bázi okolí tvořenou konvexními množinami (tj. pro každý bod $x \in X$ existují $C_1, C_2, \ldots \subseteqq X$ konvexní okolí x taková, že pro každou otevřenou G obsahující x existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $C_n \subseteqq G$). Speciálně libovolný Banachův prostor je lokálně konvexní.

Zobrazení F je spojité také v A. K důkazu tohoto tvrzení zvolme libovolně $x \in A$. Nechť V je okolí $f(x)$. Pak existuje U okolí x v X a konvexní podmnožina $K \subseteqq V$ splňující $f(U) \subseteqq K$. Podle spojitosti f v x existuje $\delta > 0$ takové, že $B(x, \delta) \cap A \subseteqq f^{-1}(K)$.

Ukážeme, že $F\left(B\left(x, \frac{\delta}{3}\right)\right) \subseteqq K$. Zajisté pro $y \in B\left(a, \frac{\delta}{3}\right) \cap A$ platí $f(y) \in K$. Řešme druhý případ, kdy $y \in B\left(a, \frac{\delta}{3}\right) \cap (X \setminus A)$. Potom

$$\varrho(y, A) \leqq \varrho(y, x) < \frac{\delta}{3}.$$

Pokud $x \in U$ pro nějaké $U \in \mathcal{U}$, pak dle lemmatu 5.3.1

$$\varrho(x, a_U) \leqq \varrho(x, y) + \varrho(y, a_U) \leqq \varrho(x, y) + 2\varrho(y, A) < \frac{\delta}{3} + \frac{2\delta}{3} = \delta.$$

Vidíme, že $a_U \in B(x, \delta) \cap A$, a tudíž $f(a_U) \in K$. Nakonec

$$F(y) = \sum_{U \in \mathcal{U}} \kappa_U(y) \cdot f(a_U)$$

je konvexní kombinací bodů z konvexní množiny K, a tudíž leží také v K, čímž jsme dokázali slíbenou vlastnost $F\left(B\left(x, \frac{\delta}{3}\right)\right) \subseteqq K \subseteqq V$. Zobrazení F je spojité v x. □

Důsledek 5.3.6. *Nechť je Y afinní prostor typu m, K jeho konvexní podmnožina, (X, ϱ) metrický prostor a A jeho uzavřená podmnožina. Každé spojité zobrazení $f: A \to K$ má spojité rozšíření $F: X \to K$.*

Důkaz. Cílový prostor ve vyslovené Dugundjiho větě jsme nahradili konvexním K. K tomuto kroku nás opravňuje fakt, že $F(X)$ leží v konvexním obalu $f(A)$ a $f(A)$ leží v konvexní množině K. Proto speciálně $F: X \to K$. □

Poznámka 5.3.7. Všimněme si, že κ_U ani a_U pro $U \in \mathcal{U}$ nezávisí na zadané funkci f. Definujeme-li zobrazení e, které každému spojitému zobrazení $f: A \to Y$ přiřadí zobrazení $e(f): X \to Y$ popsané Dugundjiho větou 5.3.5, potom

$$\begin{aligned}
e(f+g)(x) &= \begin{cases} (f+g)(x), & x \in A, \\ \sum\limits_{U \in \mathcal{U}} \kappa_U(x) \cdot (f+g)(a_U), & x \in X \setminus A, \end{cases} \\
e(f+g)(x) &= \begin{cases} f(x) + g(x), & x \in A, \\ \sum\limits_{U \in \mathcal{U}} \kappa_U(x) \cdot f(a_U) + \sum\limits_{U \in \mathcal{U}} \kappa_U(x) \cdot g(a_U), & x \in X \setminus A, \end{cases} \\
e(f+g)(x) &= e(f)(x) + e(g)(x), \quad \text{kdykoliv } f, g: A \to Y \text{ jsou spojitá,}
\end{aligned}$$

neboli e je lineární operátor. Pokud je $(Y, \|\cdot\|)$ navíc normovaný prostor, potom pro kterékoliv spojité zobrazení $f: A \to Y$ platí $\|f\| = \|e(f)\|$, neboť $e(f)$ leží v konvexním obalu $f(A)$.

Kapitola 6

Rozšiřování pseudometrik

V šesté kapitole na chvíli vstoupíme do řešení otázek týkajících se metrik a pseudometrik. Na úvod ukážeme, že tvrzení o rozšiřování spojitých zobrazení na metrických prostorech lze zobecnit na pseudometrické prostory. Hlavním obsahem bude objasnit, že pokud umíme spojitě rozšiřovat spojité pseudometriky z uzavřené podmnožiny metrického prostoru, pak umíme spojitě rozšiřovat i omezené reálné funkce z A na celé X. V případě stejnoměrné spojitosti dokonce platí ekvivalence.

Definice 6.0.1. (Metrická modifikace.) Nechť (X, τ) je pseudometrický prostor. Definujme

$$\begin{array}{rcll} [x] & = & \{x' \in X : \ \tau(x, x') = 0\}, & x \in X, \\ [X] & = & \{[x] : \ x \in X\}, & \\ \varrho([x], [y]) & = & \tau(x, y), & [x], [y] \in [X]. \end{array}$$

Na základě následujícího lemmatu je $([X], \varrho)$ metrický prostor, který budeme nazývat *metrickou modifikací* (X, τ).

Lemma 6.0.2. *Zobrazení ϱ z předchozí definice je metrikou na $[X]$ a*

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & (X, \tau) & \to & ([X], \varrho) \\ & x & \mapsto & [x] \end{array}$$

je otevřené spojité zobrazení.

Důkaz. Nejprve si musíme uvědomit, že pro všechna $[x], [y] \in [X]$ a $x' \in [x]$, $y' \in [y]$ platí

$$\begin{array}{rcl} \tau(x, y) & \leqq & \tau(x, x') + \tau(x', y') + \tau(y', y) = \tau(x', y') \leqq \\ & \leqq & \tau(x', x) + \tau(x, y) + \tau(y, y') = \tau(x, y), \end{array}$$

takže ϱ je na $[X] \times [X]$ definováno jednoznačně a je pseudometrikou. Pokud $\varrho([x], [y])$ je pro $[x], [y] \in [X]$ nulové, pak $\tau(x, y) = 0$, tzn. $[x] = [y]$, a ϱ je tudíž metrika.

Pro $x \in X$ a $r > 0$ platí $\varphi(B(x, r)) = B([x], r)$, tedy φ je otevřené spojité zobrazení. $\square$

Poznámka 6.0.3. Předchozí pozorování je snadné, a přesto zajímavé. Umožňuje nám výsledky, které jsme obdrželi pro spojitá zobrazení na metrických prostorech (především v kapitolách 2 a 5), zobecnit do pseudometrických prostorů. Jestliže pro daný T_0–topologický

prostor[1] Y a všechny metrické prostory $\left(\tilde{X}, \varrho\right)$ s uzavřenou podmnožinou $\tilde{A}$ umíme zkonstruovat spojité rozšíření každého spojitého zobrazení $\tilde{f}: \tilde{A} \to Y$ na $\tilde{F}: \tilde{X} \to Y$, pak pro libovolný pseudometrický prostor (X, τ) s uzavřenou podmnožinou A lze jakékoliv spojité zobrazení $f: A \to Y$ spojitě rozšířit na $F: X \to Y$.

Důkaz. Mějme pseudometrický prostor (X, τ) s uzavřenou podmnožinou A, daný topologický prostor Y a libovolné spojité zobrazení $f: A \to Y$. Nechť $\varphi(x) = [x]$, $x \in X$. Pro všechna $x, y \in A$ taková, že $\tau(x, y) = 0$, je $f(x) = f(y)$, neboť v opačném případě by existovala otevřená množina $V \subseteqq Y$, která by obsahovala buď $f(x)$, anebo $f(y)$. Jelikož je f spojité, existovalo by okolí x a y, které by se zobrazilo do V, což nás přivádí ke sporu $f(x) \in V$ a zároveň $f(y) \in V$.

Na uzavřené množině $[A] = \varphi(A)$ metrického prostoru $([X], \tau)$ můžeme definovat spojité zobrazení $\tilde{f}([x]) = f(x)$ z $[A]$ do Y. To má podle předpokladu spojité rozšíření $\tilde{F}: [X] \to Y$. Položíme-li $F(x) = \tilde{F}([x])$, $x \in X$, dostaneme slíbené spojité rozšíření f. $\square$

6.1 Hausdorff 1930

Představme si práci [17] Felixe Hausdorffa z roku 1930, týkající se topologicky ekvivaletních metrik a spojitých pseudometrik. Ve své nové větě využívá podobný postup jako o jedenáct let dříve – podívejme se na důkaz věty 2.6.1. Úvodní lemma a věta jsou převzaty z originálního článku.

Lemma 6.1.1. *Nechť (X, ϱ) je metrický prostor, v němž máme uzavřenou podmnožinu A. Předpokládejme, že na A je definovaná metrika σ_A topologicky ekvivalentní[2] s $\varrho|_{A \times A}$. Následující podmníky jsou ekvivalentní:*

1. *na X lze definovat metriku σ topologicky ekvivalentní s ϱ takovou, že $\sigma|_{A \times A} = \sigma_A$,*
2. *existuje nezáporná reálná funkce $s: X \times A \to [0, \infty)$ splňující*
   - *$s(a, b) = \sigma_A(a, b)$ pro $a, b \in A$,*
   - *pro pevné $a \in A$ a pro $x \in X \setminus A$ taková, že $\varrho(x, A) \to 0$ a $s(x, a) \to 0$, platí $\varrho(x, a) \to 0$,*
   - *pro $x, y \in X$ je $r(x, y) = \sup\limits_{a \in A} \{|s(x, a) - s(y, a)|\} < \infty$. Jestliže pro pevné $y \in X$ konverguje $\varrho(x, y) \to 0$, pak také $r(x, y) \to 0$.*

[1] Topologický prostor Y je T_0, pokud pro každé dva různé body $x, y \in Y$ existuje otevřená množina $V \subseteqq Y$, pro níž $V \cap \{x, y\}$ je jednobodová.

[2] Řekneme, že pseudometrika τ_A na topologickém prostoru $(A, \mathcal{O}_A)$ je *spojitá*, pokud je spojité identické zobrazení $\mathrm{id}: (A, \mathcal{O}_A) \to (A, \tau_A)$. Dvě pseudometriky τ_A a σ_A na množině A jsou *topologicky ekvivalentní*, pokud τ_A je spojité na (A, σ_A) a σ_A je spojitá na (A, τ_A), tj. pro pevné $a \in A$ posloupnost $\{\varrho_A(a, b_n)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k nule, právě když $\{\sigma_A(a, b_n)\}_{n=1}^{\infty}$ (platí $\varrho_A(a, b) \to 0$, právě když $\sigma_A(a, b) \to 0$).

Důkaz. Nejprve ukážeme, že z první podmínky vyplývá druhá. Předpokládejme, že máme na X požadovanou metriku σ. Definujme

$$s(x,a) = \sigma(x,a), \qquad x \in X, a \in A.$$

Pak získáváme

- $s(a,b) = \sigma(a,b) = \sigma_A(a,b)$ pro $a, b \in A$,
- jestliže pro $a \in A$ a $x \in X \setminus A$ platí $s(x,a) \to 0$, pak $\sigma(x,a) \to 0$ a $\varrho(x,a) \to 0$,
- pro libovolná x a y z X platí

$$r(x,y) = \sup_{a \in A} \{|\sigma(x,a) - \sigma(y,a)|\} \leqq \sigma(x,y) < \infty.$$

Ukažme naopak $2 \Rightarrow 1$. Definujme

$$\begin{aligned} t(x,y) &= \min\{\varrho(x,y), \varrho(x,A) + \varrho(y,A)\}, & x,y \in X, \\ \sigma(x,y) &= \max\{r(x,y), t(x,y)\}, & x,y \in X. \end{aligned}$$

Zobrazení σ je metrikou na X:

- $\sigma(x,y) = 0$, právě když $x = y$, protože $t(x,y)$ se vynuluje jen v případě $x = y$ nebo $x, y \in A$ (každý bod z $X \setminus A$ má kladnou vzdálenost od uzavřené množiny A). Pokud pro $x, y \in A$ má být $r(x,y) = 0$, pak pro všechna $a \in A$

$$0 = s(x,a) - s(y,a) = \sigma_A(x,a) - \sigma_A(y,a).$$

  Speciálně $a = x$ dává $\sigma_A(y,a) = 0$, tj. $y = a = x$.

- $\sigma(x,y) = \sigma(y,x)$ pro libovolná $x, y \in X$, protože zobrazení r i t jsou symetrická.
- Pro $x, y, z \in X$ platí

$$\begin{aligned} r(x,z) &\leqq \sup_{a \in A} \{|s(x,a) - s(y,a)| + |s(y,a) - s(z,a)|\} \leqq r(x,y) + r(y,z), \\ t(x,z) &\leqq \varrho(x,z) \leqq \varrho(x,y) + \varrho(y,z), \\ t(x,z) &\leqq \varrho(x,A) + \varrho(z,A) \leqq \varrho(x,A) + \varrho(y,A) + \varrho(y,A) + \varrho(z,A), \end{aligned}$$

  čímž dostáváme trojúhelníkovou nerovnost $\sigma(x,z) \leqq \sigma(x,y) + \sigma(y,z)$.

Navíc pro $x, y \in A$ díky $t(x,y) = 0$ dostáváme

$$\sigma(x,y) = r(x,y) = \sup_{a \in A} \{|s(x,a) - s(y,a)|\} = \sup_{a \in A} \{|\sigma_A(x,a) - \sigma_A(y,a)|\} = \sigma(a,b).$$

Na závěr ověřme topologickou ekvivalenci metrik. Mějme pevné $x \in X$. Pak $\sigma(x,y) \to 0$ pro $y \in X$, právě když $r(x,y) \to 0$ a $t(x,y) \to 0$. A to nastane právě tehdy, když zaprvé $r(x,y) \to 0$ a $\varrho(x,y) \to 0$ či zadruhé pokud $r(x,y) \to 0$ a $\varrho(x,A) + \varrho(y,A) \to 0$. Jestliže $\varrho(x,y) \to 0$, pak podle třetí vlastnosti funkce s platí $r(x,y) \to 0$. Tím jsme ukázali, že $\sigma(x,y) \to 0$. Pokud $r(x,y) \to 0$ a $\varrho(x,A) + \varrho(y,A) \to 0$, musí x ležet v A. Tímto důvodem

ale $s(y,x) \to 0$, neboť $s(x,x) = \sigma_A(x,x) = 0$ a $s(y,x) = s(y,x) - s(x,x) \leqq r(x,y) \to 0$. Protože $\varrho(y,A) \to 0$ a $s(y,x) \to 0$, podle druhého předpokladu $\varrho(y,x) \to 0$. $\square$

Věta 6.1.2. *Mějme dánu uzavřenou podmnožinu A metrického prostoru (X,ϱ) a metriku σ_A na A topologicky ekvivalentní s $\varrho|_{A\times A}$. Potom na X existuje metrika σ, která je topologicky ekvivalentní s ϱ a na $A \times A$ se shoduje se σ_A.*

Důkaz. Z lemmatu 6.1.1 víme, že stačí naleznout nezápornou funkci $s:\ X \times A \to [0,\infty)$ s předepsanými vlastnostmi. Zvolme libovolný bod $c \in A$ a položme

$$\begin{aligned} t(x,c) &= \inf_{b\in A}\left\{\sigma_A(b,c) + 2\tfrac{\varrho(x,b)}{\varrho(x,A)} - 2\right\}, && x \in X \setminus A, \\ s(x,a,c) &= \sup_{b\in A}\left\{\sigma_A(a,b) - \sigma_A(b,c) - \tfrac{\varrho(x,b)}{\varrho(x,A)} + 1\right\}, && x \in X \setminus A,\ a \in A. \end{aligned}$$

Funkci s můžeme definovat

$$s(x,a) = \begin{cases} \sigma_A(x,a) & x \in A,\ a \in A, \\ s(x,a,c) + t(x,c), & x \in X \setminus A,\ a \in A. \end{cases}$$

Ta je nezáporná, neboť pro $x \in X \setminus A$ a $a \in A$ platí

$$-s(x,a,c) = \inf_{b\in A}\left\{-\sigma_A(a,b) + \sigma_A(b,c) + \frac{\varrho(x,b)}{\varrho(x,A)} - 1\right\} \leqq t(x,c).$$

Ověřme další vlastnosti.

Buď a pevný bod v A a nechť $\varrho(x,b) \to 0$, $x \in X \setminus A$, pro nějaký prvek $b \in A$. Ke každému $x \in X \setminus A$ musí existovat $p_x \in A$ takové, že $\varrho(x,p_x) < \varrho(x,A) + (\varrho(x,A))^2$, a pro něž tudíž

$$\begin{aligned} t(x,c) &< \sigma_A(p_x,c) + 2\varrho(x,A), \\ s(x,a,c) &> \sigma_A(a,p_x) - \sigma_A(p_x,c) - \varrho(x,A). \end{aligned}$$

Protože $\varrho(x,A) \to 0$, také $\varrho(x,p_x) \to 0$ a $\varrho(p_x,b) \leqq \varrho(p_x,x) + \varrho(x,b) \to 0$. Z topologické ekvivalence metrik vyplývá $\sigma_A(p_x,b) \to 0$, takže $\sigma_A(a,p_x) \to \sigma_A(a,b)$ pro libovolný $a \in A$ a speciálně $\sigma_A(p_x,c) \to \sigma_A(b,c)$. Jestliže pro nějaké $b \in A$ platí $\varrho(x,b) \to 0$, $x \in X \setminus A$, pak

$$\limsup_{\{x\in X\setminus A:\ \varrho(x,b)\to 0\}} \{t(x,c)\} \leqq \sigma_A(b,c), \tag{6.1}$$

$$\liminf_{\{x\in X\setminus A:\ \varrho(x,b)\to 0\}} \{s\ (x,a,c)\} \geqq \sigma_A(a,b) - \sigma_A(b,c). \tag{6.2}$$

K libovolnému $x \in X \setminus A$ existuje $q_x \in A$ takové, že

$$t(x,c) + \varrho(x,A) > \sigma_A(q_x,c) + 2\frac{\varrho(x,q_x)}{\varrho(x,A)} - 2. \tag{6.3}$$

Pro libovolné $b \in A$ je potom

$$\begin{aligned} 2\tfrac{\varrho(x,q_x)}{\varrho(x,A)} &< t(x,c) + \varrho(x,A) - \sigma_A(q_x,c) + 2 \leqq \left(\sigma_A(b,c) + 2\tfrac{\varrho(x,b)}{\varrho(x,A)} - 2\right) + \\ &\quad + \varrho(x,A) - \sigma_A(q_x,c) + 2 \leqq \sigma_A(b,c) + 2\tfrac{\varrho(x,b)}{\varrho(x,A)} + \varrho(x,A), \\ 2\varrho(x,q_x) &\leqq \sigma_A(b,c)\cdot\varrho(x,A) + 2\varrho(x,b) + (\varrho(x,A))^2. \end{aligned}$$

Pokud $\varrho(x,b) \to 0$, $x \in X \setminus A$, pak $\varrho(x,A) \to 0$ a $\varrho(x,q_x) \to 0$, takže i $\varrho(b,q_x) \to 0$ a z topologické ekvivalence metrik $\sigma_A(b,q_x) \to 0$. Odtud $\sigma_A(c,q_x) \to \sigma_A(c,b)$. Ze vzorce (6.3) získáváme $t(x,c) \geqq \sigma_A(c,b)$ a díky (6.1) $t(x,c) \to \sigma_A(c,b)$, kdykoliv $\varrho(x,b) \to 0$, $x \in X \setminus A$, pro nějaké $b \in A$.

Když k nerovnosti

$$s(x,a,c) \geqq \sigma_A(a,q_x) - \sigma_A(q_x,c) - \frac{\varrho(x,q_x)}{\varrho(x,A)} + 1$$

připočteme (6.3), dostaneme

$$s\ (x,a) + \varrho(x,A) > \sigma_A(a,q_x) + \frac{\varrho(x,q_x)}{\varrho(x,A)} - 1. \tag{6.4}$$

Ověřme druhou vlastnost pro funkci s: jestliže pro pevné $a \in A$ a pro $x \in X \setminus A$ platí $\varrho(x,A) \to 0$ a $s(x,a) \to 0$, pak $\sigma_A(a,q_x) \to 0$ a $\left(\frac{\varrho(x,q_x)}{\varrho(x,A)} - 1\right) \to 0$, tj. $\varrho(x,q_x) \to 0$, a nakonec $\varrho(a,x) \to 0$.

K $x \in X \setminus A$ a $a \in A$ označme jako $r_{x,a} \in A$ takový bod, pro nějž

$$s\ (x,a,c) - \varrho(x,A) < \sigma_A(a,r_{x,a}) - \sigma_A(r_{x,a},c) - \frac{\varrho(x,r_{x,a})}{\varrho(x,A)} + 1. \tag{6.5}$$

Pro $b \in A$

$$\begin{aligned}
\tfrac{\varrho(x,r_{x,a})}{\varrho(x,A)} &< -s(x,a,c) + \varrho(x,A) + \sigma_A(a,c) + 1 \leqq \\
&\leqq -\left(-\sigma_A(a,c) - \tfrac{\varrho(x,b)}{\varrho(x,A)} + 1\right) + \varrho(x,A) + \sigma_A(a,c) + 1 = \\
&= \tfrac{\varrho(x,b)}{\varrho(x,A)} + \varrho(x,A) + 2\sigma_A(a,c)\,, \\
\varrho(x,r_{x,a}) &< \varrho(x,b) + (\varrho(x,A))^2 + 2\sigma_A(a,c)\cdot\varrho(x,A)\,.
\end{aligned}$$

Je-li $\varrho(x,b) \to 0$, $x \in X \setminus A$, pak $\varrho(x,A) \to 0$, v důsledku $\varrho(x,r_{x,a}) \to 0$, $\varrho(b,r_{x,a}) \to 0$ a $\sigma_A(b,r_{x,a}) \to 0$. Potom $\sigma_A(a,r_{x,a}) \to \sigma_A(a,b)$ a $\sigma_A(r_{x,a},c) \to \sigma_A(b,c)$. Z (6.5) získáváme

$$\limsup_{\{x\in X\setminus A:\ \varrho(x,b)\to 0\}} \{s(x,a,c)\} \leqq \sigma_A(a,b) - \sigma_A(c,b)$$

a díky (6.3) $s(x,a,c) \to \sigma_A(a,b) - \sigma_A(b,c)$.

Zjistili jsme, že kdykoliv je $b \in A$ pevné a $\sigma_A(x,b) \to 0$, $x \in X \setminus A$, platí $t(x,c) \to \sigma_A(c,b)$ a pro libovolné $a \in A$ také $s(x,a,c) \to \sigma_A(a,b) - \sigma_A(c,b)$. Takže $s(x,a) \to \sigma_A(a,b)$, a tudíž $s(x,b) \to \sigma_A(b,b) = 0$.

Pro $x \in X \setminus A$, $y \in A$ a $a,b \in A$ platí

$$\sigma_A(a,b) - \sigma_A(b,c) - \frac{\varrho(x,b)}{\varrho(x,A)} + 1 \leqq \sigma_A(a,y) + \sigma_A(y,b) - \sigma_A(b,c) - \frac{\varrho(x,b)}{\varrho(x,A)} + 1,$$

přechodem k $\sup\limits_{b\in A}$ nejdříve napravo a posléze nalevo a přičtením $t(x,a)$ obdržíme

$$\begin{aligned}
s(x,a,c) + t(x,c) &\leqq s(x,y,c) + t(x,c) + \sigma_A(a,y)\,, \\
s(x,a) &\leqq s(x,y) + \sigma_A(a,y)\,, \\
s(x,a) - s(y,a) &\leqq s(x,y)\,.
\end{aligned}$$

Odečtením $s(y,a) = \sigma_A(y,a)$ od (6.4) zase dostáváme

$$\begin{aligned} -s(y,a) + s(x,a) + \varrho(x,A) &> \sigma_A(a,q_x) - \sigma_A(y,a) \geqq -\sigma_A(y,q_x), \\ s(y,a) - s(x,a) &< \sigma_A(y,q_x) + \varrho(x,A). \end{aligned}$$

Pro $x \in X \setminus A$ a $y \in A$ a každé $a \in A$ jsme odhladli $|s(x,a) - s(y,a)|$ výrazem nezávislým na a, takže $r(x,y) < \infty$. Jestliže $\varrho(x,y) \to 0$, $x \in X \setminus A$, pak díky dříve uvedenému vztahu $s(x,a) \to \sigma_A(y,a)$, tj. $r(x,y) \to 0$. Ukázali jsme třetí vlastnost na $(X \setminus A) \times A$, přičemž na $A \times A$ také platí.

Pro $x, y \in X \setminus A$ vyplývá z

$$\frac{\varrho(x,a)}{\varrho(x,A)} - \frac{\varrho(y,a)}{\varrho(x,A)} = \frac{\varrho(x,a) - \varrho(y,a)}{\varrho(y,A)} + \varrho(a,y)\frac{\varrho(y,A) - \varrho(x,A)}{\varrho(x,A)\cdot\varrho(y,A)}$$

vztah

$$\left|\frac{\varrho(x,a)}{\varrho(x,A)} - \frac{\varrho(y,a)}{\varrho(x,A)}\right| \leqq \frac{\varrho(x,y)}{\varrho(y,A)} + \varrho(a,y)\frac{\varrho(x,y)}{\varrho(x,A)\cdot\varrho(y,A)}.$$

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že ϱ je metrika omezená číslem 1 (metrika $\varrho' = \frac{\varrho}{1+\varrho}$ je topologicky ekvivalentní s ϱ, srovnejme s poznámkou 7.0.5). Pak

$$\left|\frac{\varrho(x,a)}{\varrho(x,A)} - \frac{\varrho(y,a)}{\varrho(x,A)}\right| \leqq 2\frac{\varrho(x,y)}{\varrho(x,A)\cdot\varrho(y,A)}.$$

Pro $b \in A$ je

$$t(x,c) \leqq \sigma_A(b,c) + 2\tfrac{\varrho(x,b)}{\varrho(x,A)} - 2\tfrac{\varrho(y,b)}{\varrho(y,A)} + 2\tfrac{\varrho(y,b)}{\varrho(y,A)} - 2 \leqq \sigma_A(b,c) + 2\tfrac{\varrho(y,b)}{\varrho(y,A)} - 2 + 4\tfrac{\varrho(x,y)}{\varrho(x,A)\cdot\varrho(y,A)}.$$

Přechodem k $\inf\limits_{b\in A}$ potom $t(x,c) \leqq t(y,c) + 2\frac{\varrho(x,y)}{\varrho(x,A)\cdot\varrho(y,A)}$ a pro $x \in X \setminus A$, $a \in A$ podobně získáváme

$$\begin{aligned} |t(x,c) - t(y,c)| &\leqq 4\tfrac{\varrho(x,y)}{\varrho(x,A)\cdot\varrho(y,A)}, \\ |s(x,a,c) - s(y,a,c)| &\leqq 2\tfrac{\varrho(x,y)}{\varrho(x,A)\cdot\varrho(y,A)}, \\ |s(x,a) - s(y,a)| &\leqq 6\tfrac{\varrho(x,y)}{\varrho(x,A)\cdot\varrho(y,A)}. \end{aligned}$$

Výraz vpravo v poslední nerovnosti nezávisí na a a pro pevné $y \in X \setminus A$ a $\varrho(x,y) \to 0$ platí $\varrho(x,A) \to \varrho(y,A) > 0$, takže $r(x,y) \to 0$ a tím je ukázána třetí vlastnost i na $(X \setminus A) \times (X \setminus A)$. □

Další věta nám později pomůže z předešlého Hausdorffova tvrzení vyvodit Tietzeovu větu 2.2.4. Důkaz přebíráme ze článku [20].

Věta 6.1.3. *Nechť (X,ϱ) je metrický prostor s uzavřenou podmnožinou A. Potom jsou následující podmínky ekvivalentní:*

- *každá metrika σ_A na A topologicky ekvivalentní s $\varrho|_{A\times A}$ může být rozšířena na metriku σ na X topologicky ekvivalentní s ϱ,*

- *každá spojitá pseudometrika τ_A na A může být rozšířena na spojitou pseudometriku τ na X. Pokud τ_A je metrika, existuje její rozšíření τ, které je také metrikou.*

Důkaz. Ukažme implikaci $\Rightarrow$. Mějme dánu spojitou pseudometriku τ_A na A. Definujme na A metriku $\varrho'_A = \max\left\{\tau_A,\, \varrho|_{A\times A}\right\}$. Díky spojitosti τ_A je ϱ'_A topologicky ekvivalentní s $\varrho|_{A\times A}$. Podle předpokladu existuje metrika σ topologicky ekvivalentní s ϱ a rozšiřující ϱ'_A. Nechť

$$f(x,y) = \begin{cases} \tau_A(x,y), & [x,y] \in (A\times A), \\ \sigma(x,y), & [x,y] \in (X\times X)\setminus(A\times A). \end{cases}$$

Pak $\tau = \sup\{\varphi:\ \varphi \text{ pseudometrika na } X,\ \varphi \leqq f\}$ je spojitá pseudometrika, která na A splývá s τ_A. Pokud je τ_A metrika, je i τ metrika.

Naopak pro směr $\Leftarrow$ mějme metriku σ_A definovanou na A topologicky ekvivalentní s $\varrho|_{A\times A}$ a předpokládejme $A \neq \emptyset$. Podle podmínky z tvrzení této věty existuje spojitá metrika τ' rozšiřující σ_A z A na X. Když ji upravíme na

$$\tau(x,y) = \tau'(x,y) + |\varrho(x,A) - \varrho(y,A)|, \qquad x,y \in X,$$

bude A uzavřená v (X,τ), neboť $\tau(x,A) = 0$ pro $x \in X$, právě když $x \in A$. Také τ je spojitá, tj.

$$(\forall x \in X)\ (\forall \tilde{\varepsilon} > 0)\ (\exists \delta > 0)\ (\forall y \in X:\ \varrho(x,y) < \delta)\ \tau(x,y) < \tilde{\varepsilon}. \tag{6.6}$$

Spojité zobrazení $\varrho|_{A\times A}:\ \left(A\times A, \tau|_{A\times A}\right) \to \mathbb{R}$ lze spojitě rozšířit (např. podle kapitoly 1.1, věty 4.1.1 a poznámky 6.0.3) na $\varphi:\ (X\times X,\tau) \to \mathbb{R}$, tzn.

$$\begin{aligned} &(\forall [x,a] \in X\times X)\ (\forall \varepsilon > 0)\ \left(\exists \tilde{\delta} > 0\right) \\ &\left(\forall [b,y] \in X\times X:\ |\tau(x,a) - \tau(b,y)| < \tilde{\delta}\right)\ |\varphi(x,a) - \varphi(b,y)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Protože $|\tau(x,a) - \tau(a,y)|$ lze pro $x,y,a \in X$ odhadnout $\tau(x,y)$, dostáváme

$$\begin{aligned} &(\forall x \in X)\ (\forall \varepsilon > 0)\ \left(\exists \tilde{\delta} > 0\right) \\ &\left(\forall y \in X:\ \tau(x,y) < \tilde{\delta}\right)\ (\forall a \in X)\ |\varphi(x,a) - \varphi(a,y)| < \varepsilon. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Konečně definujme na $X\times X$

$$\widetilde{\chi}(x,y) \ = \ \sup_{a\in X}\left\{|\varrho(x,a) - \varrho(a,y) - (\varphi(x,a) - \varphi(a,y))|\right\}.$$

Potom $\widetilde{\chi}$ je pseudometrikou na X, neboť splňuje pro $x,y,z \in X$ trojúhelníkou nerovnost

$$\begin{aligned} \widetilde{\chi}(x,z) \ \leqq\ & \sup_{x\in A}\left\{|\varrho(x,a) - \varrho(a,y) - (\varphi(x,a) - \varphi(a,y))| + \right. \\ & \left. + |\varrho(y,a) - \varrho(a,z) - (\varphi(y,a) - \varphi(a,z))|\right\} \leqq \widetilde{\chi}(x,y) + \widetilde{\chi}(y,z). \end{aligned}$$

Dále položme

$$\begin{aligned} \chi(x,y) &= \sup\left\{\psi(x,y):\ \psi \text{ pseudometrika na } X,\ \psi \leqq \widetilde{\chi},\ \psi|_{A\times A} = 0\right\}, \\ \sigma(x,y) &= \max\left\{\chi(x,y), \tau(x,y)\right\}. \end{aligned}$$

V definici χ se nebere supremum přes prázdnou množinu, jak dosvědčuje pseudometrika

$$\widetilde{\psi}(x,y) = \sup_{a\in A}\{|\varrho(x,a) - \varrho(a,y) - (\varphi(x,a) - \varphi(a,y))|\}.$$

Protože $\varrho|_{A\times A} = \varphi|_{A\times A}$, platí na $A \times A$ vztah

$$\sigma(x,y) = \tau(x,y) = \tau'(x,y) = \sigma_A(x,y), \qquad x,y \in A.$$

Zobrazení σ je metrikou na X, protože τ je metrika a χ pseudometrika

Ukažme ekvivalenci metrik, nejprve spojitost σ na (X,ϱ). Jelikož je τ spojitá na X, stačí se zabývat pseudometrikou χ, resp. $\widetilde{\chi}$. Mějme zadáno $x \in X$ a $\varepsilon > 0$ a nechť jsou splněny podmínky (6.7) a (6.6) (speciálně pro $\tilde{\varepsilon} = \tilde{\delta}$). Potom existuje $\delta \in (0,\varepsilon)$ takové, že pro $y \in X$ ve vzdálenosti $\varrho(x,y) < \delta$ a všechna $a \in X$ je $|\varphi(x,a) - \varphi(a,y)| < \varepsilon$, tzn.

$$\begin{aligned}\chi(x,y) \leqq \widetilde{\chi}(x,y) &\leqq \sup_{a\in X}\{|\varrho(x,a) - \varrho(a,y)|\} + \sup_{a\in X}\{|\varphi(x,a) - \varphi(a,y)|\} \leqq \\ &\leqq \varrho(x,y) + \varepsilon < 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Ale i naopak je ϱ spojitá metrika na (X,σ). K zadanému $x \in X$ a $\varepsilon > 0$ vyplývá z podmínky (6.7) existence $\delta \in (0,\varepsilon)$ takového, že pro všechna $y \in X$, $\tau(x,y) < \delta$, platí $|\varphi(x,y) - \varphi(y,y)| < \varepsilon$. Pro $y \in X$ se vzdáleností $\sigma(x,y) < \delta$ a $\widetilde{\chi}(x,y) < \delta$ tak

$$\widetilde{\chi}(x,y) \geqq |\varrho(x,y) - (\varphi(x,y) - \varphi(y,y))|,$$

a tudíž $\varrho(x,y) \leqq \widetilde{\chi}(x,y) + |\varphi(x,y) - \varphi(y,y)| < 2\varepsilon$.[3] □

6.2 Arens 1953

Věta uvedená v práci Richarda Arense [2] a odkazující se na [1] dodá této kapitole smysl, neboť podává do souvislosti spojité rozšiřování zobrazení a pseudometrik. Podobnou otázkou se zabývá později i Teodor Przymusiński ve článku [27]. Než předvedeme důkaz založený na práci uvedených autorů, vyslovme pomocné lemma.

Lemma 6.2.1. *Ke každému neprázdnému metrickému prostoru (X,ϱ) existuje Banachův prostor, se kterým je izometricky izomorfní.*

Důkaz. Zvolme libovolný bod $a \in X$. Zobrazení

$$\begin{aligned}\varphi:\ X &\to \mathcal{C}^b(X), \\ x &\mapsto \varphi(x), \qquad \text{přičemž } \varphi(x)(y) = \varrho(x,y) - \varrho(y,a),\ y \in X,\end{aligned}$$

je izometrickým izomorfismem z X do Banachova prostoru $\mathcal{C}^b(X)$ omezených spojitých funkcí na X. Pro pevné $x \in X$ je funkce $|\varphi(x)|$ na X omezená konstantou $\varrho(x,a)$. Pro $x,y \in X$ je

$$\begin{aligned}\|\varphi(x) - \varphi(y)\| &= \sup_{z\in X}\{|\varphi(x)(z) - \varphi(y)(z)|\} = \\ &= \sup_{z\in X}\{|\varrho(x,z) - \varrho(z,a) - \varrho(y,z) + \varrho(z,a)|\} = \\ &= \sup_{z\in X}\{|\varrho(x,z) - \varrho(y,z)|\},\end{aligned}$$

[3] Zde musíme přiznat, že jsme nedokázali, co jsme požadovali, neboť z $\sigma(x,y) < \delta$ sice vyplývá $\chi(x,y) < \delta$, ale ne $\widetilde{\chi}(x,y) < \delta$. Na tomto místě je mezera v důkaze, která, jak věřím, by měla jít odstranit.

a tak $\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leqq \varrho(x,y)$ a zároveň $\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \geqq |\varrho(x,y) - \varrho(y,y)| = \varrho(x,y)$.

□

Věta 6.2.2. *Nechť $(X, \mathcal{O})$ je topologický prostor a A její podmnožina. Pak každá spojitá pseudometrika τ_A na A lze rozšířit na spojitou pseudometriku τ na X právě tehdy, když každé spojité zobrazení f z A do libovolného Banachova prostoru $(Y, \|\cdot\|)$ lze spojitě rozšířit na $F: X \to Y$.*

Důkaz. Předpokládejme, že $A \neq \emptyset$. Nejprve ukažme implikaci zleva doprava. Nechť $(Y, \|\cdot\|)$ je Banachův prostor a $f: \left(A, \mathcal{O}|_{A\times A}\right) \to Y$ spojité zobrazení. Předpisem $\tau_A(x,y) = \|f(x) - f(y)\|$, $x, y \in A$, definujeme pseudometriku na A. Ta je spojitá, neboť si stačí uvědomit, že pro každé $\varepsilon > 0$ a libovolný bod $x \in A$ existuje okolí U bodu x v A takové, že $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$ pro $y \in U$. Pak ale $\tau_A(x,y) < \varepsilon$ pro všechna $y \in U$ a identické zobrazení z prostoru $\left(A, \mathcal{O}|_{A\times A}\right)$ s původní topologií do topologického prostoru (A, τ_A) indukovaného pseudometrikou τ_A je spojité. Podle předpokladu existuje spojitá pseudometrika τ rozšiřující τ_A na X.

Jestliže je $\overline{A}$ uzávěr množiny A vzhledem k topologii indukované pseudometrikou τ a $x \in \overline{A}$, pak existuje posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteqq A$ taková, že $\lim\limits_{n\to\infty} \varrho(a_n, x) = 0$. Pak $\{f(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská v Banachově prostoru Y, a tudíž můžeme f dodefinovat na celé $\overline{A}$. Podle Dugundjiho věty 5.3.5 zobecněné poznámkou 6.0.3 do pseudometrických prostory existuje její spojité rozšíření $F: (X, \tau) \to (Y, \|\cdot\|)$. Protože τ je spojitá pseudometrika na X, je $F = F \circ \mathrm{id}$ spojité zobrazení z prostoru $(X, \mathcal{O})$ do Y.

Nyní dokažme implikaci zprava doleva. Mějme τ_A spojitou pseudometriku na A a $([A], \varrho_A)$ metrickou modifikaci (A, τ_A). Předpokládejme, že každé spojité zobrazení z $\left(A, \mathcal{O}|_{A\times A}\right)$ do libovolného Banachova prostoru Y lze spojitě rozšířit na X. Zobrazení

$$\begin{array}{rccl} \varphi_A: & (A, \tau_A) & \to & ([A], \varrho_A), \\ & x & \mapsto & [x], \end{array}$$

a tudíž i $\varphi_A = \varphi_A \circ \mathrm{id}: \left(A, \mathcal{O}|_A\right) \to ([A], \varrho_A)$ jsou spojitá. Metrický prostor $([A], \varrho_A)$ je podle předchozího lemmatu izometricky vnořen do nějakého Banachova prostoru Y. Tudíž existuje $F: (X, \mathcal{O}) \to (Y, \|\cdot\|)$ spojité rozšíření φ_A a zbývá zadefinovat

$$\tau(x,y) = \|F(x) - F(y)\|, \qquad x, y \in X.$$

Pro libovolné $x \in X$ a $\varepsilon > 0$ existuje $U \in \mathcal{O}$ takové, že

$$\|F(x) - F(y)\| = \tau(x,y) < \varepsilon,$$

a tak je τ spojitá pseudometrika na X. Navíc rozšiřuje τ_A, neboť pro $x, y \in A$ máme

$$\tau(x,y) = \|\varphi_A(x) - \varphi_A(y)\| = \varrho_A(\varphi_A(x), \varphi_A(y)) = \tau_A(x,y).$$

□

6.3 Isbell 1959

Rozšiřování spojitých pseudometrik se věnoval Felix Hausdorff v roce 1930. O téměř třicet let později si v [18] položil John R. Isbell otázku, zda by bylo možné podobné výsledky přednést pro stejnoměrně spojité pseudometriky.

Věta 6.3.1. *Předpokládejme, že A je podmnožina uniformního prostoru $(X,\mathcal{U})$ a τ_A je omezená stejnoměrně spojitá pseudometrika na $\left(A, \mathcal{U}|_{A\times A}\right)$. Potom na $(X,\mathcal{U})$ existuje stejnoměrně spojitá pseudometrika τ, která se na $A \times A$ shoduje s τ_A.*[4]

Důkaz. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $A \neq \emptyset$ a τ_A je omezená konstantou $\frac{1}{2}$. Z definice stejnoměrné spojitosti τ_A vyplývá, že pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ najdeme množinu $U_n \in \mathcal{U}$, která je symetrická (tj. $[x,y] \in U_n$, právě když $[y,x] \in U_n$) a takovou, že pro její každý prvek $(x,y) \in U_n \cap (A \times A)$ bude platit $\tau_A(x,y) < \frac{1}{2^n}$. Pak díky metrizační větě (důsledek 8.1.11 v Engelkinově General Topology [11]) existuje stejnoměrně spojitá pseudometrika σ_n na X, která je omezená číslem $\frac{1}{2^n}$ a pro niž

$$\left\{[x,y] \in X \times X : \ \sigma_n(x,y) < \frac{1}{2^{n+1}}\right\} \subseteqq U_n.$$

Položme $\sigma(x,y) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \sigma_n(x,y)$ na $X \times X$. Takto definované zobrazení je pseudometrikou, protože pro $x,y,z \in X$

$$\begin{aligned}
\sigma(x,x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n(x,x) = 0, \\
\sigma(x,y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n(y,x) = \sigma(y,x), \\
\sigma(x,z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n(x,z) \leqq \sum_{n=0}^{\infty} (\sigma_n(x,y) + \sigma_n(y,z)) = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n(x,y) + \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n(y,z) = \sigma(x,y) + \sigma(y,z).
\end{aligned}$$

K $\varepsilon > 0$ najděme takové $n_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, aby $\frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon$. Na množině

$$G = \bigcup_{n=0}^{n_0} \left\{[x,y] \in X \times X : \ \sigma_n(x,y) < \frac{\varepsilon}{2^n}\right\}$$

platí

$$\sigma(x,y) = \sum_{n=0}^{n_0} \sigma_n(x,y) + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \sigma_n(x,y) < \sum_{n=0}^{n_0} \frac{\varepsilon}{2^n} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 3\varepsilon.$$

Potom díky stejnoměrné spojitosti pseudometrik $\sigma_0, \ldots, \sigma_{n_0}$ existuje $U \in \mathcal{U}$, které je podmnožinou G, a to potvrzuje stejnoměrnou spojitost pseudometriky σ.

[4] Pseudometrika τ je *stejnoměrně spojitá* na uniformním prostoru $(X,\mathcal{U})$, pokud je identické zobrazení $\mathrm{id}: \ (X,\mathcal{U}) \to (X,\tau)$ stejnoměrně spojité, tzn. $(\forall \varepsilon > 0) \ (\exists U \in \mathcal{U}) \ (\forall [x,y] \in U) \ \tau(x,y) < \varepsilon$.

Pokud pro dvojici $[x,y] \in A \times A$ platí $\sigma(x,y) < \frac{1}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$, pak $\sigma_{n-1}(x,y) < \frac{1}{2^n}$, takže $[x,y] \in U_{n-1}$ a $\tau_A(x,y) < \frac{1}{2^{n-1}}$. Z tohoto odhadu a z $\tau_A \leqq \frac{1}{2}$ vyplývá, že $\tau_A \leqq \sigma|_{A\times A}$ na $A \times A$.

Nakonec vezměme

$$\tau(x,y) = \min\left\{\sigma(x,y), \inf_{a,b\in A}\{\sigma(x,a) + \tau_A(a,b) + \sigma(b,y)\}\right\}, \qquad x,y \in X.$$

Protože $\tau(x,x) = 0$ a $\tau(x,y) = \tau(y,x)$, kdykoliv $x,y \in X$, pokud dokážeme trojúhelníkovou nerovnost, bude τ pseudometrikou. Předpokládejme, že máme dány body $x,y,z \in X$ a $a,b,c,d \in A$. Pak

$$\begin{aligned}
\tau(x,z) &\leqq \sigma(x,a) + \tau_A(a,b) + \sigma(b,z) \leqq \\
&\leqq \sigma(x,a) + \tau_A(a,c) + \tau_A(c,d) + \tau_A(d,b) + \sigma(b,z) \leqq \\
&\leqq \sigma(x,a) + \tau_A(a,c) + \sigma(c,d) + \tau_A(d,b) + \sigma(b,z) \leqq \\
&\leqq (\sigma(x,a) + \tau_A(a,c) + \sigma(c,y)) + (\sigma(y,d) + \tau_A(d,b) + \sigma(b,z)).
\end{aligned}$$

Přechodem k infimu přes $a,b,c,d \in A$

$$\tau(x,z) \leqq \tau(x,y) + \tau(y,z).$$

Pro $x,y \in A$ platí $\tau|_{A\times A} = \tau_A$, jelikož triviálně $\tau(x,y) \leqq \tau_A(x,y)$ a pro všechna $a,b \in A$ je

$$\tau_A(x,y) \leqq \tau_A(x,a) + \tau_A(a,b) + \tau_A(b,y) \leqq \sigma(x,a) + \tau_A(a,b) + \sigma(b,y).$$

□

6.4 Čech 1966

Uveďme důkaz obsažený v Čechově knize Topological spaces [6], který nám ukazuje, jak z Katětovovy věty 3.5.7 vyplývá Isbellova věta 6.3.1.

Věta 6.4.1. *Nechť $(X,\mathcal{U})$ je uniformní prostor a A podmnožina X. Pokud každá omezená stejnoměrně spojitá reálná funkce definovaná na A lze stejnoměrně spojitě rozšířit na X, potom i každá stejnoměrně spojitá pseudometrika τ_A na A může být rozšířena na stejnoměrně spojitou pseudometriku τ na X.*

Důkaz. Bez újmy na obecnosti nechť $A \neq \emptyset$. Podle poznámky 7.0.5 stačí tvrzení dokázat pouze pro libovolnou omezenou pseudometriku τ_A. Ta může být rozšířena na stejnoměrně spojité zobrazení $F: X \times X \to \mathbb{R}$. To znamená, že

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists U \in \mathcal{U})\ (\forall [x,y] \in U)\ (\forall [a,b] \in U)\ |F(x,a) - F(y,b)| < \varepsilon.$$

Předpisem

$$\varphi(x,y) = \sup_{a\in X}\{|F(x,a) - F(y,a)|\}, \qquad x,y \in X,$$

se zavádí pseudometrika na X, neboť $\varphi(x,x) = 0$ pro všechna $x \in X$ a je to nezáporná symetrická funkce, která splňuje trojúhelníkovou nerovnost. Ta je stejnoměrně spojitá na

$(X,\mathcal{U})$, jelikož pro všechna $[x,y] \in U$ a $a \in X$ je $|F(x,a) - F(y,a)| < \varepsilon$, tj. $\varphi(x,y) \leqq \varepsilon$. Zobrazení

$$\psi(x,y) = \sup_{a \in A} \{|F(x,a) - F(y,a)|\}, \qquad x,y \in X,$$

je také pseudometrikou na X a na $A \times A$ splývá s τ_A, a tak můžeme definovat pseudometriku

$$\tau(x,y) = \sup \left\{\sigma(x,y) : \ \sigma \text{ je pseudometrika na } X, \ \sigma \leqq \varphi, \ \sigma|_{A\times A} \leqq \tau_A\right\},$$

která je stejnoměrně spojitá na $(X,\mathcal{U})$ a $\tau|_{A\times A} = \tau_A$. □

6.5 Gantner 1969

V roce 1969 ukázal T. E. Gantner souvislost mezi stejnoměrně spojitým rozšiřováním pseudometrik a omezených reálných funkcí. Jako druhé tvrzení ukážeme, že pokud platí Isbellova věta 6.3.1, pak platí také Katětovova věta 3.5.7 o stejnoměrně spojitém rozšiřování funkcí. Důkaz uvádí autor ve článku [12]. Zároveň z Hausdorffových vět 6.1.2 a 6.1.3 z roku 1930 vyplývá, že z uzavřených podmnožin metrického prostoru můžeme spojitě rozšiřovat omezené funkce na celý prostor. U této věty uvedeme důkaz z textu [20], který je založený na Gantnerově přístupu.

Věta 6.5.1. *Předpokládejme, že v metrickém prostoru (X,ϱ) máme podmnožinu A. Pokud ke každé spojité pseudometrice τ_A na A existuje spojitá pseudometrika τ na X rozšiřující τ_A, pak i každá nezáporná spojitá funkce f na A lze spojitě dodefinovat na X.*

Důkaz. Jestliže $A = \emptyset$, je tvrzení triviální. Jinak zvolme libovolně $a \in A$. Funkce

$$g(x) = \max\{f(x) - f(a), 0\}, \qquad h(x) = -\min\{f(x) - f(a), 0\}$$

definované na A jsou nezáporné, spojité, mají nulu ve svém oboru hodnot a platí

$$f(x) = g(x) - h(x) + f(a), \qquad x \in A.$$

Pokud bude možné každou nezápornou spojitou funkci u na A s nulou v oboru hodnot spojitě dodefinovat na $U: \ X \to \mathbb{R}$, bude možné spojitě rozšířit i f na celý prostor X.

Definujme $\tau_A(x,y) = |u(x) - u(y)|$ pro $x,y \in A$. Toto zobrazení je spojitou pseudometrikou na A. Podle Hausdorffových vět 6.1.2 a 6.1.3 existuje spojitá pseudometrika τ na celém X rozšiřující τ_A. Položme $U(x) = \tau(x, u^{-1}(0))$, $x \in X$. Protože τ je spojitá, tak i U je spojitá na X. Pro $x \in A$ máme

$$U(x) = \tau\left(x, u^{-1}(0)\right) = \tau_A\left(x, u^{-1}(0)\right) = \left|u(x) - u\left(u^{-1}(0)\right)\right| = u(x).$$

□

Věta 6.5.2. *Nechť A je podmnožina uniformního prostoru $(X,\mathcal{U})$ a ke každé stejnoměrně spojité pseudometrice τ_A na A existuje stejnoměrně spojitá pseudometrika τ na X taková, že $\tau|_{A\times A} = \tau_A$. Je-li f libovolná stejnoměrně spojitá omezená reálná funkce definovaná na A, potom existuje její stejnoměrně spojité rozšíření $F: \ X \to \mathbb{R}$.*

Důkaz. Opět vyberme libovolně bod $a \in A$, pokud $A \neq \emptyset$. Funkce

$$\begin{array}{rcll} g(x) & = & \max\{f(x) - f(a), 0\}, & x \in A, \\ h(x) & = & -\min\{f(x) - f(a), 0\}, & x \in A, \end{array}$$

jsou stejnoměrně spojité na A, nezáporné, v a nabývají nuly a

$$f(x) = g(x) - h(x) + f(a), \qquad x \in A,$$

takže postačí větu dokázat ve speciálním případě, kdy $f \geqq 0$ a existuje $a \in A$, že $f(a) = 0$.

Předpisem

$$\tau_A(x, y) = |f(x) - f(y)|, \qquad x, y \in A,$$

se definuje omezená stejnoměrně spojitá pseudometrika na A, která podle předpokladu má stejnoměrně spojité omezené rozšíření na pseudometriku τ na X. Položme

$$\begin{array}{rccl} F: & X & \to & \mathbb{R}, \\ & x & \mapsto & \tau(x, a). \end{array}$$

Funkce F je stejnoměrně spojitá na X, jelikož

$$|F(x) - F(y)| \leqq \tau(x, y), \qquad x, y \in X,$$

a navíc se na A shoduje s f, neboť pro $x \in A$ je

$$F(x) = \tau(x, a) = \tau_A(x, a) = |f(x) - f(a)| = f(x).$$

$\square$

Kapitola 7

Pomocná tvrzení

V této kapitole uvedeme známá tvrzení používaná v řešeních širších problémů, jež se našimi otázkami zabývají spíše okrajově, ale také pozorování, na která jsme se vícekrát odkazovali. Klíčová je především poznámka 7.0.4.

Věta 7.0.1. *(Weierstrassův M–test.) Nechť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost zobrazení z topologického prostoru X do Banachova prostoru $(Y, \|\cdot\|)$ a nechť $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost kladných čísel takových, že $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$. Předpokládejme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je zobrazení f_n omezené konstantou M_n, tj. $\|f_n(x)\| \leqq M_n$ pro všechna $x \in X$. Potom řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ definuje prvek $f(x) \in Y$ a konverguje stejnoměrně na X. Jestliže jsou navíc všechna f_n, $n \in \mathbb{N}$, spojitá, pak je i zobrazení f spojité. Pokud je (X, ϱ) metrický prostor a f_n, $n \in \mathbb{N}$, jsou dokonce stejnoměrně spojitá, pak je i f stejnoměrně spojité.*

Důkaz. Definujme $s_k(x) = \sum\limits_{n=1}^{k} f_n(x)$ pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ a $x \in X$. Stačí ukázat, že posloupnost $\{s_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ je pro libovolné $x \in X$ cauchyovská. Nechť $\varepsilon > 0$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ je takový index, že $\sum\limits_{n=n_0+1}^{\infty} M_n < \varepsilon$. Potom pro $k \geqq m \geqq n_0$ platí

$$\|s_k(x) - s_m(x)\| = \left\| \sum_{n=1}^{k} f_n(x) - \sum_{n=1}^{m} f_n(x) \right\| \leqq \sum_{n=m+1}^{k} M_n < \varepsilon.$$

Předpokládejme, že pro každé přirozené n je f_n spojité. Nechť U je okolí pevně zvoleného $x \in X$ takové, že $\|f_n(x) - f_n(y)\| < \frac{\varepsilon}{n_0}$ pro všechna $y \in U$ a $n = 1, 2, \ldots, n_0$. Potom

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(y)\| \quad \leqq \quad & \|f(x) - s_{n_0}(x)\| + \|s_{n_0}(x) - s_{n_0}(y)\| + \\ & + \|s_{n_0}(y) - f(y)\| < \varepsilon + n_0 \cdot \tfrac{\varepsilon}{n_0} + \varepsilon = 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Kdyby (X, ϱ) byl metrický prostor a f_n, $n \in \mathbb{N}$, stejnoměrně spojitá zobrazení, pak pro $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, aby

$$\|f_n(x) - f_n(y)\| < \frac{\varepsilon}{n_0} \qquad \text{pro } x \in X, y \in B(x, \delta) \text{ a } n = 1, 2, \ldots, n_0,$$

a dostaneme

$$\|f(x) - f(y)\| < 3\varepsilon, \qquad \text{pro } x \in X, y \in B(x, \delta).$$

□

Poznámka 7.0.2. Když jsme se zabývali spojitostí, mohli jsme rozšiřovat spojitá zobrazení pouze z uzavřených podmnožin topologického prostoru. U stejnoměrné spojitosti uzavřenost nemusíme explicitně uvádět, neboť jestliže $(X, \mathcal{U})$ a $(Y, \mathcal{V})$ jsou dva uniformní prostory, přičemž druhý je úplný, a A je podmnožina X, pak každé stejnoměrně spojité zobrazení $f: A \to Y$ lze stejnoměrně spojitě rozšířit na uzávěr množiny A vzhledem k topologii indukované uniformitou $\mathcal{U}$. Tvrzení vyplývá z věty 8.3.10 v General Topology [11] od Ryszarda Engelkinga. My jej budeme obvykle využívat v případě, kdy X je metrický prostor s metrikou ϱ, Y jsou je podprostor reálných čísel a kdy lze F v bodech $x \in \overline{A}$ definovat předpisem

$$F(x) = \lim_{\gamma \to 0+} \inf_{\{z \in A:\ \varrho(x,z) < \gamma\}} \{f(z)\}.$$

Poznámka 7.0.3. Součin dvou omezených spojitých zobrazení f a g z metrického prostoru (X, ϱ) do normovaného prostoru $(Y, \|\cdot\|)$ je stejnoměrně spojitý. Předpokládejme, že existuje $M \geqq 0$ takové, že $\|f(x)\| < M$ a $\|g(x)\| < M$ pro všechna $x \in X$. Potom

$$\begin{aligned} \|(fg)(x) - (fg)(y)\| &\leqq \|f(x)(g(x) - g(y))\| + \|g(y)(f(x) - f(y))\| \leqq \\ &\leqq M \cdot \|g(x) - g(y)\| + M \cdot \|f(x) - f(y)\|. \end{aligned}$$

Zobrazení $\mathrm{id}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $g: \mathbb{R} \to [0, 1]$ s předpisem

$$g(x) = \begin{cases} x - 2k, & x \in [2k, 2k+1) \text{ pro nějaké } k \in \mathbb{Z}, \\ 2k + 2 - x, & x \in [2k+1, 2k+2) \text{ pro nějaké } k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

ukazují, že musíme být opatrní a obecně předpokládat omezenost u obou zobrazení.

Poznámka 7.0.4. V široké škále uvedených důkazů rozšiřujeme tvrzení ze spojitosti na stejnoměrnou spojitost. Máme dán metrický prostor (X, ϱ) s podmnožinou A. Zpravidla zkonstruujeme reálnou funkci F, která je stejnoměrně spojitá na A vzhledem k X, a takovou, že $F|_{X \setminus B(A,r)}$ je stejnoměrně spojitá na $X \setminus B(A, r)$ pro libovolné $r > 0$. Tím už ale získáváme stejnoměrnou spojitost na celém X.

Důkaz. K $\varepsilon > 0$ existují $\delta_1, \delta_2 > 0$ taková, že

$$\begin{aligned} |F(x) - F(y)| < \varepsilon, \quad \text{kdykoliv} \quad & x \in A,\ y \in B(x, \delta_1), \\ \text{anebo} \quad & x \in X \setminus B(A, r), y \in B(x, \delta_2) \cap (X \setminus B(A, r)). \end{aligned}$$

Bez újmy na obecnosti požadujme $\delta_2 < \frac{\delta_1}{2}$. Pak

$$\begin{aligned} |F(x) - F(y)| < 2\varepsilon, \quad \text{kdykoliv} \quad & x \in B\left(A, \tfrac{\delta_1}{2}\right),\ y \in B\left(x, \tfrac{\delta_1}{2}\right), \\ \text{anebo} \quad & x \in X \setminus B\left(A, r + \tfrac{\delta_2}{2}\right),\ y \in B\left(x, \tfrac{\delta_2}{2}\right), \end{aligned}$$

Zvolme $r = \frac{\delta_1}{4}$. Pak $r + \frac{\delta_2}{2} = \frac{\delta_1}{4} + \frac{\delta_2}{2} < \frac{\delta_1}{4} + \frac{\delta_1}{4} = \frac{\delta_1}{2}$ a z $X \setminus B\left(A, \frac{\delta_1}{2}\right) \subseteqq X \setminus B\left(A, r + \frac{\delta_2}{2}\right)$ už vyplývá

$$\begin{aligned} |F(x) - F(y)| < 2\varepsilon \qquad & \text{pro} \quad x \in B\left(A, \tfrac{\delta_1}{2}\right),\ y \in B\left(x, \tfrac{\delta_1}{2}\right), \\ & \text{a pro} \quad x \in X \setminus B\left(A, \tfrac{\delta_1}{2}\right),\ y \in B\left(x, \tfrac{\delta_2}{2}\right). \end{aligned}$$

Pro kterékoliv $\varepsilon > 0$ najdeme $\delta > 0$, které bude menší než $\frac{\delta_1}{2}$ a než $\frac{\delta_2}{2}$. Pro libovolné $x \in X$ a $y \in B(x, \delta)$ můžeme říct $|F(x) - F(y)| < 2\varepsilon$. $\square$

Poznámka 7.0.5. Uveďme krátké a jednoduché, leč užitečné pozorování. Bavíme-li se o spojitosti či stejnoměrné spojitosti na metrických nebo pseudometrických prostorech, můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že zadaná metrika, resp. pseudometrika je omezená. Každý pseudometrický prostor (X, τ) je totiž stejnoměrně ekvivalentní[1] s pseudometrickým prostorem (X, σ), kde σ je omezená pseudometrika $\sigma = \min\{\tau, 1\}$. Pro každé $\varepsilon \in (0, 1)$ platí $\tau(x, y) < \varepsilon$ pro $x, y \in X$, právě když $\sigma(x, y) < \varepsilon$.

[1] Dva pseudometrické prostory (X, τ) a (X, σ) jsou *stejnoměrně ekvivalentní*, pokud τ je stejnoměrně spojitá vzhledem k pseudometrice σ a σ je stejnoměrně spojitá vzhledem k τ.

Kapitola 8

Závěrečné shrnutí

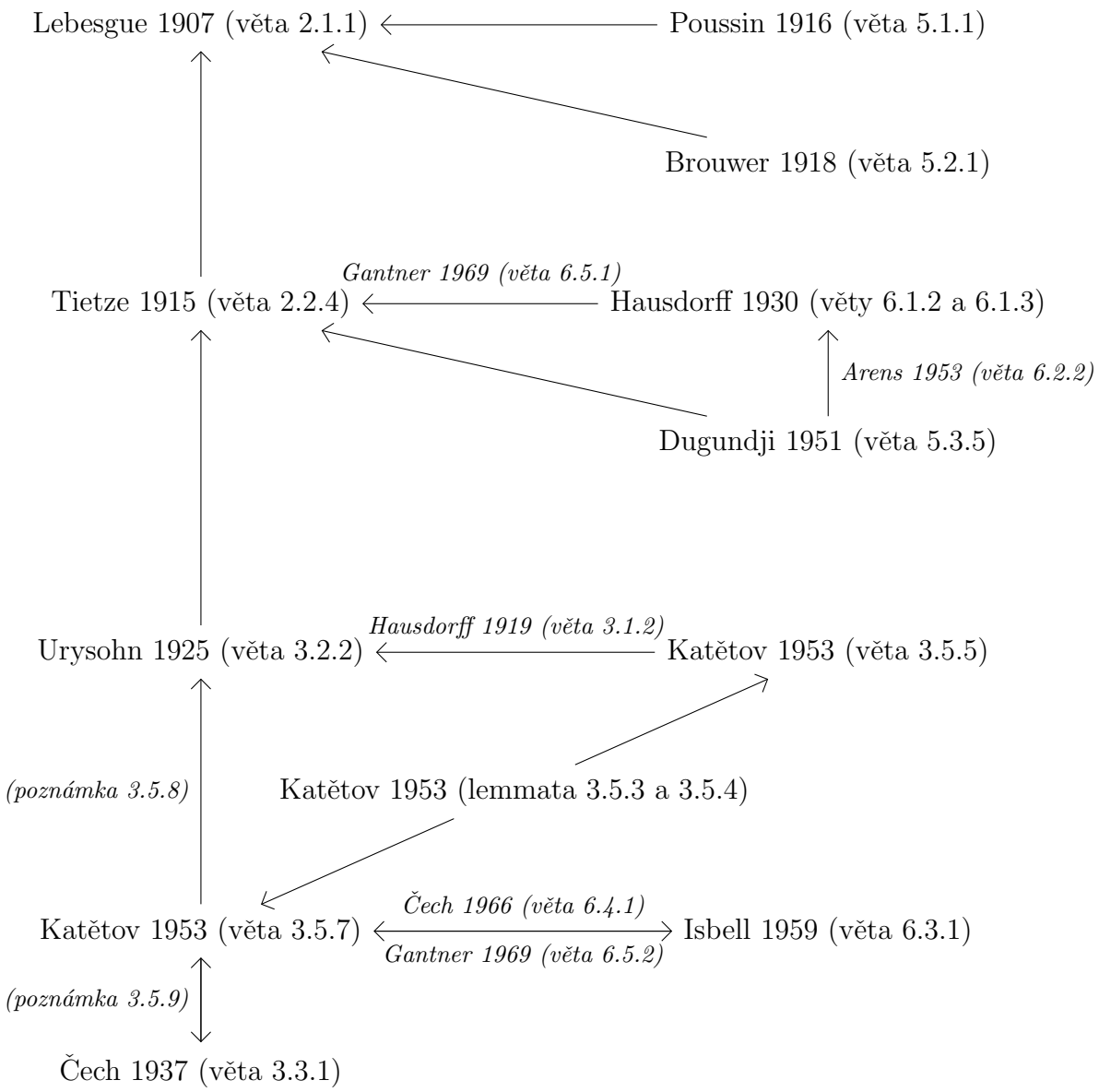

Schéma ukazuje souvislost mezi zobecněnými výsledky, které jsme si na předchozích stránkách představili. Šipka od jednoho tvrzení ke druhému naznačuje, že je možné druhou větu odvodit z první. Do výčtu nejsou zahrnuty poznatky o rozšiřování neomezených spojitých funkcí z kapitoly 4. Tietzeho větu 2.2.4 díky Bohrově práci z roku 1918 (důsledek 4.1.2) a Urysohnovu větu 3.2.2 díky zobecněnému Hausdorffově článku z roku 1919 (důsledek 4.2.3) či Gillmanově Jerisonově větě (důsledek 4.3.2) můžeme vyslovit i pro neomezené reálné funkce.

Poznámky:

- Lebesgue 1907 (věta 2.1.1): Lebesgueovu zobecněnou větu 2.1.1 pro $\mathbb{R}^n$ dokazuje jiným způsobem Tietze v roce 1915 (věty 2.2.1 a 2.2.6).
- Tietze 1915 (věta 2.2.4): jiný předpis ukazující Tietzeho větu 2.2.4 uvádí také Bohr 1918 (věta 2.5.1), Hausdorff 1919 (věta 2.6.1) a Kerékjártó 1923 (věta 2.7.1).
- Urysohn 1925 (věta 3.2.2): Urysohnovo tvrzení 3.2.2 ukázal Grabiner v roce 1986 (věta 3.6.2), ve svém důkazu však využil Urysohnovo lemma 3.2.1.
- Čech 1937 (věta 3.3.1): větu uvádí nejprve Čech v roce 1937 (poznámka 3.3.2), ovšem využívá Urysohnova lemmatu 3.2.1, bez kterého se lze obejít, jak ukázal Stone roku 1947 (věta 3.3.1).
- Katětov 1953 (věta 3.5.5): Katětovovu větu 3.5.5 představil Tong (věta 3.4.2) o rok dříve, avšak cituje Urysohnovo lemma 3.2.1. Protože z ní vyvozujeme Urysohnovu větu 3.2.2, jmenujeme jako autora Katětova.
- Katětov 1953 (věta 3.5.7): dříve, než vyslovil Katětov větu 3.5.7 týkající se rozšiřování omezených stejnoměrně spojitých reálných funkcí z podmnožiny A na obecném uniformním prostoru $(X,\mathcal{U})$ na X, bylo možné je dokázat pro metrické prostory, jak jsme uvedli v poznámkách u Tietzeho 1915 (2.2.9), Bohra 1918 (2.5.2), Hausdorffa 1919 (2.6.2) a také Kerékjárta 1923 (2.7.2). Z nich či z postupu Poussina 1916 (5.1.2) lze vyvodit také tvrzení pro eukleidovský prostor $\mathbb{R}^n$, ale pokud je navíc A omezená v $\mathbb{R}^n$, lze k důkazu tvrzení sáhnout též po Lebesgueově (2.1.2) či Tietzeho přístupu (2.2.2 a 2.2.8). Žádné z uvedených tvrzení autoři neformulovali, jen jsme při jejich dokazování využili jejich přístupy.

Literatura

[1] Arens, Richard: *Extension of functions on fully normal spaces*. Pacific Journal of Mathematics, 2, 1952, strany 11–22.

[2] Arens, Richard: *Extension of coverings, of pseudometrics, and of linear-space-valued mappings*. Canadian Journal of Mathematics, 5, 1953, strany 211–215.

[3] Brouwer, Luitzen Egbertus Jan: *Über die Erweiterung des Detinitionsbereichs einer stetigen Funktion*. Mathematische Annalen, 79, 1918, strany 209–211.

[4] Carathéodory, Constantin: *Vorlesungen über reelle Funktionen*. Teubner, Leipzig und Berlin, 1918, strany 617–620.

[5] Čech, Eduard: *On bicompact spaces*. Annals of Mathematics, 38, 1937, strany 823–844.

[6] Čech, Eduard (přepracovali Frolík, Zdeněk a Katětov, Miroslav): *Topological spaces*. Academia, Praha, 1966.

[7] Dieudonné, Jean: *Une généralisation des espaces compacts*. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 23, 1944, strany 65–76.

[8] Dieudonné, Jean: *Foundations of modern analysis*. Academic Press, New York, London, 1960, strany 89–90.

[9] Dugundji, James: *An extension of Tietze's theorem*. Pacific Journal of Mathematics, 1, 1951, strany 353–367.

[10] Dugundji, James: *Topology*. Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1966, strany 187–189.

[11] Engelking, Ryszard: *General Topology*. Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[12] Gantner, T. E.: *Some Corollaries to the Metrization Lemma*. The American Mathematical Monthly, 76, 1969, strany 45–47.

[13] Gillman, Leonard; Jerison, Meyer: *Rings of Continuous Functions*. D. Van Nostrand Company, Inc., Princeston, New Jersey 1960, strany 14–20.

[14] Grabiner, Sandy: *The Tietze Extension Theorem and the Open Mapping Theorem*. The American Mathematical Monthly, 93, 1986, strany 190–191.

[15] Hahn, Harald: *Über halbstetige und unstetige Funktionen*. Sitzungsberichte Akad. Wiss. Wien Abt. IIa, 126, 1917, strany 91–110.

[16] Hausdorff, Felix: *Über halbstetige Funktionen und deren Verallgemeinerung.* Mathematische Zeitschrift, 5, 1919, strany 292–298.

[17] Hausdorff, Felix: *Erweiterung einer Homöomorphie.* Fundamenta Mathematicae, 16, 1930, strany 40–47.

[18] Isbell, John R.: *On finite–dimensional uniform spaces.* Pacific Journal Mathematics, 9, 1959, strany 105–121.

[19] Hollcroft, Temple Rice: *The October meeting in New York.* Bulletin of the American Mathematical Society, 54, 1948, strany 51–65.

[20] Hušek, Miroslav: *History and development of Hausdorff's work in extension in metric spaces.* Mathematical Research, 67, 1992, strany 160–169.

[21] Katětov, Miroslav: *On Real–Valued Functions in Topological Spaces.* Fundamenta Mathematicae, 38, 1951, strany 85–91.

[22] Katětov, Miroslav: *Correction to "On Real–Valued Functions in Topological Spaces."* Fundamenta Mathematicae, 40, 1953, strany 203–205.

[23] Kerékjártó, Béla: *Vorlesungen über Topologie.* Berlin, Julius Springer, 1923.

[24] Lebesgue, Henri: *Sur le Problème de Dirichlet.* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 24, 1907, strany 371–402.

[25] van Mill, Jan: *The Infinite-Dimensional Topology of Function Spaces.* North-Holland Mathematical Library, 2002.

[26] Poussin, Charles Jean de la Valée: *Intégrales de Lebesgue, Fonction d'Ensemble, Classes de Baire.* Gauthier–Villars, Paris, 145, 1916, strany 115–127.

[27] Przymusiński, Teodor: *Collectionwise normality and extensions of continuous functions.* Fundamenta Mathematicae, 98, 1978, strany 75–81.

[28] Stone, Arthur Harold: *The generalized Weierstrass approximation theorem.* Math. Mag., 21, 1947, strany 167–183 a 237–254.

[29] Tietze, Heinrich: *Über Funktionen, die auf einer abgeschlossenen Menge stetig sind.* Journal für die reine und angewandte Mathematik, 145, 1915, strany 9–14.

[30] Tietze, Heinrich: *Beitrage zur allgemeinen Topologie. I.* Mathematische Annalen, 88, 1923, strany 290–312.

[31] Tong, Hing: *Some characterizations of normal and perfectly normal spaces.* Duke Mathematical Journal, 19, 1952, strany 289–292.

[32] Urysohn, Paul: *Über die Mächtigkeit der zusammenhängenden Menden.* Mathematische Annalen, 94, 1925, strany 262–295.