

Posudek vedoucího diplomové práce

Mark Cúth: „Separabilní redukce ve funkcionální analýze“

Zadáním diplomové práce bylo nastudovat a srozumitelně vyložit množinově teoretickou metodu elementárních submodelů a s její pomocí dokázat některé věty o separabilní redukci ve funkcionální analýze. Toto zadání bylo více než splněno.

Tato metoda spočívá v použití *Věty o spočetném modelu*, což je v práci Věta 2.15. Zmíněná věta říká, že máme-li danu spočetnou množinu A a konečný seznam formulí, pak existuje spočetná množina M obsahující A , pro kterou jsou formule ze seznamu absolutní. Takové množině M se říká *elementární model* pro daný seznam formulí. Výsledky ilustrující použití této věty jsou například tyto:

Nechť X je Banachův prostor. Pak existuje konečný seznam formulí a spočetná množina S , že pro každý spočetný elementární model M pro tento seznam formulí, který obsahuje S , platí:

- (1) $X_M = \overline{X \cap M}$ je uzavřený separabilní podprostor X . (Tvrzení 3.15)
- (2) Jestliže $A \subset X$ má Baireovu vlastnost a navíc $A \in M$, pak A je první kategorie v X , právě když $A \cap X_M$ je první kategorie v X_M . (Věta 4.8)
- (3) Jestliže $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce, která patří do M , pak v bodech X_M je ekvivalentní fréchetovská diferencovatelnost f a $f|_{X_M}$. (Věta 5.9)

Tyto výsledky je možné kombinovat, takže například dostaneme, že množina bodů fréchetovské diferencovatelnosti f je reziduální v X , právě když množina bodů fréchetovské diferencovatelnosti $f|_{X_M}$ je reziduální v X_M (Důsledek 5.11).

Práce je rozdělena do šesti kapitol. První z nich obsahuje úvodní poznámky. Ve druhé kapitole jsou vyloženy základní poznatky z teorie množin (formule, axiomy, relativizace a absolutnost) a zejména dokázána věta o spočetném modelu. V kapitole třetí je použití této věty ilustrováno na jednoduchých příkladech.

Čtvrtá kapitola se věnuje aplikacím metody na vlastnosti množin v metrických prostorech (hustota, řidkost, první kategorie, rezidualita). V páté kapitole je metoda aplikována na vlastnosti zobrazení (spojitost, polospojitosť, diferencovatelnost).

V šesté kapitole jsou předešlé výsledky aplikovány na důkaz neseparabilní verze dvou výsledků o separabilních prostorech (jde o výsledek J.Lindenstrausse a D.Preisse a o jeden dosud nepublikovaný výsledek L.Zajíčka).

Student pracoval samostatně s využitím konzultací. Výsledkem je kvalitní, přínosná a pečlivě napsaná práce. Jedním z důležitých přínosů je zjednodušení a přesné vysvětlení metody elementárních modelů. Nápad použít tuto metodu k řešení otázek z funkcionální analýzy pochází od W.Kubiše. On však používal složitější postup a Löwenheim-Skolemovu větu. Navíc není snadné se přesvědčit, že jeho postup je skutečně korektní.

Dalším přínosem je systematické zpracování aplikací metody na vlastnosti množin a funkcí v kapitole čtvrté a páté. Tyto výsledky budou jistě použitelné i k řešení dalších otázek.

Celkově se domnívám, že předložená práce více než splňuje požadavky kladené na diplomovou práci. Některé části by stály za publikaci (zejména výsledky kapitol 4-6).

V Praze dne 13. 5. 2010

Doc. RNDr. Ondřej Kalenda, Ph.D.
Katedra matematické analýzy MFF UK