Početní část zkoušky | 16.3.2007

Příjmení a jméno:

Skupina (cvičící):

Získané body:

1.	2.	3.	Σ

Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale co nejpřesněji odůvodněte. Pokud používáte nějaké tvrzení, nezapomeňte je uvést a ověřit splnění všech jeho předpokladů.

---

1. [7b] Spočtěte distribuci

$$T = x^k \delta^{(n)}\,, \quad k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

kde $x \in \mathbb{R}$. (Pod termínem „spočtěte distribuci“ se rozumí „nalezněte její co nejjednodušší vyjádření“.)

---

2. [11b] V prostoru $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ řešte rovnici

$$-\Delta u + 2a\nabla u + (b^2 - |a|^2)u = \delta\,, \quad a \in \mathbb{R}^3\,, \quad b \in \mathbb{R}, \quad b > |a|\,.$$

(Návod: zaveďte novou funkci předpisem $u(x) = v(x)\, e^{a \cdot x}$, nezapomeňte transformovat i derivace.)

---

3. [12b] Nechť $a > 0$ a definujme $\Omega := \{[x, y] \in \mathbb{R}^2\,;\ y > 0\} \setminus (\{0\} \times \langle 0, a\rangle)$. Nechť funkce $g(x, 0) = 0$ pro $x \in \mathbb{R}$, a nechť $g = 1$ na zbytku hranice Ω. Nechť konečně $u(x)$ je omezené řešení rovnice

$$\Delta u = 0 \quad \text{v } \Omega$$

s okrajovou podmínkou

$$u = g \quad \text{na hranici } \Omega\,.$$

Nalezněte hodnoty $u(0, y)$ pro $y > a$.

Teoretická část zkoušky $\boxed{16.3.2007}$

Příjmení a jméno:

Skupina (cvičící):

Získané body:

1.	2.	Σ

---

1. **[10b]**

   (a) Zformulujte větu o distributivní derivaci funkce se skoky (hodnot a derivací) v bodě nula.

   (b) Dokažte tuto větu pro případ druhé derivace, tj. $f''_{\mathcal{S}'} = \ldots$.

   (c) Zformulujte větu o nalezení fundamentálního řešení ODR.

---

2. **[10b]**

   (a) Zformulujte a dokažte čemu se rovná Laplaceova transformace derivace $\mathcal{L}f^{(k)}$, je-li f funkce z prostoru L^1_+.

   (b) Zformulujte a dokažte čemu se rovná Laplaceova transformace derivace $\mathcal{L}T^{(k)}$, je-li T distribuce z prostoru L'_+, tedy (především) derivace $T^{(k)}$ je chápána ve smyslu distribucí.

   (c) Uvážíme-li, že i funkci $f \in L^1_+ \subset L'_+$ lze chápat jako distribuci, dojdeme k závěru, že na takovou funkci lze aplikovat oba výše zmíněné postupy. Na příkladu $\mathcal{L}(e^x)''$ ukažte rozdíl mezi oběma postupy, a to, že „nejsou ve sporu“. Pokuste se to vysvětlit pro obecný případ.
