Stokesova věta pro diferenciální formy

Mirko Rokyta

Poznámky k přednášce MAF042
(MA pro F, 2. ročník, ZS 2005/2006)
29.11.2005

1 Úvod - přípravné práce

Definice 1.1 *Řekneme, že $S \subset \mathbb{R}^n$ je regulární (případně též „jednoduchá“) otevřená plocha dimenze k v $\mathbb{R}^n$, $1 \le k \le n$, pokud existuje jednoduše souvislá oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ a zobrazení $\Phi : \Omega \to S$, $\Phi(u) = x$, s následujícími vlastnostmi:*

$$\Phi \in \mathcal{C}^1(\Omega)\,, \qquad \Phi \text{ prosté na } \Omega\ , \qquad \Phi(\Omega) = S\,, \qquad \operatorname{hodn}\left(\frac{\partial(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)}{\partial(u_1, \ldots, u_k)}(u)\right) = k \quad \forall u \in \Omega\,. \tag{1}$$

Poznámka 1.2
- Zobrazení Φ si představujme jako „pokřivení rovné plochy Ω“ tak, aby vznikla S. Při procesu křivení však nesmíme křivit příliš: nesmí vzniknout hroty ani ostré hrany (Φ je hladké), a nikde nesmí dojít k zaškrcení plochy na podoblast „nižší dimenze“ – to zaručuje podmínka, že matice derivací „všeho podle všeho“ má stále nejvyšší možnou hodnost.
- Bez újmy na obecnosti budeme předpokládat, že parametrizující oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ je k-rozměrný interval, tedy množina tvaru

  $$I = (a_1^0, a_1^1) \times \cdots \times (a_k^0, a_k^1)\,, \qquad \text{kde } a_j^0 < a_j^1 \quad \forall j = 1, \ldots, k\,.$$

  Pokud je totiž $\Phi : \Omega \to S$ parametrizace s vlastnostmi (1), uvážili bychom difeomorfismus $\sigma : I \to \Omega$ (který zdeformuje interval I na množinu Ω, jako kdybychom pracovali s objekty z plastelíny). Zobrazení $\Phi \circ \sigma$ je potom parametrizací $I \to S$.

Definice 1.3 *Buďte Φ_i parametrizace regulárních ploch S_i dimenze k, $i = 1, \ldots, s$. Dále uvažujme čísla $n_i \in \{-1, 0, 1\}$. Potom výraz*

$$c := \sum_{i=1}^{s} n_i \Phi_i$$

nazveme řetězcem (případně „zobecněnou plochou“) dimenze k. *Případně též říkáme, že c je parametrizací* řetězce ploch („zobecněné plochy“) dimenze k v $\mathbb{R}^n$.

Poznámka 1.4 Jde o zcela formální zápis. V podstatě jde o to, že pod řetězcem ploch si chceme představit jejich sjednocení s příslušnými orientacemi. Je-li znaménko n_i rovno „1“, znamená to, že danou plochu uvažujeme s orientací, kterou jí obdařila její parametrizace Φ_i, zatímco je-li znaménko n_i rovno „-1“, uvažujeme příslušnou plochu s orientací opačnou, než jakou jí vnutila její parametrizace Φ_i. Případně danou plochu (zejména při integrování) neuvažujeme vůbec, to pokud $n_i = 0$.

2 Stokesova věta

Definice 2.1 *(i) Buď I otevřený interval v $\mathbb{R}^k$, $I = (a_1^0, a_1^1) \times \cdots \times (a_k^0, a_k^1)$. Označme*

$$I_j := (a_1^0, a_1^1) \times \cdots \times (a_{j-1}^0, a_{j-1}^1) \times (a_{j+1}^0, a_{j+1}^1) \times \cdots \times (a_k^0, a_k^1)\,, \qquad j = 1, \ldots, k\,,$$

j-tý průmět intervalu I do $\mathbb{R}^{k-1}$. Dále uvažujme zobrazení („zvednutí z průmětu I_j na odpovídající horní či dolní stěnu intervalu I“)

$$\begin{aligned} \varphi_{j,\alpha} &: I_j \to \overline{I}\,, \qquad\qquad j = 1, \ldots, k\,, \quad \alpha = 0, 1\,, \\ \varphi_{j,\alpha} &: (x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_k) \mapsto (x_1, \ldots, x_{j-1}, a_j^\alpha, x_{j+1}, \ldots, x_k)\,. \end{aligned}$$

Označíme nyní $\partial I_{j,\alpha} := \varphi_{j,\alpha}(I_j)$ otevřené stěny intervalu $\overline{I}$, a popíšeme (a tím vnutíme orientaci) hranici ∂I intervalu I takto:[1]

$$\partial I = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} \left(\partial I_{j,1} - \partial I_{j,0}\right) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{\alpha=0}^{1} (-1)^{j+\alpha} \partial I_{j,\alpha}\,. \tag{2}$$

(ii) Mějme regulární plochu S, parametrizovanou zobrazením $\Phi : I \to S$ s vlastnostmi (1). V souladu s předchozím bodem definice klademe

$$\partial S = \sum_{j=1}^{k} \sum_{\alpha=0}^{1} (-1)^{j+\alpha} \Phi(\partial I_{j,\alpha})\,. \tag{3}$$

Poznámka 2.2

- Definice (3) by se musela formulovat opatrněji. Parametrizace hranice S je totiž parametrizace zobrazením, pracujícím „o dimenzi níž“. Přesně bychom museli předpokládat, že existují parametrizační zobrazení, které zobrazí každou stěnu intervalu I na kus hranice S, že tyto hranice dohromady vyplní „skoro celou“ ∂S (tj. až na množinu míry nula), a pak se domluvit, že Φ na pravé straně (3) je naše původní Φ „rozšířené“ o tato hraniční zobrazení. Samozřejmě by ještě musely následovat jakési podmínky na navazování těchto rozšiřujících zobrazení.

- Domluvme se, že následující větě bude $\omega \in E^{k-1}(S)$ znamenat, že vlastně forma ω je definována na množině o něco větší než je S, tj. že $\omega \in E^{k-1}(G)$, kde G je otevřená množina taková, že $G \supset \overline{S}$. Je to proto, že ω potřebujeme i na hranici.

Věta 2.3 (Zobecněná Stokesova věta) *Buď S regulární plocha dimenze k v $\mathbb{R}^n$, $1 \le k \le n$. Buď $\omega \in E^{k-1}(S)$. Potom*

$$\int_S \mathrm{d}\omega = \int_{\partial S} \omega\,. \tag{4}$$

[1] Intuitivně: opačné stěny intervalu I mají opačnou orientaci.

Důkaz. • **Krok 1**: Dokážeme tvrzení věty nejprve pro případ, že $S = I \subset \mathbb{R}^k$, tj. naše plocha je „rovný“ interval v $\mathbb{R}^k$. Forma $\omega \in E^{k-1}(I)$ má pak tvar:[2]

$$\omega(x) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} f_j(x)\, \widehat{\mathrm{d}x_j} \qquad \text{a tedy} \qquad \mathrm{d}\omega(x) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} \mathrm{d}f_j(x) \wedge \widehat{\mathrm{d}x_j}\,. \tag{5}$$

Používáme značení $\widehat{\mathrm{d}x_j}$ k vyjádření skutečnosti, že jediný chybějící element v součinu je právě $\mathrm{d}x_j$, tedy že

$$\widehat{\mathrm{d}x_j} = \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \mathrm{d}x_{j-1} \wedge \mathrm{d}x_{j+1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_k\,. \tag{6}$$

Upravujme levou stranu (4) dosazením z (5):

$$\int_I \mathrm{d}\omega = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} \int_I \mathrm{d}f_j(x) \wedge \widehat{\mathrm{d}x_j} = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} \int_I \sum_{\ell=1}^{k} \frac{\partial f_j(x)}{\partial x_\ell}\, \mathrm{d}x_\ell \wedge \widehat{\mathrm{d}x_j}\,. \tag{7}$$

Při bližším ohledání výrazu $\mathrm{d}x_\ell \wedge \widehat{\mathrm{d}x_j}$ pozorujeme, že $\mathrm{d}x_\ell \wedge \widehat{\mathrm{d}x_j} = 0$ pro $j \neq \ell$, neboť $j \neq \ell$ značí, že v $\widehat{\mathrm{d}x_j}$ **nechybí** $\mathrm{d}x_\ell$. Pro $j = \ell$ pak je

$$\mathrm{d}x_j \wedge \widehat{\mathrm{d}x_j} = \mathrm{d}x_j \wedge (\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \mathrm{d}x_{j-1} \wedge \mathrm{d}x_{j+1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_k) = (-1)^{j-1} \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_k\,,$$

protože je potřeba právě $(j-1)$ prohození, abychom zařadili $\mathrm{d}x_j$ na správné místo. Můžeme tedy pokračovat v (7):

$$\int_I \mathrm{d}\omega = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1+j-1} \int_I \frac{\partial f_j(x)}{\partial x_j}\, \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_k = \sum_{j=1}^{k} (\mathcal{L})\!\int_I \frac{\partial f_j(x)}{\partial x_j}\, \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_k = (\mathcal{L})\!\int_I \mathrm{div} \vec{f}\, \mathrm{d}x\,. \tag{8}$$

Předposlední rovnost reflektuje skutečnost, že integrál z k-formy přes k-dimenzionální množinu v $\mathbb{R}^k$ se definuje pomocí Lebesgueova integrálu.
Věnujme se nyní pravé straně v (4). Upravíme

$$\int_{\partial I} \omega = \sum_{j=1}^{k} \sum_{\alpha=0}^{1} (-1)^{j+\alpha} \int_{\partial I_{j,\alpha}} \omega \tag{9}$$

a spočteme nejprve (přenesením formy ω z $\partial I_{j,\alpha} = \varphi_{j,\alpha}(I_j)$ na I_j):

$$\int_{\partial I_{j,\alpha}} \omega = \int_{\varphi_{j,\alpha}(I_j)} \omega = \int_{I_j} \varphi^*_{j,\alpha}(\omega) = \int_{I_j} \sum_{m=1}^{k} (-1)^{m+1} \left(f_m \circ \varphi_{j,\alpha}\right) \widehat{\mathrm{d}(\varphi_{j,\alpha})_m}\,. \tag{10}$$

Ovšem protože

$$(\varphi_{j,\alpha}(x))_m = \begin{cases} x_m\,, & m \neq j\,, \\ a_j^\alpha\,, & m = j\,, \end{cases} \qquad \text{a tedy} \qquad \mathrm{d}(\varphi_{j,\alpha})_m = \begin{cases} \mathrm{d}x_m\,, & m \neq j\,, \\ 0\,, & m = j\,, \end{cases} \tag{11}$$

[2] Jak uvidíme v průběhu důkazu, je z technických důvodů výhodnější psát funkční část formy ω se střídavými znaménky.

máme rovněž[3]

$$\widehat{\mathrm{d}(\varphi_{j,\alpha})_m} = \begin{cases} 0\,, & m \neq j\,, \\ \widehat{\mathrm{d}x_j}\,, & m = j\,, \end{cases} \tag{12}$$

a proto pokračujeme-li v (10), dostaneme:

$$\int_{\partial I_{j,\alpha}} \omega = \int_{I_j} \sum_{m=1}^{k} (-1)^{m+1} \left(f_m \circ \varphi_{j,\alpha}\right) \widehat{\mathrm{d}(\varphi_{j,\alpha})_m} = (-1)^{j+1} \int_{I_j} \left(f_j \circ \varphi_{j,\alpha}\right) \widehat{\mathrm{d}x_j}\,. \tag{13}$$

Dosadíme tento výsledek do (9) a dostaneme:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial I} \omega \quad &= \quad \sum_{j=1}^{k} \sum_{\alpha=0}^{1} (-1)^{j+\alpha} \int_{\partial I_{j,\alpha}} \omega = \sum_{j=1}^{k} \sum_{\alpha=0}^{1} (-1)^{\alpha+1} \int_{I_j} \left(f_j \circ \varphi_{j,\alpha}\right) \widehat{\mathrm{d}x_j} = \\
&= \quad \sum_{j=1}^{k} \int_{I_j} \big(f_j(x_1,\dots,x_{j-1},a_j^1,x_{j+1},\dots,x_k) - f_j(x_1,\dots,x_{j-1},a_j^0,x_{j+1},\dots,x_k)\big) \widehat{\mathrm{d}x_j} = \\
&\overset{\text{(N-L)}}{=} \quad \sum_{j=1}^{k} (\mathcal{L})\!\int_{I_j} \left((\mathcal{L})\!\int_{a_j^0}^{a_j^1} \frac{\partial f_j(x)}{\partial x_j}\, \mathrm{d}x_j \right) \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_{j-1} \mathrm{d}x_{j+1} \cdots \mathrm{d}x_k = \\
&\overset{\text{(F)}}{=} \quad \sum_{j=1}^{k} (\mathcal{L})\!\int_{I} \frac{\partial f_j(x)}{\partial x_j}\, \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_k = (\mathcal{L})\!\int_{I} \operatorname{div}\vec{f}\, \mathrm{d}x\,,
\end{aligned}$$

což je totéž, k čemu jsme dospěli v (8). Poslední dvě rovnosti předchozího výpočtu krátce okomentujeme: (N-L) značí, že jsme použili Newton-Leibnizovu formuli – rozdíl funkčních hodnot hladké funkce ve dvou bodech jsme vyjádřili jako integrál z její derivace v příslušných mezích. Znamení (F) u další rovnosti značí použití Fubiniho věty pro Lebesgueův integrál. Tím je Krok 1 důkazu hotov.

• **Krok 2**: Buď nyní $S \subset \mathbb{R}^n$ regulární plocha dimenze k v $\mathbb{R}^n$ a $\Phi : I \to S$ její parametrizace, splňující (1). Větu v tomto případě dokážeme přenesením celé situace na interval I, kde jsme větu dokázali v prvním kroku:

$$\begin{aligned}
\int_S \mathrm{d}\omega \quad &\overset{\text{přenesení}}{=} \quad \int_I \Phi^*(\mathrm{d}\omega) \overset{\text{vlastnost d}}{=} \int_I \mathrm{d}\Phi^*(\omega) \overset{\text{Krok 1}}{=} \int_{\partial I} \Phi^*(\omega) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{\alpha=0}^{1} (-1)^{j+\alpha} \int_{\partial I_{j,\alpha}} \Phi^*(\omega) = \\
&\overset{\text{přenesení zpět}}{=} \quad \sum_{j=1}^{k} \sum_{\alpha=0}^{1} (-1)^{j+\alpha} \int_{\Phi(\partial I_{j,\alpha})} \omega = \int_{\partial S} \omega\,.
\end{aligned}$$

$\boxtimes$

[3]Řekněte si to takto: jedině v případě $m = j$ **není** v součinu $\widehat{\mathrm{d}(\varphi_{j,\alpha})_m}$ člen $\mathrm{d}(\varphi_{j,\alpha})_j$, který je podle (11) roven nule.