Zkušební témata

Vybrané partie z matematiky pro fyziky

NMAF006, LS 2008/09

1. Věta: X Banachův, $T \in L(X)$, že $\|T\| \leq 1$ nebo $\sum_{j=0}^{\infty} \|T^j\| \leq 1$ nebo $\sum_{j=0}^{\infty} \|T^j x\| \leq 1$ pro všechna $x \in X$. Potom pro každé $u \in X$ existuje právě jedno $y \in X$, že $(I-T)y = u$ a platí $(I-T)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} T^j$. Předveďte hlavní myšlenku důkazu této věty.
2. Pro $T \in L(X)$ (X Banachův) sestavte tabulku 3×3, dávající do souvislosti výroky „T_λ je prostý resp. má spojitou inverzi“ a „T_λ je na X, resp. má či nemá v X hustý obor hodnot“. Definujte bodové, residuální a spojité spektrum.
3. Formulujte větu a lemma, které v předchozí tabulce „vyškrtávají dvě okýnka“. Větu nedokazujte, důkaz lemmatu naznačte.
4. Definujte pojem kompaktního operátoru, ukažte, jak bude pro kompaktní operátor vypadat tabulka pro T_λ, $\lambda \neq 0$, z bodu 2 výše. Tvar této tabulky podpořte nějakými tvrzeními, která však nemusíte dokazovat.
5. Napište, jak vypadá spektrum kompaktního operátoru. Sepište příslušná tvrzení, nemusíte je dokazovat.
6. Definujte duální zobrazení k danému lineárnímu omezemu zobrazení mezi Banachovými prostory, ukažte, že v Hilberových prostorech vždy existuje jediné duální (adjungované, hermiteovsky adjungované) zobrazení.
7. Definujte, co je hermiteovský (samoadjungovaný) operátor na H a sepište vlastnosti spektra pro kompaktní hermiteovský (samoadjungovaný) operátor na H.
8. Formulujte Hilbert-Schmidtovu spektrální větu (tj. větu, obsahující rovnost $H = \Lambda \oplus \operatorname{Ker} T$) a poodhalte strategii důkazu.
9. Formulujte pojem adjungovaného operátoru k (obecně neomezenému) lineárnímu operátoru $T : \mathcal{D}(T) \subset H \to H$; formulujte tvrzení o tom, kdy je $\mathcal{D}(T^*) \neq \emptyset$.
10. Formulujte a vysvětlete pojmy symetrického a samoadjugovaného operátoru (a rozdíly mezi nimi). Formulujte pojem uzavřeného operátoru a větu o ekvivalenci tvrzení „T má spojitou inverzi“.
11. Definujte lineární diferenciální výraz $\ell(y)$ řádu n a k němu adjungovaný výraz $\ell^*(y)$. Vysvětlete rozdíl mezi lineárním diferenciálním výrazem a lineárním diferenciálním operátorem.
12. Ukažte, že $\ell^*(y)$ je pro $\ell(y)$ jediný lineární diferenciální výraz, pro který $(\ell(y), z) = (y, \ell^*(z))$ pro všechna $y, z \in \mathcal{C}^{\infty}_{\mathrm{cpt}}(a, b)$.
13. Ukažte, že každý OG systém polynomů v prostoru L^2_ρ(a,b) nutně splňuje rekurentní vzorec „se čtyřmi členy“.
14. Definujte hypergeometrickou řadu a Pochhammerův symbol. Ukažte, že řešení Gaussovy redukované rovnice lze nalézt ve tvaru hypergeometrické řady.
15. Formulujte okrajovou úlohu pro ODR na omezeném kompaktním intervalu. Definujte Greenovu funkci pro tuto úlohu.
16. Formulujte větu o existenci Greenovy funkce, ukažte ekvivalentní podmínku pro existenci Greenovy funkce. Naznačte další postup důkazu.