Fourierovy řady

V následující tabulce vždy předpokládáme, že funkce f je 2π-periodická na $\mathbb{R}$.[1]

Pro všechny funkce, uvedené v tabulce, existují konečné Fourierovy koeficienty (v tabulce ovšem $\ell = 2\pi$):

$$a_0 := \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\,dx \quad a_n := \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\cos\frac{2\pi}{\ell}nx\,dx \quad b_n := \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\sin\frac{2\pi}{\ell}nx\,dx\,,$$

pomocí kterých lze definovat Fourierovu řadu (F.ř.), generovanou funkcí f, jako

$$F_f(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2\pi}{\ell}nx + b_n \sin\frac{2\pi}{\ell}nx\,.$$

Vlastnosti těchto koeficientů a F.ř. shrnuje tabulka.
Fakty, označené * nebyly na přednášce dokazovány.

Vlastnosti funkce	**Fourierovy koeficienty**	**Fourierova řada**
$f \in L^1(0,2\pi)$	(i) a_0, a_n, b_n existují (ii) $a_0 \to 0$, $b_n \to 0$ pro $n \to \infty$	*F.ř. nemusí konvergovat, *přesto ji lze formálně integrovat člen po členu
$f \in L^2(0,2\pi)$	(i), (ii), a navíc: (iii) $\sum \lvert a_n\rvert^2, \sum \lvert b_n\rvert^2$ konvergují	*$F_f(x) = f(x)$ ve s. v. bodech
$f \in \mathcal{C}(0,2\pi)$ $\exists f(0+), f(2\pi-)$ vlastní (obecně různé)	(i), (ii), (iii) (neboť taková f je z $L^2(0,2\pi)$)	*$F_f(x) = f(x)$ ve s. v. bodech F.ř. lze přeintegrovat člen po členu
f po částech $\mathcal{C}^1(0,2\pi)$ $\exists f(x+), f(x-)$ vlastní $\forall x$ $\exists f'(x+), f'(x-)$ vlastní $\forall x$	(i), (ii), (iii) (neboť taková f je z $L^2(0,2\pi)$)	$F_f(x) = \frac{f(x+)+f(x-)}{2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ (tj. $F_f(x) = f(x)$ kdykoli f spojitá v x)
… & navíc k předchozímu bodu: $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$	…	*… navíc: F.ř. lze derivovat všude tam, kde $\exists f'(x)$ vlastní
$f \in \mathcal{C}^{p+1}(\mathbb{R})$, $p \in \mathbb{N}$	(i), (ii), (iii), a navíc: (iv) $\sum n^p(\lvert a_n\rvert + \lvert b_n\rvert)$ konverguje	F.ř. lze p-krát derivovat člen po členu ve všech x

[1] Všechny výsledky samozřejmě platí, i pokud nahradíme periodu 2π obecnou periodou $\ell > 0$ (a stejnou náhradu provedeme i v tabulce).