MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
UNIVERZITY KARLOVY

ZÁKLADY MATEMATICKÉ ANALÝZY

Druhý díl

doc. RNDr. Jiří Veselý, CSc.

matfyzpress

PRAHA 2009

ISBN 978–80–7378–063–0

Předmluva

Tento druhý díl učebnice *Základy matematické analýzy* vznikl úpravou textu, který ve dvou vydáních vyšel r. 1997 a 2001 v nakladatelství *Matfyzpress* pod názvem *Matematická analýza pro učitele.* Její užívání ukázalo, že svým rozsahem vyhovuje v bakalářském studiu matematiky a umožňuje dostatečnou variabilitu přednášky, k níž je jako pomocný text využívána. Text tohoto dílu je však upraven mnohem podstatněji nežli text prvního dílu – je mu již jen obsahově podobný.

Učebnice obsahuje značný počet historických poznámek, ubyly však ukázky ze starších českých učebnic a obecné historické komentáře, které měly jen volnou vazbu na vykládanou látku. Materiál dle možnosti neuzavírá žádnou možnost přístupu k látce a měl by být snadno použitelný i při jiném uspořádání látky apod. Historické poznámky jsou psány v každé kapitole nezávisle na předchozím textu. Na konci každé kapitoly je uvedena literatura, která se k ní bezprostředně vztahuje. V závěru uvedené *Dodatky* obsahují rozšíření látky, použitelné např. pro samostatnou práci studentů v seminářích – proto se očekává, že při jejich četbě musí čtenář/student nějakou práci vykonat samostatně.

Druhý díl spolu s prvním pokrývá podstatnou část látky, probíranou na MFF UK v prvních třech semestrech (rozsah 4/2, 4/2, 4/2). V textu nejsou zařazeny partie o funkcích více proměnných. Jim jsou věnována skripta L. Zajíčka *Vybrané partie z matematické analýzy pro 1. a 2. ročník.* Na druhé straně text druhého dílu obsahuje např. dosti podrobný výklad o metrických prostorech i o teorii obyčejných diferenciálních rovnicích a systémů lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu. Partie o stejnoměrné konvergenci jsem se snažil zařadit co nejpozději, neboť je považuji za náročné. Při užití textu je však již věcí přednášejícího, např. kterou sčítací metodou se bude zabývat podrobněji a která z uvedených tvrzení sdělí jen informativně, případně přenechá studentům k úvaze, zda se o nich budou chtít samostatně dozvědět něco nad rámec přednášky. Oba extrémní případy (nezařadit do přednášky nic či naopak vše) by byly škodlivé. Partie o mocninných řadách je psána tak, aby poskytla čtenáři nutný základ k dalšímu studiu teorie funkcí komplexní proměnné a je rozdělena na dvě části. Druhou částí text končí, a právě v ní jsou vyložena základní fakta o komplexních funkcích, které jsou součtem mocninné řady.

U všech důležitých vět jsem se snažil určit autora i dobu, z níž věta pochází. Hvězdička u údaje, např. **Bolzano 1817*** varuje čtenáře před ukvapenými závěry: je nutno si přečíst na jiném místě textu další komentář; vodítkem je jmenný rejstřík. Zejména u starších výsledků jsem nezkoumal originální prameny, neboť v cizojazyčné literatuře jsou knihy s historickými komentáři velmi oblíbené a měl jsem tedy nejen odkud čerpat, ale nechyběla i možnost srovnání. Pouze u několika dat uváděných rozdílně jsem se vždy pokusil srovnáním s originálními texty přiklonit se k tomu správnému. U novějších výsledků však bylo velmi často nutné sáhnout k originálním pramenům. Za každou kapitolou je uvedena literatura, která se k ní bezprostředně vztahuje.

Text psaný *kurzívou* v běžném textu (*nebo* antikvou *v kurzívním textu*) je záměrně zvýrazněn: tam by měl čtenář zbystřit pozornost, eventuálně zapojit i paměť. Zvýrazněny jsou zejména všechny zaváděné pojmy. Jména matematiků jsou při prvním výskytu v kapitole tištěna KAPITÁLKAMI; takový údaj obsahuje životopisná data a plné jméno (pokud nejde jen o označení věty). Obsah se vztahuje k oběma dílům učebnice, avšak na konci tohoto dílu zařazené rejstříky se vztahují pouze ke druhému dílu. Text druhého dílu je stránkován „průběžně“, a stejně tak jsou číslovány kapitoly. První díl textu je v současné době rozebrán, pokusím se ho však časem také upravit a vydat znovu.

V učebnici je řada poměrně elementárních příkladů, často s vazbou na středoškolskou látku, text však prakticky neobsahuje cvičení; jsem přesvědčen, že počet příkladů, které je třeba samostatně vyřešit, je silně individuální, a že dobrou sbírku příkladů má mít student stále k dispozici. Nevyhýbal jsem se opakování vzhledem k předpokládaným potenciálním (ne potencionálním!) čtenářům, v tomto směru jsem byl vědomě dosti „neekonomický“.

Text vznikl z přednášek, které jsem konal v posledních cca 15 letech. Za podněty a připomínky vděčím mnoha kolegům a jsem jim všem za ně velmi vděčný. Mnoho úprav jsem provedl na přání recenzentů textu, je však samozřejmé, že za chyby, které v textu zůstaly, zodpovídám plně já. Na jejich přání jsem zařadil i více obrázků, které obětavě vytvořil můj kolega ing. Jaroslav Richter, PhD.

Měl jsem možnost vyzkoušet text v čtyřsemestální přednášce začínající v letech 2000, 2003 a 2005. Materiálu je v něm dost a přeskupování pořadí látky mi nečinilo vážnější obtíže. Z odboček od hlavní linie textu jsem čerpal v prosemináři a i tak zbyla řada věcí, na které se nedostalo. Další témata z proseminářů se v několika případech objevují v Dodatcích.

Volným pokračováním dřívějšího textu bylo moje skriptum *Komplexní analýza pro učitele.* V něm byla na něj řada odkazů; ty jsou však ve vztahu k upravenému textu bohužel téměř bezcenné. Uvítám stejně jako u předchozích vydání komentář, upozornění na chybějící partie a chyby včetně přepisů, na emailové adrese

`jvesely@karlin.mff.cuni.cz` .

Je potěšitelné, že již vyšla řada učebních textů pro základní přednášky z matematické analýzy, a to i na jiných univerzitách. Pro čtenáře (i pro přednášející tohoto předmětu) je jistě velkým přínosem možnost si vybrat styl výkladu, který jim „nejvíce sedí“. Nezřídka je pro studenty dobré si stejnou partii přečíst v různém pojetí, jiný pohled vždy prohloubí porozumění. A bude-li tento text jedním z těch, po kterých příležitostně či častěji sáhnou, bude to pro mne největší odměnou.

V Praze v únoru 2009

Jiří Veselý

Obsah

Kapitola 10

Diferenciální rovnice prvního řádu

10.1 Lineární rovnice

V prvním dílu této učebnice jsme se již setkali s funkcionálními rovnicemi, ve kterých v roli neznámé vystupovaly funkce. Podobným typem rovnic jsou *diferenciální rovnice*, ve kterých neznámé funkce vystupují i prostřednictvím svých derivací. S některými rovnicemi tohoto typu jsme se již seznámili. Nyní je budeme zkoumat podrobněji, i když zatím jen na elementární úrovni. Podotýkáme, že se zabýváme pouze *reálnými funkcemi reálné proměnné*. Některé výsledky pro *komplexní funkce reálné proměnné* lze z nich poměrně snadno obdržet.

Příklad 10.1.1 (motivační). Již v Kapitole 6 jsme při zavádění exponenciály poznali, že tato funkce vyhovuje na $\mathbb{R}$ rovnici $f' - f = 0$, tj. rovnici [1])

$$f'(x) - f(x) = 0\,, \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{10.1}$$

Z historických důvodů se rovnice (10.1) zapisuje ve tvaru (neznámá funkce se obvykle značí y)

$$y' - y = 0\,. \tag{10.2}$$

Každou takovou rovnici se přirozeně snažíme řešit na co největším otevřeném intervalu; ukážeme, že v případě rovnice (10.2) to bude celé $\mathbb{R}$. Protože derivace y' jakéhokoli řešení je (konečná) funkce y, bude každé řešení y spojité. Z rovnosti (10.2) plyne, že bude mít dokonce spojitou derivaci. Dosazením zjistíme, že jedním z řešení rovnice (10.2) na $\mathbb{R}$ je funkce exp, přičemž toto řešení splňuje podmínku $\exp 0 = 1$. Snadno též nahlédneme, že i každá funkce tvaru $C \cdot \exp$, kde $C \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta, je řešením (10.2). Tato funkce nabývá v bodě 0 hodnoty C.

[1]) Poznamenejme, že analogické rovnici vyhovuje exponenciála dokonce i v $\mathbb{C}$ (v takovém případě pracujeme s derivací komplexní funkce komplexní proměnné).

Najít řešení exp rovnice (10.2) a tím dokázat *existenci* řešení na $\mathbb{R}$ bylo v tomto případě velmi jednoduché, protože stačilo je uhádnout a dosadit. Odpověď na *zásadní* [2]) otázku, zdali má rovnice (10.2) kromě uvedených řešení ještě nějaká další řešení, spolu s nalezením podmínky, která by řešení *určila jednoznačně*, je podstatně hlubší. Ukazuje se totiž, že k odpovědi potřebujeme větu o přírůstku funkce, resp. její Důsledek 5.2.23: *Funkce, která má v nějakém otevřeném intervalu derivaci identicky rovnu* 0*, je v tomto intervalu konstantní.*

Předpokládejme, že $y \in \mathcal{C}^{(1)}(\mathbb{R})$ je nějaké řešení rovnice (10.2). Protože

$$\left(\frac{y}{\exp}\right)' = \frac{y'\exp - y\exp}{(\exp)^2} = \frac{y'-y}{\exp} = 0\,,$$

je podíl $y/\exp$ podle Důsledku 5.2.23 v $\mathbb{R}$ konstantní, tj. existuje konstanta $C \in \mathbb{R}$ tak, že $y/\exp = C$ na $\mathbb{R}$. Každé řešení rovnice (10.2) na $\mathbb{R}$ má tedy tvar $C\exp$, kde C je *nějaká* konstanta a žádná jiná řešení neexistují.

Můžeme proto konstatovat, že funkce $y \in \mathcal{C}^{(1)}(\mathbb{R})$ je řešením rovnice (10.2) na $\mathbb{R}$, právě když má tvar $C\exp$, kde $C \in \mathbb{R}$. Jedinou konstantou C, pro niž má řešení v bodě 0 (předem danou) hodnotu $y_0 \in \mathbb{R}$, je zřejmě $C = y_0$. *Konstantu C lze tedy jednoznačně určit tím, že předepíšeme, jakou hodnotu má řešení nabývat v bodě* 0.

Obecněji: je-li $[\,x_0, y_0\,]$ libovolný bod roviny $\mathbb{R}^2$, existuje zřejmě právě jedna konstanta C tak, že $y_0 = C\exp x_0$; je to konstanta $C = y_0\exp(-x_0)$. Každým bodem roviny prochází tedy graf právě jednoho řešení rovnice (10.2). *I obecnější podmínka, že graf řešení obsahuje* (*předem daný*) *bod* $[\,x_0, y_0\,]$*, určuje tedy řešení rovnice* (10.2) *jednoznačně.*

Připomeňme ještě, že jsme se v (6.16) setkali s diferenciální rovnicí $y'' + y = 0$, jejímž jedním řešením na $\mathbb{R}$ je funkce cos. Snadno nahlédneme, že dalším řešením této rovnice na $\mathbb{R}$ je funkce sin. Také každá funkce $C_1\cos x + C_2\sin x$ s $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ je řešením rovnice na $\mathbb{R}$, o čemž se snadno přesvědčíme dosazením. Není však vůbec zřejmé, zda lze *každé řešení rovnice $y'' + y = 0$ vyjádřit v tomto tvaru.*

Problémy, naznačené v tomto příkladu, patří v teorii diferenciálních rovnic k těm jednodušším. V desáté a čtrnácté kapitole je budeme postupně řešit v obecnějším kontextu.

Úmluva 10.1.2. Nejprve se seznámíme s terminologií a s běžně užívaným označením. Při studiu diferenciálních rovnic budeme totiž užívat obvyklou symboliku, která se poněkud liší od té, kterou jsme dosud používali. Neznámá funkce se obvykle značí y a její proměnná se při zápisu zpravidla vynechává. Tak např. píšeme poněkud nelogicky

$$y' = x^{-1}\,, \quad x \in (0, \infty)\,, \tag{10.3}$$

[2]) Tato otázka je důležitá např. z hlediska aplikací. Představme si, že diferenciální rovnice modeluje nějaký proces, který bychom chtěli popsat jiným vztahem, ve kterém nevystupují derivace. Tento vztah nám poskytne řešení. Pokud není jediné, vybíráme si takové, které je z praktických důvodů nejlepší. K tomu ale potřebujeme znát *všechna* řešení, jinak bychom nemuseli k optimálnímu řešení dospět.

což je rovnice, o níž jsme se zmínili při zavádění logaritmu. Často se též vynechává specifikace intervalu, na kterém máme rovnici řešit. Pokud bychom v (10.3) vynechali $x \in (0, \infty)$, rozumí se automaticky, že hledáme řešení na všech intervalech $I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$, tedy na intervalech, kde má rovnice smysl. Opět je však nutno vždy bezpečně znát přesný význam poněkud vágních zápisů, které budeme používat. Poznamenejme ještě, že ve fyzice se často při derivování funkce závislé na čase užívá k označení derivace místo čárky tečka.

Nejvyšší derivace neznámé funkce, která v rovnici „efektivně vystupuje", určuje *řád rovnice*. Objasníme to na příkladech: rovnice $y'' + y' - y = 0$ je diferenciální rovnice *druhého* řádu, rovnice $y'' - y'' + y' - y = 0$ je diferenciální rovnice *prvního* řádu, zatímco rovnici $y' - y' - y = 2x$ za diferenciální rovnici nepovažujeme. V této kapitole se budeme převážně věnovat zkoumání velmi jednoduchých, pro fyziku však značně důležitých rovnic 1. řádu, které se užívají např. k popisu radioaktivního rozpadu, ale i k popisu růstu populací, atp. Jsou to rovnice tvaru

$$y' + a(x)y = b(x)\,, \quad x \in (c, d)\,, \tag{10.4}$$

kde $a, b \in \mathcal{C}(c, d)$. S některými rovnicemi tohoto typu jsme se již dříve seznámili.

I když jsme při popisu metod hledání primitivních funkcí výslovně o diferenciálních rovnicích nemluvili, lze úlohu nalézt primitivní funkci k dané funkci f interpretovat jako jednoduchou diferenciální rovnici. Budeme často užívat dosud nedokázanou Větu 9.1.6 o existenci primitivní funkce ke spojité funkci.

Definice 10.1.3. Každou funkci φ definovanou na intervalu $(\gamma, \delta) \subset (c, d)$, pro kterou existuje derivace φ' na (γ, δ) a

$$\varphi'(x) + a(x)\,\varphi(x) = b(x)\,, \quad x \in (\gamma, \delta)\,,$$

nazýváme *řešením rovnice* (10.4).

Poznámky 10.1.4. 1. Protože *předpokládáme spojitost* funkcí a a b v intervalu (c, d) a protože každé řešení y rovnice (10.4) v intervalu $(\gamma, \delta) \subset (c, d)$ je spojité, plyne z identity $y' = b - ay$, že $y \in \mathcal{C}^{(1)}(\gamma, \delta)$. Vidíme tedy, že stačí hledat řešení *pouze mezi funkcemi z* $\mathcal{C}^{(1)}(\gamma, \delta)$.

2. O rovnici (10.4) říkáme, že je to *lineární diferenciální rovnice 1. řádu s pravou stranou* b [3]). Při řešení této rovnice hraje významnou roli též rovnice

$$y' + a(x)y = 0\,, \quad x \in (c, d)\,, \tag{10.5}$$

kterou z rovnice (10.4) dostaneme volbou $b \equiv 0$. O ní zpravidla mluvíme jako o rovnici s *nulovou pravou stranou* nebo jako o *homogenní rovnici.* Poněkud absurdnímu (ale někdy užívanému) termínu „rovnice bez pravé strany" se budeme

[3]) Hlubší pohled na diferenciální rovnice získá čtenář teprve po přečtení Kapitoly 15.

zásadně vyhýbat. Tato úmluva nám umožňuje krátce a jednoduše se o obou rovnicích (10.4) a (10.5) domlouvat. Obecně je nutno dávat pozor na kontext, neboť termín „homogenní“ se v příbuzných matematických disciplínách vyskytuje také v jiných významech.

3. Termín *lineární* v tomto kontextu souvisí s tím, že označíme-li

$$L(y) = y' + a(x)y\,, \quad y \in \mathcal{C}^{(1)}(c,d)\,, \tag{10.6}$$

je L *lineární* zobrazení z $\mathcal{C}^{(1)}(c,d)$ do $\mathcal{C}(c,d)$ (Připomeňme, že předpokládáme spojitost funkce a; jak se v této kapitole ukáže, je to dokonce zobrazení *na* $\mathcal{C}(c,d)$). Pro každé dvě funkce $y_1, y_2 \in \mathcal{C}^{(1)}(c,d)$ a všechna $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ je tedy

$$L(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 L(y_1) + \alpha_2 L(y_2)\,.$$

Linearita zobrazení na levé straně rovnice značně usnadňuje nalezení všech jejích řešení; později se ukáže, že stejným způsobem lze linearitu využít i za mnohem obecnější situace. Setkáme se s tím v Kapitole 15.

Definice 10.1.5. Nechť φ je pevně zvoleným řešením diferenciální rovnice (10.4) v intervalu (γ, δ). Jestliže pro každé řešení ψ rovnice (10.4) definované na intervalu $(\gamma_1, \delta_1) \supset (\gamma, \delta)$ plyne z rovnosti $\psi|(\gamma,\delta) = \varphi$ i rovnost $(\gamma,\delta) = (\gamma_1,\delta_1)$, nazývá se řešení φ *maximální řešení* (10.4). Jinak řečeno: maximální řešení není *netriviální* restrikcí žádného jiného řešení. Systém *všech maximálních řešení* rovnice (10.4) nazýváme *obecné řešení rovnice* (10.4).

Úmluva 10.1.6. Řešit jakoukoli diferenciální rovnici bude pro nás znamenat nalézt její obecné řešení. Není-li obor vymezen přesně, řešíme rovnici na všech maximálních otevřených intervalech, na nichž má rovnice smysl; to je úmluva, kterou se řídíme při řešení příkladů, u kterých se často specifikace intervalu, vůči němuž obecné řešení hledáme, vynechává. Máme-li však nalézt např. takové maximální řešení rovnice (10.4), které vyhovuje pro danou dvojici $[\,x_0, y_0\,] \in \mathbb{R}^2$, $x_0 \in (c,d)$, podmínce $y(x_0) = y_0$, je to *jiná* úloha, s níž se setkáme ještě později.

Příklad 10.1.7. Množina funkcí $\{\log + C\,;\, C \in \mathbb{R}\}$ je obecným řešením diferenciální rovnice $y' = 1/x$, $x \in (0,\infty)$. Funkce log je charakterizována touto diferenciální rovnicí spolu s další podmínkou, např. $y(1) = 0$; takovým způsobem se někdy funkce (přirozený) logaritmus definuje. Povšimněte si, že pracujeme s řešeními vždy na intervalu, podobný pojem pro obecnější množinu nezavádíme. Pokud by nebyl specifikován interval $(0,\infty)$, museli bychom nalézt též obecné řešení rovnice na intervalu $(-\infty, 0)$.

Věnujme se nyní rovnici (10.5). Dokážeme, že pro ni je struktura řešení podobná jako u rovnice (10.2). Připomeňme, že přitom podstatně využíváme Poznámky 10.1.4.

Lemma 10.1.8. *Všechna řešení rovnice* (10.5) *definovaná na intervalu* (γ,δ) *tvoří lineární podprostor prostoru* $\mathcal{C}^{(1)}(\gamma,\delta)$. *Dimenze tohoto prostoru je* 1 [4]).

[4]) Použijeme-li znalostí z lineární algebry, je tento prostor jádrem $\operatorname{Ker} L$ operátoru L.

Důkaz. Z linearity operátoru L z (10.6) plyne, že jsou-li y_1, y_2 řešeními rovnice (10.5) na (γ,δ) a $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, je také $c_1y_1 + c_2y_2$ řešením rovnice (10.5) na (γ,δ), tj. platí

$$L(c_1y_1 + c_2y_2) = 0\,.$$

K důkazu, že maximální řešení tvoří jednodimenzionální podprostor prostoru $\mathcal{C}^{(1)}(\gamma,\delta)$, užijeme podobného obratu jako výše. Je-li A primitivní funkce k funkci a, tj. platí $A' = a$, potom se lze dosazením snadno přesvědčit, že funkce

$$y(x) = \exp(-A(x))\,, \quad x \in (\gamma,\delta)\,, \tag{10.7}$$

je řešením (10.5). Z Poznámky 10.1.4 (3) plyne, že pro každé $C \in \mathbb{R}$ je také funkce Cy řešením rovnice (10.5). Nyní dokážeme, že *každé řešení rovnice* (10.5) *je násobkem funkce* $\exp(-A(x))$. K tomu stačí uvážit, že pro *každé* řešení y rovnice (10.5) na (γ,δ) platí

$$\begin{aligned}\left(\frac{y(x)}{\exp(-A(x))}\right)' &= \frac{y'(x)\exp(-A(x)) + y(x)\exp(-A(x))a(x)}{\exp^2(-A(x))} = \\ &= \frac{y'(x) + a(x)y(x)}{\exp(-A(x))} = 0\,,\end{aligned}$$

a tedy je tento podíl konstantní funkcí na (γ,δ). Tím je důkaz dokončen. □

Poznámka 10.1.9. Maximální interval, na kterém existuje primitivní funkce k funkci a, pomocí které popisujeme řešení (10.5) vztahem (10.7), je interval (c,d) z (10.4).

Lemma 10.1.10. *Je-li y_1 řešení rovnice* (10.4) *na (γ,δ) a y_2 řešení rovnice* (10.5) *na (γ,δ), pak je součet $y_1 + y_2$ řešením rovnice* (10.4) *na (γ,δ).*

Důkaz. Přímý výpočet dává $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2) = b + 0 = b$. □

Lemma 10.1.11. *Jsou-li y_1, y_2 dvě řešení rovnice* (10.4) *na intervalu (γ,δ), je jejich rozdíl $y_1 - y_2$ řešením rovnice* (10.5) *na (γ,δ).*

Důkaz. Přímý výpočet dává $L(y_1 - y_2) = L(y_1) - L(y_2) = b - b = 0$. □

Teoreticky lze obecné řešení rovnice (10.4) určit dvojím nalezením primitivních funkcí [5]): Je-li y řešení této rovnice a je-li A jakákoli primitivní funkce k funkci a v intervalu (c,d), je

$$\big(y(x)\,\mathrm{e}^{A(x)}\big)' = \big(y'(x) + a(x)\,y\big)\mathrm{e}^{A(x)} = b(x)\,\mathrm{e}^{A(x)} = B'(x)\,, \tag{10.8}$$

kde $B = B(x)$ je jakákoli funkce primitivní k funkci $b(x)\,\mathrm{e}^{A(x)}$. Porovnáme-li první a poslední výraz v (10.8), pak z Důsledku 5.2.23 plyne pro všechna $x \in (c,d)$ a

[5]) V dnes již neužívané terminologii dvojí kvadraturou.

vhodně zvolenou konstantní funkci C

$$y(x)\,\mathrm{e}^{A(x)} = C + B(x)\,; \tag{10.9}$$

odtud snadno plyne

$$y(x) = \big(C + B(x)\big)\mathrm{e}^{-A(x)} = C\,\mathrm{e}^{-A(x)} + B(x)\mathrm{e}^{-A(x)}\,. \tag{10.10}$$

V tomto tvaru lze napsat kterékoli řešení rovnice (10.4). Obráceně: Má-li funkce y na intervalu (c, d) tento tvar s libovolně zvolenou konstantní funkcí C, je $y' = \big(B'(x) - a(x)(C + B(x))\big)\exp(-A(x))$, takže pomocí (10.8) dostáváme

$$y' + a(x)\,y = B'(x)\,\mathrm{e}^{-A(x)} = \big(b(x)\,\mathrm{e}^{A(x)}\big)\mathrm{e}^{-A(x)} = b(x)\,;$$

funkce y popsaná pomocí (10.10) je tedy řešením rovnice (10.4). Shrneme-li předcházející úvahy, můžeme zformulovat výsledek: *Při zavedeném označení je y řešením rovnice* (10.4)*, právě když platí* (10.10)*, kde C je konstantní reálná funkce* [6]). Popsaný postup budeme nazývat *metoda integračního faktoru.* Integračním faktorem je zde funkce $\mathrm{e}^{A(x)}$.

Poznamenejme k tomu, že existence primitivních funkcí k funkcím $a(x)$ a $b(x)\exp(A(x))$, $x \in (c, d)$, je sice zaručena jejich spojitostí, ale tyto primitivní funkce mohou být jen velmi obtížně popsatelné pomocí tzv. elementárních funkcí, případně to je dokonce nemožné. Výsledky shrneme do následující věty:

Věta 10.1.12. *Je-li y_1 jakékoli maximální řešení rovnice* (10.4)*, je obecné řešení rovnice* (10.4) *identické s množinou všech součtů tvaru $y_1 + y_2$, kde y_2 je nějaké maximální řešení rovnice* (10.5)*. Jinak řečeno: abychom získali obecné řešení rovnice* (10.4)*, stačí ke všem prvkům obecného řešení rovnice* (10.5) *přičíst jediné pevně zvolené maximální řešení y_2 rovnice* (10.4) [7]).

Důkaz. Zvolme jedno maximální řešení y_1 rovnice (10.4). Je-li y libovolné maximální řešení rovnice (10.4), platí $y = y_1 + (y - y_1)$, z čehož pomocí předcházejících dvou lemmat lehce plyne tvrzení věty. □

Poznámka 10.1.13. Známe-li tvar řešení rovnice (10.5), lze určení jednoho (partikulárního) řešení rovnice (10.4) do značné míry „zmechanizovat“. Další metoda řešení rovnice, kterou později v Kapitole 15 zobecníme, se nazývá *metoda variace konstant.* V tomto případě jde o jedinou konstantu, takže výpočet je opět jednoduchý. Již víme, že pro každé $C \in \mathbb{R}$ je

$$y(x) = C\exp(-A(x))\,, \quad x \in (c, d)\,,$$

obecným řešením (10.5), pokud $A' = a$. Budeme nyní hledat řešení rovnice (10.4) ve tvaru

$$y(x) = C(x)\exp(-A(x))\,, \quad x \in (c, d)\,,$$

[6]) Zpravidla do zápisu výsledku přidáváme $C \in \mathbb{R}$ a chápeme rovnost (10.10) „bodově“.

[7]) Pro stručnější vyjadřování při popisu procesu řešení diferenciální rovnice (10.4) se zvolené (maximální) řešení y_2 často nazývá *partikulární řešení* rovnice (10.4).

kde C je (nějaká) funkce, která má vlastní derivaci pro všechna $x \in (c,d)$. Zderivováním a dosazením do (10.4) dostaneme pro všechna tato x

$$C'(x)\exp(-A(x)) + C(x)\exp(-A(x))(-a(x)) + \\ + C(x)\exp(-A(x))\,a(x) = b(x)\,,$$

tj. platí (máme i zároveň jakousi kontrolu, členy na druhém a třetím místě na levé straně se vždy musí „zrušit“)

$$C'(x) = b(x)\exp(A(x))\,. \tag{10.11}$$

Vpravo je funkce z $\mathcal{C}(c,d)$, existuje k ní tedy podle Věty 9.1.6 (alespoň jedna) primitivní funkce a ta po dosazení za $C(x)$ dá vzorec pro partikulární řešení rovnice (10.4). Užitím (10.11) snadno nahlédneme, že funkce C je vždy z $\mathcal{C}^{(1)}(c,d)$. Čtenář si může povšimnout, že při tomto postupu hledáme tytéž dvě primitivní funkce, jejichž *existenci* jsme výše dostali ze spojitosti. Ukázkám praktického řešení lineárních diferenciálních rovnic prvního řadu je věnován např. § 30 učebního textu [5].

Příklad 10.1.14. K ilustraci řešme oběma metodami na $\mathbb{R}$ rovnici

$$y' + 2xy = 2x^3\,. \tag{10.12}$$

Nejprve řešme pomocí integračního faktoru. Snadno nahlédneme, že $\left(x^2\right)' = 2x$, takže integrační faktor je $\exp(x^2)$. Násobíme jím tedy celou rovnici a obdržíme

$$\left(y\exp(x^2)\right)' = (y' + 2xy)\exp(x^2) = 2x^3\exp(x^2) = \left(\exp(x^2)(x^2-1)\right)'\,, \tag{10.13}$$

a tedy

$$y\exp(x^2) = \exp(x^2)(x^2-1) + C\,. \tag{10.14}$$

Odtud dostaneme jednoduchou úpravou

$$y = C\exp(-x^2) + x^2 - 1\,, \qquad C \in \mathbb{R}\,. \tag{10.15}$$

Řešme nyní metodou variace konstant(y). Rovnice $y' + 2xy = 0$ má obecné řešení $y(x) = C\exp(-x^2)$, o čemž se lehce přesvědčíme dosazením. Je-li nyní $C \in \mathcal{C}^{(1)}(\mathbb{R})$ a $y(x) = C(x)\exp(-x^2)$, dostaneme po zderivování a dosazení do (10.12)

$$C'(x)\exp(-x^2) - 2xC(x)\exp(-x^2) + 2xC(x)\exp(-x^2) = 2x^3\,, \tag{10.16}$$

z čehož dostaneme po určení (jedné) primitivní funkce k $2x^3\exp(x^2)$ např.

$$C(x) = (x^2-1)\exp(x^2)\,.$$

Obecné řešení rovnice (10.12) je tedy podle Věty 10.1.12 tvaru

$$y(x) = C\exp(-x^2) + x^2 - 1\,, \qquad C \in \mathbb{R}\,.$$

10.2 Ukázky použití

Příklad 10.2.1 (exponenciální růst). Populace bakterií v roztoku závisí na čase; označme $P(t)$ jejich počet v čase t. Nechť $\Delta P := P(t+\Delta t) - P(t)$ je přírůstek počtu bakterií za (krátkou) dobu Δt; z pozorování je známo, že přírůstek ΔP je úměrný velikosti populace $P(t)$ a době Δt. To zapíšeme ve tvaru

$$\Delta P \approx \alpha P(t) \Delta t\,, \quad \text{resp.} \quad \Delta P / \Delta t \approx \alpha P(t)\,,$$

kde α je kladná konstanta. Je to poznatek podložený zkušeností z experimentů. Symbol $\approx$ má čtenáře upozornit na to, že jde o hypotetickou přibližnou rovnost. Po provedení limitního přechodu pro $\Delta t \to 0_+$ vlevo v posledním vztahu a nahrazení $\approx$ symbolem $=$ dostaneme *matematický model*, popisující jistou *zjednodušenou* situaci. Tento model je popsán jednoduchou diferenciální rovnicí

$$P' - \alpha P = 0\,. \tag{10.17}$$

Jak jsme výše odvodili, obecné řešení této rovnice má tvar

$$P(t) = P_0\, \mathrm{e}^{\alpha t}\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

kde $P_0 > 0$ je velikost populace v čase $t = 0$ [8]). Tento jednoduchý zákon růstu populace není specifický pro populaci bakterií a je aplikovatelný na lidskou populaci, populaci rostlin či zvířat určitého druhu.

Známe-li $P_1 := P(t_1)$ pro nějaké $t_1 > 0$, můžeme vypočítat konstantu α; zřejmě je

$$\alpha = \frac{1}{t_1} \log \frac{P_1}{P_0}\,. \tag{10.18}$$

Označme δ čas, za který se velikost populace zdvojnásobí. Snadno dostaneme

$$2 = \frac{P(t+\delta)}{P(t)} = \frac{P_0\, \mathrm{e}^{\alpha(t+\delta)}}{P_0\, \mathrm{e}^{\alpha t}} = \mathrm{e}^{\alpha\delta}\,,$$

a tedy $\delta = (\log 2)/\alpha$. Je pozoruhodné, že tento růstový zákon i přes zjednodušení reálné situace dává pro určitá časová období výsledky blízké empiricky získaným datům.

Poznámka 10.2.2. Je zřejmé, že v předchozím modelu vlastnost (je $P_0 > 0$)

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \lim_{t\to\infty} P_0\, \mathrm{e}^{\alpha t} = +\infty$$

odporuje našim představám: Pro dlouhé časové intervaly (v závislosti na rychlosti růstu populace) takový model nebude dávat dobré výsledky. Ukážeme to na příkladu v Poznámce 10.2.3, týkajícím se lidské populace.

[8]) Zpravidla nás zajímá pouze chování P od jistého okamžiku, jemuž odpovídá v matematickém modelu obvykle $t = 0$.

Poznámka 10.2.3. Statistická data ukazují, že po dlouhou dobu se počet obyvatel na Zemi zdvojnásobuje přibližně každých 35 let. Podle údajů OSN v r. 1986 žilo na Zemi asi 5 miliard lidí. Z těchto údajů snadno určíme potřebné konstanty, takže pro počet lidí na Zemi dostáváme vzorec

$$P(t) = 5 \cdot 10^9 \cdot \mathrm{e}^{0{,}02\,t}\,.$$

Podle něj provedeme výpočet předpokládaného počtu obyvatel Země v budoucnosti; po zaokrouhlení příslušných hodnot dostaneme tabulku [9])

Rok	**Obyvatel Země**		**U.S. Census B.**	
1986	5	miliard	4,935	miliard
2000	6,6	miliard	6,081	miliard
2050	18,0	miliard	9,224	miliard
2100	48,9	miliard		
2300	2,7	biliónů		
2501	148,7	biliónů		

To by znamenalo, že v r. 2501 bude mít každý obyvatel Země k dispozici cca $1\,\mathrm{m}^2$. I když model poskytuje v kratších časových intervalech vcelku přijatelné hodnoty, poslední údaj ukazuje, že použití popsaného modelu pro dlouhé časové úseky dává absurdní výsledky. Poznámka 10.2.2 již ostatně dostatečně přesvědčivě ukázala neadekvátnost tohoto modelu.

Dále budeme poněkud stručnější, neboť jde o úvahy téhož typu jako v předcházejícím příkladu.

Příklad 10.2.4 (radioaktivní rozpad). Rozpad radioaktivních látek se řídí zákonitostí podobnou jako je ta, kterou jsme již poznali. Je-li $M(t)$ množství látky v čase t, pak

$$\Delta M = M(t + \Delta t) - M(t) \approx \alpha M(t)\Delta t\,,$$

kde však je $\alpha < 0$. Píšeme-li $-\alpha$ místo α, bude $\alpha > 0$ a vztah nabude tvaru

$$\Delta M \approx -\alpha M(t)\Delta t\,.$$

Od něj dospějeme k rovnici tvaru $M' + \alpha M = 0$, přičemž nás z fyzikálního hlediska zajímá pouze množství látky v čase od okamžiku $t_0 = 0$. Proto rovnici řešíme jen na intervalu $(0, +\infty)$ a dospějeme k obecnému řešení

$$M(t) = M_0\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\,, \quad t \in (0, +\infty)\,,$$

takže rozpad je popsán při $\alpha > 0$ pro $t \geq 0$ vztahem

$$M(t) = M_0\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\,.$$

Čas, za který se množství látky změní na poloviční, se obvykle nazývá *poločas rozpadu.*

[9]) Poslední sloupec tabulky udává skutečný stav a předpověď pro r. 2050 tak, jak je uveden v mezinárodní databázi U.S. Census Bureau (stav k 26.4.2005); srov. [3]. Pro zajímavost: Dne 12.10.1999 symbolicky uvítal generální sekretář OSN *Kofi Annan* prvního občana sedmé miliardy obyvatel Země.

Příklad 10.2.5 (lineární dietní model). Hmotnost člověka závisí na mnoha věcech, ale v prvním přiblížení je funkcí přísunu energie v potravinách a její „spotřeby"; ta závisí na činnosti, kterou člověk vykonává, ale i na věku a pohlaví jedince, na metabolických faktorech apod. Denní spotřeba jedince činí obvykle 30 až 40 kilokalorií (kcal) na každý kilogram jeho váhy w. Při průměrném energetickém přísunu 35 kcal denně na každý kilogram váhy jedince lze očekávat, že se jeho váha stabilizuje. Z pozorování dospíváme k představě, že změna váhy je přímo úměrná přebytku resp. nedostatku v energetickém přísunu. Podle ní např. člověk o váze 70 kg při denní konzumaci $70 \times 35 = 2450$ kcal nebude na váze ani přibírat, ani ubírat, avšak každých cca 7000 kcal přebytku v celkovém přísunu vyvolá následné zvýšení váhy o 1 kg. Tato představa nás dovádí k modelu, popsanému diferenciální rovnicí

$$w' = \frac{35(c-w)}{7000}\,, \quad \text{tj.} \quad \frac{w'}{w-c} = -\,0{,}005\,,$$

ve které jsme c označili váhu sledovaného člověka, která by odpovídala ustálenému stavu při konstantním denním energetickém přísunu. Řešením této rovnice dostáváme

$$w(t) = c + (w(0) - c)\mathrm{e}^{-0{,}005t}\,.$$

Jestliže pan Tlustý, vážící 95 kg, omezí svůj celkový denní přísun na 2625 kcal, bude jeho váha v závislosti na čase t vyhovovat vztahu

$$w(t) = 75 + 20\exp(-\,0{,}005t)\,.$$

V tom případě se podle našeho modelu bude váha pana Tlustého postupně blížit 75 kg ($2625 = 35 \times 75$), přičemž váhy 80 kg (!) dosáhne teoreticky za 278 dní, tedy za více než tři čtvrtě roku [10]). Proto patrně tolik dobrých předsevzetí končí fiaskem! (Srovnej s [6].)

Příklad 10.2.6. Vytváření modelu reálné situace je nutně vždy založeno na určitých zjednodušujících předpokladech. Ukažme si to na poněkud záhadně působícím příkladu, jehož schéma je převzato z [1]:

Představme si, že začalo náhle velmi hustě sněžit. Pan Novák, bydlící na samotě, se vzbudil a vyhodnotil situaci jako kritickou: již od 7 hod začal čistit frézou cestu k nejbližší udržované komunikaci. Za první hodinu vyčistil 2 km, za další hodinu zbývajících 1,5 km. Zcela vyčerpán si povzdechl: „Rád bych věděl, kdy začalo takhle hrozně sněžit" a my bychom mu s tímto problémem měli pomoci.

Pokud jsme konfrontováni s takovou úlohou, která se zdá dosti zvláštní, uvědomíme si nejprve, že zpomalení výkonu odpovídá naší zkušenosti: silnější vrstva sněhu se odklízí pomaleji. To nám však příliš nepomůže k řešení: Musíme si vytvořit nějaký matematický model, založený na jednoduchých předpokladech; patrně ne ideálních, nicméně vedoucích k řešení, protože složitý model nemusíme umět dosud získanými znalostmi řešit. Model založíme na předpokladu, že fréza je schopna odklidit k km^3 sněhu za 1 hodinu (za jednotku volíme kilometry). Čas t budeme měřit v hodinách počínaje od 7 hod, tloušťka vrstvy sněhu v čase t nechť je $x(t)$ (opět v odpovídajících jednotkách, tj. km). Délka

[10]) Pro milovníky SI soustavy uvádíme převodní vztah 1 kcal = 4,186 kJ. Pro milovníky piva uvádíme ještě další převodní vztah 1 l Gambrinusu 12° $\doteq$ 1860 kJ. Podle tohoto modelu by tedy teoreticky při konzumaci pouze 1 litru Gambrinusu denně dosáhl pan Tlustý váhy 80 kg již za cca 38,5 dne.

vyčištěné dráhy v čase t nechť je $s(t)$, takže $s'(t)$ je rychlost frézy v čase t. Označíme-li ještě šířku záběru frézy d, dostaneme jednoduchou rovnici

$$xds' = k\,. \tag{10.19}$$

Abychom nalezli funkci x, označme t_0 neznámý čas, tj. dobu, po kterou již sněžilo, než započala fréza pracovat, a dále h nechť je (konstantní) rychlost přírůstku tloušťky sněhové vrstvy (v odpovídajících jednotkách, tj. v km/hod). Potom je

$$x(t) = h \cdot (t_0 + t)\,, \quad t > -\,t_0\,,$$

což po dosazení do (10.19) dává rovnici

$$s' = \frac{k}{dh}\,\frac{1}{t_0 + t}\,,$$

kterou snadno vyřešíme; její obecné řešení je

$$s(t) = \frac{k}{dh}\big(\log(t_0 + t) + C\big)\,, \tag{10.20}$$

kde C je reálná konstanta a $t \in (-t_0, \infty)$. Dá se očekávat, že údaje ze zadání by nám měly stačit k určení t_0. Z $s = 0$ pro $t = 0$ dostaneme $C = -\log t_0$, což po dosazení do (10.20) dává

$$s(t) = \frac{k}{dh}\,\log\Big(1 + \frac{t}{t_0}\Big)\,. \tag{10.21}$$

Víme ještě, že $s(1) = 2$ a $s(2) = 3{,}5$, což by nám mělo umožnit úlohu vyřešit. Je tedy

$$2 = \frac{k}{dh}\,\log\Big(1 + \frac{1}{t_0}\Big) \quad \text{a} \quad 3{,}5 = \frac{k}{dh}\,\log\Big(1 + \frac{2}{t_0}\Big)\,.$$

Z obou rovnic spočteme výraz dh/k a porovnáme výsledky, čímž dostaneme rovnici

$$\frac{1}{2}\,\log\Big(1 + \frac{1}{t_0}\Big) = \frac{1}{3{,}5}\,\log\Big(1 + \frac{2}{t_0}\Big)\,,$$

neboli po další úpravě a „odlogaritmování“

$$\Big(1 + \frac{1}{t_0}\Big)^{3{,}5} = \Big(1 + \frac{2}{t_0}\Big)^{2}\,. \tag{10.22}$$

Zadáme-li např. v programu *Maple*, což je jeden z programů usnadňujících výpočty [11])

```
solve((1+2/t)^2 = (1+1/t)^3.5),                                    (*)
```

dostaneme za malý okamžik řešení ve tvaru

```
2.548142158, -1.665520267,                                         (*)
```

[11]) Čárky na konci řádků označených (*) nejsou součástí vstupu ani výstupu programu.

kde první (kladný) kořen odpovídá hledanému řešení. Proto tedy začalo sněžit před cca $60 \cdot 2{,}548142158$ min, tj. cca 153 minut před 7 hod, tj. v 4 hod 27 min. Nemusíme snad zdůrazňovat, že model byl primitivní a zadání bylo podřízeno našim možnostem. Pokud má čtenář k dispozici jen tužku a papír, může zkusit totéž se zadáním: první hodinu urazila fréza 2 km, druhou hodinu 1 km. Dospěje pak ke kvadratické rovnici, kterou snadno vyřeší $[\, t_0 = (\sqrt{5} - 1)/2\,]$.

Lze očekávat, že nalezené výsledky o lineárních rovnicích bude možno dále zobecnit, např. pro *lineární rovnice n-tého řádu.* To skutečně později uděláme, v této kapitole pouze ještě ukážeme, částečně pro povzbuzení čtenářovy zvědavosti, několik příkladů řešení rovnic složitějších. Řadu dalších zajímavých příkladů nalezne čtenář v [2], jedné z „nejčtivějších“ učebnic, které pojednávají o diferenciálních rovnicích. Dalšími knihami tohoto typu jsou [1] a [4], z nichž jsme vybrali některé příklady.

10.3 Separace proměnných

Ukazuje se, že není obtížné *formálně* řešit i trochu složitější rovnice, pokud jsou speciálního tvaru. Tak např. obecně *nelineární rovnici se separovanými proměnnými*, což je rovnice tvaru

$$y' = f_1(x)f_2(y)\,, \quad x \in (a,b),\ y \in (c,d)\,, \tag{10.23}$$

kde f_1, f_2 jsou dané spojité funkce, řešíme *ve speciálních případech* bez větších obtíží. Jednoduchost je však jen zdánlivá; pokusíme se o tom čtenáře přesvědčit.

Formální způsob řešení spočívá v úpravě

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f_1(x)f_2(y)\,,$$

vedoucí posléze k rovnosti

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{f_2(y)} = \int f_1(x)\ \mathrm{d}x\ + C\,; \tag{10.24}$$

zde je primitivní funkce vlevo po záměně y za $y(x)$ funkcí proměnné x a na každém intervalu, na němž rovnici řešíme, se obě funkce liší o konstantní funkci C. Lze-li nalézt explicitně obě primitivní funkce v (10.24), považuje se v některých sbírkách úloh vzniklá rovnice za řešení (10.23); řešením v našem smyslu obecně *není*, často z ní neumíme funkci $y = y(x)$ vypočítat. Popsanou situaci shrneme do tvrzení, které *nebudeme* dokazovat, protože v Kapitole 15 dokážeme tvrzení podstatně obecnější (Věty 15.2.1 a 15.3.1). Nežli tvrzení zformulujeme, upozorníme na další licenci. Při popisu řešení volíme často „geometrický jazyk“: Tak například říkáme, že řešení y prochází bodem $[\, x_0, y_0\,] \in \mathbb{R}^2$, pokud pro něj platí $y(x_0) = y_0$.

Věta 10.3.1. *Nechť* $D_{f_1} = (c,d)$, $f_1 \in \mathcal{C}(c,d)$, $D_{f_2} = (p,q)$, $f_2 \in \mathcal{C}(p,q)$, *přičemž* $f_2(y) \neq 0$ *pro všechna* $y \in (p,q)$. *Potom každým bodem obdélníku* $(c,d) \times (p,q)$ *prochází právě jedno maximální řešení rovnice* (10.23).

Potíže nastávají v případě, kdy funkce f_2 má nulové body. V Kapitole 15 si příčiny těchto potíží objasníme podrobněji. Poskytnutý návod je třeba kriticky zhodnotit: pokud podle něj něco spočteme, není zdaleka jasné, zda jsme dostali všechna řešení a při formálních úpravách *je často třeba* se přesvědčit, že jsme dostali (nějaké) řešení dané rovnice, což lze provést derivováním [12]). Jsme tedy zpravidla velice daleko od ideálního stavu, který žádá nalézt *všechna* maximální řešení rovnice, neboť o tom, zda jsme opravdu získali všechna maximální řešení, nic nevíme. Pokusíme se to objasnit na následujícím příkladu.

Příklad 10.3.2. Řešme rovnici

$$y' = 2\sqrt{y}\,. \tag{10.25}$$

Formální přístup spočívá v úpravě rovnice (10.25) např. na tvar

$$\frac{y'}{2\sqrt{y}} = 1\,,$$

z něhož snadno dostaneme popsaným postupem $\sqrt{y(x)} = x - C$, kde C je libovolné reálné číslo, neboli po umocnění

$$y(x) = (x - C)^2\,. \tag{10.26}$$

Méně pozorný počtář se může domnívat, že systém funkcí definovaných na $\mathbb{R}$

$$\{(x - C)^2\,;\, C \in \mathbb{R}\} \tag{10.27}$$

je obecným řešením rovnice (10.25). Pro prvotní vzbuzení pochybností poznamenejme, že identicky nulová funkce je zřejmě (stačí dosadit!) řešením rovnice (10.25), které ze vzorce (10.26) pro žádné $C \in \mathbb{R}$ nedostaneme.

Postupujme proto opatrněji: Výraz na pravé straně rovnice (10.25) je definován pro $y \geq 0$ a je tudíž nezáporný. Odtud však plyne $y' \geq 0$, takže každé řešení rovnice (10.25) je neklesající funkce. Pokud je na intervalu (γ, δ) řešení y kladné, je na něm rostoucí funkcí a všechny úpravy, kterými jsme dospěli k rovnosti (10.26), jsou korektní. Proto na (γ, δ) je řešení y popsáno rovností (10.26), vyhovuje-li C podmínce $C < \gamma$.

Dosazením ověříme, že $y \equiv 0$ je řešením na jakémkoli intervalu $(\gamma, \delta) \subset \mathbb{R}$, takže $y(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, je maximálním řešením (10.25). Při zvoleném reálném C je řešení (10.26) kladnou rostoucí funkcí na intervalu $(C, +\infty)$. Položme

$$y_C(x) := \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad x \in (-\infty, C)\,, \\ (x - C)^2 & \text{pro} \quad x \in [\,C, +\infty)\,, \end{cases} \tag{10.28}$$

[12]) Podobná strategie se často uplatňuje na středních školách při řešení rovnic; užívají se „neekvivalentní úpravy“ a pak se ověřuje správnost nalezeného výsledku.

kde $C \in \mathbb{R}^* \setminus \{-\infty\}$ [13]); ukážeme, že funkce y_C ze systému funkcí (10.28), závislých na parametru C, je pro každé takové C maximálním řešením rovnice (10.25). K tomu však stačí ověřit, že pro pevně zvolené C je

$$y'(C) = 0 = 2\sqrt{y(C)}\,,$$

neboli dokázat, že $y'(C) = 0$; druhá rovnost je zřejmá. Snadno nahlédneme, že y je spojitá funkce v bodě C a že $y'_-(C) = 0$. Podle Věty 7.1.2 je

$$\lim_{x \to C+} y'(x) = \lim_{x \to C+} 2(x - C) = 0 = y'_+(C)\,,$$

takže $y'_-(C) = y'_+(C) = 0$, což jsme chtěli dokázat. Kromě toho existuje již nalezené (maximální) řešení $y \equiv 0$ a žádná další maximální řešení neexistují, takže jsme nalezli obecné řešení rovnice (10.25).

Čtenář by si měl povšimnout, že každým bodem $[\,x_0, y_0\,] \in \mathbb{R}^2$ s $y_0 > 0$ prochází jediné maximální řešení rovnice (10.25). Každým bodem přímky o rovnici $y = 0$ prochází nekonečně mnoho *maximálních řešení*, a pro žádné $x_0 \in \mathbb{R}$ neexistuje okolí $\mathcal{U}(x_0)$, na kterém by všechna tato řešení splynula: identicky nulové řešení a řešení popsané v (10.27) pro $C = x_0$ mají různé hodnoty ve všech bodech $x > -x_0$. Body $[\,x_0, y_0\,] \in \mathbb{R}^2$ s $y_0 < 0$ žádné řešení rovnice (10.25) neprochází.

Příklad 10.3.3 (Peano 1890). Tento starší příklad je zajímavější a formálně trochu složitější. Řešme rovnici

$$y' = 3\,\sqrt[3]{y^2}\,. \tag{10.29}$$

Každé řešení rovnice (10.29) je funkce neklesající, protože pravá strana v (10.29) je nezáporná. Pokud tedy pro nějaké řešení y a $x_1 \le x_2$ nastávají rovnosti $y(x_1) = y(x_2) = 0$, je $y(x) = 0$ pro všechna $x \in [\,x_1, x_2\,]$ (připouštíme i degenerované intervaly). Množina $N(y)$ nulových bodů řešení y je proto buď prázdná, nebo je to interval obsahující své krajní body, pokud je v nich (spojitá) funkce y definována.

Je-li řešení y v intervalu (γ, δ) všude nenulové, je (10.29) v tomto intervalu ekvivalentní s rovností $\left(y^{1/3}\right)' = 1$, a také, jak zjistíme snadným výpočtem, s rovností

$$y(x) = (x - C)^3\,, \tag{10.30}$$

kde $C \in \mathbb{R}$ neleží v intervalu (γ, δ). Snadno se přesvědčíme, že rovnost (10.30) pro $x \in \mathbb{R}$ definuje řešení v $\mathbb{R}$; toto řešení je maximální.

Již víme, že $N(y)$ je buď $\emptyset$ (tento případ nenastává), omezený uzavřený interval (to je důsledek spojitosti y), nebo uzavřený interval neomezený. Je-li interval degenerovaný, označme C jediný nulový bod maximálního řešení y; existují tedy $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, pro něž $y(x) = (x - C_1)^3$, $x \in (-\infty, C)$, a $y(x) = (x - C_2)^3$, $x \in (C, \infty)$. Ze spojitosti v nulovém bodě C ale vyplývá $C = C_1 = C_2$ a toto maximální řešení jsme již nalezli. Je-li však $C_1 < C_2$, $N(y) = [\,C_1, C_2\,]$, dostáváme řešení [14])

$$y(x) := \begin{cases} (x - C_1)^3 & \text{pro} \quad x \in (-\infty, C_1\,]\,, \\ 0 & \text{pro} \quad x \in (C_1, C_2)\,, \\ (x - C_2)^3 & \text{pro} \quad x \in [\,C_2, +\infty)\,. \end{cases} \tag{10.31}$$

[13]) Volbě $C = +\infty$ odpovídá řešení $y \equiv 0$.

[14]) Diferencovatelnost řešení v bodech „lepení“ je zřejmá, obě jednostranné derivace jsou v nich rovny 0.

Tato řešení jsou „nová“, vzorec (10.30) lze mezi ně zahrnout, nahradíme-li na druhém řádku v (10.31) otevřený interval intervalem uzavřeným. Zbývá však ještě případ, kdy intervaly $N(y)$ nejsou omezené.
Podobnou úvahou dostaneme pro případ $N(y) = (-\infty, C_2\,]$

$$y(x) := \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad x \in (-\infty, C_2\,]\,, \\ (x - C_2)^3 & \text{pro} \quad x \in (C_2, +\infty)\,, \end{cases} \tag{10.32}$$

a pro případ $N(y) = [\,C_1, \infty)$

$$y(x) := \begin{cases} (x - C_1)^3 & \text{pro} \quad x \in (-\infty, C_1\,]\,, \\ 0 & \text{pro} \quad x \in (C_1, +\infty)\,. \end{cases} \tag{10.33}$$

Případ $N(y) = \mathbb{R}$ vede na již nalezené řešení $y \equiv 0$. Protože jsme vyčerpali všechny možné tvary množiny $N(y)$, je již seznam nalezených maximálních řešení rovnice (10.29) úplný. Poznamenejme ještě, že vzorec (10.29) formálně popisuje obecné řešení v závislosti na parametrech $C_1 \le C_2$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^*$ (případům $C_1 > C_2$ a $C_1 = C_2 = \pm\infty$ žádná řešení neodpovídají).

Jestliže budeme zkoumat všechna taková řešení y rovnice (10.29), pro která platí např. $y(1) = 1$, pak tato řešení v nějakém okolí bodu $x_0 = 1$ splynou; v tomto případě je však i takových *maximálních* řešení nekonečně mnoho. Podobnou vlastnost jako právě zvolený bod $[\,1, 1\,]$ mají všechny body v rovině kromě bodů osy x, tj. bodů, ležících na přímce o rovnici $y = 0$. Těmito body procházejí také grafy nekonečně mnoha maximálních řešení (všechna jsou definována na $\mathbb{R}$), avšak ke každému $x_0 \in \mathbb{R}$ a každému jeho okolí $\mathcal{U}(x_0)$ lze nalézt taková dvě řešení y_1, y_2 na $\mathbb{R}$, která na $\mathcal{U}(x_0)$ nesplývají (např. pro bod $x_0 = 0$ stačí volit $y_1(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$ a $y_2(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$; tato dvě řešení nabývají stejné hodnoty *pouze* v bodě $x_0 = 0$).

S obtížemi trochu jiného charakteru se setkáme v následujícím příkladu, a to i přes velkou názornost popisu výsledku.

Příklad 10.3.4. Řešme rovnici

$$y' = -\frac{x}{y}\,. \tag{10.34}$$

Na každém intervalu (γ, δ), na kterém řešení y rovnice (10.34) nenabývá hodnoty 0, je rovnice (10.34) ekvivalentní s rovnicí $yy' = -\,x$. Odtud dostaneme $(y^2(x))' = (-\,x^2)'$, $x \in (\gamma, \delta)$. Použijeme Důsledek 5.2.23 a dostaneme

$$y^2(x) = -\,x^2 + C\,, \quad x \in (\gamma, \delta)\,.$$

Z předcházející rovnosti plyne $C \ge 0$; pišme tuto konstantu ve tvaru r^2, kde $r \ge 0$. Je-li $r = 0$, dostáváme $x = 0$ a $y(0) = 0$; pro tento případ nemá rovnice (10.34) smysl a ostatní body z $\mathbb{R}$ v definičním oboru y ležet nemohou. Bodem $[\,0, 0\,]$ graf žádného řešení rovnice (10.34) tedy neprochází. Pro každé $r > 0$ existují dvě maximální řešení

$$\begin{aligned} y_1(x) &= +\sqrt{r^2 - x^2}\,, \quad x \in (-r, r)\,, \\ y_2(x) &= -\sqrt{r^2 - x^2}\,, \quad x \in (-r, r)\,. \end{aligned} \tag{10.35}$$

Čtenář by si měl povšimnout, že existují maximální řešení rovnice s (mnoha) různými definičními obory. Žádným bodem tvaru $[\,x, 0\,]$, $x \in \mathbb{R}$, neprochází řešení rovnice (10.34).

Čtenář se v této souvislosti setká ve sbírkách příkladů s tím, že za řešení rovnice $yy' = -x$ (a také dokonce i za řešení rovnice (10.34)!) se považuje soustava kružnic o středu „v počátku“ $\{ x^2+y^2 = r^2 ; r \in (0,\infty) \}$: Každým bodem $[x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2 \setminus \{[0,0]\}$ prochází právě jedna kružnice, kterou lze *lokálně* popsat jako funkci proměnné x nebo proměnné y, kromě (10.35) tedy ještě pomocí

$$\begin{aligned} x_1(y) &= +\sqrt{r^2 - y^2}\,, \quad y \in (-r,r)\,, \\ x_2(x) &= -\sqrt{r^2 - y^2}\,, \quad y \in (-r,r)\,. \end{aligned} \tag{10.36}$$

(funkce popsané pomocí (10.36) jsou však řešeními jiné rovnice). S jiným možným popisem soustavy kružnic o středu „v počátku“ $\{ x^2 + y^2 = r^2 ; r \in (0,\infty) \}$ se čtenář seznámí v látce, která se váže k funkcím více proměnných, avšak takové pojetí se zcela vymyká aparátu, který jsme zatím vytvořili.

10.4 Rovnice příbuzné

Řadu diferenciálních rovnic lze vhodným obratem převést na rovnice, se kterými jsme se již setkali. Je-li pro každé $t > 0$ a nějaké $p \in \mathbb{N}_0$

$$f(tx, ty) = t^p f(x, y)\,,$$

nazýváme f *homogenní funkce proměnných* x, y *stupně* p. Tento pojem se nám bude hodit.

Ukážeme na jednoduchých příkladech několik typů takových rovnic, které lze formálními úpravami převést na rovnice se separovanými proměnnými. Že nás to však často přiblíží jen málo k řešení rovnice by mělo být čtenáři alespoň zčásti patrné z předcházejících příkladů. Nejdříve poskytneme čtenáři „kuchařku“, která se často objevuje v různých učebnicích kalkulu.

(P1) Rovnice „s homogenní pravou stranou“, tj. rovnice $y' = f(x, y)$, na jejíž pravé straně je homogenní funkce f proměnných x, y stupně 0. V případě $p = 0$ je $f(tx, ty) = f(x, y)$ a po „dělení rovnice“ proměnnou x (tímto krokem vnášíme do problému dodatečné omezení $x \neq 0$, proto se budeme muset zabývat později existencí řešení na intervalech obsahujících tento bod) má její pravá strana tvar $g(y/x)$. Úpravu na tento tvar nemusíme dělat, stačí jen rozeznat „typ rovnice“ a provést substituci. Položíme $y = ux$. Pak $y' = xu' + u$ a rovnice po dosazení přejde na tvar $xu' + u = f(1, u)$, což je rovnice se separovanými proměnnými. Všimneme si toho, že na intervalu, na kterém je funkce y řešením rovnice, je funkce $u = y/x$ podílem dvou diferencovatelných funkcí a je tedy rovněž (spojitě) diferencovatelná.

(P2) Rovnice „typu $y' = f(ax + by + c)$, $a, b, c \in \mathbb{R}$“; pokud $ab = 0$, je to rovnice se separovanými proměnnými. V případě $ab \neq 0$ použijeme substituci $u = ax + by + c$, při níž $u' = a + by'$; úpravou dostaneme opět rovnici se separovanými proměnnými.

(P3) Rovnice „typu $y' = f\Big(\dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\Big)$, kde a_k, b_k, $c_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2$“; jsou-li vektory (a_1, b_1, c_1) a (a_2, b_2, c_2) lineárně závislé, jde o již řešený případ. Nejsou-li závislé a $a_1\,b_2 - a_2\,b_1 = 0$ substituce $u = a_2x + b_2y$ převede úlohu na případ (P1). Je-li $a_1\,b_2 - a_2\,b_1 \neq 0$, nalezneme bod $[\,\eta, \zeta\,]$, který je řešením soustavy rovnic

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 &= 0\,, \\ a_2x + b_2y + c_2 &= 0\,, \end{aligned}$$

a zavedeme nové proměnné pomocí rovností $x = u + \eta$, $y = v + \zeta$. V nových proměnných u,v je již vyšetřovaná rovnice takového typu, který jsme vyšetřovali v bodě (P1).

(P4) Rovnice Bernoulliho je „typu $y' + a(x)y = b(x)y^r$, $r \in \mathbb{R}$“. Speciální případy $r = 0$ a $r = 1$ již řešit umíme, předpokládáme proto, že $r \notin \{0, 1\}$. Je-li cy_0 obecné řešení rovnice $y' + a(x)y = 0$, hledáme řešení ve tvaru $y = c(x)y_0(x)$ (jako při variaci konstanty). Po zderivování a dosazení dostaneme

$$c'(x)y_0(x) + c(x)y_0'(x) + a(x)c(x)y_0(x) = b(x)c^r(x)y_0^r(x)\,.$$

Po úpravě odtud obdržíme

$$c'(x) = b(x)c^r(x)y_0^{r-1}(x)\,,$$

a tuto rovnici se separovanými proměnnými pro c' již umíme řešit. Podrobnější výklad o těchto početních postupech lze nalézt v textech, věnovaných (obyčejným) diferenciálním rovnicím.

Příklady 10.4.1. S popsanými typy a úskalími jejich řešení se nyní seznámíme při řešení jednoduchých příkladů.

1. Řešme rovnici

$$y' = \frac{x}{y}\,. \tag{10.37}$$

Tato rovnice je typu (P1), tj. s homogenní pravou stranou, typu (P3) s $a_1 = b_2 = 1$ a s $a_2 = c_2 = b_1 = c_1 = 0$ a identitou f, a také typu (P4) s $a \equiv 0$, $r = -1$ identitou b. Je to už rovnice se separovanými proměnnými, převod nemusíme tedy dělat. Na intervalu (γ, δ), kde je řešení y všude nenulové rovnici snadno upravíme na tvar $2yy' = 2x$, resp. $\bigl(y^2\bigr)' = (x^2)'$. Odtud již snadno dostaneme

$$(y - x)(y + x) = C\,,$$

kde je $C \in \mathbb{R}$. Dvě maximální řešení při $C = 0$ jsou zřejmě $y = \pm x$ na $(-\infty, 0)$ a další $y = \pm x$ na $(0, +\infty)$. Další maximální řešení jsou pro každé $C > 0$ funkce $y = \pm\sqrt{x^2 + C}$, $x \in \mathbb{R}$, a pro každé $C < 0$ funkce $y = \pm\sqrt{x^2 + C}$, $|\,x\,| > \sqrt{-C}$, definované na intervalech $(-\infty, -\sqrt{-C})$ a $(\sqrt{-C}, +\infty)$.

2. Řešme nyní rovnici

$$y' = \frac{2\,y^2}{(x + y)^2}\,. \tag{10.38}$$

Každé řešení φ rovnice (10.38) je zřejmě neklesající funkce na každém otevřeném intervalu ležícím v definičním oboru D_φ. Funkce $y \equiv 0$ na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, +\infty)$ jsou zřejmě maximálními řešeními rovnice, avšak žádné řešení nevyhovuje podmínce

$y(0) = 0$. Obecněji: žádným bodem přímky o rovnici $x + y = 0$ neprochází kterékoli řešení rovnice (10.38).

Jde o rovnici typu (P1), takže dle návodu položme $y = xz$. Zřejmě pak je $y' = z'x + z$ a rovnice nabude tvaru

$$z'x = \frac{2z^2}{(1+z)^2} - z = -\frac{z + z^3}{(1+z)^2}\,, \tag{10.39}$$

ovšem za předpokladu $z \neq -1$, který však odpovídá již vyloučeným bodům přímky $x + y = 0$. Formální úpravou dostaneme rovnici

$$\frac{(1+z)^2}{z(1+z^2)}\,z' = -\,\frac{1}{x}\,,$$

a po rozkladu a přechodu k primitivním funkcím rovnici

$$\log|\,z\,| + 2\operatorname{arctg} z + \log|\,x\,| = \log C \tag{10.40}$$

s $C > 0$. Upravíme ji na tvar

$$|\,z\,x\,| = C\exp(-2\operatorname{arctg} z)\,.$$

Vrátíme-li se k původní proměnné y, dostaneme *formální* řešení rovnice (10.38) ve tvaru

$$y = D\exp\Big(-\,2\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\Big)\,, \tag{10.41}$$

kde $D \in \mathbb{R}$ (případ $D = 0$ odpovídá zřejmému identicky nulovému řešení rovnice (10.39)). Odtud je rovněž patrné, že např. maximální řešení $y \equiv 0$ jsou definována na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, +\infty)$. Z tvaru (10.41) je však málo patrné to, co snadno vyčteme z řešené rovnice (10.38): každým bodem přímky o rovnici $y = -x$ neprochází žádné řešení.

3. Při řešení rovnice

$$y' = 2\Big(\frac{y+1}{x+y-2}\Big)^2. \tag{10.42}$$

nejprve najdeme řešení soustavy lineárních rovnic

$$\begin{aligned} y + 1 &= 0\,,\\ x + y - 2 &= 0\,, \end{aligned}$$

(jsou to čísla $x = 3$ a $y = -1$) a pak substituujeme $z = y + 1$, $u = x - 3$. Dostaneme tak po úpravě rovnici

$$z' = 2\Big(\frac{(z-1)+1}{(u+3)+(z-1)-2}\Big)^2 = \frac{2z^2}{(u+z)^2}\,,$$

kterou jsme již řešili v odlišném značení v předcházejícím příkladu. Použijeme-li výsledek, který jsme nalezli a provedeme zpětnou substituci, dostaneme formální řešení

$$(y+1)\exp\Big(2\operatorname{arctg}\frac{y+1}{x-3}\Big) = C\,. \tag{10.43}$$

4. Pro jednoduchou rovnici typu (P3) (funkce f v (P3) je lineární)

$$y' = 2\frac{-x + 2y - 3}{x + y - 3} \tag{10.44}$$

popíšeme stručně řešení. Především si uvědomíme, že žádným bodem přímky o rovnici $x+y = 3$ neprochází řešení rovnice (10.44). Čitatel a jmenovatel zlomku na pravé straně (10.44) se anulují pro $x = 1$ a $y = 2$. Položme dále $t = x - 1$ a $u = y - 2$. Jednoduchou úpravou dostaneme rovnici

$$u' = 2\frac{2u - t}{u + t}\,,$$

a po substituci $u = vt$, $u' = v't + v$ a další úpravě rovnici

$$v't = -\frac{v^2 - 3v + 2}{v + 1}\,. \tag{10.45}$$

Tato rovnice má dvě konstantní řešení $v \equiv 1$ a $v \equiv 2$, kterým odpovídají v $\mathbb{R}^2$ přímky o rovnicích

$$y = x + 1 \quad \text{a} \quad y = 2x\,. \tag{10.46}$$

Po rozkladu na parciální zlomky a následné integraci obdržíme rovnici

$$t\,\frac{(v - 2)^3}{(v - 1)^2} = C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,. \tag{10.47}$$

Přepíšeme-li ji v x a y, dospějeme k rovnici implicitně popisující řešení

$$\frac{(y - 2x)^3}{(y - x - 1)^2} = C\,. \tag{10.48}$$

Funkce, popisující přímky v (10.46), jsou maximálními řešeními na intervalech $(-\infty, 1)$ a $(1, +\infty)$, bodem $[\,1, 2\,]$ neprochází žádné řešení. Druhé z těchto řešení popisuje rovnost (10.48) pro $C = 0$, první však rovností (10.48) popsat nelze.

5. Řešme (nelineární) Bernoulliho rovnici

$$y' + \frac{2y}{x} = 4\sqrt{y}\,. \tag{10.49}$$

Postupujme opět nejprve formálně, abychom ukázali, jak se výsledek takového formálního postupu liší od skutečného výsledku. Dělíme-li rovnici (10.49) výrazem $2\sqrt{y}$, dostaneme rovnici

$$\frac{y'}{2\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{x} = 2\,, \tag{10.50}$$

a po substituci $z = \sqrt{y}$ a úpravě lineární rovnici

$$z' + \frac{z}{x} = 2 \tag{10.51}$$

pro novou neznámou funkci $z = z(x)$. Vynásobením integračním faktorem x obdržíme

$$\big(xz(x)\big)' = 2x = \big(x^2\big)'\,, \tag{10.52}$$

takže podle Důsledku 5.2.23 existuje $C \in \mathbb{R}$ tak, že

$$xz(x) = x^2 - C\,, \tag{10.53}$$

neboli

$$y(x) = \Big(x - \frac{C}{x}\Big)^2 \tag{10.54}$$

pro všechna $x \neq 0$. Všechna formálně správná maximální řešení se tedy zdají být definována na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, +\infty)$ a popsána vzorcem (10.54) s $C \in \mathbb{R}$. Vnímavější čtenář si ihned povšimne, že dalšími maximálními řešeními (10.49) jsou funkce $y(x) = 0$, $x \in (-\infty, 0)$, a $y(x) = 0$, $x \in (0, +\infty)$, nicméně prozkoumejme úlohu podrobněji.

Prosté dosazení (10.54) do původní rovnice dává

$$2\Big(x - \frac{C}{x}\Big)\Big(1 + \frac{C}{x^2}\Big) + 2\Big(x - \frac{C}{x}\Big)^2 \frac{1}{x} = 4\Big|\, x - \frac{C}{x}\,\Big|\,,$$

neboli po úpravě

$$x - \frac{C}{x} = \Big|\, x - \frac{C}{x}\,\Big|\,,$$

což je rovnost pouze v případě, že $x - (C/x) \geq 0$; to nás staví před dvojici otázek:

(1) Co budeme dělat, jestliže dosazením zjistíme, že výsledek *není* řešením.

(2) Jaké máme záruky, že jsme našli *všechna* řešení.

(Řešitel se však často spokojí s formálním řešením a tyto otázky si vůbec neklade, u složitějších rovnic je však zřejmě namístě ověřit dosazením, zda je nalezený výsledek správný.) Musíme proto postupovat jinak a opatrněji.

Nejprve *přesně vymezíme náš úkol*. Měl by být tak obecný, abychom případné řešení mohli v aplikacích využít, i když se nám obecné řešení rovnice nepodaří určit. Protože rovnice (10.49) obsahuje x ve jmenovateli, budou existovat řešení pouze na intervalech, které neobsahují 0. Hledáme proto řešení na intervalech, které jsou podmnožinami intervalů $(-\infty, 0)$ a $(0, +\infty)$.

(a) Jelikož rovnice (10.49) obsahuje na pravé straně člen $\sqrt{y}$, je každé řešení (10.49) nezáporná funkce. Zřejmě $y \equiv 0$ je řešením na obou intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, +\infty)$.

(b) Nechť $y : (\gamma, \delta) \to (0, +\infty)$ je řešením (10.49). V tomto případě je předchozí postup od (10.49) k (10.54) bezproblémový a existuje tedy konstanta $C \in \mathbb{R}$ tak, že

$$z(x) = \sqrt{y} = x - \frac{C}{x} \tag{10.55}$$

v (γ, δ) a $z = \sqrt{y} > 0$ všude v (γ, δ). Konstanta C není určena jednoznačně, z nerovnosti $x - C/x > 0$ plynou podmínky, že pro $x \in (\gamma, \delta)$ je

$$x^2 < C\,, \quad \text{je-li} \quad (\gamma, \delta) \subset (-\infty, 0)\,, \tag{10.56}$$

$$x^2 > C\,, \quad \text{je-li} \quad (\gamma, \delta) \subset (0, +\infty)\,. \tag{10.57}$$

(c) Vyšetříme nejprve intervaly $(\gamma, \delta) \subset (-\infty, 0)$. Pro $C \leq 0$ není (10.54) řešením na žádném takovém (γ, δ), neboť podmínka (10.56) není splněna v žádném bodě intervalu $(-\infty, 0)$. Pro $C > 0$ je splněna, pokud $\gamma > -\sqrt{C}$. Odtud plyne, že pak (10.54) popisuje řešení na intervalu $(-\sqrt{C}, 0)$ a toto řešení má v levém krajním bodě intervalu limitu 0.

(d) Položme $C = \alpha^2 > 0$. Vidíme, že pro každé $\alpha < 0$ je funkce

$$y(x) := \begin{cases} 0 & \text{je-li} \quad -\infty < x \le \alpha\,, \\ \left(x - \alpha^2/x\right)^2 & \text{je-li} \quad \alpha < x < 0\,, \end{cases} \tag{10.58}$$

řešením rovnice (10.49) na $(-\infty, 0)$: je jistě řešením na intervalu $(-\infty, \alpha)$ i na intervalu $(\alpha, 0)$, ale splňuje rovnici i v bodě α, v němž, jak snadno zjistíme, je $y(\alpha) = y'(\alpha) = 0$.

(e) Nyní najdeme ještě všechna řešení (10.49) v intervalu $(0, +\infty)$. Na rozdíl od bodu b) nemáme zaručenu monotonii y. Pro každé $C \le 0$ je funkce z (10.54) kladným řešením (10.49) na $(0, +\infty)$.

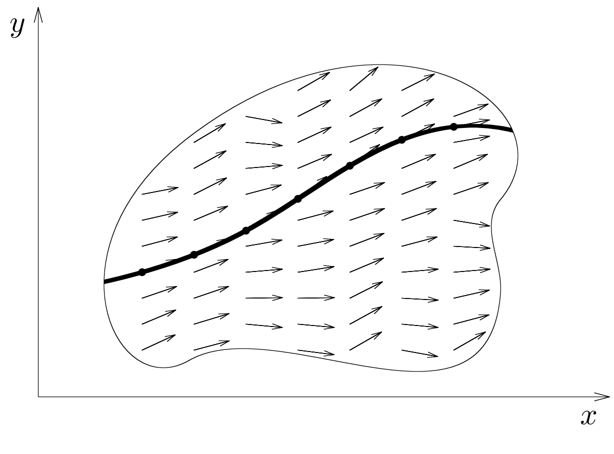
(f) Pro $C > 0$ nechť $(\gamma, \delta) \subset (0, +\infty)$ je *maximální* interval, na kterém je funkce (10.54) kladná. Protože musí platit (10.57), je $\gamma > 0$. Položme $\alpha^2 = \gamma$. Dalšími maximálními řešeními jsou proto řešení

$$y(x) := \begin{cases} 0 & \text{je-li} \quad 0 < x \le \alpha\,, \\ \left(x - \alpha^2/x\right)^2 & \text{je-li} \quad \alpha < x < +\infty\,, \end{cases} \tag{10.59}$$

Funkce y je jistě řešením na intervalu $(0, \alpha)$ i na intervalu $(\alpha, +\infty)$, ale splňuje rovnici i v bodě α, v němž, jak snadno zjistíme, je $y(\alpha) = y'(\alpha) = 0$.

Čtenář si může rozmyslit, že jsme postupně nalezli všechna maximální řešení rovnice (10.49) a získali tak obecné řešení rovnice (formální zápis je složitější).

Poznámka 10.4.2. Pro názorné chápání řešení diferenciálních rovnic uveďme ještě jednu interpretaci fyzikálně-geometrického charakteru. Diferenciální rovnice (10.23) je jakýmsi „kompasem“, který v bodech $[\,x, y\,]$ roviny ukazuje, jakým směrem se v ní máme pohybovat. Vyřešit diferenciální rovnici (10.23) pak znamená „projít rovinou“ (nebo její částí) podle tohoto kompasu. Křivka, po níž se pohybujeme, je grafem (nějakého) řešení. Často se v této souvislosti mluví o *směrovém poli* určeném rovnicí (10.23) a to se též graficky znázorňuje. Srovnejte se schematickým náčrtkem na Obr. 10. 1. Tato interpretace je možná i v případě rovnic s obecnějším tvarem pravé strany.



Obr. 10. 1.

Náčrt na předchozím obrázku by neměl vzbudit ve čtenáři představu, že chování řešení v blízkosti „kraje oblasti“ musí být jednoduché, např. že funkce popisující řešení musí mít v krajních bodech svého definičního oboru limitu. Snadno zjistíme, že pro funkci φ a pro všechna $x \in (0, \infty)$ je

$$\varphi(x) := \frac{1}{x} \sin(1/x)\,, \quad \varphi'(x) = -\frac{1}{x^2}\left(\sin(1/x) + \frac{1}{x}\cos(1/x)\right),$$

takže řešením rovnice

$$y' = -\frac{1}{x^2}\left(\sin(1/x) + \frac{1}{x}\cos(1/x)\right)$$

na intervalu $(0, \infty)$ je funkce φ, resp. každá funkce tvaru $\varphi + C$, $C \in \mathbb{R}$. Povšimněte si, jak vypadá graf funkce φ v $G = (0, \infty) \times (-\infty, \infty)$, a že graf funkce φ je v blízkosti přímky o rovnici $x = 0$ velmi složitý; speciálně $\lim_{x\to 0-} \varphi(x)$ neexistuje.

Příklad 10.4.3 (logistický růstový zákon). Snaha po nalezení dokonalejšího růstového zákona vedla k modifikacím diferenciální rovnice (10.17). Intuitivně cítíme, že „lepší“ růstový zákon by měla popisovat rovnice $P' = \alpha(P) \cdot P$, kde α je vhodně zvolená funkce, která je pro nějaké $\delta > 0$ na intervalu $(\delta, +\infty)$ klesající; pak bude klesat i rychlost růstu populace. Budeme se zabývat jednoduchým případem tohoto typu, dříve však uveďme jeden údaj, týkající se formy rovnice. Často se růstová konstanta α v rovnici (10.17) zapisuje ve tvaru rozdílu a pracuje se s nepatrně *formálně* odlišnou rovnicí

$$P' = \gamma P - \tau P\,, \quad \gamma, \tau > 0\,,$$

kde konstanty γ a τ charakterizují *porodnost* a *úmrtnost* dané populace.

Modifikovaná rovnice, popisující logistický růstový zákon, je tvaru

$$P' = \gamma P - \tau P^2\,, \quad \gamma, \tau > 0\,. \tag{10.60}$$

Rovnici lze dát ještě další interpretaci: prostředí, v němž populace žije, má omezené zdroje, které určují „maximální kapacitu životního prostoru“. Růst populace je úměrný nejen její velikosti, ale i „velikosti zbývajícího prostoru“. Skutečně, položme $\lambda = \tau$ a $K = \gamma/\lambda$. Zbývající životní prostor popisuje veličina $K - P(t)$, kde konstanta K odpovídá maximální kapacitě. Rovnice tak po úpravě má tvar

$$P' = \lambda P(K - P)\,,$$

kde $\lambda, K > 0$. Zde je výše zmíněná funkce $\alpha(P) = \lambda(K - P)$ lineární, tedy obzvlášť jednoduchá. Řešení rovnice je tvaru (odvoďte to separací proměnných nebo se o tom přesvědčete derivováním)

$$P(t) = \frac{\gamma}{\tau + (\gamma/P_0 - \tau)\,\mathrm{e}^{-\gamma t}}\,, \quad \text{resp.} \quad P(t) = \frac{K}{1 + (K/P_0 - 1)\,\mathrm{e}^{-\lambda K t}}\,, \quad t > 0\,,$$

kde $P_0 > 0$. Lze ukázat, že v *daném oboru* je to popis všech maximálních řešení rovnice (10.60). Řešená rovnice však již není *lineární rovnicí* prvního řádu, neboť obsahuje člen P^2.

Poznámka 10.4.4. Rovnice tohoto typu se v některých případech jeví jako poměrně dobrý model pro reálnou situaci. Tak např. studie o růstu slunečnic ukazují jinou reálnou situaci, jíž odpovídá týž model. Výška slunečnic poměrně dobře vyhovuje analogickému vztahu

$$h(t) = \frac{H}{1 + (H/h_0 - 1)\,\mathrm{e}^{-\lambda H t}}\,,$$

kde H je maximální výška rostliny a h_0 výška na začátku pozorování. V r. 1983 byla publikována studie, která ukázala, že analogické chování vykazuje i „světová automobilová populace“.

Pro lidskou populaci je chování růstové funkce α podstatně složitější; není to ani konstantní funkce, což jsme uvažovali v Poznámce 10.2.3, ani lineární klesající funkce jako v předcházejícím Příkladu 10.4.3. Náhledem na data v [3] zjistíme, že *meziroční* přírůstek $\log\big(P(t{+}1)/P(t)\big)$ (srov. s (10.18)) není ani monotonní v čase. Zatímco v letech 1950 – 60 rostl od cca 0,015 do v Poznámce 10.2.3 užité hodnoty 0,02, na které se pak držel asi 10 let, od r. 1971 téměř stále klesá k hodnotě 0,0116 za dobu 2004 – 2005. Kolem r. 2050 by podle prognóz měl být cca 0,005.

10.5 Speciální rovnice vyšších řádů

K rovnicím vyšších řádů se vrátíme v Kapitole 15, avšak speciální rovnice tohoto typu umíme řešit ad hoc bez budování dalšího teoretického zázemí. Snadno nahlédneme, že např. pro některé speciální funkce $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, není obtížné pro jakékoli $n \in \mathbb{N}$ řešit rovnici

$$y^{(n)} = f(x)\,.$$

K řešení stačí určit *jedinou* funkci F tak, aby platilo $F^{(n)}(x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Čtenář jistě snadno dokáže, že obecné řešení má tvar

$$F(x) + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \cdots + C_n\,,$$

kde $C_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \ldots, n$, jsou konstanty. V případě konkrétní f může být explicitní popis řešení pomocí funkcí, které jsme definovali, jak triviálním, tak i neřešitelným problémem. Doporučujeme čtenáři, aby zvážil např. případy $f \equiv 0$, $f = \exp$, $f = \sin$ a $f(x) = \exp(-x^2)$. Níže se budeme jednoduchými speciálními rovnicemi 2. řádu zabývat v příkladech s fyzikální motivací.

Označení 10.5.1. V dalším se budeme zabývat pohybem ideálního tělesa (hmotného bodu) v gravitačním poli Země. Jeho výšku nad zemským povrchem v čase t označíme $x(t)$ a orientaci volíme tak, aby byla nezáporná. Tomu pak odpovídá rovnice pro zrychlení [15])

$$\ddot{x} = -g\,, \tag{10.61}$$

přičemž pro jednoduchost budeme v praktických ukázkách počítat se zaokrouhlenou hodnotou $g \doteq 10\,\mathrm{ms}^{-2}$. Derivace budeme značit způsobem obvyklým ve fyzice, tj. pomocí teček nad označením funkcí. Integrací dostaneme z (10.61) $\dot{x} = -gt + C_1$. Položíme-li $v_0 := v(0) = \dot{x}(0)$, dostaneme dosazením $v_0 = C_1$ a dospějeme ke vzorečku pro rychlost

$$v(t) = -gt + v_0\,, \tag{10.62}$$

[15]) Na rozdíl od většiny fyzikálních učebnic zde píšeme $-g$ místo g. Z matematického hlediska má smysl se zabývat řešeními na $\mathbb{R}$, z hlediska fyzikální interpretace stačí pracovat s řešeními na intervalu $(0, +\infty)$, resp. s jejich spojitými rozšířeními na interval $[\,0, +\infty)$.

známému z fyziky. Analogicky dospějeme dalším krokem ke vzorci

$$x(t) = -\tfrac{1}{2}\,gt^2 + v_0t + C_2$$

a položením $x(0) = x_0$ určíme $C_2 = x_0$. Dospějeme tak k rovnici

$$x(t) = x_0 + v_0t - \tfrac{1}{2}\,gt^2\,, \tag{10.63}$$

kde x_0 je výška nad povrchem Země v čase $t = 0$. I když pracujeme s otevřenými intervaly, protože na nich jsou definována řešení, funkce spojitě rozšiřujeme na uzavřené intervaly vždy, kdy je to možné a pro zkrácení zápisu užitečné.

Pro $v_0 = 0 = x_0$ tak dostaneme

$$v(t) = -\,gt\,,\quad x(t) = -\tfrac{1}{2}\,gt^2\,,$$

což jsou (až na znaménko) známé vztahy popisující fyzikální zákony, ke kterým dospěl na základě pokusů jako první Galileo Galilei (1564 – 1642).

Příklad 10.5.2 (vrh svislý vzhůru). Volme označení z předcházejícího odstavce. Pohyb ideálního vrženého tělesa (hmotného bodu) se děje bez odporu prostředí a zajímá nás v časovém intervalu $[\,0, t_2\,]$, kde $t_2 > 0$ je čas, ve kterém bude $x(t_2) = 0$, tj. kdy vržené těleso dopadne na zem. Z představy o reálné situaci vyplývá, že $x_0 = 0$ (vrháme vzhůru ze země) a že počáteční rychlost v_0 je kladná. Rovnice (10.63) bude mít jednodušší tvar

$$x(t) = v_0t - \tfrac{1}{2}\,gt^2 = t(v_0 - \tfrac{1}{2}\,gt)\,, \tag{10.64}$$

přičemž funkce x bude kladná v intervalu $(0, t_2)$, kde $t_2 = 2v_0/g$. Funkce x nabude svého maxima na intervalu $[\,0, t_2\,]$ v nulovém bodě t_1 okamžité rychlosti $v(t) := \dot{x}(t) = v_0 - gt$, tedy $t_1 = v_0/g = (1/2)t_2$ (funkce x roste v intervalu $[\,0, t_1\,]$ a klesá v intervalu $[\,t_1, t_2\,]$). Maximální dosažená výška vrhu je $x(t_1) = v_0^2/2g$.

Konfrontujme model s našimi představami: Vyhodíme-li kámen svisle vzhůru rychlostí 20 m/s, poletí vzhůru 2 sekundy a další 2 sekundy bude padat zpět na zem. Dosáhne maximální výšky $x(t_1) = 20$ m. Jestliže však vystřelíme vzhůru z pušky rychlostí 300 m/s, bude kulka ve vzduchu celou minutu a dosáhne největší výšky 4 500 m. Poznamenejme, že při malých rychlostech zanedbání odporu vzduchu nevede k velkým chybám, ty však při vyšších rychlostech rostou.

Příklad 10.5.3 (volný pád). Při studiu (idealizovaného) volného pádu opět vycházíme z rovnice $\ddot{x} = -g$ a dospějeme k rovnici (10.63), ale nyní $x_0 = x(0) > 0$ udává výšku, z níž k pádu dochází a $v_0 = 0$. Rovnice má proto tvar

$$x(t) = x_0 - \tfrac{1}{2}\,gt^2\,. \tag{10.65}$$

K dopadu předmětu na zem dojde v čase $t_1 > 0$, pro který $x(t_1) = 0$, z čehož dostáváme $t_1 = \sqrt{2x_0/g}$. Řešení (10.65) rovnice $\ddot{x} = -g$ má nyní fyzikální smysl v intervalu $(0, t_1)$. Funkce (10.65) má však rozumný fyzikální smysl i na uzavřeném intervalu $[\,0, t_1\,]$ a odpovídá spojitému rozšíření řešení na tento interval.

Opět pro ilustraci uveďme: dle tohoto modelu bude padat předmět z výšky $x_0 = 500$ m 10 sekund a dopadne rychlostí 100 m/s. Zde je vliv odporu vzduchu podstatnější, a tak je výsledek vcelku přijatelný pro olověnou kulku, zatímco přistávací rychlost padáků je nejméně desetinásobně menší. Snadno tak nahlédneme, že v některých situacích jsou tyto zákony nepoužitelné: neřídí se jimi ani pád člověka v zemské atmosféře (např. před otevřením padáku). Zcela jsme totiž zanedbali vliv odporu prostředí. Viz další příklad.

Příklad 10.5.4 (stabilizovaný pád). Jestliže přihlédneme k odporu vzduchu, který je úměrný rychlosti padajícího tělesa v atmosféře, dospějeme na základě fyzikálních úvah k rovnici

$$\ddot{x} = -\,k\dot{x} - g\,, \tag{10.66}$$

ve které $k > 0$ souvisí s odporem prostředí. Dosazením $v = \dot{x}$ dostaneme rovnici prvního řádu

$$\dot{v} + kv = -g\,.$$

s integračním faktorem $\exp(kt)$; to vede k identitám (píšeme kvůli zřetelnosti čárky místo teček)

$$\big(v(t)\mathrm{e}^{kt}\big)' = -\,g\mathrm{e}^{kt} = -\,\Big(\frac{g}{k}\,\mathrm{e}^{kt}\Big)' \tag{10.67}$$

a k existenci konstanty C, pro kterou je

$$v(t)\mathrm{e}^{kt} = C - \frac{g}{k}\,\mathrm{e}^{kt}$$

Z podmínky $v(0) = 0$ plyne, že $C = g/k$, z čehož dostaneme

$$\dot{x}(t) = v(t) = \frac{g}{k}\Big(\mathrm{e}^{-kt} - 1\Big)\,. \tag{10.68}$$

Další integrací získáme identitu

$$x(t) = -\,\frac{g}{k}\Big(t + \frac{1}{k}\,\mathrm{e}^{-kt}\Big) + D\,, \tag{10.69}$$

kde hodnotu konstanty D najdeme pomocí podmínky $x(0) = x_0$. Protože dostaneme $D = x_0 + g/k^2$, má identita (10.69) po úpravě tvar

$$x(t) = x_0 - \frac{g}{k^2}\Big(kt + \mathrm{e}^{-kt} - 1\Big)\,. \tag{10.70}$$

Funkce v ve vzorci (10.68) má pro $t \to +\infty$ limitu $-g/k$; odtud plyne, že pokud x_0 je tak velké číslo, že výraz $\exp(-kt)$ má čas klesnout k hodnotám blízkým k nule, rychlost pádu se od jistého okamžiku prakticky nezvyšuje.

Uveďme pro ilustraci příklad počítaný pomocí tohoto modelu: Předpokládáme-li, že při seskoku padákem určitého typu z dostatečně velké výšky se rychlost pádu ustálí na 6 m/s, bude $k = 5/3$, protože $g/k = 10 : (5/3) = 6$. Při tomto k trvá podle (10.70) seskok z výšky 1000 m nepatrně déle než 167,25 sekundy. Podle (10.68) by rychlost pádu byla (pokud by se padák otevřel v čase $t = 0$) již za 3 sekundy větší než 5,9 m/s. Volný pád bez přihlédnutí k odporu vzduchu by přitom trval dle modelu z Příkladu 10.5.3 jen o málo více než 14 sekund. Opět jsme však zanedbali některé vlivy, které mohou za určitých okolností hrát podstatnější úlohu, např. pokles hustoty atmosféry v závislosti na výšce apod.

Jiný příklad nám může osvětlit některé jevy související s počasím: Nepatrné vodní kapičky tvořící mlhu mají limitní rychlost klesání (pro $t \to +\infty$) rovnou cca 12 mm/s. Proto mlha padá někdy tak dlouho. Odpovídá to hodnotě $k = 2500/3 = 833{,}\overline{3}$ a doba pádu z 1000 m na zem by za těchto podmínek trvala přes 23 hod [16]).

[16]) Ještě že někdy přijde na pomoc vítr a slunce.

Příklad 10.5.5 (start rakety). Do našich úvah zahrneme opět pouze „hlavní parametry“ úvahy. Předpokládáme, že vesmírná raketa startuje ve svislém směru; poloměr Země označíme R a h_v výšku rakety nad zemským povrchem v okamžiku, kdy dojde k vyhoření paliva rakety; hodnota $x(t)$ nechť udává výšku rakety nad zemským povrchem v čase t. Od okamžiku vyhoření paliva se raketa chová jako kámen vržený do prostoru. Vrhneme-li ho malou rychlostí, spadne opět na zemský povrch, při velké rychlosti se vymaní z vlivu zemské přitažlivosti. Minimum rychlostí, pro něž nastává druhý případ, se nazývá *úniková rychlost*. Tu bychom rádi, v závislosti na velikosti h_v, určili.

Na počátku situace, kterou se zabýváme, je

$$x(0) = R + h_v =: x_v \quad \text{a} \quad \dot{x}(0) =: v_v \,.$$

Z Newtonova gravitačního zákona vyplývá, že velikost síly působící na raketu je dána rovností $K = -\gamma \cdot m(x)/x^2$, kde $m(x)$ je hmotnost rakety; ta se pochopitelně mění s dobou, a tedy i v závislosti na x. Je proto např. $M := m(R)$ hmotnost rakety při startu a $m := m(x_v)$ vlastní hmotnost rakety (bez paliva) [17]). Určíme velikost γ vyšetřením situace při startu. Z rovnosti

$$-\,Mg = -\,\gamma\,\frac{M}{R^2} \quad \text{dostaneme} \quad \gamma = gR^2\,,$$

takže $K = -gR^2m/x^2$. Proto po vyhoření paliva pro raketu platí rovnosti

$$m\ddot{x} = -\,gR^2 \cdot \frac{m}{x^2}\,, \quad \text{resp.} \quad \ddot{x} = -\,gR^2 \cdot \frac{1}{x^2}\,.$$

Nyní si pomůžeme „trikem“: násobíme obě strany rovnice činitelem $2\dot{x}$, takže dostaneme

$$2\dot{x}\ddot{x} = -2gR^2 \cdot \frac{\dot{x}}{x^2}\,, \quad \text{resp.} \quad (\dot{x}^2)' = \left(2gR^2 \cdot \frac{1}{x}\right)'\,;$$

zde opět značíme čárkou derivaci podle času. Odtud dostaneme integrací ($v := \dot{x}$)

$$v^2 = 2gR^2 \cdot \frac{1}{x} + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

Uvážíme-li, že pro $t = 0$ je $v_v^2 = 2gR^2 \cdot (1/x_v) + C$, dostáváme konečně [18])

$$v^2 = 2gR^2x^{-1} + v_v^2 - 2gR^2x_v^{-1}\,. \tag{10.71}$$

Bude-li platit $v_v^2 - 2gR^2/x_v \geq 0$, příslušná rychlost umožní raketě opustit sféru vlivu přitažlivosti Země. Tomuto jevu odpovídá hodnota $v_v = \sqrt{2gR^2/x_v}$.

Při průměru Země rovném $D := 2R = 12,757 \cdot 10^6$ m, $g = 9,81$ ms^{-2} a při relativně malé výšce, tj. při $h_v \doteq R$, je přibližná hodnota únikové rychlosti $\sqrt{gD} \doteq 11{,}19\,\mathrm{km/s}$. Toto je tedy hledaná úniková rychlost.

[17]) Složitější modely zahrnují další veličiny, v našem případě je sledování úbytku hmotnosti rakety zbytečné.

[18]) Rovnice (10.71) odpovídá energetické bilanci, kterou by patrně zkušenější fyzik při odvozování napsal přímo „bez počítání“.

Příklad 10.5.6 (matematické kyvadlo). Pohyb ideálního kyvadla, tedy hmotného bodu M o hmotě m na nehmotném závěsu délky l lze v případě, že zanedbáme odpor prostředí, popsat rovnicí

$$\ddot{\varphi} + (g/l)\sin\varphi = 0\,, \tag{10.72}$$

kde $\varphi = \varphi(t)$ je úhel, který vlákno svírá se svislým směrem v čase t. Pro malé hodnoty „rozkyvu“ (tj. maximální hodnoty, kterou t nabývá) je $\sin\varphi$ přibližně roven φ, a můžeme proto doufat, že řešení jednodušší rovnice

$$\ddot{\varphi} + (g/l)\varphi = 0$$

budou celkem dobře aproximovat řešení (10.72). Označíme-li ještě $\omega := \sqrt{g/l}$, bude mít poslední rovnice tvar

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0\,; \tag{10.73}$$

tato rovnice tzv. *harmonického oscilátoru* má ve fyzice značný význam, a to nejen v souvislosti s kyvadlem.

Ukažte, že pro každé dvě konstanty $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ je funkce

$$\varphi(t) = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t \tag{10.74}$$

řešením rovnice (10.73). Žádáme-li např. splnění podmínek [19]) $\varphi(0) = \varphi_0$ (kde φ_0 je rozkyv) a $\dot{\varphi}(0) = 0$ (v extrémní poloze má kyvadlo nulovou rychlost, protože v ní mění své znaménko), získáme zřejmě funkci $\varphi(t) = \varphi_0\cos\omega t$.

Našli jsme sice nekonečně mnoho maximálních řešení (10.74) rovnice (10.73), ale nevíme, zda-li jsme získali její obecné řešení, tj. zda-li již žádná další maximální řešení neexistují. Opět se tedy setkáváme se situací, kdy *existence* řešení je jednoduchý problém; později ukážeme, že k důkazu, že (10.74) je obecné řešení (10.73) potřebujeme tuto větu o jednoznačnosti: *Je-li* $t_0 \in \mathbb{R}$ *pevně* (*ale libovolně*) *zvoleno, existuje pro každá dvě čísla* $\varphi_0, \varphi_1 \in \mathbb{R}$ *právě jedno řešení rovnice* (10.73) *splňující podmínky* $\varphi(0) = \varphi_0$, $\dot{\varphi}(0) = \varphi_1$. Jde o velmi hluboké tvrzení s komplikovaným důkazem, musíme se však s ním seznámit, protože tvrzení o *existenci* řešení nám neumožňuje řešit další, často podstatně důležitější problémy.

Rovnice (10.73) modeluje pohyb kyvadla; abychom získali popis pohybu určeného čísly φ_0, φ_1, měli bychom znát *všechna* řešení, jinak by se nám mohlo stát, že daná čísla odpovídají řešení, které jsme dosud nenalezli a náš konkrétní problém by se nám jevil jako neřešitelný.

Zajímá-li se čtenář o hlubší pochopení diferenciálních rovnic, musí se dříve naučit některé další partie matematiky. Ty jsou mj. obsahem dalších tří kapitol, věnovaných integraci a metrickým prostorům.

Poznámka 10.5.7. Pomocí diferenciálních rovnic lze, jak už jsme se zmínili dříve, zavádět i elementární funkce. Elementární Příklad 10.1.1 ilustroval, že exponenciálu lze zavést pomocí rovnice

$$y' - y = 0$$

jako to její maximální řešení y, pro které platí $y(0) = 1$. Podobně lze zavést také (přirozený) logaritmus: je to takové řešení y rovnice

$$y' = \frac{1}{x}\,, \quad x \in (0,\infty)\,,$$

[19]) Jsou to tzv. *počáteční podmínky*, podrobněji se jimi budeme zabývat v Kapitole 15.

pro které $y(1) = \mathrm{e}$. Goniometrické funkce lze zavést pomocí rovnice druhého řádu (potřebují se k tomu proto ještě další teoretické poznatky)

$$y'' + y = 0\,.$$

Funkce sin se určí podmínkami $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ a funkce cos podmínkami $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Historické poznámky 10.5.8. Řešení, resp. dle tradiční terminologie integrace, prvních diferenciálních rovnic úzce souvisí se samotným zrodem infinitezimálního počtu. Takové rovnice řešili např. René Descartes (1596 – 1650) v souvislosti s objevem zákona o lomu světla nebo Isaac Barrow (1630 – 1677), který v letech 1669 – 1670 v podstatě dospěl k řešení rovnice se separovanými proměnnými. Krátce nato pracemi Isaaca Newtona (1642 – 1727) a Gottfrieda Wilhelma Leibnize (1646 – 1716) začala éra intenzivního zkoumání diferenciálních rovnic. Převážná většina motivačních problémů pro zkoumání diferenciálních rovnic přicházela z fyziky. Newton např. při studiu pohybu kyvadla dospěl k závěru o zploštění tvaru Země: Podle jeho výpočtu měl být „rovníkový poloměr“ Země roven 231/230 poloměru „polárního“. První měření, uskutečněné r. 1720 tuto domněnku nepotvrdilo, ale druhé, zorganizované Francouzskou akademií věd r. 1730, ukázalo, že Newtonova hypotéza byla správná.

Poznamenejme, že Jacob Bernoulli (1654 – 1705) zkoumal r. 1692 diferenciální rovnice tvaru

$$y' = a(x)y + b(x)y^{\rho}\,,$$

které se po něm nyní nazývají *Bernoulliho rovnice* a které patří mezi lineární rovnice pro $\rho = 0, 1$. Právě infinitezimální počet přinesl silný nástroj k řešení velmi složitých úloh. Pokud např. uvažujeme matematické kyvadlo, pomohla nám pouze náhrada φ za $\sin\varphi$ k tomu, že doba kyvu T podle získaného popisu činila $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ a nezávisela na m a φ_0. Pokud chceme dosáhnout relativně dobrého přiblížení k reálné situaci, je vhodné volit φ_0 „malé“, např. $\varphi_0 < \pi/6$ [20]). Christian Huygens (1629 – 1695) se zabýval problémem sestrojení dokonale izochronního kyvadla, tj. kyvadla, jehož délka kyvu nezávisí na rozkyvu. Dokázal určit, že dráha, po níž se musí pohybovat hmotný bod v tomto případě, není kružnice, nýbrž *cykloida.* Tato jednoduchá křivka je tedy tzv. *tautochronou*, resp. *izochronou.* Rovnost časů pohybu po izochroně lze interpretovat též takto: postavíme-li U-rampu pro skateboardisty ve tvaru cykloidy a necháme je sjíždět do nejnižšího bodu z různých výšek, pak nejnižším bodem (samozřejmě v ideálním případě, tj. bez tření apod.) projedou vždy za *stejnou* dobu. Odtud jsou odvozeny uvedené názvy.

Další stručný komentář k historii vývoje diferenciálních rovnic nalezne čtenář v Kapitole 15. K tomu poznamenávám, že základním zdrojem informací v tomto směru byla pro mne kniha [4]. Také kniha [7], která však z hlediska přesnosti stěží vyhovuje dnešním požadavkům, obsahuje v Kapitole X poměrně obsáhlý historický přehled.

[20]) Je vhodné si uvědomit, že $(\sin x)/x \to 1$ při $x \to 0$.

Literatura:

[1] Agnew, R. P.: *Differential equations*, McGraw-Hill, Inc., New York, 1960, (druhé vydání).

[2] Braun, M.: *Differential equations and their applications*, Springer, New York, 1978, (druhé vydání).

[3] U.S. Census Bureau: *International Data Base*, `http://www.census.gov/ipc/www/worldpop.html` .

[4] Heuser, H.: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, B. G. Teubner, Stuttgart, 1995, (třetí vydání).

[5] Holický, P., Kalenda, O. F. K.: *Metody řešení vybraných úloh z matematické analýzy*, Matfyzpress, Praha, 2002.

[6] Segal, A. C.: *A linear diet model*, str. 175 – 176, obsaženo v : *Apostol, T. M. and al.*, *A century of calculus II*, The Mathematical Association of America, 1992, (sborník článků z *American Mathematical Monthly* a *Mathematical Magazine*).

[7] Stěpanov, V. V.: *Kurs diferenciálních rovnic*, Přírodovědecké vydavatelství, Praha, 1952.

Kapitola 11

Integrace

Dříve, nežli zavedeme Riemannův a Newtonův integrál a budeme zkoumat jejich vzájemný vztah, dokážeme další (a v tomto textu poslední) větu o funkcích spojitých na uzavřeném intervalu. O funkci $f \in \mathcal{C}([\,a,b\,])$ jsme dokázali, že je omezená, nabývá své minimální hodnoty $f_{\min}$, maximální hodnoty $f_{\max}$ a také (je-li nekonstantní) všech hodnot z intervalu $[\,f_{\min}, f_{\max}\,]$. Nyní ještě ve Větě 11.1.3 o stejnoměrné spojitosti funkce $f \in \mathcal{C}([\,a,b\,])$ dokážeme tvrzení, které budeme potřebovat při výkladu Riemannova integrálu.

11.1 Stejnoměrná spojitost

Definice 11.1.1 (Heine 1870). Budeme říkat, že funkce f je *stejnoměrně spojitá* v intervalu $I \subset \mathbb{R}$, je-li splněna podmínka

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x, y \in I)\,(|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)\,. \tag{11.1}$$

Funkce $g(x) := \sin(1/x)$, $x \in (0,1)$, je spojitá. Není však stejnoměrně spojitá na intervalu $(0,1)$, protože v každém intervalu $(0,t)$, $0 < t < 1$, nabývá hodnot -1 a 1.

Poznámka 11.1.2. Je-li f spojitá v I, je spojitá v každém bodě $x \in I$ vzhledem k I (v krajních bodech I, pokud leží v I, jde o jednostrannou spojitost); to znamená, že

$$(\forall x \in I)(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall y \in I)\,(|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)\,. \tag{11.2}$$

Je-li f stejnoměrně spojitá v I, platí (11.1). Všimněte si, že při srovnání s definicí (11.2) *spojitosti* v I se v definici (11.1) *stejnoměrné spojitosti* velký kvantifikátor, který vázal proměnnou $x \in I$, „odstěhoval“ doprava. Je-li f stejnoměrně spojitá v I, je zřejmě i spojitá v každém bodě $x \in I$.

Je-li obráceně f spojitá v každém bodě $x \in I$, pak pro každé x a každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta = \delta(x) > 0$ tak, že pro všechna $y \in I$, $|x-y| < \delta$ je $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$. Toto $\delta(x)$ je tedy obecně závislé na volbě $x \in I$. Stejnoměrná spojitost funkce f v I znamená, že k danému $\varepsilon > 0$ existuje „univerzální δ“ takové, že je splněna podmínka spojitosti s tímto δ v každém bodě $x \in I$.

Věta 11.1.3 (Heine 1872). *Je-li $f \in \mathcal{C}([\,a,b\,])$, je f stejnoměrně spojitá v intervalu $[\,a,b\,]$.*

Důkaz. Provedeme důkaz sporem. Předpokládejme, že funkce f *není* stejnoměrně spojitá v $[\,a,b\,]$; v takovém případě existuje $\varepsilon_0 > 0$ tak, že pro *každé* $\delta > 0$ existují $x, y \in [\,a,b\,]$, pro něž je

$$|x-y| < \delta \quad \text{a zároveň} \quad |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon_0\,.$$

Speciálně, k číslům $\delta = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, existují body x_n, y_n tak, že

$$|x_n - y_n| < 1/n \quad \text{a} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0\,.$$

Protože $\{x_n\}$ je omezená posloupnost, existuje *konvergentní* posloupnost $\{x_{n_k}\}$ vybraná z posloupnosti $\{x_n\}$, pro kterou $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$ a $x_0 \in [\,a,b\,]$.

Z nerovnosti

$$|\,y_{n_k} - x_0\,| \leq |\,y_{n_k} - x_{n_k}\,| + |\,x_{n_k} - x_0\,|$$

vyplývá, že $\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = x_0$. Ze spojitosti funkce f v bodě $x_0 \in [\,a,b\,]$ plyne, že

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) - \lim_{k\to\infty} f(y_{n_k}) = f(x_0) - f(x_0) = 0\,,$$

protože však pro všechna k je $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon_0$, dostáváme odtud

$$\lim_{k\to\infty} |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon_0 > 0\,,$$

což dává hledaný spor. Tím je tvrzení dokázáno. □

Všimněme si ještě blíže stejnoměrné spojitosti, která je užitečná i v jiných souvislostech. Platí např. následující tvrzení:

Věta 11.1.4. *Funkce f je* stejnoměrně *spojitá v omezeném intervalu (a,b), právě když existuje její spojité rozšíření na $[\,a,b\,]$.*

Důkaz. Existuje-li spojité rozšíření f_1 funkce f na $[\,a,b\,]$, je f_1 podle Věty 11.1.3 stejnoměrně spojitá funkce na $[\,a,b\,]$, a tedy i restrikce $f = f_1|(a,b)$ je stejnoměrně spojitá. Je-li f stejnoměrně spojitá v (a,b), není těžké dokázat, že je splněna Bolzano-Cauchyho podmínka z Věty 4.3.13 pro existenci vlastních limit

$$f_1(a) := \lim_{x\to a_+} f(x)\,, \quad f_1(b) := \lim_{x\to b_-} f(x)\,; \tag{11.3}$$

definujeme-li rozšíření f_1 v bodech a, b pomocí (11.3), je spojité v $[\,a,b\,]$. □

11.2 Riemannův integrál

Po více než sto let po objevech Isaaca Newtona (1643 – 1727) byla integrace chápána převážně jako inverzní operace k derivování. Vztah k ploše pod grafem funkce byl také znám, ale teprve s vývojem znalostí se ukázalo, že je tuto plochu *jednodušší* definovat pomocí integrálu a nikoli postupovat obráceně: uspokojivé definice plochy se objevily podstatně později. Situace je však složitější, než se na první pohled může zdát.

Prvním, kdo se pokusil o moderní řešení problému integrace, byl Cauchy. Pracoval se *spojitou* funkcí na intervalu $[\,a,b\,]$; k popisu Cauchyho definice zavedeme pojem, který využijeme i v dalším výkladu.

Definice 11.2.1. Nechť $n \in \mathbb{N}$ a nechť $\{x_k; k = 0, 1, \ldots, n\}$ je konečná množina bodů z intervalu $[a, b]$ takových, že je

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\,.$$

Takovou množinu nazýváme *dělením* intervalu $[a, b]$; budeme pro dělení užívat stručnější zápis [1])

$$D := \{\, a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b \,\}\,. \tag{11.4}$$

Body x_k nazýváme *dělicí body* dělení D, intervaly $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \ldots, n$, jsou intervaly dělení D. Číslo

$$\nu(D) := \max\{x_k - x_{k-1}\,;\, k = 1, \ldots, n\} \tag{11.5}$$

se nazývá *norma dělení* D.

Historická poznámka 11.2.2. Uvedeme nejprve původní Cauchyho definici integrálu. I když je definice velmi obecná, užíval ji, jak již bylo řečeno, pouze pro *spojité* funkce.

Definice (Cauchy 1823). Funkce f se nazývá *integrovatelná* (dle Cauchyho) na intervalu $[a, b]$ a hodnota jejího integrálu je rovna číslu $V \in \mathbb{R}$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé dělení (11.4) je

$$\nu(D) < \delta \Rightarrow \Big| V - \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) \Big| < \varepsilon\,.$$

Je-li splněna tato podmínka, definujeme [2])

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := V\,.$$

Později se začal problémem integrace zabývat Bernhard Riemann (1826 – 1866), kterému vděčíme za jiný zorný úhel pohledu: nepředpokládal a priori, že funkce f, kterou chceme integrovat, je „pěkná“ (např. spojitá); kladl si naopak otázku, jaké „minimální“ vlastnosti funkcí zaručují jejich integrabilitu. Jeho přístup se dále vyvíjel, až dosáhl dnešní, do jisté míry standardizované, podoby. S tou se nyní seznámíme.

Definice 11.2.3. Nechť f je funkce omezená na intervalu $[a, b]$. Označme postupně $m := \inf\{f(x); x \in [a, b]\}$ a $M := \sup\{f(x); x \in [a, b]\}$. Dále analogicky pro dělení $D = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ intervalu $[a, b]$ nechť

$$m_k := \inf\{f(x); x \in [x_{k-1}, x_k]\}\,, \quad M_k := \sup\{f(x); x \in [x_{k-1}, x_k]\}\,. \tag{11.6}$$

Definujme

$$s(f; D) := \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1})\,, \quad S(f; D) := \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1})\,. \tag{11.7}$$

Čísla $s(f; D)$ a $S(f; D)$ se nazývají *dolní* a *horní součet* pro funkci f a dělení D.

---

[1]) Čtenář by si měl uvědomit, že jde o další licenci. Dělení intervalu je jeho konečná podmnožina včetně uspořádání, přičemž její extrémy splývají s krajními body intervalu.

[2]) Dá se ukázat, že pak je číslo V určeno jednoznačně.

Lemma 11.2.4. *Pro každou funkci f omezenou na $[a,b]$ a každé dělení D intervalu $[a,b]$ je*

$$m(b-a) \leq s(f;D) \leq S(f;D) \leq M(b-a)\,. \tag{11.8}$$

Důkaz. Pro $k = 1,\dots,n$ násobme nerovnosti

$$m \leq m_k \leq M_k \leq M \tag{11.9}$$

číslem $(x_k - x_{k-1})$ a těchto n obdržených vztahů sečtěme. Jestliže ještě uvážíme, že $\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) = (b-a)$, dostaneme (11.8). □

Označení 11.2.5. Všechna dělení D intervalu $[a,b]$ tvoří systém, který budeme značit $\mathcal{D}(a,b)$. Je-li $D_1, D_2 \in \mathcal{D}(a,b)$, píšeme

$$D_1 \prec D_2\,,\ \text{pokud } D_1 \subset D_2\,.$$

(Dělení D_1, D_2 jsou tedy částečně uspořádána pomocí *inkluze* množin jejich dělicích bodů). Dělení D_2 se nazývá *zjemnění* dělení D_1. Je-li $D_1 \prec D$, $D_2 \prec D$, kde D, D_1, $D_2 \in \mathcal{D}(a,b)$, nazývá se D *společným zjemněním* dělení D_1 a D_2.

Je zřejmé, že každá dvě dělení D_1, D_2 mají společné zjemnění D, za dělicí body D stačí vzít dělicí body obou dělení D_1, D_2.

Lemma 11.2.6. *Je-li $D_1 \prec D_2$, pak pro funkci f omezenou na $[a,b]$ je*

$$s(f;D_1) \leq s(f;D_2) \leq S(f;D_2) \leq S(f;D_1)\,.$$

Důkaz. Nechť $D_1 = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n\} \in \mathcal{D}(a,b)$. Je-li $D_2 = D_1 \cup \{x^*\}$ a $x^* \in (a,b)$ není dělicím bodem D_1, pak existuje takové k, že $x^* \in (x_{k-1}, x_k)$. Zřejmě pak je

$$\begin{aligned}\sup\{f(x); x \in [x_{k-1}, x^*]\}\ (x^* - x_{k-1}) + \sup\{f(x); x \in [x^*, x_k]\}\ (x_k - x^*) \leq \\ \leq M_k(x_k - x_{k-1})\end{aligned}$$

a ostatní sčítanci konečných součtů, definujících příslušné horní součty, se nemění. Tvrzení lemmatu o horních součtech tedy platí, jestliže D_2 vzniklo z D_1 přidáním jediného bodu. Protože přidání konečného počtu bodů lze nahradit postupným přidáváním vždy jednoho bodu, platí tvrzení i pro obecné zjemnění D_2 dělení D_1. Stejně se dokáže i nerovnost pro dolní součty; zbytek je důsledkem Lemmatu 11.2.4. □

Lemma 11.2.7. *Pro libovolná dvě dělení $D_1, D_2 \in \mathcal{D}(a,b)$ a pro libovolnou omezenou funkci f na $[a,b]$ platí nerovnost*

$$s(f;D_1) \leq S(f;D_2)\,. \tag{11.10}$$

Důkaz. Je-li D společné zjemnění D_1 a D_2, pak je

$$s(f;D_1) \leq s(f;D) \leq S(f;D) \leq S(f;D_2)\,,$$

což dává nerovnost (11.10). □

Definice 11.2.8. [Riemann 1854, Darboux 1875] Pro funkci f omezenou na intervalu $[\,a,b\,]$ označme

$$I_h(f;a,b) = \inf\{S(f;D); D \in \mathcal{D}(a,b)\}\,,$$
$$I_d(f;a,b) = \sup\{s(f;D); D \in \mathcal{D}(a,b)\}\,.$$

Čísla $I_h(f;a,b)$ a $I_d(f;a,b)$ se nazývají *horní* a *dolní Riemannův integrál* funkce f na intervalu $[\,a,b\,]$.

Poznámka 11.2.9. Zřejmě je $I_d(f;a,b) \le I_h(f;a,b)$, což vyplývá z (11.10) přechodem k supremu přes všechna $D \in \mathcal{D}(a,b)$ na levé straně (11.10) a pak přechodem k infimu přes všechna $D \in \mathcal{D}(a,b)$ na pravé straně (11.10).

Definice 11.2.10. Je-li $I_d(f;a,b) = I_h(f;a,b)$, označíme toto číslo

$$(\mathcal{R})\!\int_a^b f\,. \tag{11.11}$$

a nazveme je *Riemannův integrál funkce f na intervalu* $[\,a,b\,]$. Pokud platí nerovnost $I_h(f;a,b) < I_d(f;a,b)$, říkáme, že Riemannův integrál funkce f na intervalu $[\,a,b\,]$ *neexistuje*. Pro množinu všech (omezených) funkcí f, pro které existuje integrál (11.11), budeme užívat označení $\mathcal{R}(a,b)$ [3]).

Poznámka 11.2.11. V zápisech teoretické povahy dáváme přednost kratšímu označení (11.11) před označením

$$(\mathcal{R})\!\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\ ; \tag{11.12}$$

označení v (11.12), které odpovídá dlouholetým zvyklostem, se však nebudeme v některých případech vyhýbat. Je užitečné, pokud např. integrovaná funkce závisí na nějakém parametru apod. Symbol $\mathrm{d}x$ ukazuje na proměnnou, vzhledem ke které se integruje. V dalším textu *budeme v celém tomto oddílu vynechávat* $(\mathcal{R})$ před znamením integrálu.

Věta 11.2.12 (Du Bois Reymond 1875, Darboux 1875). *Nechť funkce f je omezená na intervalu $[\,a,b\,]$. Potom Riemannův integrál* (11.11) *z funkce f vzhledem k intervalu $[\,a,b\,]$ existuje, právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $D \in \mathcal{D}(a,b)$ tak, že je*

$$S(f;D) - s(f;D) < \varepsilon\,. \tag{11.13}$$

Důkaz. Existuje-li integrál (11.11), je $I_d(f;a,b) = I_h(f;a,b) =: I$. Z definice suprema a infima plyne, že pro každé $\varepsilon > 0$ existují dělení D_1, D_2 tak, že

$$I - \varepsilon/2 < s(f;D_1)\,, \quad S(f;D_2) < I + \varepsilon/2\,. \tag{11.14}$$

Pro jejich společné zjemnění D je

$$I - \varepsilon/2 < s(f;D_1) \le s(f;D) \le S(f;D) \le S(f;D_2) < I + \varepsilon/2\,,$$

a tedy

$$S(f;D) - s(f;D) < I + \varepsilon/2 - (I - \varepsilon/2) = \varepsilon\,. \tag{11.15}$$

[3]) Nepíšeme $\mathcal{R}([\,a,b\,])$, neboť $\mathcal{R}(a,b)$ je stručnější. Viz také Poznámka 11.2.41.

Naopak, je-li podmínka (11.13) splněna, pro každé $\varepsilon > 0$ existuje D tak, že

$$s(f;D) \le I_d(f;a,b) \le I_h(f;a,b) \le S(f;D) < s(f;D) + \varepsilon\,,$$

takže $I_h(f;a,b) - I_d(f;a,b) < \varepsilon$, a tedy $I_d(f;a,b) = I_h(f;a,b)$. □

Věta 11.2.13. *Nechť f je funkce omezená na intervalu $[\,a,b\,]$. Potom pro každé $\varepsilon > 0$ existuje takové $\delta > 0$, že pro každé dělení $D \in \mathcal{D}(a,b)$, pro něž $\nu(D) < \delta$, je*

$$I_h(f;a,b) \le S(f;D) < I_h(f;a,b) + \varepsilon\,.$$

Důkaz. Z Definice 11.2.8 plyne, že existuje dělení $D_1 \in \mathcal{D}(a,b)$, pro něž je

$$S(f;D_1) < I_h(f;a,b) + \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{11.16}$$

Dále definujme $\delta = \varepsilon/2n\Omega$, kde $n+1$ je počet všech dělicích bodů dělení D_1 a $\Omega = \sup\{f(x) - f(y)\,;\, x,y \in [\,a,b\,]\}$. Zvolme nyní libovolné dělení D s dělicími body x_k, $k = 1,2,\ldots,m$, a s $\nu(D) < \delta$. Označme $D_2 := D \cup D_1$, takže D_2 je společné zjemnění D a D_1. Podle Lemmatu 11.2.6 je

$$S(f;D_2) \le S(f;D_1) < I_h(f;a,b) + \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{11.17}$$

Rozdělme pro $D = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ intervaly dělení $[\,x_{k-1},x_k\,]$, $k = 1,2,\ldots,m$, do dvou skupin: Do první skupiny zařadíme ty intervaly, pro které je $(x_{k-1},x_k) \cap D_1 \ne \emptyset$ a do druhé intervaly zbývající. Všimneme si, že intervaly druhé skupiny přispívají k horním součtům $S(f;D)$ a $S(f;D_2)$ stejně a jejich příspěvky k rozdílu $S(f;D) - S(f;D_2)$ se zruší. V každém z intervalů první skupiny leží alespoň jeden dělicí bod dělení D_1 různý od krajních bodů a,b; takových bodů je $(n-1)$. Každý interval I z této skupiny se rozpadne na několik (alespoň dva) intervalů dělení D_2, avšak součet jejich délek nepřevýší délku I odhadnutou shora číslem δ a rozdíl příspěvků k horním součtům je tedy odhadnut číslem $\Omega\,\delta$. Proto je

$$S(f;D) - S(f;D_2) \le (n-1)\cdot\Omega\,\delta < n\Omega\,\frac{\varepsilon}{2n\Omega} = \frac{\varepsilon}{2}\,, \tag{11.18}$$

Z (11.18) dostaneme s přihlédnutím k (11.16) a (11.17)

$$S(f;D) < S(f;D_2) + \frac{\varepsilon}{2} < I_h(f;a,b) + \varepsilon$$

z čehož už vyplývá dokazované tvrzení. □

Důsledek 11.2.14. *Je-li f funkce omezená na $[\,a,b\,]$, pak pro každou posloupnost dělení $\{D_k\}$, pro kterou $\nu(D_k) \to 0$, je*

$$\lim_{k\to\infty} S(f;D_k) = I_h(f;a,b)\,.$$

Analogicky platí následující dvě tvrzení, která dokazovat nebudeme; jejich důkaz by byl jen opakováním postupu, pomocí kterého jsme dostali Větu 11.2.13 a Důsledek 11.2.14.

Věta 11.2.15. *Nechť f je funkce omezená na intervalu $[a, b]$. Potom pro každé $\varepsilon > 0$ existuje takové $\delta > 0$, že pro každé dělení $D \in \mathcal{D}(a, b)$, pro něž $\nu(D) < \delta$, je*

$$I_d(f; a, b) \geq s(f; D) > I_d(f; a, b) - \varepsilon \,.$$

Důsledek 11.2.16. *Je-li f funkce omezená na $[a, b]$, pak pro každou posloupnost dělení $\{D_k\}$, pro kterou $\nu(D_k) \to 0$, je*

$$\lim_{k \to \infty} s(f; D_k) = I_d(f; a, b) \,.$$

Historická poznámka 11.2.17. Již jsme se zmínili o tom, že vedeme výklad přes upravenou definici Riemannova integrálu; autorem tohoto postupu je Jean Gaston Darboux (1842 – 1917). Riemannův přístup přiblížíme přímo citátem z jeho habilitační práce *Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe* z r. 1853 (podrobněji viz např. [7], str. 59).

Neurčitost, která ještě v některých základních bodech teorie určitého integrálu panuje, nás nutí předeslat něco o pojmu určitého integrálu a o rozsahu jeho platnosti.

Tedy za prvé: Co se má rozumět pod $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$?

Abychom toto stanovili, zvolme mezi a a b seřazenou dle velikosti řadu hodnot $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ a označme krátce $x_1 - a$ znakem δ_1, $x_2 - x_1$ znakem $\delta_2, \ldots,$ $b - x_{n-1}$ znakem δ_n a buď ε kladný pravý zlomek. Potom bude hodnota součtu

$$S = \delta_1 f(a + \varepsilon_1 \delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \varepsilon_2 \delta_2) + \delta_3 f(x_2 + \varepsilon_3 \delta_3) + \cdots + \delta_n f(x_{n-1} + \varepsilon_n \delta_n)$$

záviset na volbě parametrů δ a veličin ε. Bude-li nyní mít (ten součet) *tu vlastnost, že ať jsou zvoleny δ a ε jakkoli, bude se nekonečně blížit pevné hranici A, jakmile budou všechna δ nekonečně malá, pak se tato hodnota* (tj. A) *nazývá $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.*

Když tuto vlastnost nemá, nemá $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ význam.

Srovnáme-li nyní Cauchyho definici a Riemannovu definici, používá Riemann při vytváření součtů hodnoty f nikoli v *počátečních* bodech dělicích intervalů, ale v libovolně zvolených vnitřních bodech $x_{k-1} + \varepsilon_k \delta_k$ těchto intervalů, a požaduje, aby po jistém „limitním přechodu“ vzhledem k normě dělení výsledná limita existovala a nezávisela navíc na volbě ε_k.

Definice 11.2.18. Položme pro libovolné dělení $D = \{x_0 < x_1 < \cdots < x_n\}$ intervalu $[a, b]$ a libovolnou n-tici $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ bodů $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$

$$\sigma(f; D, \xi) := \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \,.$$

Tyto součty budeme nazývat *integrální součty* pro funkci f, dělení D a n-tici *význačných bodů* ξ[4]).

Poznámka 11.2.19. Pro každou omezenou funkci f, dělení $D \in \mathcal{D}(a, b)$ a libovolně zvolené význačné body ξ platí při označení z Definice 11.2.18 pro integrální součty nerovnosti

$$s(f; D) \leq \sigma(f; D, \xi) \leq S(f; D) \,. \tag{11.19}$$

[4]) Někdy se užívá vazby *integrální součet příslušející výběru reprezentantů ξ*.

Přirozeně se nám vnucuje (správná) domněnka, že oba popsané přístupy (tj. původní Riemannův s integrálními součty popsaný v Historické poznámce 11.2.17, i modifikace Darbouxova) vedou k témuž pojmu. To bude dokázáno v následujících dvou větách.

Věta 11.2.20. *Jestliže pro funkci f omezenou na $[a,b]$ a pro každou posloupnost dělení $D_k \in \mathcal{D}(a,b)$, pro kterou $\lim_{k\to\infty} \nu(D_k) = 0$ existuje vlastní*

$$\lim_{k\to\infty} \sigma(f; D_k, \xi) = I \tag{11.20}$$

nezávisle na volbě význačných bodů ξ, potom je $f \in \mathcal{R}(a,b)$ a $\int_a^b f = I$.

Proof. Zvolme $\varepsilon > 0$ a z posloupnosti dělení $\{D_k\}$ takové $D_{k_0} = D$, aby

$$I - \varepsilon < \sigma(f; D, \xi) < I + \varepsilon\,.$$

Tato nerovnost platí pro každou volbu význačných bodů ξ. Protože je

$$s(f;D) = \inf\{\,\sigma(f;D,\xi)\,;\,\xi\} \quad \text{a} \quad S(f;D) = \sup\{\,\sigma(f;D,\xi)\,;\,\xi\}\,,$$

dostáváme odtud

$$I - \varepsilon \le s(f;D) \le S(f,D) \le I + \varepsilon\,, \tag{11.21}$$

z čehož plyne $S(f;D) - s(f;D) < 3\varepsilon$, a tedy $f \in \mathcal{R}(a,b)$. Z nerovností

$$I - \varepsilon \le s(f;D) \le \int_a^b f \le S(f,D) \le I + \varepsilon$$

vyplývá rovnost $\int_a^b f = I$. □

Věta 11.2.21. *Je-li $f \in \mathcal{R}(a,b)$, pak pro každou posloupnost dělení $\{D_k\}$, pro kterou $\nu(D_k) \to 0$, a každou volbu význačných bodů ξ příslušných k D_k je*

$$\lim_{k\to\infty} \sigma(f; D_k, \xi) = \int_a^b f\,.$$

Důkaz. Zvolme posloupnost $\{D_k\}$ dělení intervalu $[a,b]$ takovou, že $\nu(D_k) \to 0$. Pak z (11.19) plyne pro všechna $k \in \mathbb{N}$

$$s(f;D_k) \le \sigma(f;D_k,\xi) \le S(f;D_k)$$

pro každou možnou volbu význačných bodů ξ. Limitním přechodem v předcházející nerovnosti dostaneme pomocí Důsledku 11.2.14 a Důsledku 11.2.16 žádanou rovnost (11.20). □

Poznámka 11.2.22. Riemannův integrál nám umožňuje definovat funkcionál $P(f;a,b)$ z úlohy o ploše tak, že jsou splněny všechny potřebné podmínky (O1) – (O3) pro P ze začátku Kapitoly 9.

Načrtnete-li si pár ilustrativních obrázků, snadno nahlédnete, že horní a dolní součty jsou *přirozenými* odhady plochy $P(f;a,b)$. Můžeme na ně pohlížet též jako na integrály jistých po částech konstantních funkcí, které shora či zdola omezují funkci f.

Poznamenejme, že poměrně snadno můžeme definovat Riemannův integrál *komplexních* funkcí reálné proměnné: Jestliže pro takovou funkci f položíme $f_1 = \operatorname{Re} f$, $f_2 = \operatorname{Im} f$, definujeme

$$\int_a^b f = \int_a^b f_1 + \mathrm{i} \int_a^b f_2 \,,$$

pokud existují oba integrály na pravé straně rovnosti. Odtud je však zřejmé, že se prakticky stačí zabývat pouze reálnými funkcemi reálné proměnné.

Věta 11.2.23. *Nechť f je funkce definovaná na intervalu $[\,a,b\,]$ a nechť je splněna aspoň jedna z podmínek*

$$(1) \quad f \in \mathcal{C}([\,a,b\,])\,, \qquad (2) \quad f \text{ je monotónní na } [\,a,b\,]\,.$$

Potom integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existuje.

Důkaz. V obou případech je zřejmě f omezená na $[\,a,b\,]$. Je-li $\nu(D)$ norma dělení D (viz Definice 11.2.1, vztah (11.5)) a m_k, M_k jsou definovány jako v (11.6), je

$$S(f;D) - s(f;D) \le \sum_{k=1}^{n} \nu(D) \cdot (M_k - m_k)\,. \tag{11.22}$$

Je-li nyní f neklesající na $[\,a,b\,]$, je

$$\sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) = \sum_{k=1}^{n} \big(f(x_k) - f(x_{k-1})\big) = f(b) - f(a)\,,$$

a tak je výraz vlevo v (11.22) odhadnut shora číslem $\nu(D)\,(f(b) - f(a))$. Analogickou úvahou získáme pro nerostoucí funkci odhad číslem $\nu(D)\,(f(a) - f(b))$, takže pro každou monotónní funkci dostáváme odhad číslem $\nu(D)\,|f(a) - f(b)|$. Protože lze pro libovolné $\varepsilon > 0$ volit $\nu(D)$ tak, že $\nu(D)\,|\,f(b) - f(a)\,| < \varepsilon$, dostaneme existenci integrálu podle Věty 11.2.12.

Uvažujme nyní případ f spojité na $[\,a,b\,]$. Potom je f podle Věty 11.1.3 i stejnoměrně spojitá v $[\,a,b\,]$ a lze k $\varepsilon > 0$ volit $\delta > 0$ tak, že

$$(x, y \in [\,a,b\,]\,, |x-y| < \delta) \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon\,.$$

Odtud ale plyne, že pro každé dělení D, pro něž $\nu(D) < \delta$, je $M_k - m_k \le \varepsilon$, $k = 1, \ldots, n$, a tedy

$$S(f;D) - s(f;D) \le \varepsilon \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = \varepsilon(b-a)\,.$$

Odtud opět plyne existence integrálu pomocí Věty 11.2.12. □

Příklad 11.2.24. Nechť $m \in \mathbb{N}$, $A = \{x_1, \ldots, x_m\} \subset [\,a,b\,]$, nechť f je omezená funkce a $f(x) = 0$ pro všechna $x \in [\,a,b\,] \setminus A$. Potom je

$$\int_a^b f = 0\,.$$

Zvolme pro každé $n \in \mathbb{N}$ takové dělení $D_n \in \mathcal{D}(a,b)$, aby pro $k = 1, \ldots, n$ platilo $x_k - x_{k-1} = \nu(D_n) = (b-a)/n$; takové dělení, kterému se říká *ekvidistantní dělení*, je jednoznačně určeno. Označme $M = \sup\{|f(x)|;\, x \in [\,a, b\,]\}$. Potom každý z bodů $x_1, \dots, x_m$ leží nejvýše ve dvou intervalech dělení D_n, takže

$$\lim_{n\to\infty} s(f; D_n) \geq \lim_{n\to\infty} (-2Mm(b-a)/n) = 0\,,$$
$$\lim_{n\to\infty} S(f; D_n) \leq \lim_{n\to\infty} (2Mm(b-a)/n) = 0\,,$$

a tedy i

$$\lim_{n\to\infty} (S(f; D_n) - s(f; D_n)) = 0\,.$$

Odtud plyne, že zkoumaný integrál existuje a jeho hodnota je rovna 0. Speciálně to platí pro $f = \chi_A$, tj. pro integrál charakteristické funkce konečné $A \subset I$.

Příklady 11.2.25. 1. Je-li δ charakteristická funkce množiny $\mathbb{Q}$ v $\mathbb{R}$, *neexistuje* Riemannův integrál funkce δ přes interval $[\,0, 1\,]$. Je totiž

$$s(\delta; D) = 0 < 1 = S(\delta; D)$$

pro libovolně zvolené $D \in \mathcal{D}(0, 1)$, a tedy $I_d(\delta; 0, 1) = 0$, $I_h(\delta; 0, 1) = 1$; každý (nedegenerovaný) interval totiž obsahuje racionální i iracionální číslo. Jak již víme, funkce δ je známa pod jménem Dirichletova funkce.

2. Nechť ϱ je Riemannova funkce, definovaná v Příkladu 4.2.9. Tvrdíme, že

$$\int_0^1 \varrho = 0\,.$$

Všechny dolní součty jsou v tomto případě rovny 0, protože každý nedegenerovaný interval ležící v $[\,0, 1\,]$ obsahuje iracionální číslo. Dokážeme, že infimum horních součtů je rovněž rovno 0.

Pro každé $\varepsilon > 0$ je množina $\{x \in [\,0, 1\,];\, \varrho(x) > \varepsilon/2\}$ konečná. Přidáme k ní 0 a 1 a získáme $D_1 = \{\,0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1\,\}$. Doporučujeme, aby čtenář sledoval obrázek Obr. 11. 1, resp. aby si načrtl vlastní. Každý z těchto dělicích bodů umístíme do jistého intervalu dělení

$$D = \{\,0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{2n+1} = 1\,\}$$

s vlastnostmi:

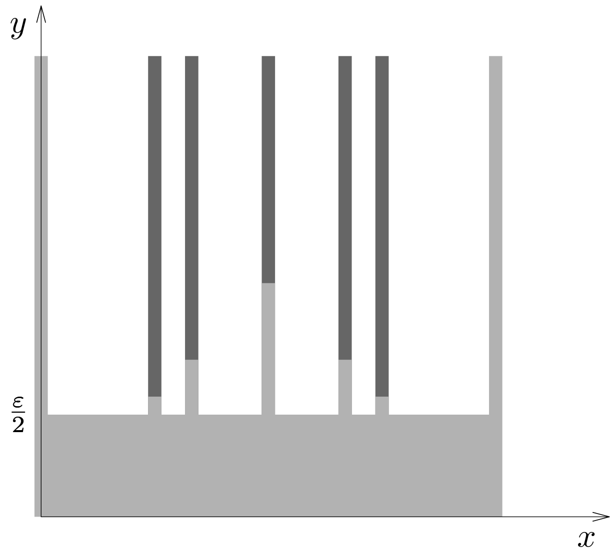
$$x_{2k} < t_k < x_{2k+1} \quad \text{pro } k = 1, 2, \dots, n-1\,,$$
$$x_{2k+1} - x_{2k} \leq \frac{\varepsilon}{2(n+1)} \quad \text{pro } k = 0, 1, \dots, n\,;$$

takové dělení existuje. Obr. 11. 1 odpovídá volbě $1/4 < \varepsilon/2 < 1/3$. Body dělení D_1 jsou tedy obsaženy dle přirozeného pořadí v „sudých“ intervalech dělení D, „liché“ intervaly body z D_1 neobsahují. Je-li $M_k = \sup\{\,f(t)\,;\, t \in [\,x_{k-1}, x_k\,]\,\}$, uvažme, že v součtu přes liché intervaly je

$$M_{2k+1} \leq 1 \quad \text{a} \quad \sum_{k=0}^{n} (x_{2k+1} - x_{2k}) < \varepsilon/2\,,$$

zatímco v součtu přes sudé intervaly je

$$M_{2k} \leq \varepsilon/2 \quad \text{a} \quad \sum_{k=1}^{n-1} (x_{2k} - x_{2k-1}) < 1\,.$$



Obr. 11. 1.

Z toho vyplývá $S(\varrho, D) < \varepsilon$. Podle Věty 11.2.12 integrál existuje a je roven 0, což je společná hodnota všech dolních součtů $s(\varrho, D)$. Na Obr. 11. 1 součet obsahů šedivě zbarvených úzkých obdélníčků spolu s obsahem „většího“ obdélníku $[0,1] \times [0, \varepsilon/2]$ dává představu o *odhadu* příslušného horního součtu a zároveň i rozdílu mezi horním a dolním součtem. My jsme při odhadování zvětšili tento rozdíl o plochu černě zbarvených obdélníčků, avšak tak, že odhad rozdílu horního a dolního součtu číslem ε zůstal zachován.

3. Na předcházejících dvou příkladech je vhodné si všimnout, že funkce δ není spojitá v žádném bodě intervalu $[0,1]$, zatímco ϱ je spojitá ve všech bodech množiny $[0,1] \setminus \mathbb{Q}$.

Poznámka 11.2.26. Zamysleme se nad Příklady 11.2.25. Množina $A := \mathbb{Q} \cap [0,1]$ je dosti velká v tom smyslu, že každý (otevřený) interval $I \subset [0,1]$ obsahuje dokonce nekonečně mnoho bodů množiny A. Je však zároveň v jistém smyslu *malá*, neboť ji lze pokrýt *spočetným* systémem (otevřených) intervalů, součet jejichž délek je libovolně malý. Skutečně, seřadíme-li prvky A do prosté posloupnosti $\{r_n\}$ a zvolíme-li libovolně $\varepsilon > 0$, lze položit pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$I_n = (r_n - \varepsilon/2^{n+1}, r_n + \varepsilon/2^{n+1}).$$

Systém $\{I_n;\, n \in \mathbb{N}\}$ zřejmě pokrývá A. Protože délka d_n intervalu I_n je rovna $\varepsilon/2^n$, je

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n = \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{1 - 1/2} = \varepsilon\,,$$

takže součet délek všech intervalů I_n může být libovolně malý. To nás vede k tomuto pojmu:

Definice 11.2.27. Je-li možné množinu $A \subset \mathbb{R}$ pro každé $\varepsilon > 0$ pokrýt *spočetně mnoha* otevřenými intervaly s úhrnnou délkou menší než ε, říkáme, že A má *nulovou* (*Lebesgueovu*) *míru.*

Poznámka 11.2.28. Lebesgueova míra λ je zobecněním délky intervalu, protože je $\lambda(I) = b - a$ pro jakýkoli interval o koncových bodech a, b. Je to pojem dosti složitý, zatím však vystačíme pouze s předcházející definicí. Platí následující věta, kterou *nebudeme* dokazovat a která popisuje jinou nutnou a postačující podmínku pro existenci Riemannova integrálu. Věta v podstatě pochází již od Riemanna, i když pojem míry se konstituoval mnohem později. Dokázal ji Henri Louis Lebesgue (1875 – 1941) v práci [5] z r. 1904. Poznamenejme, že zajímavější je pro případ vícerozměrné integrace.

Věta 11.2.29. *Nechť omezená funkce f je definována na intervalu $[a, b]$. Potom Riemannův integrál z f na $[a, b]$ existuje, právě když má množina D všech bodů nespojitosti funkce f v $[a, b]$ nulovou míru.*

Příklad 11.2.30. Je vcelku zřejmé, že je-li $A \subset [a, b]$ *libovolná spočetná množina*, má nulovou míru. Předvedený důkaz, který jsme použili v Poznámce 11.2.26 pro speciální spočetnou množinu A, lze beze změny provést pro *obecnou* spočetnou množinu A.

Snadno lze též definovat funkci f na $[a, b]$ tak, že není spojitá *právě v bodech* množiny A; viz Příklad 4.2.9. Vytvoříme prostou posloupnost $\{x_n\}$ všech bodů množiny A a pro libovolnou nerostoucí posloupnost čísel $a_n > 0$, $a_n \to 0$ definujeme $f(x_n) = a_n$, $n \in \mathbb{N}$ a $f(x) = 0$ pro všechna $x \in [a, b] \setminus A$.

Takto definovaná *zobecněná Riemannova funkce* není spojitá právě v bodech množiny A, avšak není obtížné dokázat (podobným způsobem jako pro Riemannovu funkci, dokonce formálně jednodušeji), že takto definovaná funkce má na $[a, b]$ nulový integrál.

Poznámka 11.2.31. V dalších tvrzeních odvodíme jednoduché vlastnosti Riemannova integrálu. Shrneme je pak do jednoduchého tvrzení (Věta 11.2.35) o funkcionálu, tj. zobrazení

$$A : f \mapsto \int_a^b f\,, \quad f \in \mathcal{R}(a, b)\,. \tag{11.23}$$

Lemma 11.2.32. *Je-li $f \in \mathcal{R}(a, b)$ a $f \geq 0$, je také $A(f) \geq 0$, tj. funkcionál A je nezáporný.*

Důkaz. Jelikož jsou pro všechna $D \in \mathcal{D}(a, b)$ všechny dolní součty $s(f; D)$ zřejmě nezáporné, je nezáporné i jejich supremum, tj. $A(f)$. ☐

Věta 11.2.33. *Nechť $f, g \in \mathcal{R}(a, b)$. Potom je též $f + g \in \mathcal{R}(a, b)$ a*

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g\,, \tag{11.24}$$

tj. funkcionál A je aditivní.

Důkaz. Nejprve dokážeme, že platí implikace

$$(f, g \in \mathcal{R}(a, b)) \Rightarrow (f + g \in \mathcal{R}(a, b))\,.$$

V každém intervalu dělení $[\,x_{k-1}, x_k\,]$ dělení $D = \{x_0 < \cdots < x_n\}$ je

$$M_k^{f+g} = \sup\{f(t) + g(t)\,\} \le \sup\{f(t)\} + \sup\{g(t)\} = M_k^f + M_k^g\,,$$

kde supremum bereme přes všechna $t \in [\,x_{k-1}, x_k\,]$. Pro infimum platí nerovnost

$$m_k^f + m_k^g = \inf\{f(t)\} + \inf\{g(t)\} \le \inf\{f(t) + g(t)\} = m_k^{f+g}\,.$$

Z těchto nerovností snadno dostaneme násobením faktorem $(x_k - x_{k-1})$ a sečtením pro všechna $k = 1, \ldots, n$

$$s(f;D) + s(g;D) \le s(f+g;D) \le S(f+g;D) \le S(f;D) + S(g;D)\,, \tag{11.25}$$

z čehož vyplývá odhad

$$S(f+g;D) - s(f+g;D) \le (S(f;D) - s(f;D)) + (S(g;D) - s(g;D))\,.$$

Odtud pomocí Věty 11.2.12 dostaneme dokazovanou implikaci.

Zvolme nyní posloupnost $D_k \in \mathcal{D}(a,b)$ tak, aby $\nu(D_k) \to 0$. Nerovnost v (11.25) platí, pokud v ní píšeme D_k místo D a pokud pak provedeme v nerovnosti

$$s(f;D_k) + s(g;D_k) \le s(f+g;D_k) \le S(f+g;D_k) \le S(f;D_k) + S(g;D_k)$$

limitní přechod pro $k \to \infty$, dostaneme podle Důsledků 11.2.14 a 11.2.16 z $f, g \in \mathcal{R}(a,b)$ dokazovanou rovnost (11.24). □

Věta 11.2.34. *Nechť $f \in \mathcal{R}(a,b)$. Potom pro všechna $c \in \mathbb{R}$ platí rovnost*

$$\int_a^b cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,, \tag{11.26}$$

tj. pro všechna $c \in \mathbb{R}$ je $A(cf) = cA(f)$.

Důkaz. Rovnost zřejmě platí pro $c = 0$ a pro $c > 0$ snadno nahlédneme, že také

$$S(cf;D) = c\,S(f;D)\,, \quad \text{a} \quad s(cf;D) = c\,s(f;D)\,.$$

Je-li $c < 0$, zřejmě platí $S(cf;D) = c\,s(f;D)$ a $s(cf;D) = c\,S(f;D)$. Odtud již snadno obdržíme (11.26). □

Jestliže uvážíme obsah tvrzení Lemmatu 11.2.32, Věty 11.2.33 a Věty 11.2.34, vyplývá z nich tvrzení:

Věta 11.2.35. *Riemannův integrál (přesněji: funkcionál A definovaný vztahem* (11.23)*) je nezáporným lineárním funkcionálem na lineárním prostoru $\mathcal{R}(a,b)$.*

Lemma 11.2.36. *Funkcionál A je* neklesající, *tj. pro $f, g \in \mathcal{R}(a,b)$ platí:*

$$f \le g \Rightarrow A(f) \le A(g)\,.$$

Důkaz. Pokud je $f, g \in \mathcal{R}(a,b)$, pak z Vět 11.2.33 a 11.2.34 vyplývá $(g - f) \in \mathcal{R}(a,b)$. Z $g - f \ge 0$ plynou podle Věty 11.2.32 a Věty 11.2.33 postupně vztahy

$$A(g) - A(f) = A(g - f) \ge 0\,,$$

čímž je tvrzení dokázáno. □

Tvrzení platí ve zcela obecném kontextu: Nezáporný lineární funkcionál (na lineárním prostoru X) je ve zřejmém smyslu monotónní. Monotonie funkcionálu A má jeden zajímavý důsledek. Nejprve připomeneme již dříve užívané označení.

Označení 11.2.37. Pro každé číslo $a \in \mathbb{R}$ jsme zavedli v Poznámce 1.3.16 jeho kladnou a zápornou část. Podobně zavádíme *kladnou část funkce f* a *zápornou část funkce f* vztahy

$$f^+ : x \mapsto (f(x))^+ , \quad f^- : x \mapsto (f(x))^- , \quad x \in D_f .$$

Snadno nahlédneme, že je

$$f^+ = \frac{|f| + f}{2} , \quad f^- = \frac{|f| - f}{2} , \quad f = f^+ - f^- , \quad |f| = f^+ + f^- .$$

Lemma 11.2.38. *Je-li $f \in \mathcal{R}(a, b)$, leží i funkce f^+, f^- a $|f|$ v $\mathcal{R}(a, b)$.*

Důkaz. Je-li $f \in \mathcal{R}(a, b)$, pak pro libovolné dělení $D \in \mathcal{D}(a, b)$ platí

$$\begin{aligned} S(f^+; D) - s(f^+; D) &\le S(f; D) - s(f; D) , \\ S(f^-; D) - s(f^-; D) &\le S(f; D) - s(f; D) . \end{aligned}$$

První nerovnost je zřejmá pro nezápornou funkci f, nastává totiž rovnost. Pro každý interval $[\, x_{k-1}, x_k \,]$ dělení $D \in \mathcal{D}(a, b)$ je

$$\sup\{f^+(t)\} - \inf\{f^+(t)\} \le \sup\{f(t)\} - \inf\{f(t)\} \tag{11.27}$$

kde suprema i infima bereme vzhledem k $t \in [\, x_{k-1}, x_k \,]$. Je-li f nezáporná na $[\, x_{k-1}, x_k \,]$, platí v (11.27) rovnost, je-li nekladná, je na levé straně 0, vpravo nezáporné číslo a nerovnost opět platí; pokud f nabývá na $[\, x_{k-1}, x_k \,]$ kladných i záporných hodnot, nastává v (11.27) ostrá nerovnost; zřejmě pak totiž je $\inf\{f^+(t)\} \ge 0 > \inf\{f(t)\}$. Již několikrát prováděným přechodem k horním součtům dostaneme první dokazovanou nerovnost, druhá se dokáže obdobně, nebo užitím vztahu $f^- = (-f)^+$. S použitím Věty 11.2.12 a předcházející věty o linearitě dostaneme odsud integrabilitu funkcí f^+, f^- a $|f|$. □

Z monotonie integrálu a nerovnosti $-|f| \le f \le |f|$ dostaneme snadno integrací tento důsledek:

Důsledek 11.2.39. *Pro každou $f \in \mathcal{R}(a, b)$ platí nerovnost*

$$\Big| \int_a^b f \Big| \le \int_a^b |f| . \tag{11.28}$$

Speciálně pro $f, g \in \mathcal{R}(a, b)$ platí

$$\Big| \int_a^b f - \int_a^b g \Big| \le \int_a^b | f - g | . \tag{11.29}$$

Poznámka 11.2.40. K nerovnosti (11.29) se v Kapitole 12 o metrických prostorech v Poznámce 12.5.6 vrátíme. Všimněte si, že jestliže se „integrálně“ *málo liší* funkce f a g, tj. číslo na pravé straně nerovnosti (11.29) je malé, pak je rozdíl jejich Riemannových integrálů rovněž malý. Dále, pokud např. $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ pro všechna $x \in [\, a, b \,]$, lze integrál vlevo v (11.29) odhadnout číslem $\varepsilon(b - a)$.

Poznámka 11.2.41. Nabývá-li f nenulových hodnot jen na *konečné* množině $A \subset [a, b]$, a je-li $g \in \mathcal{R}(a, b)$, je podle Věty 11.2.33 i $f + g \in \mathcal{R}(a, b)$, přičemž a s přihlédnutím k výsledku Příkladu 11.2.24

$$\int_a^b f + g = \int_a^b f + \int_a^b g = \int_a^b g\,.$$

Změníme-li tedy funkci $g \in \mathcal{R}(a, b)$ na konečné množině, bude nová funkce opět integrovatelná a její integrál bude roven $\int_a^b g$. Je-li funkce g definována všude v $[a, b] \setminus A$, kde A je konečná množina, a jsou-li h_1, h_2 funkce, definované všude na $[a, b]$ a rovné g všude v $[a, b] \setminus A$, jsou obě buď integrovatelné, nebo obě nejsou integrovatelné v $[a, b]$. V prvním případě mají integrály obou funkcí stejnou hodnotu. To umožňuje zobecnit původní definici Riemannova integrálu takto:

Je-li funkce g omezená v $[a, b] \setminus A$, kde A je konečná množina, a je-li $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ rovna g všude v $[a, b] \setminus A$, definujeme Riemannův integrál funkce g na intervalu $[a, b]$ rovností

$$\int_a^b g := \int_a^b h\,, \quad \text{existuje-li integrál vpravo.}$$

Jinými slovy: Je-li $D_g = [a, b] \setminus A$, dodefinujeme g nějak na množině A (třeba tak, že ji tam položíme rovnou 0) a zjistíme, zda vzniklá funkce má Riemannův integrál podle původní definice. Pokud ano, nezáleží na tom, jak jsme funkci g dodefinovali; nemusíme ji tam tedy definovat vůbec, a přesto můžeme pracovat s jejím integrálem — ovšem podle nyní uvedené obecnější definice.

Již dříve jsme se však dohodli, že pokud budeme mluvit o Riemannově integrálu $\int_a^b g$, budeme mlčky předpokládat, že g je definována všude v $[a, b]$.

Při motivačních úvahách před zavedením Newtonova integrálu jsme pracovali s názornými vlastnostmi obsahu „podgrafu kladné spojité funkce“. Ukážeme, že lze tento obsah definovat pomocí Riemannova integrálu. Je zřejmé, že Riemannův integrál je nezáporný (tedy monotónní) funkcionál, který jako obsah množiny pod grafem konstantní kladné funkce c dává očekávaný výsledek $\int_a^b c(x)\,\mathrm{d}x = c(b-a)$, tedy obsah obdélníku se stranami o délkách $b - a$ a c. Stačí tedy pouze dokázat *aditivitu vůči oboru.*

Lemma 11.2.42. *Je-li $a \le c < d \le b$, a je-li $f \in \mathcal{R}(a, b)$, je i $f \in \mathcal{R}(c, d)$.*

Důkaz. Předpokládejme, že $\varepsilon > 0$ a podle Věty 11.2.12 zvolme dělení $D \in \mathcal{D}(a, b)$ tak, že pro f a D platí (11.13), tj. $S(f; D) - s(f; D) < \varepsilon$. Potom pro $D_1 \in \mathcal{D}(a, b)$, $D_1 = D \cup \{c, d\}$ zřejmě podle Lemmatu 11.2.6 je rovněž $S(f; D_1) - s(f; D_1) < \varepsilon$. Označme $D_2 = D_1 \cap [c, d]$. Ze zřejmé nerovnosti

$$S(f; D_2) - s(f; D_2) < S(f; D_1) - s(f; D_1) < \varepsilon$$

(při přechodu od D_1 k D_2 vynecháváme ve vyjádření $S(f; D_1) - s(f; D_1)$ nezáporné sčítance), plyne žádané tvrzení. ☐

Věta 11.2.43. *Nechť $a < c < b$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, a nechť f je funkce definovaná na $[a, b]$. Pak je*

$$f \in \mathcal{R}(a, b)\,, \ \textit{právě když je}\ (f \in \mathcal{R}(a, c)) \wedge (f \in \mathcal{R}(c, b))\,, \tag{11.30}$$

načež

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f\,. \tag{11.31}$$

Důkaz. Existuje-li integrál na levé straně (11.31), existují podle Lemmatu 11.2.42 i oba integrály vpravo. Obráceně: Existují-li integrály vpravo, existují pro každé $\varepsilon > 0$ dělení $D' \in \mathcal{D}(a,c)$, $D'' \in \mathcal{D}(c,b)$ tak, že

$$S(f;D') - s(f;D') < \varepsilon/2 \quad \text{a} \quad S(f;D'') - s(f;D'') < \varepsilon/2\,. \tag{11.32}$$

Označíme-li $D := D' \cup D''$, je $D \in \mathcal{D}(a,b)$ a

$$S(f;D) = S(f;D') + S(f;D'')\,, \quad s(D) = s(f;D') + s(f;D'')\,,$$

takže $S(f;D) - s(f;D) < \varepsilon$. Z toho podle Věty 11.2.12 plyne, že existuje $\int_a^b f$. Ze základní nerovnosti (11.8) a z (11.32) dostaneme

$$s(f;D') \le \int_a^c f \le s(f;D') + \varepsilon/2\,, \quad s(f;D'') \le \int_c^b f \le s(f;D'') + \varepsilon/2\,. \tag{11.33}$$

Jelikož víme, že $s(f;D) = s(f;D') + s(f;D'')$, obdržíme z (11.33) sečtením

$$s(f;D) \le \int_a^b f \le s(f;D) + \varepsilon\,.$$

Je zřejmé, že součet $\int_a^c f + \int_c^b f$ i integrál $\int_a^b f$ leží v intervalu $[\,s(f;D), s(f;D) + \varepsilon\,]$ délky ε. Protože $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, platí rovnost (11.31). □

Definice 11.2.44. Až dosud jsme vždy integrovali přes interval $[\,a,b\,]$ za předpokladu, že $a < b$. Jeví se účelné definovat pro každou f definovanou v bodě a

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x := 0\,,$$

a také

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x := -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

je-li $f \in \mathcal{R}(a,b)$.

Poznámka 11.2.45. Čtenář si může rozmyslit, že díky této úmluvě platí vzorec (11.31) pro libovolnou vzájemnou polohu bodů a, b, c, jakmile existuje Riemannův integrál na nejdelším z intervalů, na kterých se ve vzorci integruje.

Z úvahy o ploše na začátku Kapitoly 9 vyplývá, že funkce

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

je pro spojitou nezápornou $f \in \mathcal{C}([\,a,b\,])$ *primitivní funkcí* k f. Nyní provedeme prakticky stejnou úvahu za obecnějších předpokladů.

Věta 11.2.46. *Nechť $f \in \mathcal{R}(a,b)$, $a < c < b$, a nechť c je bod spojitosti funkce f. Označíme-li*

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\,,\ x \in [\,a,b\,]\,, \qquad \textit{je} \qquad F'(c) = f(c)\,.$$

Označíme-li

$$G(x) := \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t\,,\ x \in [\,a,b\,]\,, \qquad \textit{je} \qquad G'(c) = -f(c)\,.$$

Důkaz. Z podmínky $f \in \mathcal{R}(a,b)$ podle Lemmatu 11.2.42 vyplývá, že obě funkce F i G jsou definovány na $[\,a,b\,]$. Je-li $h > 0$ a body c, $c+h$ leží v intervalu $[\,a,b\,]$, je podle (11.31)

$$\int_c^{c+h} f = \int_a^{c+h} f - \int_a^c f\,.$$

Ze spojitosti funkce f v bodě c plyne, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že je $c + \delta \le b$, a pro všechna $x \in [\,c, c+\delta\,]$ je $-\varepsilon \le f(x) - f(c) \le \varepsilon$. Je-li tedy $h \in (0,\delta)$, je podle Lemmatu 11.2.36 a Věty 11.2.33

$$-\varepsilon\, h \le \int_c^{c+h} (f(x) - f(c))\,\mathrm{d}t\, = F(c+h) - F(c) - h\, f(c) \le \varepsilon\, h\,,$$

neboli

$$\left|\, \frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c) \,\right| \le \varepsilon\,. \tag{11.34}$$

Z toho je patrné, že $F'_+(c) = f(c)$; analogicky se ukáže, že i $F'_-(c) = f(c)$. Existuje tedy derivace $F'(c)$ a je rovna $f(c)$. Poznamenejme dále, že $G(x) = \int_a^b f - \int_a^x f$, z čehož již snadno plyne důkaz tvrzení pro funkci G. □

Poznámka 11.2.47. Čtenář si snadno rozmyslí, že předcházející tvrzení lze rozšířit i na jednostranné derivace v krajních bodech intervalu $[\,a,b\,]$; princip důkazu je stejný.

Nyní již lze dokázat Větu 9.1.6, kterou jsme dosud užívali bez důkazu:

Věta 11.2.48 (Cauchy 1823). *Nechť $f \in \mathcal{C}(a,b)$, kde $(a,b) \subset \mathbb{R}$ je libovolný otevřený interval. Potom existuje primitivní funkce F k funkci f na (a,b).*

Důkaz. Zvolme pevně bod $x_0 \in (a,b)$ a položme (srovnejte s Definicí 11.2.44)

$$F(x) := \int_{x_0}^x f\,, \quad x \in (a,b)\,; \tag{11.35}$$

existence integrálu pro všechna $x \in (a,b)$ plyne ze spojitosti funkce f. Je-li $c \in (a,b)$, zvolme $a', b' \in (a,b)$ tak, že body x_0, c leží v (a',b') a definujme funkci G v (a',b') rovností

$$G(x) = \int_{a'}^x f\,.$$

Podle Věty 11.2.46 je $G'(c) = f(c)$, a protože se funkce G a

$$F(x) = G(x) + \int_{x_0}^{a'} f\,, \quad x \in (a',b')\,,$$

liší jen o aditivní konstantu, je $F'(c) = G'(c) = f(c)$. Protože $c \in (a, b)$ bylo libovolné číslo, je $F' = f$ v intervalu (a, b), takže funkce F je skutečně primitivní funkcí k f. $\square$

Poznámka 11.2.49. Je užitečné uvědomit si, jak volba bodu x_0 v předcházející větě souvisí s aditivní konstantou, až na kterou je primitivní funkce jednoznačně určena. Pomocí (11.35) definujeme totiž tu primitivní funkci F k f, pro kterou je $F(x_0) = 0$.

Lemma 11.2.50. *Nechť $f \in \mathcal{R}(a, b)$. Potom existuje $M < \infty$ tak, že pro libovolné dva body $x, y \in (a, b)$ platí*

$$\Big| \int_x^y f \Big| \leq M|x - y|\,. \tag{11.36}$$

Je-li funkce $f \in \mathcal{C}(a, b)$ omezená v (a, b), je primitivní funkce F definovaná vzorcem (11.35) *stejnoměrně spojitá na (a, b).*

Důkaz. Je-li $|f| \leq M$ na $[\,a, b\,]$, je odhad (11.36) jednoduchým důsledkem (11.28) z Lemmatu 11.2.39. Je-li f spojitá a $|\,f\,| < M$, zvolíme k $\varepsilon > 0$ číslo $\delta > 0$ tak, aby bylo $M\delta < \varepsilon$. Protože pro $x, y \in (a, b)$ plyne z (Lagrangeovy) Věty 5.2.18 pro primitivní funkci F k f odhad $|\,F(x) - F(y)\,| \leq |f(\zeta)||x - y| < M|x - y|$, dostáváme

$$(|\,x - y\,| < \delta) \Rightarrow (|F(x) - F(y)| < \varepsilon)\,,$$

čímž je stejnoměrná spojitost funkce F dokázána. $\square$

Až dosud jsme postupně dokázali, že $\mathcal{R}(a, b)$ tvoří lineární prostor a že Riemannův integrál je na tomto prostoru nezáporným (a tedy monotónním) lineárním funkcionálem. Platí však více:

Věta 11.2.51. *Nechť funkce f, g jsou z prostoru $\mathcal{R}(a, b)$. Potom také funkce*

$$|\,f\,|, \quad f \cdot g \quad a \quad h = \sqrt{f^2 + g^2}$$

leží v prostoru $\mathcal{R}(a, b)$.

Důkaz. Integrovatelnost funkce $|\,f\,|$ jsme již dokázali v Lemmatu 11.2.38. Podle téhož Lemmatu plyne z $f, g \in \mathcal{R}(a, b)$ vyplývá, že omezené nezáporné funkce f^+, f^-, g^+ a g^- jsou integrovatelné. Je

$$f \cdot g = (f^+ - f^-)(g^+ - g^-) = f^+ \cdot g^+ - f^+ \cdot g^- - f^- \cdot g^+ + f^- \cdot g^-\,.$$

S ohledem na Větu 11.2.35 stačí ověřit tedy platnost tvrzení za dodatečného předpokladu $f, g \geq 0$. Zřejmě existuje $K \in (0, +\infty)$ tak, že $0 \leq f < K$, $0 \leq g < K$. Zvolme $D \in \mathcal{D}(a, b)$ s dělicími body $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ a označme pro $k = 1, 2, \ldots, n$

$$l_k := \inf\{g(x); x \in [\,x_{k-1}, x_k\,]\}\ , \quad L_k := \sup\{g(x); x \in [\,x_{k-1}, x_k\,]\}\,,$$
$$m_k := \inf\{f(x); x \in [\,x_{k-1}, x_k\,]\}\,, \quad M_k := \sup\{f(x); x \in [\,x_{k-1}, x_k\,]\}\,.$$

Zřejmě je

$$\inf\{f(x)g(x)\,;\, x \in [\,x_{k-1}, x_k\,]\} \geq m_k l_k\,, \quad \sup\{f(x)g(x)\,;\, x \in [\,x_{k-1}, x_k\,]\} \leq M_k L_k\,.$$

Protože je

$$M_kL_k - m_kl_k = (M_k - m_k)L_k + m_k(L_k - l_k) \leq K\big((M_k - m_k) + (L_k - l_k)\big)\,,$$

dostaneme násobením výrazy $(x_k - x_{k-1})$ a sečtením přes všechna uvažovaná k

$$S(fg; D) - s(fg; D) \leq K\big((S(f; D) - s(f; D)) + (S(g; D) - s(g; D))\big)\,. \qquad (11.37)$$

Zvolíme-li nyní k $\varepsilon > 0$ takové $D \in \mathcal{D}(a, b)$, aby

$$S(f; D) - s(f; D) < \frac{\varepsilon}{2K}\,, \quad S(g; D) - s(g; D) < \frac{\varepsilon}{2K}\,,$$

je splněna podmínka z Věty 11.2.12 a tedy $fg \in \mathcal{R}(a, b)$.

V Lemmatu 8.1.4 jsme dokázali trojúhelníkovou nerovnost pro komplexní čísla: Pro každá dvě čísla $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ platí

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|\,.$$

Je-li $z_1 = a_1 + \mathrm{i}b_1$, $z_2 = a_2 + \mathrm{i}b_2$, $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2$, je tato nerovnost ekvivalentní s nerovností

$$\sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2} \leq \sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2}\,. \qquad (11.38)$$

Dosaďme do (11.38) $a_1 = f(x)$, $a_2 = f(y) - f(x)$, $b_1 = g(x)$, $b_2 = g(y) - g(x)$ a převeďme první člen na pravé straně nerovnosti na její levou stranu. Dostaneme

$$\begin{aligned}\sqrt{f^2(y) + g^2(y)} - \sqrt{f^2(x) + g^2(x)} &\leq \sqrt{(f(y) - f(x))^2 + (g(y) - g(x))^2} \leq \\ &\leq \big|\, f(y) - f(x) \,\big| + \big|\, g(y) - g(x) \,\big|\,,\end{aligned}$$

kde poslední nerovnost je opět důsledkem trojúhelníkové nerovnosti. Porovnáme-li levou stranu s definicí funkce h, obdrželi jsme

$$h(y) - h(x) \leq \big|\, f(y) - f(x) \,\big| + \big|\, g(y) - g(x) \,\big|\,.$$

Odvozenou nerovnost použijeme k odhadu (užijeme označení z předcházející části důkazu)

$$\sup\{h(x); x \in [\,x_{k-1}, x_k\,]\} - \inf\{h(x); x \in [\,x_{k-1}, x_k\,]\} \leq (M_k - m_k) + (L_k - l_k)\,.$$

Dále již postupujeme analogicky jako výše a dostaneme nerovnost

$$S(h; D) - s(h; D) \leq (S(f; D) - s(f; D)) + (S(g; D) - s(g; D))\,, \qquad (11.39)$$

ze které již plyne $h \in \mathcal{R}(a, b)$. □

Poznámka 11.2.52. Z algebraického hlediska jsme ukázali, že $\mathcal{R}(a, b)$ tvoří vzhledem k operacím s funkcemi dokonce algebru. Odhad (11.39) souvisí také s tím, že vzorec (11.28) platí i pro komplexní funkci f reálné proměnné v případě, že její reálná i imaginární část leží v $\mathcal{R}(a, b)$.

11.3 Newtonův integrál

Poznámka 11.3.1. Začneme konstatováním, že se budeme snažit terminologicky a pojmově co nejvíce přiblížit řadám. Z tohoto důvodu pracujeme i s integrálem nabývajícím nevlastních hodnot $\pm\infty$. Zvládnutí terminologie by proto nemělo dělat čtenáři žádné obtíže. Poznamenejme ještě, že budeme pracovat pouze s reálnými funkcemi, příslušná zobecnění na komplexní funkce reálné proměnné nejsou obtížná.

Definice 11.3.2. Říkáme, že F je *zobecněná primitivní funkce k funkci f na intervalu* $I \subset \mathbb{R}$, je-li spojitá a platí-li rovnost $F'(x) = f(x)$ pro všechna $x \in I \setminus K$, kde $K \subset I$ je nějaká konečná množina. Množinu všech zobecněných primitivních funkcí k funkci f na I budeme značit $\operatorname{zpf}(f; I)$ nebo jen $\operatorname{zpf}(f)$, bude-li interval I zřejmý.

Poznámka 11.3.3. Každá primitivní funkce F k funkci f na otevřeném intervalu I je zároveň zobecněnou primitivní funkcí k funkci f (výjimečnou množinu K lze volit prázdnou). Proto je Definice 11.3.2 rozšířením již dříve uvedené definice primitivní funkce. Na rozdíl od definice primitivní funkce se v definici zobecněné primitivní funkce nepředpokládá, že interval I je otevřený (může být libovolný, krajní body eventuálně zahrneme do výjimečné množiny K). Funkce f nemusí být definována všude v I, ale jen všude až na jistou konečnou množinu. Všude tam, kde je to pro nás výhodné, však můžeme předpokládat, že f je definována v I, protože tam, kde definována nebyla, ji můžeme definovat jakkoli (např. jako 0). Souvisí to s platností tohoto jednoduchého tvrzení: *Je-li $f = g$ v $I \setminus K$, kde I je interval a $K \subset I$ nějaká konečná množina, je $F \in \operatorname{zpf}(f; I)$, právě když $F \in \operatorname{zpf}(g; I)$.*

Zobecněné primitivní funkce mají některé společné vlastnosti s primitivními funkcemi, zejména důležitou vlastnost, že rozdíl dvou *zobecněných* primitivních funkcí k téže funkci f na (a, b) je funkce konstantní.

Lemma 11.3.4. *Je-li $f \geq 0$ na intervalu I a $F \in \operatorname{zpf}(f; I)$, je F neklesající na I.*

Důkaz. Jsou-li a, b koncové body intervalu I, sestrojme konečnou posloupnost

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$$

všech bodů množiny $K \cup \{a, b\}$, kde K je výjimečná množina z Definice 11.3.2. Označíme-li

$$I_k := [\, x_{k-1}, x_k \,] \cap I\,, \quad k = 1, 2, \ldots, m\,,$$

je funkce F podle Věty 5.2.22 neklesající v každém I_k, protože kromě krajních bodů má v I_k nezápornou derivaci $F' = f$. Pro všechna $k = 1, 2, \ldots, m$ je $I_k \cap I_{k+1} = \{x_k\} \neq \emptyset$, z čehož plyne, že je F neklesající v I. □

Důsledek 11.3.5. *Jsou-li $F, G \in \operatorname{zpf}(f; I)$, je jejich rozdíl $F - G$ konstantní funkce.*

Důkaz. Funkce $F - G$ je spojitá a její derivace je rovna 0 všude v $I \setminus K$, kde K je konečná množina. Podle předcházející věty je nerostoucí i neklesající (a tedy konstantní) v I. □

Definice 11.3.6. Nechť $F \in \operatorname{zpf}(f)$ na intervalu o koncových bodech a, b, přičemž je

$-\infty \le a < b \le +\infty$. Potom definujeme

$$(\mathcal{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{x\to b_-} F(x) - \lim_{x\to a_+} F(x)\,,$$

pokud rozdíl limit vpravo má smysl, a říkáme, že *integrál existuje.* Jsou-li navíc obě limity konečné (a tedy i hodnota integrálu je konečná), říkáme, že *integrál konverguje.* Vpravo stojící přírůstek zobecněné primitivní funkce značíme zkráceně

$$F(b-) - F(a+) = [F(x)]_{x=a}^{x=b} = \big[\,F\,\big]_a^b\,.$$

Poznámky 11.3.7. Důsledek 11.3.5 ukazuje, že Definice 11.3.6 je korektní, tj. nezávislá na volbě zobecněné primitivní funkce F. Někdy je tento integrál nazýván *zobecněný Newtonův integrál* a název Newtonův integrál se užívá pro případ, kdy je interval I v Definici 11.3.6 otevřený a $K = \emptyset$. Často se též v Definici 11.3.6 žádá konečnost integrálu; v tom případě splývá existence integrálu s jeho konvergencí.

Důvod pro zavedení „výjimečné“ množiny K je následující. Funkce sgn má primitivní funkci jak na intervalu $I := (-1, 0)$, tak na intervalu $J := (0, 1)$, ale nemá primitivní funkci na intervalu $L := (-1, 1)$, protože každá primitivní funkce na intervalu I má tvar $-x + c_1$ a na intervalu J tvar $x + c_2$, kde c_1, c_2 jsou konstanty. Protože každá primitivní funkce na L by musela být spojitá v bodě 0, bylo by $c_1 = c_2 =: c$. Funkce tvaru $|x| + c$ však *nemá* derivaci v bodě 0, tudíž funkce sgn nemá primitivní funkci na L. Srv. Příklad 9.1.11 [5]).

Připuštění výjimečné množiny K v definici zobecněné primitivní funkce má za následek např. existenci *zobecněné* primitivní funkce k funkci sgn na L. Snadno též ověříme, že spojitá funkce

$$G(x) := \begin{cases} x\,(\log|x| - 1) & \text{pro} \quad x \in (\mathbb{R} \setminus \{0\})\,, \\ 0 & \text{pro} \quad x = 0\,, \end{cases}$$

je zobecněnou primitivní funkcí k funkci $\log|x|$ na $\mathbb{R}$.

Věty o Newtonově integrálu založeném na pojmu zobecněné primitivní funkce mohou být formulovány v elegantnější formě. Pro početní stránku věci však nemá toto relativně jednoduché zobecnění velký smysl.

Na rozdíl od Riemannova integrálu můžeme s Newtonovým integrálem pracovat i s neomezenými funkcemi a na neomezených intervalech. Poznamenejme ještě, že je možné pracovat i se *spočetnou* „výjimečnou množinou“ K, což je založeno na tvrzení, že i rozdíl dvou takto definovaných zobecněných primitivních funkcí je na intervalu konstantní; viz např. [1], str. 32.

Také o Newtonově integrálu dokážeme několik tvrzení, která jsou užitečná při výpočtech. Označme $\mathcal{N}(a, b)$ množinu všech funkcí f definovaných na intervalu I o koncových bodech a, b, $-\infty \le a < b \le +\infty$, pro které *konverguje* Newtonův integrál z f na I. Protože jsou příslušné důkazy velmi jednoduché, uvedeme některá tvrzení bez důkazu. Symbol $(\mathcal{N})$- před integrálem budeme vynechávat.

---

[5]) Mohli jsme se odvolat i na „hlubší“ Větu 5.2.14 o Darbouxově vlastnosti derivace spojité funkce.

Věta 11.3.8. *Newtonův integrál je lineárním funkcionálem na prostoru $\mathcal{N}(a,b)$, tj. pro každou dvojici funkcí $f,g \in \mathcal{N}(a,b)$ a každou dvojici čísel $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ je*

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g\,. \tag{11.40}$$

Důkaz. Jsou-li F, G zobecněné primitivní funkce k funkcím f, g, je $\alpha F + \beta G$ zřejmě zobecněná primitivní funkce k $\alpha f + \beta g$. Dále je

$$\lim \alpha F(x) + \beta G(x) = \alpha \lim F(x) + \beta \lim G(x)\,,$$

jak při $x \to b-$, tak při $x \to a+$ a všechny tyto limity jsou konečné, z čehož již vyplývá (11.40). □

Lemma 11.3.9. *Platí-li nerovnost $f \le g$ všude na intervalu I až na konečnou množinu K, je*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;\le \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\ ,$$

pokud oba integrály existují.

Důkaz je velmi jednoduchý. Stačí uvážit, že existuje zobecněná primitivní funkce k $g - f$ na I a použít Větu 11.3.4. □

Jako důsledek dostaneme tvrzení pro odhad absolutní hodnoty Newtonova integrálu. Z odhadu $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$ vyplývá nerovnost

$$\Bigl|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\Bigr| \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x\ ,$$

jakmile oba integrály existují.

Definice 11.3.10. Pro každé $a \in \mathbb{R}^*$ a každou funkci f definujeme $\int_a^a f = 0$. Dále klademe

$$\int_b^a f := -\int_a^b f\,,$$

existuje-li integrál na pravé straně rovnosti podle dosavadní definice.

Věta 11.3.11. *Je-li $a \le c < d \le b$ a existuje-li (resp. konverguje-li) Newtonův integrál $\int_a^b f$, existuje (resp. konverguje) i $\int_c^d f$. Je-li $a < c < b$, platí rovnost*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f\,,$$

konverguje-li buď integrál vlevo nebo oba integrály vpravo.

Důkaz. Je-li $F \in \mathrm{zpf}(f;(a,b))$, existuje $\int_a^b f$, právě když má výraz $F(b-) - F(a+)$ smysl. Kromě triviálního případu $(c,d) = (a,b)$ leží jeden z bodů c,d v (a,b) a limita F je v něm konečná, protože funkce F je v něm spojitá. Proto má rozdíl $F(d-) - F(c+)$ ve všech případech smysl.

Konverguje-li integrál vlevo a $F \in \mathrm{zpf}(f;(a,b))$, je

$$F(b-) - F(a+) = (F(c-) - F(a+)) + (F(b-) - F(c+)) \,, \tag{11.41}$$

protože F je spojitá v (a,b). Obráceně: Konvergují-li integrály vpravo, existují funkce $F_1 \in \mathrm{zpf}(f;(a,c))$ a $F_2 \in \mathrm{zpf}(f;(c,b))$ a všechny limity $F_1(a+)$, $F_1(c-)$, $F_2(c+)$, $F_2(b-)$ jsou konečné. Položíme-li

$$F(x) := \begin{cases} F_1(x) & \text{pro} \quad x \in (a,c)\,, \\ F_1(c-) & \text{pro} \quad x = c\,, \\ F_2(x) + F_1(c-) - F_2(c+) & \text{pro} \quad x \in (c,b)\,, \end{cases}$$

zřejmě $F \in \mathrm{zpf}(f;(a,b))$ a

$$\begin{aligned} F(b-) - F(a+) &= (F(c-) - F(a+)) + (F(b-) - F(c+)) = \\ &= (F_1(c-) - F_1(a+)) + (F_2(b-) - F_2(c+)) \,, \end{aligned}$$

čímž je tvrzení dokázáno. □

Následující věta je jednoduchým, ale důležitým kritériem konvergence Newtonova integrálu.

Věta 11.3.12. *Je-li f spojitá a omezená funkce na omezeném intervalu (a,b), Newtonův integrál $\int_a^b f$ konverguje.*

Důkaz. Ze spojitosti funkce f plyne, že k ní existuje primitivní funkce na (a,b). Je-li $|f| \le M < \infty$, pak pro primitivní funkci F k f platí podle (Lagrangeovy) Věty 5.2.18 pro libovolná $x, y \in (a,b)$ nerovnost

$$|\,F(x) - F(y)\,| \le M\,|\,x-y\,| \,.$$

Odtud vyplývá, že F je stejnoměrně spojitá na (a,b), a lze ji tedy spojitě rozšířit na $[\,a,b\,]$. Zbytek je zřejmý (srov. s Lemmatem 11.2.50). □

Pro primitivní funkce jsme dokázali větu o integraci per partes a větu o substituci, tj. Věty 9.2.3 a 9.2.6. Po nezbytné modifikaci lze analogická tvrzení dokázat i pro Newtonův integrál.

Věta 11.3.13 (metoda per partes). *Nechť $F \in \mathrm{zpf}(f;(a,b))$, $G \in \mathrm{zpf}(g;(a,b))$ a nechť $-\infty \le a < b \le +\infty$. Pak je*

$$\int_a^b fG = [\,FG\,]_a^b - \int_a^b Fg \,, \tag{11.42}$$

jsou-li alespoň dva z výrazů v rovnosti (11.42) *konečné.*

Důkaz. Rozlišíme dva případy, což postačí: záměnou funkcí f a g dostaneme ekvivalentní tvrzení.
(1) Nechť $\Phi \in \mathrm{zpf}(fG)$ a $\Psi \in \mathrm{zpf}(Fg)$, přičemž oba přírůstky $[\Phi]_a^b$ a $[\Psi]_a^b$ jsou konečné. Potom platí

$$(FG)' = fG + Fg = \Phi' + \Psi' = (\Phi + \Psi)'$$

všude v $(a,b)\setminus K$, kde K je konečná množina, a protože FG a $\Phi+\Psi$ jsou spojité v (a,b), jsou to zobecněné primitivní funkce k téže funkci $fG+Fg$. Je tedy

$$[\,FG\,]_{\,a}^{\,b} = [\,\Phi\,]_{\,a}^{\,b} + [\,\Psi\,]_{\,a}^{\,b} = \int_a^b fG + \int_a^b Fg\,,$$

což jsme měli dokázat.
(2) Předpokládejme, že výrazy na pravé straně vzorce (11.42), tj. $[\,FG\,]_a^b$ a také $\int_a^b Fg$, jsou konečné. Nechť $\Psi \in \mathrm{zpf}(Fg)$; položme $\Phi = FG - \Psi$. Potom

$$\Phi' = (FG-\Psi)' = fG + Fg - Fg = fG$$

všude až na konečný počet bodů z (a,b), a Φ je spojitá, takže $\Phi \in \mathrm{zpf}(fG)$. Zbytek plyne z konečnosti příslušných přírůstků. □

Věta 11.3.14 (substituční metoda). *Je-li $\varphi : (\alpha,\beta) \overset{\text{na}}{\to} (a,b)$ spojitá ryze monotónní funkce, která má konečnou nenulovou derivaci všude v $(\alpha,\beta)\setminus K$, kde $K \subset (\alpha,\beta)$ je nějaká konečná množina, potom je*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)(t)\cdot|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t\;, \tag{11.43}$$

existuje-li jeden z integrálů.

Důkaz. Nechť existuje integrál vlevo a φ je rostoucí, takže je $|\varphi'(t)| = \varphi'(t)$, kde $t \in (\alpha,\beta)\setminus K$. Nechť $F'(x) = f(x)$ na $(a,b)\setminus L$, kde L je konečná množina. Označíme-li $G = F\circ\varphi$, pak $G' = (F'\circ\varphi)\varphi' = (f\circ\varphi)\varphi'$ platí v $(\alpha,\beta)\setminus M$, kde $M = K\cup\varphi^{-1}(L)$ je konečná množina. Funkce G je spojitá, takže platí $G \in \mathrm{zpf}((f\circ\varphi)\,\varphi'; (\alpha,\beta))$ a je

$$G(\alpha+) = F(a+)\,,\ G(\beta-) = F(b-)$$

podle věty o limitě složené funkce. Odtud plyne existence integrálu vpravo a dokazovaná rovnost.

Existuje-li integrál na pravé straně (11.43), postupujeme podobně, ale s inverzní funkcí φ^{-1} na místě φ:

$$\int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)\varphi' = \int_a^b (f\circ\varphi\circ\varphi^{-1})(\varphi'\circ\varphi^{-1})(\varphi^{-1})' = \int_a^b f\,.$$

Součin posledních dvou závorek ve druhém integrálu je roven 1 podle věty o derivování inverzní funkce (Věta 6.4.4).

Podobně probíhá důkaz pro φ klesající, kdy je $|\varphi'(t)| = -\varphi'(t)$ až na výjimečnou konečnou množinu všude v (α,β) a zároveň

$$G(\alpha+) = F(b-)\,,\ G(\beta-) = F(a+)\,.$$

Tím je důkaz dokončen. □

Poznámka 11.3.15. Poznamenejme, že při hledání primitivních funkcí jsme neužívali zápis

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int (f\circ\varphi)(t)\cdot\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\;, \tag{11.44}$$

neboť definiční obory funkcí f a φ jsou obecně různé. V (11.43) však jde o rovnost čísel (integrálů), nikoli integrovaných funkcí.

Věta 11.3.16. *Nechť $f \in \mathcal{R}(a,b)$ a $F \in \operatorname{zpf}(f)$. Potom je*

$$(\mathcal{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [\,F\,]_a^b = (\mathcal{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{11.45}$$

Důkaz. Funkce f je omezená, a tak z Lemmatu 11.2.50 plyne, že zobecněná primitivní funkce F je stejnoměrně spojitá na (a,b). Existují tedy konečné limity $F(a) := F(a+)$ a $F(b) := F(b-)$, a tedy, podle Věty 11.1.4, je F spojitě rozšiřitelná na $[\,a,b\,]$.

Dále existuje konečná množina $K \subset [\,a,b\,]$ taková, že $F'(x) = f(x)$ pro všechna $x \in [\,a,b\,] \setminus K$. Zvolme $D \in \mathcal{D}(a,b)$ tak, aby toto dělení $D = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ obsahovalo všechny body z K. Podle Lagrangeovy věty existují body ξ_k, $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$, tak, že

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{n} \big(F(x_k) - F(x_{k-1})\big) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\,.$$

Protože poslední součet leží mezi $s(f;D)$ a $S(f;D)$, je

$$s(f;D) \le F(b) - F(a) \le S(f;D)\,.$$

Přechodem k supremu přes všechna dělení vlevo a k infimu přes všechna dělení vpravo dostaneme s přihlédnutím k $f \in \mathcal{R}(a,b)$ rovnost (11.45). □

Poznámka 11.3.17. Právě dokázaná věta má zásadní význam i pro výpočty. Je to tzv. *základní věta integrálního počtu.* Tvrzení analogická k Větě 11.3.16 se dokazují i pro jiné (případně obecnější) integrály. Větě lze dát i tento „symetričtější“ tvar:

Věta 11.3.18. *Má-li funkce f na intervalu $[\,a,b\,]$ jak Riemannův tak Newtonův integrál, mají oba integrály stejnou hodnotu.*

Důkaz. Je-li f riemannovsky integrovatelná, je funkce f omezená. Za těchto podmínek lze každou $F \in \operatorname{zpf}(f;(a,b))$ spojitě rozšířit na $[\,a,b\,]$ a stačí pak jen aplikovat Větu 11.3.16. □

11.4 Některé aplikace

Začneme tím, že se vrátíme ke kritériím konvergence řad a ukážeme, jak lze při rozhodování o konvergenci řad využít znalostí o integrálu (ale i obráceně).

Věta 11.4.1 (integrální kritérium, Euler 1736). *Nechť $f \in \mathcal{C}([\,1,\infty))$ je nerostoucí nezáporná funkce. Potom konverguje řada*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k)\,, \quad \textit{právě když konverguje} \quad (\mathcal{N})\int_1^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t\,. \tag{11.46}$$

Důkaz. Částečné součty $s_n := \sum_{k=1}^{n} f(k)$, $n \in \mathbb{N}$, tvoří neklesající posloupnost a funkce

$$F(x) := \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

je neklesající zobecněnou primitivní funkcí k funkci f na intervalu $[1, +\infty)$; konvergence řady i integrálu v (11.46) je proto ekvivalentní s omezeností $\{s_n\}$ a F shora. Z nerovností

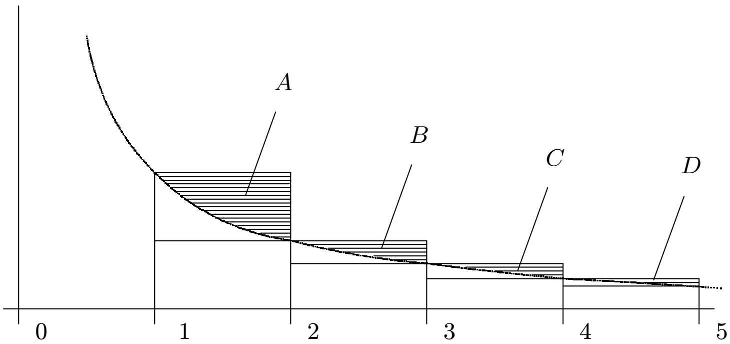
$$f(k) \geq \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \geq f(k+1)\,, \quad k \in \mathbb{N}\,,$$

dostaneme „sečtením“ pro $k = 1, \ldots, n$ nerovnosti

$$s_n = \sum_1^n f(k) \geq \int_1^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t = F(n+1) \geq \sum_{k=1}^n f(k+1) = s_{n+1} - f(1)\,. \tag{11.47}$$

Z nich je patrné, že $\{s_n\}$ je (shora) omezená právě když je (shora) omezená posloupnost $\{F(n+1)\}$, a tedy právě když je (shora) omezená funkce F na intervalu $[1, +\infty)$. Nerovnost (11.47) je užitečná i při odhadech [6]; viz následující poznámka. □

Poznámka 11.4.2. Úvahy z právě provedeného důkazu ilustruje Obr. 11. 1., na kterém je $f(x) = x^{-1}$, $x \in [\,1, \infty)$. Poznamenáváme, že součet obsahů na obrázku zvýrazněných „křivočarých trojúhelníčků“ $(A + B + C + D + \cdots)$ je roven konstantě γ, definované v Příkladu 6.5.21.



Obr. 11. 1.

Příklad je užitečný i k ilustraci výše zmíněných odhadů pro případ, že integrál v (11.46) diverguje. Není totiž jednoduché najít např. první částečný součet harmonické řady, který je větší než 100, pouhým sčítáním členů řady; členy jsou pro vyšší indexy „malé“, přičemž se sčítá „mnoho“ čísel. Jednoduchý *hrubý* odhad dává pro nejmenší částečný součet s_n harmonické řady, který je větší než 100, nerovnost

$$s_n > \log(n+1) > 100, \quad \text{tedy} \quad n + 1 > \exp(100) > 2^{100}\,.$$

Museli bychom tedy sečíst cca 2^{100} členů, abychom dosáhli částečného součtu 100. Doporučujeme čtenáři zkusit výpočet „silou“, tj. sčítáním a testováním velikosti nalezeného součtu vůči danému číslu pomocí personálního počítače, např. jen pro mez 10 místo 100.

[6]) Důkaz je velmi názorný. Nerovnosti v (11.47) lze interpretovat i jako odhad integrálu pomocí dolních a horních součtů pro vhodné dělení D intervalu $[\,1, n+1\,]$.

Je zajímavé srovnat, jak přesné jsou jednotlivé odhady částečných součtů, které jsou uvedeny v prvním díle této knihy v Kapitolách 2 a 3. Prvním je standardní odhad, pocházející ze 14. stol., druhý vznikl podobně odhadováním „po desítkách“:

$$s_{2^n} = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geq (n+1)\,\frac{1}{2} \quad \text{a} \quad s_{10^n-1} = \sum_{k=1}^{10^n-1} \frac{1}{k} \geq \frac{9n}{10}\,. \tag{11.48}$$

Z nich pro mez 10 dostaneme z prvního, že $s_n > 10$ pro $n > 2^{19} \doteq 5{,}2 \cdot 10^5$, ze druhého snáze obdržíme horší odhad, totiž že $s_n > 10$ pro $n > 1{,}2 \cdot 10^{11}$. Pokud uvážíme hodnotu konstanty $\gamma \doteq 0{,}577$ a máme k dispozici hodnoty (přirozených) logaritmů čísel z $\mathbb{N}$, obdržíme mnohem přesnější výsledek: $s_n > 10$ pro $n > 12\,367$; je totiž $\exp(10-\gamma) = 12\,366{,}97$. Ukazuje se tedy, že odhady pro divergenci harmonické řady jsou sice jednoduché, ale velmi nepřesné.

Příklad 11.4.3. Jednoduchý výpočet

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \Big[\,\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\,\Big]_{x=1}^{\infty} = \begin{cases} 1/(\alpha-1) & \text{pro } \alpha > 1\,, \\ +\infty & \text{pro } \alpha < 1\,, \end{cases}$$

ukazuje, že integrál konverguje, právě když $\alpha > 1$; pro $\alpha = 1$ je totiž $\big[\,\log x\,\big]_{x=1}^{\infty} = \infty$. Totéž tedy podle Věty 11.4.1 platí pro řadu $\sum n^{-\alpha}$. Současně jsme dokázali jiným způsobem konvergenci řady $\sum 1/k^2$ a z (11.47) dostali již v Příkladu 3.2.3 odvozený hrubý odhad jejího součtu s, $s \leq \int_1^\infty x^{-2}\,\mathrm{d}x < s - f(1)$, který tak zřejmě leží v intervalu $(1,2)$.

Příklad 11.4.4. Pro spojitou (vektorovou) funkci $g : [\,a,b\,] \to \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, a pro dělení D intervalu $[\,a,b\,]$, pro které je $D = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$, položme

$$\ell\,(g;D) := \sum_{k=1}^{n} \operatorname{dist}\big(\,g(x_{k-1}), g(x_k)\big)\,, \tag{11.49}$$

kde dist značí vzdálenost bodů v eukleidovském prostoru. Význam tohoto čísla je názorný: mezi dělicími body x_k, $k = 0, \ldots, n$, jsme g nahradili lineárním zobrazením a sečtením zjistili délku vepsané „lomené čáry“. Z trojúhelníkové nerovnosti [7]) vyplývá, že jsou-li $D, D' \in \mathcal{D}(a,b)$, a D' je zjemněním dělení D, je

$$\ell\,(g;D) \leq \ell\,(g;D')\,, \tag{11.50}$$

a tak se *intuitivně* můžeme zjemňováním dělení intervalu $[\,a,b\,]$ k délce grafu funkce g (nevíme zatím, co to je!) s libovolnou přesností přibližovat.

Úvahy z předcházejícího příkladu nás vedou k následující názorné definici:

Definice 11.4.5. Znamená-li dist vzdálenost v $\mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, a je-li $g : [\,a,b\,] \to \mathbb{R}^m$ vektorová funkce se spojitými složkami, $D := \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ a $\ell\,(g;D)$ je dáno vzorcem (11.49), definujeme *délku* $L(g)$ *funkce* g na $[\,a,b\,]$ vzorcem

$$L(g) := \sup\left\{\ell(g;D);\ D \in \mathcal{D}(a,b)\right\}\,. \tag{11.51}$$

[7]) Máme na mysli její geometrickou formu, známou ze středoškolské látky: součet délek dvou stran trojúhelníku je větší nebo roven délce jeho třetí strany, přičemž rovnost nastane v případě, že trojúhelník přejde v úsečku.

Příklad 11.4.6. Položme $g_f(x) := (x, f(x))$, $x \in (0,1]$, kde $f(x) = x^2\cos(\pi/x^2)$, a $g_f(0) := [0,0]$. Potom dostaneme pro $D := \{0 < 1/\sqrt{n} < 1/\sqrt{n-1} < \cdots < 1\}$ podle Pythagorovy věty

$$\ell\,(g_f; D) \geq \sum_{k=1}^{n-1}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)^2 + \left(f\Big(\frac{1}{\sqrt{k}}\Big) - f\Big(\frac{1}{\sqrt{k+1}}\Big)\right)^2\right)^{1/2} \geq$$
$$\geq \sum_{k=1}^{n-1}\left|\, f\Big(\frac{1}{\sqrt{k}}\Big) - f\Big(\frac{1}{\sqrt{k+1}}\Big)\right| = \sum_{k=1}^{n-1}\left|\,\frac{\cos k\pi}{k} - \frac{\cos(k+1)\pi}{k+1}\,\right| \geq \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\,,$$

a odtud je již snadno vidět, že $L(g_f) = +\infty$.

Příklad 11.4.7 (důležitý). Pro funkci f je $G_f = \big\{[x, f(x)]\,;\, x \in [a,b]\big\})$ graf f. Často se počítá délka grafu, kterou je v našem pojetí délka funkce $g : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, kde $g : x \mapsto [x, f(x)]$, $x \in [a,b]$. Zřejmě je

$$\ell\,(g; D) := \sum_{k=1}^{n}\sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2} =$$
$$= \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})\sqrt{1 + \left(\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}\right)^2}\quad .$$

Pokud je funkce f spojitá a má v (a,b) všude derivaci, existují uvnitř dělicích intervalů dělení D body ξ_k tak, že lze součet vyjádřit podle Lagrangeovy věty ve tvaru

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})\sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2}\,.$$

Označme $h = \sqrt{1 + (f')^2}$ na (a,b) a předpokládejme, že $h \in \mathcal{R}(a,b)$. Pak pro posloupnost dělení $\{D_n\}$, $D_n \prec D_{n+1}$, s $\nu(D_n) \to 0$ je

$$s(h; D_n) \leq \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})\sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2} \leq S(h; D_n)\,,$$

přičemž prostřední výraz je tvaru $\sigma(h; D_n, \xi)$ pro vhodnou volbu význačných bodů $\{\xi_k\} = \xi$. Limitním přechodem pro $n \to \infty$ obdržíme pro délku $L(g_f)$ funkce g (někdy v této souvislosti mluvíme o délce grafu $L(G_f)$ funkce f) vzorec

$$L(G_f) = (\mathcal{R})\!\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x\,. \tag{11.52}$$

Tak jsme dokázali následující tvrzení:

Tvrzení 11.4.8. *Je-li $f \in \mathcal{C}([a,b])$ a f' existuje v (a,b), platí vzorec* (11.52)*, pokud integrál vpravo existuje.*

Vzorec (11.52) není ideální: nespočteme jím ani délku jednotkové půlkružnice popsané funkcí $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in [-1,1]$. Derivace $f'(x) = -x/\sqrt{1 - x^2}$ není omezená na intervalu $(-1,1)$ a Riemannův integrál je definován pouze pro omezené funkce. Proto dokážeme ještě další tvrzení, které nám umožní použít Newtonův integrál.

Tvrzení 11.4.9. *Je-li $f \in \mathcal{C}([a,b])$ a derivace f' je spojitá v (a,b), je*

$$L(G_f) = (\mathcal{N})\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x\,. \tag{11.53}$$

Důkaz. Označme opět $g_f : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, kde $g_f : x \mapsto [x, f(x)]$, $x \in [a,b]$. Nejprve si uvědomíme, že pro každý interval $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$ lze délku pro restrikci $f|[\alpha,\beta])$ spočíst oběma vzorci (11.52) a (11.53) (s mezemi α a β). Za uvedených předpokladů Riemannův integrál v (11.52) existuje a je roven Newtonovu integrálu. Přitom primitivní funkce H k $h = \sqrt{1+(f')^2}$ je neklesající.

Je-li D dělení intervalu $[\alpha,\beta]$ a $D' = D \cup \{a,b\}$, je zřejmě

$$L(g_f; D) \le L(g_f; D')\,, \qquad \text{a tedy} \qquad L(g_{f|[\alpha,\beta]}) \le L(g_f)\,.$$

Odtud dostáváme $H(\beta) - H(\alpha) = \int_\alpha^\beta h \le L(g_f)$ a také $H(b-) - H(a+) \le L(g_f)$. Pokud $H(b-) - H(a+) = \int_a^b h = +\infty$, je i $L(g_f) = +\infty$. Je-li $L(g_f) < +\infty$, zvolme nejprve $\varepsilon > 0$ a pak s využitím spojitosti f v krajních bodech $[a,b]$ zvolme $\delta > 0$ tak, že

$$\Delta_1(x) := \big((x-a)^2 + (f(x)-f(a))^2\big)^{1/2} < \varepsilon/3 \quad \text{pro všechna } x \in (a, a+\delta)\,,$$
$$\Delta_2(x) := \big((b-x)^2 + (f(b)-f(x))^2\big)^{1/2} < \varepsilon/3 \quad \text{pro všechna } x \in (b-\delta, b)\,.$$

Dále volme $D' \in \mathcal{D}(a,b)$ tak, aby $\ell(g_f; D') > L(g_f) - \varepsilon$. S ohledem na (11.50) lze předpokládat, že pro $D = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$ je $x_1 \in (a, a+\delta)$ a $x_{n-1} \in (b-\delta, b)$. Položme ještě $[\alpha,\beta] = [x_1, x_{n-1}]$. Dále volme $D \in \mathcal{D}(\alpha,\beta)$ tak, aby $\ell(f; D) \ge L(g_{f|[\alpha,\beta]}) - \varepsilon/3$. Potom je

$$\int_a^b h \ge \int_\alpha^\beta h = L(g_{f|[\alpha,\beta]}) \ge \ell(g_f; D) = \ell(g_f; D') - \Delta_1(x_1) - \Delta_2(x_{n-1}) \ge$$
$$\ge \ell(g_f; D') - 2\varepsilon/3 \ge L(g_f) - \varepsilon\,.$$

Tím je vzorec (11.53) pro výpočet $L(g_f)$ dokázán. □

Poznámka 11.4.10. Analogicky jako jsme při vyšetření délky g_f dospěli ke vzorci

$$L(g_f) = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x\,,$$

lze definovat *povrch* P a *objem* V rotačního tělesa $Tf_{\mathrm{rot}} \subset \mathbb{R}^3$, vzniklého rotací „podgrafu“ spojité kladné funkce f na $[a,b]$ s derivací f' spojitou na (a,b) „kolem osy x“. Těleso Tf_{rot} je definováno pomocí vztahu

$$Tf_{\mathrm{rot}} := \big\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\, y^2 + z^2 \le f^2(x),\ x \in [a,b]\big\}\,.$$

Definujeme

$$V(Tf_{\mathrm{rot}}) := \pi \int_a^b f^2\,, \quad \text{a} \quad P(Tf_{\mathrm{rot}}) := 2\pi \int_a^b f\sqrt{1+(f')^2}\,,$$

pokud existuje integrál na pravé straně definiční rovnosti, ať již v Riemannově či Newtonově smyslu.

Tak lze eventuálně určit např. délku polokružnice, či povrch a objem speciálně položené koule v $\mathbb{R}^3$. Na rozdíl od délky křivky chápeme vzorce jako definice. Pokud bychom se opřeli o názor a pracovali např. s konečným sjednocením válečků či částí kuželových ploch, které tělesu opíšeme nebo vepíšeme, dospěli bychom ke shodě vzorečků s „intuitivní představou“.

Příklad 11.4.11 (délka polokružnice). Nechť $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, $x \in [-r, r]$. Pak platí pro $x \in (-r, r)$

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}, \quad 1 + (f'(x))^2 = 1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2} = \frac{r^2}{r^2 - x^2}.$$

Proto pro délku polokružnice o rovnici $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ platí

$$L(f) = \int_{-r}^{r} \frac{r\,\mathrm{d}x}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \left[r \arcsin \frac{x}{r} \right]_{x=-r}^{r} = \pi r.$$

Příklad 11.4.12. Rotací podgrafu funkce f z předcházejícího příkladu vznikne koule $K := Tf_{\mathrm{rot}}$ o rovnici $x^2 + y^2 + z^2 \le r^2$. Spočteme její objem

$$V(K) = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\,\mathrm{d}x = \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^{r} = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Příklad 11.4.13. Výpočet pro povrch koule K dává

$$P(K) = 2\pi \int_{-r}^{r} \frac{r\sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 2\pi r [x]_{x=-r}^{x=r} = 4\pi r^2.$$

Příklad 11.4.14. V úvodní kapitole jsme se zmínili o tom, že to byl již Archimedes (287 – 212 před n. l.), který jako první dokázal, že konstanty úměrnosti, vyskytující se ve vzorcích pro obvod a obsah kruhu, splývají (čtenář to nemusí shledávat jako zajímavé, když ví, že se v obou těchto vzorcích vyskytuje jako konstanta úměrnosti π). Imitujte tento důkaz tím, že dokážete rovnost $r \cdot$ „délka půlkružnice“ $= 2 \cdot$ „obsah půlkruhu“, tj. (využíváme částečně Příklad 11.4.11) rovnost

$$r \cdot \int_{-r}^{r} \frac{r\,\mathrm{d}x}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 2 \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Již dříve jsme se několikrát setkali s číslem π. Ukážeme si jednu „teoretickou aplikaci“.

Příklad 11.4.15. Definujeme-li

$$I_n := \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,\mathrm{d}x\,, \quad n \in \mathbb{N}_0\,,$$

je

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} 1\,\mathrm{d}x = \pi/2\,, \quad I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x\,\mathrm{d}x = -\big[\cos x\big]_{x=0}^{\pi/2} = 1\,.$$

Je-li $n > 1$, užijeme Větu 11.3.13; položíme-li

$$F(x) = \sin^{n-1} x\,, \quad g(x) = \sin x\,,$$
$$f(x) = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x\,, \quad G(x) = -\cos x\,,$$

bude

$$I_n = -[\sin^{n-1} x \cos x]_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cos^2 x \,\mathrm{d}x =$$
$$= (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x (1-\sin^2 x)\,\mathrm{d}x = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n\,,$$

a je tedy

$$nI_n = (n-1)\,I_{n-2}\,, \quad I_n = \frac{n-1}{n}\,I_{n-2}\,.$$

Z této rekurentní formule plyne ihned pro sudá $n \in \mathbb{N}$ ($n = 2m$, $m \in \mathbb{N}$) rovnost

$$I_{2m} = \frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdot\frac{2m-5}{2m-4}\dots\frac{1}{2}\,I_0 = \frac{1\cdot 3\cdot 5\dots(2m-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2m}\cdot\frac{\pi}{2}\,, \tag{11.54}$$

a pro lichá n, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ ($n = 2m+1$, $m \in \mathbb{N}$)

$$I_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdot\frac{2m-4}{2m-3}\dots\frac{2}{3}\,I_1 = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2m}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2m+1)}\,. \tag{11.55}$$

Poznámka 11.4.16. Příklad 11.4.15 vede k zajímavému vyjádření čísla π. V intervalu $[\,0,\pi/2\,]$ je $0 \le \sin x \le 1$, a tedy je $(\sin x)^n \ge (\sin x)^{n+1}$. Lemma 11.3.9 dává pro $m \in \mathbb{N}$ nerovnosti $I_{2m} \ge I_{2m+1} \ge I_{2m+2}$, tj. podle (11.54), (11.55)

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\dots(2m-1)}{2\cdot 4\cdot 6\dots(2m)}\,\frac{\pi}{2} \ge \frac{2\cdot 4\cdot 6\dots(2m)}{3\cdot 5\cdot 7\dots(2m+1)} \ge \frac{1\cdot 3\cdot 5\dots(2m-1)(2m+1)}{2\cdot 4\cdot 6\dots(2m)(2m+2)}\,\frac{\pi}{2}\,.$$

Odtud snadno dostaneme

$$\frac{\pi}{2} \ge \left(\frac{2\cdot 4\cdot 6\dots(2m)}{1\cdot 3\cdot 5\dots(2m-1)}\right)^2\cdot\frac{1}{2m+1} \ge \frac{2m+1}{2m+2}\cdot\frac{\pi}{2}\,.$$

Limitním přechodem pro $m \to \infty$ z toho podle Věty 2.3.2 plyne, že

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{m\to\infty}\left(\frac{2\cdot 4\cdot 6\dots(2m)}{1\cdot 3\cdot 5\dots(2m-1)}\right)^2\cdot\frac{1}{2m+1} =$$
$$= \lim_{m\to\infty}\frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdots(2m)\cdot(2m)}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdots(2m-1)\cdot(2m-1)\cdot(2m+1)}\,. \tag{11.56}$$

Násobíme-li zlomek vpravo výrazem $(2m+2)/(2m+1)$, který má pro $m \to \infty$ limitu 1, dostaneme

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{m\to\infty}\frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot\ \cdots\ \cdot\ 2m\ \cdot\ 2m\ \cdot(2m+2)}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot\ \cdots\ \cdot(2m-1)\cdot(2m+1)\cdot(2m+1)} \tag{11.57}$$

Oba tyto vzorce (11.56), (11.57) dávají tzv. *Wallisovu formuli.*

Historická poznámka 11.4.17. Vzorec odvodil JOHN WALLIS (1616 – 1703) r. 1655, avšak podstatně jiným způsobem než my v předchozí poznámce. Několik generací matematiků poválečného období se učilo analýzu převážně z učebnic VOJTĚCHA JARNÍKA (1897 – 1970). Jarník byl skvělý matematik a i velmi zručný počtář a tak není divu, že i početní partie jeho učebnic jsou výborně napsány. Předcházející příklad a poznámka jsou nepatrně upraveny krácením textu jeho učebnice [3], str. 73.

11.5 Technika „slepování“

Poměrně často se setkáváme s případem, kdy nám existenční věta zajišťuje existenci primitivní funkce ke zkoumané funkci, ale početní metoda nám ji přímo neposkytuje. Pomineme-li případy, kdy tuto primitivní funkci neumíme pomocí nám známých funkcí vyjádřit (např. k funkcím $\exp(-x^2)$ či $(\log x)^{-1}$), zbudou ještě např. důležité případy vyžadující „lepení“. Tuto techniku jsme již použili při důkazu Věty 11.3.11 k vytvoření zobecněné primitivní funkce F z funkcí F_1 a F_2. Nyní si „vícenásobné lepení“ primitivních funkcí objasníme na jednoduchém příkladě.

Příklad 11.5.1. Označme

$$f(x) = \operatorname{dist}(x, \{2k; k \in \mathbb{Z}\}),$$

kde vzdálenost dist bodu x od množiny M je definována vzorcem

$$\operatorname{dist}(x, M) = \inf\{|x-y|; y \in M\}.$$

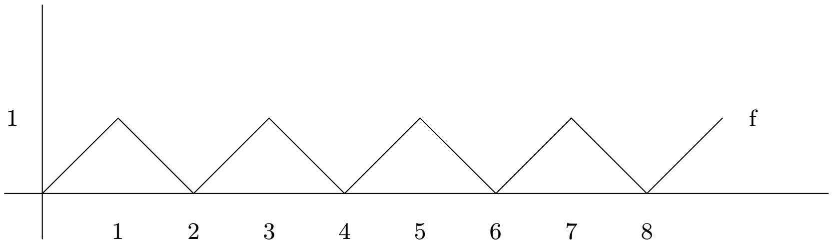
Snadno nahlédneme, že

$$\begin{aligned} f(x) &= x, & x &\in [0,1], & f(x) &= 2-x, & x &\in [1,2], \\ f(x) &= x-2, & x &\in [2,3], & f(x) &= 4-x, & x &\in [3,4], \dots \end{aligned}$$

a že f je 2-periodická funkce na $\mathbb{R}$, jejíž graf je znázorněn na Obr.11. 2. Bez obtíží spočteme, že $F(x) = x^2/2$ je zobecněnou primitivní funkcí k funkci f na intervalu $[0,1]$, a $\lim_{x\to 1_-} F(x) = 1/2$. Položíme-li $G(x) = 2x - x^2/2$, je $G \in \operatorname{zpf}(f;[1,2])$ a $\lim_{x\to 1_+} G(x) = 3/2$.

Abychom vyrovnali rozdíl mezi $F(1)$ a $G(1)$, definujeme funkci $G_1(x) = G(x) - 1$, pro kterou je $G_1(1) = 1/2$, a dále definujme

$$F_1(x) = \begin{cases} F(x), & x \in [0,1], \\ G_1(x), & x \in [1,2]. \end{cases}$$



Obr. 11. 2.

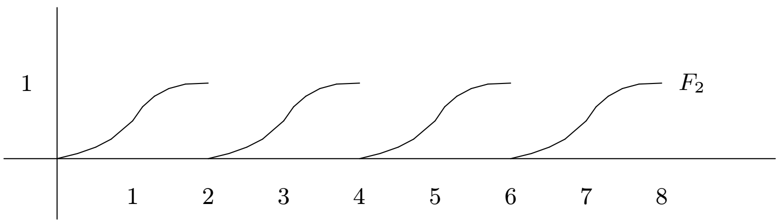
Potom $F_1 \in \operatorname{zpf}(f;[0,2])$ a protože $F_1'(1) = (G_1)'_+(1) = G'_+(1) = 1 = f(1)$, je na intervalu $(0,2)$ primitivní funkcí k f. Kromě toho

$$F_1(0) = 0\,, \quad F_1(2) = 1\,, \quad F_1'(0+) = F_1'(2-) = 0\,. \tag{11.58}$$

Vytvoříme 2-periodické rozšíření F_2 funkce F_1 z intervalu $[0,2)$ na $\mathbb{R}$:

$$F_2(x) := F_1(x-2k)\,, \quad x \in [2k, 2(k+1)),\ \ k \in \mathbb{Z}\,. \tag{11.59}$$

Funkce F_2 má v bodech tvaru $2k$, $k \in \mathbb{Z}$, hodnotu 0 a limitu zleva rovnou 1. Graf této funkce je znázorněn na Obr. 11. 3. Tato funkce není spojitá, avšak pro všechna $x \in (\mathbb{R} \setminus \{2k; k \in \mathbb{Z}\})$ je $F_1'(x) = f(x)$.



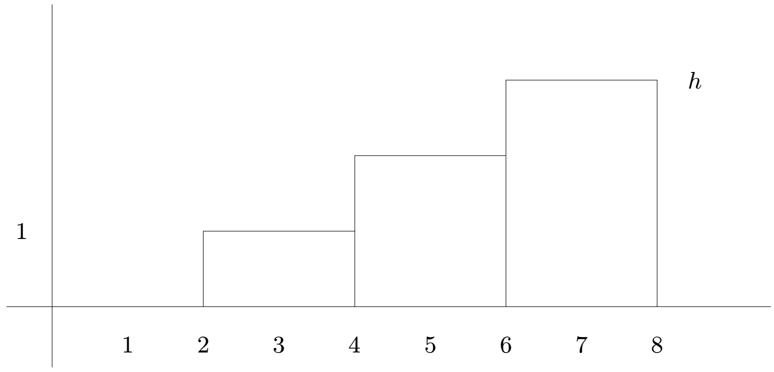
Obr. 11. 3.

Z toho je patrné, že funkce

$$H(x) := F_2(x) + k\,, \quad x \in [2k, 2(k+1)),\ \ k \in \mathbb{Z}\,, \tag{11.60}$$

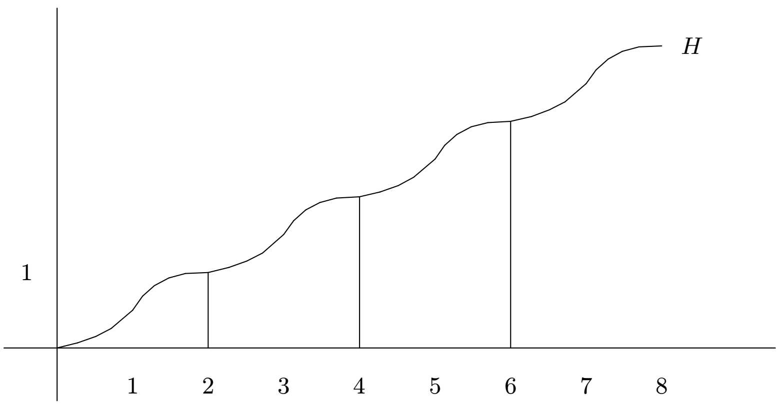
pro kterou je $H(2k) = H(2k-) = 2k$, bude spojitá na $\mathbb{R}$. Dále je $H'_+(2k) = 0$ a ze spojitosti H a $H'(2k-) = 0$ dostaneme podle Věty 7.1.2 také $H'_-(2k) = 0$, takže existuje oboustranná derivace $H'(2k) = f(2k) = 0$. Odtud vyplývá, že H je primitivní funkce k f na $\mathbb{R}$. Definujeme-li $h(x) := [\,x/2\,]$, kde $[\,\boldsymbol{.}\,]$ značí funkci celá část, je zápis (11.60) ekvivalentní se zápisem

$$H(x) = F_2(x) + h(x) = F_2(x) + \big[\,x/2\,\big]\,. \tag{11.61}$$



Obr. 11. 4.

Graf funkce h je na Obr. 11. 4, výsledná hledaná funkce H je zobrazena na Obr. 11. 5. Zde „slepováním" rozumíme nalezení po částech konstantní funkce h takové, aby po přičtení h k F_2 byla tato funkce spojitá na $\mathbb{R}$.



Obr. 11. 5.

Poznámka 11.5.2. Často lze zápis řešení příkladů analogických k Příkladu 11.5.1 zkrátit tím, že hodnoty v bodech „slepení" explicitně nepočítáme. V Příkladu 11.5.1 bychom tak definovali F_2 pouze na množině $\mathbb{R} \setminus \{\, 2k\,;\, k \in \mathbb{Z} \,\}$ a popsali H jako spojité rozšíření F_2 na $\mathbb{R}$.

Obraťme se nyní k technicky složitějšímu příkladu, jehož řešení jsme odložili na pozdější dobu (srovnej s Příkladem 9.3.19). Poznamenejme, že s příklady tohoto typu se zpravidla programy typu *Mathematica*, nebo *Maple* (programy pro „computer algebra“, což je nevhodný, nicméně standardizovaný název, který proto raději nepřeložíme) neumějí vyrovnat [8]).

Příklad 11.5.3. Hledejme primitivní funkci k funkci

$$f(x) = \frac{1}{\sin x + 2}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{11.62}$$

V Kapitole 8 v Příkladu 9.3.19 jsme se dostali až k vyjádření

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x + 2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2\operatorname{tg}(x/2)+1}{\sqrt{3}} =: F(x) \tag{11.63}$$

pro $x \in ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Nyní postupujeme dále jako v Příkladu 11.5.1. Spočteme limity

$$\lim_{x\to-\pi_+} F(x) = -\frac{\pi}{\sqrt{3}}\,, \qquad \lim_{x\to\pi_-} F(x) = \frac{\pi}{\sqrt{3}}\,.$$

Odtud plyne, že (zobecněný) přírůstek funkce F na intervalu $(-\pi+2k\pi, \pi+2k\pi)$ činí $2\pi/\sqrt{3}$. Sestrojíme funkci h

$$h(x) := \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \left[\frac{x+\pi}{2\pi} \right]\,,$$

jejímž přičtením k nalezené funkci F získáme funkci H na $\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi;\, k \in \mathbb{Z}\}$, která mimo tyto body má za derivaci funkci f a která je *spojitě rozšiřitelná* na $\mathbb{R}$. Na libovolném omezeném intervalu (a,b) je toto spojité rozšíření H zobecněnou primitivní funkcí k funkci f, a tedy (díky spojitosti) i primitivní funkcí k f. V bodech „lepení“ to proto nemusíme ani ověřovat výpočtem, je $H'(x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Funkce H je tak popsána jako spojité rozšíření funkce

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2\operatorname{tg}(x/2)+1}{\sqrt{3}} + \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \left[\frac{x+\pi}{2\pi} \right]\,, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi;\, k \in \mathbb{Z}\}$$

na $\mathbb{R}$ a každá jiná primitivní funkce k f na $\mathbb{R}$ se od H liší jen o aditivní konstantu.

11.6 Konvergence Newtonova integrálu

Příklad 11.6.1. Ukažme *elementárně*, že konverguje integrál

$$(\mathcal{N})\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Protože integrovanou funkci lze spojitě rozšířit na interval $[0,1]$ tím, že ji položíme rovnu 1 v bodě 0, její integrál od 0 do 1 konverguje. Stačí proto dokázat konvergenci integrálu

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\,, \tag{11.64}$$

která je podle Věty 11.3.14 o substituci ekvivalentní s konvergencí integrálu

$$\int_0^1 \frac{1}{x} \sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\,.$$

[8]) Zde je nutno poznamenat, že relativně méně komplexní a nepoměrně lacinější *Derive* je zvládá.

Je totiž
$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\sin(1/u)}{1/u}\,|-u^{-2}|\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{1}{u}\sin\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u\,.$$
Metodou per partes spočteme
$$\int_0^1 \cos\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \left[x\cos\frac{1}{x}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\,,$$
a protože první člen na pravé straně rovnosti je konečný a $\cos(1/x)$ je spojitá omezená funkce na intervalu $(0,1)$, konverguje i integrál na pravé straně rovnosti.

Nyní dokážeme, že je
$$(\mathcal{N})\!\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x = +\infty\,.$$
Protože integrál od 0 do π z integrované funkce je konečný, stačí dokázat, že limita *neklesající* primitivní funkce $G(x) := \int_\pi^x (|\sin t|/t)\,\mathrm{d}t$ má v $+\infty$ limitu $+\infty$, což je ekvivalentní s $(\mathcal{N})\!\int_\pi^\infty \big(|\sin t|/t\big)\,\mathrm{d}t = +\infty$. Na intervalu $[\,k\pi,(k+1)\pi\,]$ pro $k\in\mathbb{N}$ je
$$\frac{|\sin x|}{x} \ge \frac{|\sin x|}{(k+1)\pi} \qquad \text{a} \qquad \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x = 2\,,$$
z čehož dostáváme
$$G((n+1)\pi) \ge \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}\,.$$
Odtud však již plyne, že $\lim_{x\to+\infty} G(x) = +\infty$.

Vidíme, že pro Newtonův integrál může nastat případ, kdy
$$\int_a^b f \;\text{ konverguje a }\; \int_a^b |f| = +\infty\,. \tag{11.65}$$

Definice 11.6.2. Jestliže oba integrály v (11.65) konvergují, říkáme, že
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \textit{konverguje absolutně.}$$
Za situace (11.65) říkáme, že
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \textit{konverguje neabsolutně.}$$
(Srovnejte s analogickou terminologií u absolutní a neabsolutní konvergence řad).

V praktických příkladech se zpravidla dá interval, přes který se integruje, rozdělit na konečný počet intervalů, v nichž se existence integrálu vyšetřuje snadněji. Někdy lze srovnáním rozhodnout o absolutní konvergenci poměrně jednoduše:

Věta 11.6.3. *Nechť $-\infty < a < b \le +\infty$ a nechť f je spojitá v $[\,a,b)$. Nechť existuje funkce g taková, že $|f| \le g$ (na $[\,a,b)$) a že Newtonův integrál $\int_a^b g$ konverguje. Potom konvergují i integrály*
$$\int_a^b f \quad \text{a} \quad \int_a^b |f|\,. \tag{11.66}$$
Analogická věta platí i pro interval $(a,b\,]$.

Důkaz. Protože ze spojitosti f plyne spojitost $|f|$ a protože $\int_a^b g$ konverguje, konvergují pro každé $x \in (a, b)$ integrály

$$F_1(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\,, \quad F_2(x) := \int_a^x \big|\,f(t)\,\big|\,\mathrm{d}t\,, \quad G(x) := \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

které jsou zároveň zobecněnými primitivními funkcemi k f, $|f|$ a g v (a, b). Konvergence integrálů od a do b funkcí f, $|f|$ a g je ekvivalentní s existencí konečných limit $F_1(b-)$, $F_2(b-)$ a $G(b-)$, tedy s platností příslušných Bolzano-Cauchyho podmínek. Pro funkci G je tato podmínka splněna, pro funkce F_1 a F_2 ji dokážeme.

Víme, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje b', $a < b' < b$ tak, že

$$(b' < x < y < b) \implies (0 \le G(y) - G(x) < \varepsilon)\,. \tag{11.67}$$

Funkce G je neklesající, protože g je nezáporná, takže $|G(y) - G(x)| = G(y) - G(x)$ a pro zobecněnou primitivní funkci F_1 k f na (a, b) je

$$|F_1(y) - F_1(x)| = \Big|\int_x^y f\Big| \le \int_x^y |f| \le \int_x^y g = G(y) - G(x) < \varepsilon\,,$$

přičemž $\int_x^y |f| = F_2(y) - F_2(x)$; z toho je patrné, že Bolzano-Cauchyho podmínka pro existenci konečných limit $F_1(b-)$ a $F_2(b-)$ je skutečně splněna. □

Poznámka 11.6.4. Pracujeme-li s nezápornými funkcemi f, g, které jsou spojité na $[\,a, b)$, lze vyslovit větu ještě podobnější srovnávacímu kritériu pro řady: nechť

$$0 \le f \le g \quad \text{na} \quad [\,a, b)\,.$$

Potom

$$\int_a^b g \text{ konverguje} \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f \text{ konverguje}$$

a také

$$\int_a^b f = +\infty \quad \Rightarrow \quad \int_a^b g = +\infty\,.$$

Věta 11.6.5 (limitní srovnávací kritérium). *Předpokládejme, že pro kladné funkce $f, g \in \mathcal{C}([\,a, b))$ je*

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = A, \qquad A \in (0, \infty)\,. \tag{11.68}$$

Potom $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje, právě když konverguje $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Důkaz. Po každé $c \in (a, b)$ je $f, g \in \mathcal{N}(a, c)$. Nyní využijeme podmínku (11.68) a zvolíme $c \in (a, b)$ tak, aby platilo

$$\frac{1}{2}\,Ag(x) \le f(x) \le \frac{3}{2}\,Ag(x)\,, \quad x \in [\,c, b)\,.$$

Z předcházející Poznámky pak lehce dostaneme dokazované tvrzení. □

Tak se dostane užitečný nástroj pro praktické výpočty.

Poznámka 11.6.6. Podle Věty 11.6.3 s ohledem na nerovnost

$$\Big|\frac{\sin x}{x^2}\Big| \le \frac{1}{x^2}\,, \quad x \in [\,1,\infty)\,, \qquad \text{a} \qquad \int_1^\infty \frac{1}{x^2} = \Big[-\frac{1}{x}\Big]_1^\infty = 1$$

dostaneme existenci integrálu

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Analogický přístup k integrálu (srovnej Příklad 11.6.1)

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

však selže. Tak jako Leibnizovo kritérium umožňovalo rozhodnout o konvergenci některých neabsolutně konvergentních řad, existují též kritéria pro existenci neabsolutně konvergentních integrálů. Je již pak věcí praxe při studiu konkrétních příkladů nalézt způsob, jak eventuálně rozdělit integrační obor na části, na nichž můžeme nalezená kritéria použít. Vyslovíme proto příslušná kritéria ve velmi jednoduché podobě. Dříve však dokážeme tzv. *věty o střední hodnotě integrálního počtu*, které budeme k dalšímu důkazu potřebovat.

Věta 11.6.7 (1. věta o střední hodnotě, Cauchy 1821). *Nechť funkce f, g jsou z $\mathcal{C}([\,a,b\,])$, $g \ge 0$. Potom existuje $\zeta \in [\,a,b\,]$ tak, že*

$$\int_a^b fg = f(\zeta)\int_a^b g\,.$$

Důkaz. Pro $g \equiv 0$ v $[\,a,b\,]$ věta platí s libovolným $\zeta \in [\,a,b\,]$. Není-li $g \equiv 0$, existuje bod $c \in (a,b)$ tak, že $g(c) > 0$. Ze spojitosti funkce g plyne existence intervalu $(\gamma,\delta) \subset (a,b)$, obsahujícího bod c, v němž je všude $g > g(c)/2$. Z toho plyne, že

$$\int_a^b g = \int_a^\gamma g + \int_\gamma^\delta g + \int_\delta^b g \ge 0 + g(c)(\delta-\gamma)/2 + 0 > 0\,. \tag{11.69}$$

Jsou-li m, M minimum a maximum f na $[\,a,b\,]$, je

$$mg \le fg \le Mg\,,$$

a tedy též

$$m\int_a^b g \le \int_a^b fg \le M\int_a^b g\,, \quad \text{tj.} \quad m \le \int_a^b fg\Big(\int_a^b g\Big)^{-1} \le M\,.$$

Z Darbouxovy věty plyne existence $\zeta \in [\,a,b\,]$, pro něž je

$$f(\zeta) = \int_a^b fg\Big(\int_a^b g\Big)^{-1}\,,$$

což dává žádanou rovnost. ◻

Věta 11.6.8 (2. věta o střední hodnotě). *Nechť f, g jsou spojité funkce na $[a, b]$, nechť g je monotónní na $[a, b]$ a g' je spojitá na (a, b). Potom existuje $\zeta \in [a, b]$ tak, že*

$$\int_a^b fg = g(a) \int_a^\zeta f + g(b) \int_\zeta^b f. \tag{11.70}$$

Důkaz. Je-li g neklesající, je $g' \geq 0$, a je-li F primitivní funkce k f, pak dostáváme integrací per partes

$$\int_a^b fg = \Big[Fg \Big]_a^b - \int_a^b Fg' \tag{11.71}$$

a podle 1. věty o střední hodnotě rovnost

$$\int_a^b Fg' = F(\zeta) \int_a^b g' = F(\zeta) \Big[g(b) - g(a) \Big]. \tag{11.72}$$

Rozepíšeme-li první člen v (11.71) a užijeme-li (11.72), dostaneme

$$\int_a^b fg = F(b)g(b) - F(a)g(a) - F(\zeta)g(b) + F(\zeta)g(a),$$

což je jen jiný tvar (11.70).

Obdobně lze postupovat v případě, že g je nerostoucí; jednodušší ale je aplikovat (11.70) na funkci $-g$. ☐

Poznámka 11.6.9. Věta 11.6.8 platí i při slabších předpokladech: Stačí monotonie a spojitost funkce g. Silnější předpoklady nám umožnily podat relativně krátký důkaz.

Věta 11.6.10 (Abel, Dirichlet). *Nechť funkce f, g jsou spojité v $[a, b)$, g' je spojitá na (a, b) a g je monotónní. Potom integrál*

$$(\mathcal{N})\int_a^b fg \quad \textit{konverguje},$$

je-li splněna některá z následujících podmínek:

(1) *(Abel) konverguje $(\mathcal{N})\int_a^b f$ a g je omezená v $[a, b)$;*

(2) *(Dirichlet) funkce f má v $[a, b)$ omezenou zobecněnou primitivní funkci a $g(x) \to 0$ pro $x \to b_-$.*

Obdobné tvrzení platí i pro intervaly $(a, b]$.

Důkaz. Protože předpoklady zaručují existenci $\Phi \in \mathrm{zpf}(fg; (a, b))$ a fg je spojitá zprava v bodě a, zbývá dokázat existenci konečné limity $\Phi(b-)$. Užijeme k tomu příslušnou Bolzano-Cauchyho podmínku spolu s 2. větou o střední hodnotě.

Nechť platí (1) a nechť $F \in \mathrm{zpf}(f; (a, b))$. Protože F má konečnou limitu $F(b-)$ a protože $|g| \leq M$ pro vhodné $M \in (0, \infty)$, existuje pro každé $\varepsilon > 0$ bod $b' \in (a, b)$ tak, že $x, y \in (b', b) \implies (|F(y) - F(x)| < \varepsilon/2M)$. Pro vhodné $\zeta \in (x, y)$ tedy je

$$\begin{aligned} |\Phi(y) - \Phi(x)| &= \Big| \int_x^y fg \Big| = \Big| g(x) \int_x^\zeta f + g(y) \int_\zeta^y f \Big| \leq \\ &\leq |g(x)||F(\zeta) - F(x)| + |g(y)||F(y) - F(\zeta)| < 2M \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon. \end{aligned} \tag{11.73}$$

Platí-li podmínka (2), nechť $F \in \mathrm{zpf}(f;(a,b))$ vyhovuje podmínce $|F| \le M$ s vhodným $M \in (0,\infty)$ a tedy i podmínce $x', y' \in (a,b) \Rightarrow |F(y') - F(x')| < 2M$. Protože je $g(b-) = 0$, existuje pro každé $\varepsilon > 0$ bod $b' \in (a,b)$ tak, že $|g| < \varepsilon/4M$ v intervalu (b', b), načež podobně jako v Tvrzení 11.6.7 můžeme odhadnout s vhodným $\zeta \in (x,y)$

$$b' < x < y < b \implies |\Phi(y) - \Phi(x)| \le$$
$$\le |g(x)||F(\zeta) - F(x)| + |g(y)||F(y) - F(\zeta)| < \frac{\varepsilon}{4M}(2M + 2M) = \varepsilon\,.$$

Tím je důkaz dokončen. □

Příklady 11.6.11. 1. Pomocí Vět 11.6.3 a 11.6.10 dokážeme pro všechna $\alpha > 0$ konvergenci integrálu

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^{\alpha}}\,\mathrm{d}x\,. \tag{11.74}$$

Je-li $\alpha > 1$, stačí integrand odhadnout funkcí $1/x^\alpha$, protože $\int_1^\infty 1/x^\alpha\,\mathrm{d}x$ konverguje. Podle Věty 11.6.3 je v tomto případě konvergence integrálu v (11.74) absolutní. Je-li $0 < \alpha \le 1$, stačí vzít v úvahu, že funkce $\sin x$ má omezenou primitivní funkci $(-\cos x)$ a že funkce $1/x^\alpha$ je klesající, má spojitou derivaci a v $+\infty$ má limitu 0. V tomto případě podobně jako v Příkladu 11.6.1 dokážeme, že konvergence je neabsolutní.

2. Pomocí Věty 11.6.3 a analogie Věty 11.6.10 pro intervaly tvaru $(a,b\,]$ ukažme, že integrál

$$\int_{-\infty}^0 \frac{\exp x^2}{1 + \exp x^2}\,\frac{\cos x}{\sqrt{|x|}}\,\mathrm{d}x \tag{11.75}$$

konverguje neabsolutně. Označme $f(x) := \cos x/\sqrt{|x|}$. Protože funkce $\cos x$ má na intervalu $(-\infty,0)$ omezenou primitivní funkci $\sin x$ a protože funkce $1/\sqrt{|x|}$ je rostoucí a omezená v $(-\infty,-1\,]$, přičemž její derivace je tam spojitá, integrál $\int_{-\infty}^{-1} f$ konverguje podle Věty 11.6.10. V intervalu $(-1,0)$ je $0 < f(x) \le 1/\sqrt{|x|} =: g(x)$, přičemž $\int_{-1}^0 g = 2$ a tedy tento integrál konverguje. Podle Věty 11.6.3 konverguje i $\int_{-1}^0 f$, a to absolutně. Tím je dokázána konvergence integrálu $\int_{-\infty}^0 f$. Není obtížné dokázat, podobně jako v Příkladu 11.6.1, že integrál konverguje neabsolutně.

Jak snadno nahlédneme, funkce $h(x) := \big(\exp x^2\big)/(\exp x^2 + 1)$ je v intervalu $(-\infty,0)$ klesající a omezená (je $1/2 \le h(x) \le 1$), takže podle Abelova kritéria konverguje neabsolutně nejen $\int_{-\infty}^0 f$, ale i integrál v (11.75).

Historické poznámky 11.6.12. Na začátku této kapitoly jsme dokázali další větu o spojitých funkcích na uzavřeném intervalu, která byla v tomto textu i poslední větou podobného typu. K větám, které jsme *pouze připomněli* v úvodním odstavci, se nyní krátce vrátíme v historickém komentáři. V další části textu tyto věty zobecníme.

Věta 2.1.19, resp. její modifikace z Věty 2.2.12, souvisejí se základní vlastností množiny $\mathbb{R}$, obsažené v axiomu (13). Také Věta 2.4.1 je jen jinou variantou Věty 2.1.19. Patrně pro svůj velmi názorný charakter byla pokládána za „samozřejmou“ dávno před tím, než si Bernard Bolzano (1781 – 1848) uvědomil, že je nutno ji dokázat, a než matematici nastoupili cestu k reformě, spočívající v položení lepších základů pro budování matematických teorií. Ta nebyla dílem jedince, ale mnoha těch, kteří přispěli k procesu, započatému Bolzanem, Cauchym, a Nielsem Henrikem Abelem (1802 – 1829) a završenému později Carlem Theodorem Wilhelmem Weierstrassem (1815 – 1897), Georgem Cantorem (1845 – 1918) a dalšími.

Věta 2.4.1 byla dokázána teprve Weierstrassem, ale tak jako u ostatních tvrzení šlo o dovršení dlouhého vývoje, který byl podrobněji popsán již v předcházejících komentářích. Věta 5.2.26 nemá zásadní praktický význam. Je ukázkou jiné cesty k řešení rovnice $y' = 0$ *na intervalu* bez použití věty o střední hodnotě. Ukázali jsme její použití při důkazu Lemmatu 11.3.4.

Větu 2.4.4 dokázal Weierstrass r. 1874, věty s ní související jsou zpravidla jen jejími variacemi. I pojmy $\limsup a_n$ a $\liminf a_n$ znal v podstatě již dlouho před Cauchym (1800) Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855) a Abel (nepublikováno). Jsou připisovány Cauchymu (1821), označení pochází patrně od Moritze Pasche (1843 – 1930).

Věty o spojitých funkcích na uzavřeném intervalu tvoří jeden z vrcholů základů analýzy. Větu 4.3.31 uváděl Weierstrass ve svých přednáškách již r. 1861, publikoval ji však Cantor (1870). Věta 4.3.32 byla intuitivně dlouhou dobu „geometricky zřejmá“. Užíval ji např. již r. 1594 Simon Stevin (1548 – 1620). Bolzano a Cauchy byli patrně první, kteří si uvědomili, že takové tvrzení není zřejmé a je nutné ho dokazovat. Zobecnění pro funkce více proměnných dokázal Darboux r. 1872.

Skutečně zásadní význam Věty 4.3.46 o pokrývání pro další vývoj matematiky bude čtenáři zřejmější až po přečtení Kapitol 12 a 13 o metrických prostorech. U nás bývá často nazývána po Emilu Borelovi (1871 – 1956) a Lebesgueovi. Borel ji dokázal r. 1895 pro *spočetná* otevřená pokrytí a teprve Lebesgue dokázal verzi s *libovolným* otevřeným pokrytím. Ještě dříve dokázal Eduard Heinrich Heine (1821 – 1881) tvrzení, které někteří autoři považují za rozhodující krok pro důkaz Věty 4.3.46. Proto užívají pro Větu 4.3.46 označení *Věta Heine-Borelova* (je to např. běžné v rusky psané literatuře).

Větu 11.1.3 o stejnoměrné spojitosti dokázal podle jiných pramenů již r. 1854 Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 – 1859). Přínos Heineho je zde nepopiratelný, často však nová metoda důkazu ovlivní i terminologii. Jean Gaston Darboux (1842 – 1917) se nejen velmi zasloužil o prozkoumání vlastnosti nabývání mezihodnot, ale patří mu i myšlenka užití horního a dolního Riemannova integrálu. S ohledem na to, že jsme v této kapitole zavedli množiny nulové Lebesgueovy míry, doplňme ještě jednu informaci o vlastnostech funkcí, které mají Darbouxovu vlastnost. Dá se dokázat, že *k jakékoli funkci* f definované na $\mathbb{R}$ existuje funkce s Darbouxovou vlastností g tak, že

$$\lambda(\{x \in \mathbb{R};\ f(x) \neq g(x)\}) = 0\,,$$

tj. že g se liší od f nejvýše na množině Lebesgueovy míry 0 (viz Definici 11.2.27).

Náš přístup k Riemannovu integrálu je poplatný dalšímu vývoji v 19. století, o nějž se zasloužil mimo Darbouxe i Paul Du Bois Reymond (1831 – 1899). Několik poznámek k vývoji pojmu integrálu jsme uvedli již v textu této kapitoly. Přesto to zajímavější, tedy další vývoj integrálu v tomto století, nebylo možné popsat, neboť to značně přesahuje rámec této knihy.

Moderní partie matematiky i jejich aplikace jsou založeny na daleko obecnějším Lebesgueově integrálu, který má navíc ve srovnání s Riemannovým integrálem podstatně jednodušší vlastnosti. Zájemcům o hlubší poznání historie teorie integrálu vřele doporučujeme knížku [7].

Cesta k důkazu existence primitivní funkce ke spojité funkci přes Riemannův integrál není jediná možná. Zabývali jsme se jím mj. proto, že jsme pomocí něj dokázali

Větu 11.2.48. Početní význam má však spíše integrál Newtonův, s trochou nadsázky je totiž jediným integrálem, který umíme počítat. Výpočet integrálu Riemannova se na výpočet Newtonova integrálu převádí. V tom má zásadní význam Věta 11.3.16.

Základní princip určení délky grafu funkce je velmi starý. Již u Archimeda nacházíme myšlenku určit co nejpřesněji délku kružnice pomocí obvodů pravidelných vepsaných n-úhelníků zdvojnásobováním počtu stran; srov. s výkladem v Úvodu tohoto textu. Tak se, zhruba řečeno, postupuje i při definování délky křivek (v Jordanově smyslu). Poznamenejme ještě, že při použití Definice 11.49 na funkci $g : [\,a, b\,] \to \mathbb{R}^1$ by hodnota $L(g)$ byla tzv. *variací funkce* g. To je pojem, důležitý např. při vyšetřování Fourierových řad nebo délky křivek, který zavedl Marie Camille Jordan (1838 – 1922).

První větu o střední hodnotě integrálního počtu lze nalézt opět již u Cauchyho (1821), ale i ona prošla určitým vývojem. Cauchy současně dokázal nejprve verzi s $g \equiv 1$, která ukazuje do jisté míry souvislost integrálu a obecněji chápaného *průměru*: je-li $f \in \mathcal{C}([\,a, b\,])$, existuje bod $\zeta \in [\,a, b\,]$ tak, že

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\zeta)(b-a)\,.$$

Někdy bývá Věta 11.6.7 připisována, stejně jako věta Lagrangeova, Ossianu Bonnetovi (1819 – 1892) (1849). Větu 11.6.8 dokázal první patrně Du Bois Reymond.

Poslední poznámku věnujme 20. století. Lebesgue vytvořil nyní všeobecně používanou teorii integrálu, který nese jeho jméno, r. 1902. I tento integrál však má své nedostatky. Je potěšitelné, že integrál, který zobecňuje Riemannův postup, nese jméno českého matematika. Definoval jej totiž Jaroslav Kurzweil (*1926) a nezávisle též Ralph Henstock (1923 – 2007). Jejich definice je založena na součtech podobných $\sigma(f; D, \xi)$ dává však mnohem širší třídu integrovatelných funkcí. Pro její pochopení je však předchozí seznámení s Riemannovým integrálem velmi výhodné.

I další čeští matematici přispěli významně k propagaci užívání tohoto integrálu. U nás je snadno dostupná kniha [6], která je věnována teorii tohoto integrálu.

Literatura:

[1] Bourbaki, N.: *Funkcii dějstvitělnogo peremennogo*, Nauka, Moskva, 1965, (část Encyklopedie moderní matematiky, překlad z francouzského originálu: *Fonctions d'une variable réele* (*Théorie élémentaire*), Herrmann, Paris).

[2] Černý, I., Rokyta, M.: *Differential and integral calculus of one real variable*, Karolinum, Praha, 1998.

[3] Jarník, V.: *Diferenciální počet I*, Academia, Nakladatelství ČSAV, Praha, 1963.

[4] Jarník, V.: *Integrální počet I*, Academia, Nakladatelství ČSAV, 1963.

[5] Lebesgue, H.: *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives professées au College de France*, Gauthier-Villars, Paris, 1904.

[6] Schwabik, Š.: *Integrace v* $\mathbb{R}$ (*Kurzweilova teorie*), Karolinum, Praha, 1999.

[7] Schwabik, Š., Šarmanová P.: *Malý průvodce historií integrálu*, Prometheus, Praha, 1996, (Dějiny matematiky, Svazek 6).

Kapitola 12

Metrické prostory

12.1 Trocha historie

Již několikrát jsme se setkali s obecnými mechanismy, které bylo možno použít v mnoha případech. Byl to nejen např. způsob dokazování nebo technický trik, ale i použití obecných vět, platných v různých *strukturách*. Užili jsme např. vícekrát princip vložených intervalů či jednu substituci pro výpočet primitivních funkcí k funkcím určitého tvaru. Při práci se spojitými nebo integrovatelnými funkcemi jsme často používali pojem *lineární prostor*, který je příkladem vcelku jednoduché, avšak velmi důležité struktury. To vše ilustruje užitečnost „obecného“ přístupu.

Nyní se seznámíme s pojmem *metrický prostor*, což je struktura, která má pro matematickou analýzu zásadní význam (dále budeme často užívat zkráceného označení MP). Množství příkladů, které uvedeme, by mělo postačit při dobrém promyšlení k osvojení teorie: je jedinou partií modernější analýzy, která se v tomto textu podrobněji studuje. Budeme se též zabývat *normovanými lineárními prostory* a částečně i *prostory se skalárním součinem.*

Historická poznámka 12.1.1. Látka, kterou vyložíme v následujících dvou kapitolách, vznikla převážně ve 20. století; přesto se již stala klasickou partií analýzy. I když mnoho dílčích poznatků o speciálních metrických prostorech je starších, samotný vznik pojmu metrického prostoru se datuje k r. 1906. Pojem MP byl zaveden Mauricem René Fréchetem (1878 – 1973). Dále jej rozvinul Felix Hausdorff (1868 –1942) ve známé monografii [9] z r. 1914. Eduard Čech (1893 – 1960) je autorem knihy *Bodové množiny* [4], která vyšla r. 1936 a byla na svoji dobu velmi moderní. Vyšla pouze česky, ale byla to jedna z prvních monografií, které byly věnovány metrickým prostorům.

Lineární prostory opatřené *normou* jsou zároveň MP, jejichž metrika je definována pomocí této normy. Jde o strukturu méně obecnou, nežli je MP. Naproti tomu systém všech otevřených množin MP tvoří tzv. *topologii* v tomto prostoru, a tak MP jsou speciálním případem *topologických prostorů.* U této struktury se seznámíme prakticky pouze s její definicí. Velmi důležitý bude i geometrický způsob vyjadřování, který budeme používat a který je základem komunikace v moderní matematice.

Protože historie vzniku většiny struktur je dosti složitá, odkazujeme čtenáře na historické poznámky na konci Kapitoly 14. Pro povzbuzení zvědavosti uveďme základní data pro normovaný lineární prostor a pro topologický prostor, která však jsou bez podrobnějšího vysvětlení zavádějící. Se vznikem *teorie* normovaných lineárních prostorů lze svázat rok 1932, kdy byla publikována kniha [1], kterou napsal STEFAN BANACH (1892 – 1945) [1]). Jednotlivé pojmy jsou ovšem staršího data. Podobně lze sledovat vznik topologie zpět až k pracím BERNHARDA RIEMANNA (1826 – 1866), který se první pokusil definovat *topologický prostor*; viz [2], str. 138. Dalším mezníkem jsou práce, které napsal GEORG CANTOR (1845 – 1918) v osmdesátých letech 19. století, v nichž zavedl řadu topologických pojmů (viz dále pojmy okolí, otevřené a uzavřené množiny apod.).

V této kapitole se seznámíme s užívanou terminologií a základními pojmy. Poznamenejme konečně, že je velmi obtížné stanovit autorství jednotlivých tvrzení. Často bývá tvrzení spojeno obsahově s jiným klasickým tvrzením z doby dávno před vznikem obecných struktur a pak se někdy nazývá po objeviteli původního tvrzení. Přitom v některých případech je důkaz obecnějšího tvrzení jednodušší. Čtenáře může napadnout, že pak by bylo lepší postupovat od obecného tvrzení k jeho speciálním případům, a to alespoň v těch případech, kde jsou taková tvrzení k dispozici. Ani to však není vždy rozumné [2]).

12.2 Základní definice, příklady

Definice 12.2.1 (Fréchet 1906*). Nechť $P \neq \emptyset$ a nechť funkce $\varrho : P \times P \to \mathbb{R}$ má tyto vlastnosti:

(1) $\varrho(x,y) \geq 0$ pro všechna $x, y \in P$, tj. ϱ je *nezáporná* funkce;

(2) $\varrho(x,y) = 0$, právě když $x = y$;

(3) $\varrho(x,y) = \varrho(y,x)$ pro všechna $x, y \in P$, tj. ϱ je *symetrická* funkce;

(4) $\varrho(x,y) \leq \varrho(x,z) + \varrho(z,y)$ pro všechna $x, y, z \in P$, tj. ϱ splňuje tzv. *trojúhelníkovou nerovnost.*

Potom ϱ je *metrika* (říkáme: „metrika na P“, i když P není definiční obor ϱ) a číslo $\varrho(x,y)$ je *vzdálenost bodů* $x, y \in P$; často se o ϱ hovoří též jako o vzdálenosti na P. Dvojici (P, ϱ) nazýváme *metrický prostor.*

Poznámky 12.2.2. 1. Množina P je *nosná množina* metrického prostoru (P, ϱ). Často se mluví o „metrickém prostoru P“ a rozumí se tím automaticky dvojice (P, ϱ); s takovou situací jsme se již setkali u $\mathbb{R}$.

2. Vlastnosti (1) – (4) z definice MP se užívají k definici MP nejčastěji, jejich počet však lze omezit. Je-li $P \neq \emptyset$ a ϱ funkce na $P \times P$ taková, že pro všechny body x, y, $z \in P$ platí (2) a podmínka

$$(4') \qquad \varrho(x,y) \leq \varrho(z,x) + \varrho(z,y)\,,$$

je (P, ϱ) metrický prostor. Podrobný důkaz lze jistě přenechat čtenáři, napovíme-li mu, že když do (4') dosadíme $x = y$, dostaneme podmínku (1), a když do (4') dosadíme

[1]) Jméno Banach měl po svojí matce *Katarzyně Banach*, kterou však nikdy nepoznal. Jeho otcem byl *Stefan Greczek* a je zajímavé, že byl, stejně jako Banach, samouk.

[2]) Prof. VOJTĚCH JARNÍK (1897 – 1970) hlásal názor, že přechod ke zobecnění je možný v případě, že se zobecňuje *nejméně ze dvou* speciálních případů.

$z = y$, získáme podmínku (3). Vlastnost (4) se *liší* od (4') (srovnejte pozici bodu z), neboť jsme trojúhelníkovou nerovnost nepatrně modifikovali.

Definice 12.2.3. Buď $P_1 \subset P$, $P_1 \neq \emptyset$. Nechť ϱ_1 je restrikce ϱ na $P_1 \times P_1$. Potom je (P_1, ϱ_1) zřejmě metrický prostor a nazýváme jej *podprostor metrického prostoru* P. O metrice ϱ_1 říkáme, že je na P_1 *indukována* z (P, ϱ). I když je to nedůsledné, značíme ji často stejně: píšeme opět ϱ místo ϱ_1.

Úmluva 12.2.4. Často budeme zavádět pojmy pro podmnožiny (P, ϱ) implicitně: zavedeme je pouze pro celý prostor, budeme je však používat i pro podmnožiny prostoru P, chápané jako jeho podprostory. Na základě tohoto principu např. stačí zavést jen pojem *omezený prostor* (P, ϱ) a je automaticky definována i omezená množina $M \subset (P, \varrho)$: budeme-li mít definován omezený MP, budeme již vědět, co to je omezená množina v MP.

Dále uvedeme větší počet příkladů, na které se budeme později odvolávat. Čtenář by si je měl důkladně promyslit; nejprve uvedeme další důležitou definici:

Definice 12.2.5 (F. Riesz 1910). Nechť X je *lineární prostor* (neboli *vektorový prostor*) nad polem $\mathbb{R}$ nebo nad polem $\mathbb{C}$. Nechť je na X definována reálná funkce p s těmito vlastnostmi:

(1) $p(x) \geq 0$ pro všechna $x \in X$,

(2) $p(x) = 0$, právě když $x = 0$,

(3) $p(\alpha x) = |\alpha|\, p(x)$ pro všechna $\alpha \in \mathbb{R}$ a všechna $x \in X$,

(4) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ pro všechna $x, y \in X$.

Tato funkce se nazývá *norma* na X; budeme pro ni zpravidla užívat označení $\|\cdot\|$, resp. jeho různé modifikace; píšeme tedy např. $\|x\|$ místo $p(x)$. Dvojice (X, p) je *normovaný lineární prostor* nad polem $\mathbb{R}$ (nebo nad $\mathbb{C}$). [3]).

Poznámka 12.2.6. Nelze zcela pominout historii vzniku lineárního prostoru. Axiomatickou definici podal r. 1888 Giuseppe Peano (1858 – 1932) v knize *Calcolo geometrico secondo*; kniha zůstala delší dobu málo známá. Mezi jeho předchůdce jsou řazeni Bernard Bolzano (1781 – 1848) (1804), Edmund Nicolas Laguerre (1834 – 1886) (1867), Herrman Günther Grassman (1809 – 1877) (1844, 1862). Na Peana navázal Salvatore Pincherle (1853 – 1936) (1896/97), který je po Peanovi znám jako autor druhé *knihy* o LP (1901), a celá italská matematická škola.

Pojem normovaného lineárního prostoru se objevuje poprvé patrně v práci, kterou napsal r. 1910 Frederik (Frigyes) Riesz (1880 – 1956), a v několika pracích z let 1920 – 1922, které napsali Eduard Helly (1884 – 1943), Hans Hahn (1879 – 1934), Norbert Wiener (1894 – 1964) a Banach.

Příklad 12.2.7 (velmi důležitý). V každém normovaném lineárním prostoru je přirozeným způsobem definována metrika, takže každý normovaný lineární prostor je zároveň

[3]) S normovaným lineárním prostorem nad polem $\mathbb{C}$ všech komplexních čísel v tomto textu nebudeme pracovat.

i MP; proto lze do normovaných lineárních prostorů snadno všechny pojmy z teorie MP přenést. Stačí definovat

$$\varrho(x,y) = p(x-y)\,, \quad x,y \in X\,,$$

a dokázat, že ϱ je metrika. To je snadné, neboť vlastnosti metriky (1) – (3) jsou zřejmé. Z trojúhelníkové nerovnosti (4) pro normu plyne trojúhelníková nerovnost (4) pro metriku:

$$\varrho(x,y) = p(x-y) \le p(x-z) + p(z-y) = \varrho(x,z) + \varrho(z,y)\,.$$

Za této situace zpravidla říkáme, že metrika ϱ *je generována* normou p.

Poznámka 12.2.8. Naopak to není pravda, na lineárním prostoru definovaná metrika nemusí s jeho lineární strukturou vůbec souviset. Lze však snadno zjistit více. Je-li ϱ metrika na X, generovaná normou p, platí pro všechna $x,y,z \in X$ a všechna $\alpha \in \mathbb{R}$ identity

$$\begin{aligned}\varrho(x+z,y+z) &= p(x+z-y-z) = p(x-y) = \varrho(x,y)\,,\\ \varrho(\alpha x,\alpha y) &= p(\alpha x-\alpha y) = |\alpha| p(x-y) = |\alpha|\varrho(x,y)\,.\end{aligned}$$

Má-li metrika ϱ na lineárním prostoru X tyto dvě vlastnosti, lze ji vytvořit pomocí normy p, položíme-li $p(x) = \varrho(0,x)$: vlastnosti normy (1) – (3) jsou zřejmé, vlastnost (4) plyne ze vztahů

$$\begin{aligned}p(x+y) &= \varrho(0,x+y) \le \varrho(0,x) + \varrho(x,x-y) =\\ &= \varrho(0,x) + \varrho(x-x,x-x-y) = \varrho(0,x) + \varrho(0,y) = p(x) + p(y)\end{aligned}$$

Příklad 12.2.9. Množina $\mathbb{R}^1 := \mathbb{R}$ spolu s funkcí

$$\varrho(x,y) = |x-y|, \quad x,y \in \mathbb{R}^1\,,$$

tvoří MP; tento prostor je nám již důvěrně známý, o vzdálenosti bodů v $\mathbb{R}$ jsme již (často v intuitivní rovině) mluvili. V dalším budeme ze znalostí tohoto prostoru často získávat motivaci k dalšímu postupu. Mnoho věcí lze jen s malými změnami z tohoto MP převzít a zobecnit.

Příklad 12.2.10. Nechť (P_1,ϱ_1) a (P_2,ϱ_2) jsou MP. Jestliže jsou dvojice $z_1 = [\,x_1,y_1\,]$, $z_2 = [\,x_2,y_2\,]$ prvky $P_1 \times P_2$, definujme na $P_1 \times P_2$ funkci

$$\varrho\,(z_1,z_2) := \varrho_1(x_1,x_2) + \varrho_2(y_1,y_2)\,.$$

Potom je $(P_1 \times P_2,\varrho\,)$ zřejmě rovněž MP. Je „ $\varrho = \varrho_1 + \varrho_2$“, což je pouze dobrá pomůcka k zapamatování.

Podobně: Jsou-li (X_1,p_1), (X_2,p_2) normované lineární prostory a položíme-li

$$p\,([\,x_1,x_2\,]) = p_1(x_1) + p_2(x_2)\,, \qquad x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2\,,$$

je p norma na $X_1 \times X_2$; můžeme si ji pamatovat jako normu „$p = p_1 + p_2$“.

V obou případech je ověření všech vlastností včetně trojúhelníkové nerovnosti pro metriku ϱ i normu p triviální.

Definice 12.2.11. Prostor $(P_1 \times P_2,\varrho\,)$, který jsme takto vytvořili, se nazývá *součin metrických prostorů* (P_1,ϱ_1) a (P_2,ϱ_2); někdy říkáme podrobněji „se součtovou metrikou“.

Poznámka 12.2.12. Obecněji se obdobně definuje součin $(P_1 \times \cdots \times P_m, \varrho)$ a také *součin normovaných lineárních prostorů* $(X_1 \times \cdots \times X_m, p)$ pro m prostorů, $m \in \mathbb{N}$, $m > 2$. Čtenář jistě uhodne, jak lze zavést metriku „$\varrho_1+\varrho_2+\cdots+\varrho_m$" v $P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_m$, resp. normu „$p_1 + p_2 + \cdots + p_m$" v $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_m$.

Příklad 12.2.13. Nechť (P, ϱ) je libovolný metrický prostor. Ukažme, že pak je

$$\sigma(x,y) := \frac{\varrho(x,y)}{1+\varrho(x,y)}, \quad x, y \in P\,,$$

také metrika na P. Položíme-li

$$a := \varrho(x,z)\,, \quad b := \varrho(x,y)\,, \quad c := \varrho(y,z)\,,$$

jsou a, b, c nezáporná čísla, pro něž $a \le b + c$; máme dokázat, že

$$\frac{a}{1+a} \le \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} \tag{12.1}$$

Vynásobením součinem jmenovatelů dostaneme ekvivalentní nerovnost

$$a(1+b)(1+c) \le b(1+a)(1+c) + c(1+a)(1+b)\,,$$

a po roznásobení další nerovnost

$$\begin{aligned} a + ab + ac + abc &\le b + ab + bc + abc + c + ac + bc + abc\,, \quad \text{resp.}\\ a &\le b + c + 2bc + abc\,. \end{aligned}$$

Protože poslední nerovnost zřejmě platí, platí i ekvivalentní nerovnost (12.1). Protože σ má zřejmě první tři vlastnosti metriky, je (P, σ) MP. Za povšimnutí stojí fakt, že σ je omezená funkce: platí $\sigma \le 1$.

12.3 Eukleidovský prostor

Velmi často pracujeme s množinou všech uspořádaných m-tic reálných čísel. Tuto množinu budeme nazývat *aritmetický m-rozměrný prostor* a značit $\mathbb{A}^m$. Z hlediska algebry je to lineární ($\equiv$ vektorový) prostor, definujeme-li sčítání dvou m-tic

$$x = [\,x_1, x_2, \ldots, x_m\,]\,, \quad y = [\,y_1, y_2, \ldots, y_m\,] \tag{12.2}$$

a násobení m-tice číslem $c \in \mathbb{R}$ rovnostmi

$$x + y = [\,x_1{+}y_1, x_2{+}y_2, \ldots, x_m{+}y_m\,]\,, \quad cx = [\,cx_1, cx_2, \ldots, cx_m\,]\,. \tag{12.3}$$

V souvislosti s (12.3) říkáme, že sčítáme a násobíme *po souřadnicích* (nebo *po složkách.*)

Je-li X lineární prostor (nad $\mathbb{R}$), říkáme, že funkce přiřazující (uspořádané) dvojici $[\,x, y\,] \in X \times X$ číslo (x, y) je *skalární součin* na X, jsou-li splněny tyto čtyři podmínky:

(1) Pro každé $x \in X$ je $(x, x) \ge 0$.

(2) Rovnost $(x, x) = 0$ platí, právě když je $x = 0$.

(3) Pro každé dva body $x, y \in X$ je $(x, y) = (y, x)$ [4]).

(4) Jsou-li $x, y, z \in X$ libovolné body a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ libovolná čísla, je

$$(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)\,. \tag{12.4}$$

Podmínka (3) vyjadřuje *symetrii* skalárního součinu, podmínka (4) jeho *linearitu* v „první proměnné“. Jejich kombinací získáme *bilinearitu* skalárního součinu, tj. platnost identity

$$(\alpha x + \beta y, \gamma u + \delta v) = \alpha\gamma(x, u) + \alpha\delta(x, v) + \beta\gamma(y, u) + \beta\delta(y, v) \tag{12.5}$$

pro každou čtveřici bodů $x, y, u, v \in X$ a každou čtveřici čísel $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.

Předpokládejme, že je v prostoru X zaveden skalární součin a definujme

$$\|x\| := \sqrt{(x, x)}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{12.6}$$

Tvrdíme, že (12.6) je skutečně norma. Podmínky (1) a (2) z definice normy plynou z vlastností (1) a (2) skalárního součinu. Protože je

$$\|\alpha x\| = \sqrt{(\alpha x, \alpha x)} = \sqrt{\alpha^2(x, x)} = |\alpha|\,\|x\|\,,$$

je splněna i podmínka (3). K důkazu trojúhelníkové nerovnosti budeme potřebovat tzv. *Cauchyho nerovnost*

$$|(x, y)| \le \|x\|\,\|y\|\,, \tag{12.7}$$

platnou pro každé dva body $x, y \in X$. Pak je totiž

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 = (x + y, x + y) \;&=\; \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x, y) \;\le \\ \le \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| \;&=\; (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

a stačí jen odmocnit nerovnost mezi prvním a posledním výrazem, abychom dostali trojúhelníkovou nerovnost (3) pro normu.
Zbývá dokázat Cauchyho nerovnost (12.7). Ze vztahu

$$0 \le (\alpha x - y, \alpha x - y) = \alpha^2\|x\|^2 - 2\alpha(x, y) + \|y\|^2$$

vyplývá, že polynom (v proměnné α) vpravo má nekladný diskriminant, tj. že je $4(x, y)^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \le 0$. Odtud plyne $(x, y)^2 \le \|x\|^2\|y\|^2$, z čehož odmocněním dostaneme Cauchyho nerovnost (12.7).

Úmluva 12.3.1. Je-li na prostoru X zaveden skalární součin, budeme mlčky předpokládat, že je tam zavedena i norma rovností (12.6) a metrika rovností $\varrho(x, y) = \|x - y\|$; budeme mluvit o normě a metrice *indukované* (zavedeným) skalárním součinem.

Užijeme-li označení z (12.2) a položíme-li

$$(x, y) := \sum_{k=1}^{m} x_k\, y_k\,, \tag{12.8}$$

[4]) Při práci s m-ticemi komplexních čísel nad polem $\mathbb{C}$ má tato podmínka tvar $(x, y) = \overline{(y, x)}$.

zavedli jsme tím v $\mathbb{A}^m$ skalární součin, protože platnost podmínek (1) – (4) plyne z běžných pravidel elementární algebry. Norma, resp. metrika indukovaná tímto skalárním součinem je pak definována rovností

$$\|x\|_2 := \Big(\sum_{k=1}^{m} |\,x_k\,|^2\Big)^{1/2}, \quad \text{resp.} \quad \varrho_2(x,y) := \Big(\sum_{k=1}^{m} |\,x_k - y_k\,|^2\Big)^{1/2} \tag{12.9}$$

a nazývají se *eukleidovská norma* a *eukleidovská metrika*. Aritmetický prostor $\mathbb{A}^m$ s touto normou (metrikou) se nazývá *m-rozměrný eukleidovský prostor* a značí se $\mathbb{R}^m$. Je vhodné mít na paměti, že tato metrika je generována normou, vzniklou ze skalárního součinu (12.8).

Do množiny $\mathbb{A}^m$ je často výhodné zavést i jiné normy; můžeme je nazvat *součtová* a *maximová* (rozlišíme je opět indexy, jejichž logika bude později zřejmá):

$$\|x\|_1 := |x_1| + \cdots + |x_m|\,, \quad \|x\|_\infty := \max\{|x_1|, \ldots, |x_m|\}\,. \tag{12.10}$$

Snadné ověření, že jsou to normy, lze přenechat čtenáři. Měření vzdálenosti pomocí příslušných metrik

$$\begin{aligned} \varrho_1(x,y) &:= |x_1 - y_1| + \cdots + |x_m - y_m|\,, \\ \varrho_\infty(x,y) &:= \max\{|x_1 - y_1|, \ldots, |x_m - y_m|\} \end{aligned} \tag{12.11}$$

popíšeme pro jednoduchost jen pro případ $m = 2$. V obou případech utvoříme úsečky

$$u := \big\{[x_1 + t(y_1 - x_1), x_2]\,;\, t \in [\,0,1\,]\big\}\,, \quad v := \big\{[y_1, x_2 + t(y_2 - x_2)]\,;\, t \in [\,0,1\,]\big\}\,.$$

Předpokládáme-li, že $x_1 \neq y_1$ a $x_2 \neq y_2$, jsou to úsečky, z nichž první je rovnoběžná s osou x a druhá s osou y, které dohromady tvoří lomenou čáru spojující body $[\,x_1, x_2\,]$ a $[\,y_1, y_2\,]$ [5]). Vzdálenost bodů $[\,x_1, x_2\,]$ a $[\,y_1, y_2\,]$ je v případě první z metrik v (12.11) rovna součtu délek úseček u a v, tj. délce lomené čáry, zatímco ve druhém případě z (12.11) je to délka nejdelší z obou úseček.

Definice 12.3.2. Dvě normy p, q na témž lineárním prostoru X se nazývají *ekvivalentní* (v X), existují-li konstanty $C, D \in (0, +\infty)$ tak, že pro všechna $x \in X$ je

$$Cp(x) \leq q(x) \leq Dp(x)\,. \tag{12.12}$$

Poznámka 12.3.3. Místo „normy p, q jsou ekvivalentní“ budeme často říkat „p je ekvivalentní s q“. Definice je korektní, protože podmínky v ní uvedené jsou vzhledem k p, q symetrické: Platí-li např. (12.12), je $D^{-1}q(x) \leq p(x) \leq C^{-1}q(x)$, rovněž pro všechna $x \in X$.

Lemma 12.3.4. *Ve vzorci* (12.9) *definovaná eukleidovská norma a normy ze vzorce* (12.10) *jsou na $\mathbb{A}^m$ ekvivalentní.*

Důkaz. Snadno nahlédneme, že pro všechna $x = [\,x_1, \ldots, x_m\,] \in \mathbb{A}^m$ a pro všechna $k = 1, \ldots, m$, platí

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq m \cdot \|x\|_\infty\,. \tag{12.13}$$

[5]) Je-li $x_1 = y_1$ (resp. $x_2 = y_2$), „redukuje se“ úsečka na bod a situace se zjednoduší.

První nerovnost plyne ze zřejmé nerovnosti $|x_k| \leq \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_m|^2}$, která platí pro $k = 1, \ldots, m$, přechodem k maximu vzhledem ke k vlevo, druhá je ekvivalentní s evidentní nerovností mezi čtverci obou stran a třetí nerovnost je rovněž jistě zřejmá. $\square$

Poznámka 12.3.5. Ekvivalence norem na $\mathbb{A}^m$ se často používá. Lze dokonce dokázat, že na $\mathbb{A}^m$, či obecněji na každém lineárním prostoru *konečné dimenze*, jsou *všechny* normy ekvivalentní. Tato věta patří k základním tvrzením funkcionální analýzy; viz např. [11], Věta 13.9, nebo [15], Věty 3.1-D a 3.12-A.

Příklad 12.3.6. Na lineárním (nekonečně rozměrném) prostoru $\mathcal{C}([\,a,b\,])$ lze také definovat normu mnoha způsoby. Seznámíme se s nejdůležitějšími z nich. Pro všechny funkce $f \in \mathcal{C}([\,a,b\,])$ položme

$$\|f\|_\infty := \max\{\, |f(t)|;\ t \in [\,a,b\,]\,\} \tag{12.14}$$

a dokažme, že je to norma na prostoru $\mathcal{C}([\,a,b\,])$. Protože podmínky (1) – (3) z Definice 12.2.5 jsou jistě zřejmé, zbývá proto dokázat trojúhelníkovou nerovnost (4). Protože však relace

$$|(f+g)(x)| = |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

platí pro všechna $x \in [\,a,b\,]$, stačí přejít k maximu vlevo.

Ukažme nyní, že rovnost

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t\,, \tag{12.15}$$

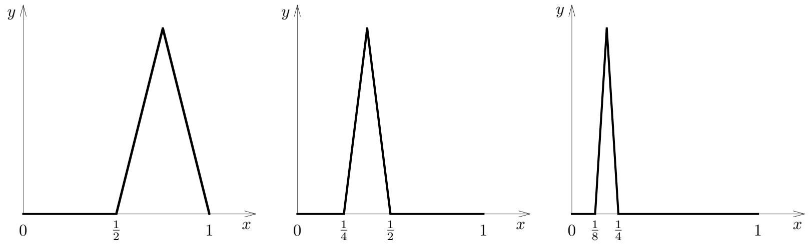
definuje další normu na $\mathcal{C}([\,a,b\,])$ [6]). Ověřme pro $\|\cdot\|_1$ vlastnosti normy. Jestliže existuje $u \in [\,a,b\,]$ tak, že $|f(u)| =: c > 0$, pak lze nalézt takové kladné číslo $\delta > 0$ a takový bod $v \in (a,b)$, že $\mathcal{U}_\delta(v) \subset [\,a,b\,]$ a zároveň $f(t) > c/2$, $t \in \mathcal{U}_\delta(v)$. Potom

$$\int_a^b |f| = \int_a^{v-\delta} |f| + \int_{v-\delta}^{v+\delta} |f| + \int_{v+\delta}^b |f| \geq \int_{v-\delta}^{v+\delta} c/2 = c\delta > 0\,,$$

z čehož plyne vlastnost (2) této normy. Vlastnost (3) plyne z rovnosti $|c|\,|\,f\,| = |\,cf\,|$ a vlastnost (4) z nerovnosti $|f+g| \leq |f| + |g|$ a monotonie integrálu.

Příklad 12.3.7. Nechť pro všechna $n \in \mathbb{N}$ jsou funkce f_n definovány tak, že $f_n(t) = 0$ pro $t \in [\,0, 2^{-n}\,] \cup [\,2^{-n+1}, 1\,]$. Střed intervalu $[\,2^{-n}, 2^{-n+1}\,]$ o délce 2^{-n} leží v bodě $s_n := 3/2^{n+1}$. Položíme nejprve $f_n(s_n) = 1$ a pak na obou intervalech $[\,2^{-n}, s_n\,]$ a $[\,s_n, 2^{-n+1}\,]$ definujeme f_n lineárně. Snadno nahlédneme, že po částech lineární (a tedy spojité) funkce f_n jsou lineárně nezávislé funkce z prostoru $\mathcal{C}([\,0,1\,])$. Několik prvých funkcí posloupnosti $\{f_n\}$ je znázorněno na následujícím Obr. 12.1 :

[6]) Zde jde o „integrální“ normu $\|\cdot\|$. Význam indexu „1“ se čtenáři ozřejmí později.



Obr. 12. 1.

Příklad 12.3.8. Nechť $-\infty < a < b < \infty$. Pro normy z Příkladu 12.3.6 na $\mathcal{C}([a,b])$ zřejmě platí pro všechna $t \in [a,b]$ nerovnost $|f(t)| \le \|f\|_\infty$, a tedy

$$\|f\|_1 \le \int_a^b \|f\|_\infty \, \mathrm{d}t = (b-a)\,\|f\|_\infty\,;$$

Tyto normy však *nejsou* ekvivalentní. Zvolme $[a,b] = [0,1]$; nechť f_n jsou definovány jako v předcházejícím Příkladu 12.3.7. Potom

$$\lim_{k\to\infty} (\|f_k\|_\infty / \|f_k\|_1) = \lim_{k\to\infty} \big(\|f_k\|_1\big)^{-1} = \lim_{k\to\infty} 2^{k+1} = +\infty\,,$$

a tedy pro žádné $C < \infty$ *neplatí* pro všechna $k \in \mathbb{N}$ odhad $\|f_k\|_\infty \le C\,\|f_k\|_1$.

Ucelenější pohled na normy, které jsme dosud definovali, včetně logiky standardního označení pomocí indexů, poskytuje následující výklad. Poznamenejme, že se zde opět přibližujeme těsně k partiím, které jsou předmětem *funkcionální analýzy.*

Lemma 12.3.9 (Rogers 1888, Hölder 1889*). *Pro každá čísla $p, q \in (0,\infty)$ splňující podmínku $p + q = p\,q$, neboli*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,, \tag{12.16}$$

a každé dva body $[x_1,\dots,x_m]$, $[y_1,\dots,y_m]$ z $\mathbb{A}^m$ platí nerovnost

$$\sum_{k=1}^m |\,x_k y_k\,| \le \Big(\sum_{k=1}^m |\,x_k\,|^p\Big)^{1/p} \cdot \Big(\sum_{k=1}^m |\,y_k\,|^q\Big)^{1/q}\,. \tag{12.17}$$

Důkaz. Je zřejmé, že stačí vyšetřovat případ, kdy všechna čísla x_k a y_k jsou nezáporná a kdy v (12.17) nemusíme psát absolutní hodnoty. Protože nerovnost platí, je-li buď $x_k = 0$ pro všechna k, nebo $y_k = 0$ pro všechna k, předpokládejme, že oba výrazy

$$A := \Big(\sum_{k=1}^m x_k^p\Big)^{1/p}, \quad B := \Big(\sum_{k=1}^m y_k^q\Big)^{1/q}$$

jsou kladné. Položíme-li pak $X_k := x_k/A$, $Y_k := y_k/B$, je zřejmě

$$\sum_{k=1}^m X_k^p = \sum_{k=1}^m Y_k^q = 1\,.$$

Je-li pro nějaké k buď $X_k = 0$ nebo $Y_k = 0$, nerovnost

$$X_k Y_k \le \frac{1}{p}\, X_k^p + \frac{1}{q}\, Y_k^q \tag{12.18}$$

jistě platí. Je-li $X_k, Y_k \in (0,\infty)$, položme $s_k := p \log X_k$, $t_k := q \log Y_k$ a dokažme, že

$$\exp\Bigl(\frac{s_k}{p} + \frac{t_k}{q}\Bigr) \le \frac{1}{p}\, \exp s_k + \frac{1}{q}\, \exp t_k\,. \tag{12.19}$$

Pro $s_k = t_k$ neostrá nerovnost platí, protože s ohledem na (12.16) v ní nastává rovnost. Je-li $s_k \ne t_k$, je vlevo hodnota exponenciály v konvexní lineární kombinaci bodů s_k a t_k a nerovnost (12.19), a s ní ekvivalentní nerovnost (12.18), plyne z konvexity exponenciály.

Sečtením nerovností (12.18) pro $k = 1, 2, \dots, m$ dostaneme

$$\sum_{k=1}^{m} X_k Y_k \le \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{m} X_k^p + \frac{1}{q} \sum_{k=1}^{m} Y_k^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,, \tag{12.20}$$

a po evidentní úpravě nerovnost

$$\sum_{k=1}^{m} x_k y_k \le \Bigl(\sum_{k=1}^{m} x_k^p\Bigr)^{1/p} \cdot \Bigl(\sum_{k=1}^{m} y_k^q\Bigr)^{1/q}\,, \tag{12.21}$$

kterou jsme měli dokázat. □

Lemma 12.3.10 (Minkowski 1896). *Pro každé p, $1 < p < \infty$, a každé dva body $x = [\,x_1, \dots, x_m\,]$, $y = [\,y_1, \dots, y_m\,]$ z $\mathbb{A}^m$ je*

$$\Bigl(\sum_{k=1}^{m} |x_k + y_k|^p\Bigr)^{1/p} \le \Bigl(\sum_{k=1}^{m} |\,x_k\,|^p\Bigr)^{1/p} + \Bigl(\sum_{k=1}^{m} |\,y_k\,|^p\Bigr)^{1/p}.$$

Důkaz. Lze předpokládat, že výraz vlevo je kladný, jinak nerovnost zřejmě platí. Vyjdeme z identity

$$(x_k + y_k)^p = x_k (x_k + y_k)^{p-1} + y_k (x_k + y_k)^{p-1}\,.$$

Použijeme trojúhelníkovou nerovnost pro absolutní hodnotu a vzniklé nerovnosti sečteme pro všechna $k = 1, \dots, m$, čímž obdržíme

$$\sum_{k=1}^{m} |\,x_k + y_k\,|^p \le \sum_{k=1}^{m} |x_k|\,\bigl|\,x_k + y_k\bigr|^{p-1} + \sum_{k=1}^{m} |y_k|\,\bigl|x_k + y_k\bigr|^{p-1}\,. \tag{12.22}$$

Z Hölderovy nerovnosti (12.21) dostaneme

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m} |x_k|\,|\,x_k + y_k\,|^{p-1} &\le \Bigl(\sum_{k=1}^{m} |\,x_k\,|^p\Bigr)^{1/p} \cdot \Bigl(\sum_{k=1}^{m} |\,x_k + y_k\,|^{(p-1)q}\Bigr)^{1/q}\,,\\
\sum_{k=1}^{m} |y_k|\,|\,x_k + y_k\,|^{p-1} &\le \Bigl(\sum_{k=1}^{m} |y_k|^p\Bigr)^{1/p} \cdot \Bigl(\sum_{k=1}^{m} |\,x_k + y_k\,|^{(p-1)q}\Bigr)^{1/q}
\end{aligned}$$

a odtud sečtením

$$\sum_{k=1}^{m} |x_k + y_k|^p \leq \Big(\sum_{k=1}^{m} |\, x_k + y_k\,|^p\Big)^{1/q} \cdot \Big((\sum_{k=1}^{m} |x_k|^p)^{1/p} + (\sum_{k=1}^{m} |y_k|^p)^{1/p}\Big)\,. \tag{12.23}$$

Nyní stačí dělit prvým výrazem na pravé straně celou nerovnost (je různý od 0), a s ohledem na $1 - 1/q = 1/p$ dostáváme dokazovanou Minkowského nerovnost. □

V následujícím lemmatu popíšeme další možnost zavedení normy na $\mathbb{A}^m$. Takových norem je dokonce nekonečně mnoho.

Lemma 12.3.11. *Pro všechna $x \in \mathbb{A}^m$, $x = [\,x_1, \ldots, x_m\,]$, $1 < p < \infty$, definujeme*

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{k=1}^{m} |x_k|^p\Big)^{1/p}\,. \tag{12.24}$$

Funkce $\|\cdot\|_p$ definovaná na $\mathbb{A}^m$ je norma na $\mathbb{A}^m$.

Důkaz. Vlastnosti normy (1) – (3) jsou zřejmé. Trojúhelníková nerovnost pro normu $\|\cdot\|_p$ je vlastně Minkowského nerovnost, takže po přepisu dostáváme

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p\,,$$

což jsme měli dokázat. □

Příklad 12.3.12. Pro každé $x \in \mathbb{A}^m$ platí

$$\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty\,. \tag{12.25}$$

Zvolme libovolné $x \in \mathbb{A}^m$; odhad

$$(\|x\|_\infty)^p \leq \sum_{k=1}^{m} |x_k|^p \leq m(\|x\|_\infty)^p$$

po umocnění na $1/p$ dává nerovnost

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq m^{1/p}\, \|x\|_\infty\,,$$

ze které plyne (12.25) limitním přechodem pro $p \to \infty$. Nyní je nejen jasné, proč se pro maximovou normu užívá označení $\|\cdot\|_\infty$, ale i to, že normy $\|\cdot\|_p$ jsou pro všechna $p \in (1, +\infty)$ ekvivalentní s normou $\|\cdot\|_\infty$.

Úmluva 12.3.13. Nyní je již čtenáři jistě jasné, jaký je význam indexů, které jsme používali k rozlišení různých norem na lineárním prostoru $\mathbb{A}^m$. Analogické označení se užívá i pro „integrální případ“, kdy klademe pro $1 \leq p < \infty$

$$\|f\|_p := \Big(\int_a^b |f|^p\Big)^{1/p}\,,$$

my jsme se však zmínili pouze o případu $p = 1$ pro prostor $\mathcal{C}([\,a, b\,])$. Poznamenejme, že tak, jako se užívá $\mathbb{R}^m$ pro $(\mathbb{A}^m, \|\cdot\|_2)$, zavádí se označení ℓ^p_m pro $(\mathbb{A}^m, \|\cdot\|_p)$.

Poznámka 12.3.14. Jestliže bychom pracovali s lineárním prostorem všech posloupností $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ s reálnými nebo komplexními členy, pro které je $\left(\sum_1^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p} < \infty$, lze na něm podobným způsobem jako v (12.24) definovat normu: Stačí nahradit horní mez u sumy symbolem ∞. Vzniklý normovaný lineární prostor s normou $\|\cdot\|_p$ se obvykle značí ℓ^p; v tomto případě se však pracuje s řadami, nikoli s konečnými součty.

12.4 Další pojmy a příklady

Definice 12.4.1. Pro každé dvě množiny $M, N \subset (P, \varrho)$ definujme jejich *vzdálenost* rovností

$$\operatorname{dist}(M, N) := \inf\{\varrho(x, y); x \in M, y \in N\}. \tag{12.26}$$

Jsou-li obě množiny neprázdné, je jejich vzdálenost nezáporné číslo. Je-li alespoň jedna z nich prázdná, je jejich vzdálenost rovna $+\infty$. Pokud $M \cap N \neq \emptyset$, je samozřejmě $\operatorname{dist}(M, N) = 0$, vzdálenost $\operatorname{dist}(M, N)$ však může být rovna 0 i pro M, N disjunktní.

Definice 12.4.2. *Průměr* množiny $M \subset (P, \varrho)$ definujeme podmínkami

$$\operatorname{diam}(M) := \begin{cases} \sup\{\varrho(x, y)\,;\, x, y \in M\}, & \text{je-li } M \neq \emptyset\,, \\ 0\,, & \text{je-li } M = \emptyset\,. \end{cases}$$

Říkáme, že množina $M \subset (P, \varrho)$ je *omezená*, je-li $\operatorname{diam}(M) < \infty$ [7]).

Označení 12.4.3. Je-li jedna z množin M, N jednobodová, rovná $\{x\}$, píšeme místo $\operatorname{dist}(\{x\}, N)$, resp. $\operatorname{dist}(M, \{x\})$ krátce $\operatorname{dist}(x, N)$, resp. $\operatorname{dist}(M, x)$ nebo jen $d(x, N)$, resp. $d(M, x)$. Je-li $\emptyset \neq A \subset P$, nazýváme číslo $d_A(x) := d(x, A)$, $x \in P$, *vzdálenost bodu x od množiny A*. Funkci d_A nazýváme často *vzdálenost od A*.

Příklad 12.4.4. Je-li $X \neq \emptyset$, můžeme na X zavést *diskrétní metriku* ϱ tak, že definujeme $\varrho(x, y) = 0$ pro $x = y$ a $\varrho(x, y) = 1$ pro $x \neq y$, $x, y \in X$. Metrický prostor (X, ϱ) se nazývá *diskrétní prostor*; je jednoduchým příkladem tzv. ultrametrického prostoru. Metrický prostor nazýváme *ultrametrický*, pokud má jeho metrika ϱ vlastnosti (1) – (3) z Definice 12.2.1 a vlastnost

$$(4") \qquad \varrho(x, y) \leq \max\left(\varrho(x, z),\, \varrho(z, y)\right)\,, \quad x, y, z \in X\,.$$

Snadno nahlédneme, že z (4") vyplývá (4), nikoli však naopak: V ultrametrických prostorech platí trojúhelníková nerovnost v zesíleném tvaru. Ultrametrické prostory mají řadu vlastností, které se z hlediska názoru mohou zdát zvláštní až patologické; doporučujeme čtenáři, aby u zaváděných pojmů přihlédl i k tomu, co znamenají v diskrétních prostorech. Bývá to jednoduché a čtenářova představa o smyslu toho kterého pojmu se tím rozšíří. Je např. zřejmé že každý diskrétní prostor (P, ϱ) je omezený, neboť $\operatorname{diam}(P) \leq 1$.

Příklad 12.4.5. Dokažme nerovnost, ze které později vyplyne, že vzdálenost bodu od množiny $d_A(x)$ je spojitá funkce na P. Nechť $A \neq \emptyset$. Dokážeme nejdříve, že pro každé dva body $x, y \in P$ platí nerovnost

$$d_A(x) \leq d_A(y) + \varrho(x, y)\,. \tag{12.27}$$

[7]) Omezenost zavedl Fréchet v [7] ekvivalentním způsobem, avšak bez pomoci $\operatorname{diam}(M)$.

Důkaz je velmi jednoduchý: v nerovnosti $\varrho(z,x) \le \varrho(z,y) + \varrho(y,x)$, platné pro všechna $x, y, z \in P$, přejděme k infimu přes všechna $z \in A$. Vztah je symetrický v x a y, platí tedy i nerovnost analogická k (12.27), v níž jsou proměnné x a y zaměněny. Z obou těchto nerovností dostáváme

$$|\, d_A(x) - d_A(y)\,| \le \varrho(x,y)\,. \tag{12.28}$$

Definice 12.4.6. Nechť (P,ϱ), (Q,σ) jsou metrické prostory a nechť existuje prosté zobrazení T prostoru P na Q, splňující pro všechna $x, y \in P$ rovnost $\varrho(x,y) = \sigma(T(x), T(y))$. Potom říkáme, že prostor P *je izometrický s* Q. Zobrazení T nazýváme *izometrií prostorů* P a Q. Říkáme dále, že prostory P, Q jsou *izometrické*, jestliže existuje alespoň jedna izometrie prostorů P, Q.

Poznámky 12.4.7. 1. Definice je korektní, protože vztah je symetrický: Je zřejmě i $\sigma(u,v) = \varrho(T^{-1}(u), T^{-1}(v))$ pro všechna $u, v \in Q$.

2. Gaussova rovina $\mathbb{C}$ všech komplexních čísel je izometrická s $\mathbb{R}^2$. Izometrií T zde je zobrazení, které každému $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ přiřadí bod $[\,x, y\,] \in \mathbb{R}^2$. Skutečně, jestliže $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$, $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$, je

$$\varrho(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = \big((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2\big)^{1/2}.$$

3. Označíme-li $C_1 := \{z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C};\ y = 0\}$, je C_1 izometrický s $\mathbb{R}^1$. Podrobněji, podprostor C_1 s metrikou indukovanou z $(\mathbb{C}, \varrho)$ je izometrický s $\mathbb{R}^1$.

4. Je-li T *prosté* zobrazení množiny P do metrického prostoru (Q,σ), lze jednoduše z P vytvořit MP tak, aby T byla izometrie (P,ϱ) a $(T(P),\sigma)$; stačí definovat na P metriku ϱ předpisem

$$\varrho(x,y) := \sigma(T(x), T(y))\,, \quad x, y \in P\,.$$

Toto je jedna z cest, pomocí níž lze definovat další MP.

Pojmy invariantní vůči izometrickým zobrazením se nazývají *metrické*. Jsou-li (P,ϱ), (Q,σ) izometrické prostory, mají metrické pojmy v obou prostorech zcela analogické vlastnosti. Každému výroku (definici, větě) v P odpovídá analogický výrok (definice, věta) v Q. Znamená to například, že některá tvrzení stačí dokázat v jednom prostoru a do ostatních s ním izometrických se izometrií „přenesou". Vzhledem k tak velké podobnosti izometrických prostorů se někdy říká, že jde o *tentýž prostor s jiným označením bodů* (srov. $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R}^2$).

Příklad 12.4.8. Na prostoru $\mathbb{R}^*$ definujme zobrazení do $\mathbb{R}$

$$T(x) := \begin{cases} \dfrac{x}{1+|x|}\,, & \text{je-li } x \in \mathbb{R}\,, \\ \pm 1\,, & \text{je-li } x = \pm\infty\,. \end{cases} \tag{12.29}$$

Snadno nahlédneme, že T je prosté zobrazení $\mathbb{R}^*$ na interval $[\,-1, 1\,]$. Za (Q,σ) volme interval $[\,-1, 1\,]$ s metrikou indukovanou z $\mathbb{R}^1$ a definujme pro všechna $x, y \in \mathbb{R}^*$

$$\rho(x,y) = |\,T(x) - T(y)\,|\,.$$

Tak jsme získali dvojici izometrických prostorů a opatřili $\mathbb{R}^*$ metrikou. V této metrice (patří mezi tzv. *redukované metriky*) je $\mathbb{R}^*$ omezený prostor, protože jeho průměr je 2.

Definice 12.4.9. Je-li $x \in (P, \varrho)$ a $0 < r < \infty$, nazýváme množiny

$$\begin{aligned} B(x,r) &:= \{y \in P; \varrho(x,y) < r\}, \\ K(x,r) &:= \{y \in P; \varrho(x,y) \le r\}, \\ S(x,r) &:= \{y \in P; \varrho(x,y) = r\} \end{aligned} \tag{12.30}$$

postupně po řadě *otevřená koule*, *uzavřená koule* a *sféra o středu x a poloměru r* (*v prostoru* (P, ϱ)). Bude-li nutno vyznačit závislost na metrice, budeme psát např. $B_\varrho(x,r)$ apod.

Poznámka 12.4.10. V lineárním prostoru se velmi často se pracuje s koulí o středu 0 a poloměru 1. Tu pak nazýváme obvykle *jednotková koule*. Funkce f_n, $n \in \mathbb{N}$, z Příkladu 12.3.7 jsou prvky uzavřené jednotkové koule v prostoru $\mathcal{C}([0,1])$, které neleží v otevřené jednotkové kouli tohoto prostoru. Leží však na jeho jednotkové sféře. Za povšimnutí stojí fakt, že vzdálenost každých dvou z těchto funkcí je zřejmě rovna 2 a že je těchto funkcí *nekonečně mnoho*.

Příklad 12.4.11. Je snadné si rozmyslit, že v diskrétním prostoru je

$$\begin{aligned} B(x,r) &:= \{x\}, \text{ je-li } 0 < r \le 1, & B(x,r) &= P, \quad \text{je-li } r > 1, \\ K(x,r) &:= \{x\}, \text{ je-li } 0 < r < 1, & K(x,r) &= P, \quad \text{je-li } r \ge 1, \\ S(x,r) &:= \emptyset, \quad \text{je-li } r \ne 1, & S(x,r) &= P \setminus \{x\}, \quad \text{je-li } r = 1. \end{aligned} \tag{12.31}$$

Geometrické představy z roviny a trojrozměrného prostoru jsou pohodlnou a často dobrou pomůckou, nelze je však přenášet mechanicky do libovolného MP. Koule o poloměru r a libovolném středu má v $\mathbb{R}^3$ průměr $2r$ a čtenář jistě snadno dokáže, že v obecném prostoru (P, ϱ) platí nerovnost $\operatorname{diam}(K(x,r)) \le 2r$. Připomeňme, že tato nerovnost může být ostrá: V diskrétním prostoru (Q, σ) dokonce pro každé $x \in Q$ je

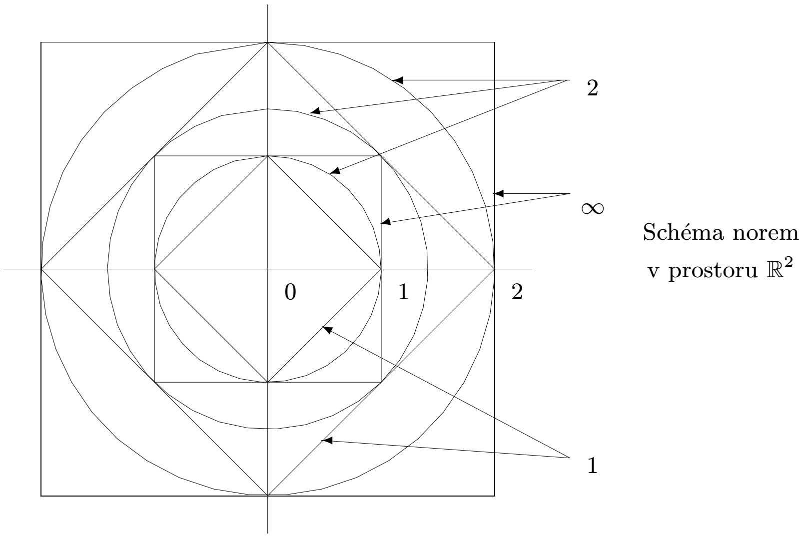
$$\operatorname{diam}(K(x,1/2)) = 0 < 1/2,$$

takže průměr koule může být menší než její poloměr.

Doporučujeme čtenáři uvážit, že např. má-li diskrétní prostor nekonečně mnoho různých bodů, potom pro libovolné $a \in P$ sféra $S(a,1)$ obsahuje nekonečně mnoho otevřených koulí o středech z $P \setminus \{a\}$ a poloměru $r = 1$, přičemž všechny tyto koule jsou navzájem disjunktní. Podobná překvapení skýtají všechny ultrametrické prostory.

Následující obrázek ukazuje geometrický tvar jednotkové koule v $\mathbb{A}^2$ ve velmi často používaných metrikách generovaných normami $\|\cdot\|_p$ pro $p = 1, 2, \infty$.

Z obrázku snadno vyčteme (u šipek uvádíme indexy norem, pomocí kterých jsou koule s různými poloměry znázorněny) inkluze pro koule v normách $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_2$ a $\|\cdot\|_1$. Srovnejte s (12.13). Všimněte si, že např. nejmenší koule v normě $\|\cdot\|_1$, obsahující jednotkovou kouli v normě $\|\cdot\|_\infty$, má poloměr rovný 2.



Obr. 12. 2

Obr. 12. 2 zároveň názorně ilustruje ekvivalenci norem z Lemmatu 12.3.4 pro případ prostoru $\mathbb{R}^2$. Ekvivalenci norem si totiž můžeme představit tak, že kouli $K_\varrho(0,1)$ v uvažovaném prostoru s metrikou ϱ lze vepsat kouli $K_\sigma(0,r_1)$ a opsat $K_\sigma(0,r_2)$, přičemž tyto koule jsou definovány pomocí ekvivalentní normy σ.

Definice 12.4.12 (Weierstrass 1860). Množinu $G \subset (P,\varrho)$ budeme nazývat *otevřenou* (v prostoru (P,ϱ)), jestliže pro každé $x \in G$ existuje $r > 0$ tak, že $B(x,r) \subset G$.

Historická poznámka 12.4.13. Na formování tohoto pojmu se podíleli i Richard Julius Wilhelm Dedekind (1831 – 1916) prací z r. 1871 a Cantor prací z r. 1879.

Definice 12.4.14 (Cantor 1879). Množinu $F \subset (P,\varrho)$ budeme nazývat *uzavřenou* (v prostoru (P,ϱ)), je-li množina $P \setminus F$ otevřená.

Poznámky 12.4.15. 1. Otevřená koule $B(x,r) \subset (P,\varrho)$ je vždy otevřená množina; k tomu stačí uvážit, že pro každé $y \in B(x,r)$ je $B(y,r_1) \subset B(x,r)$, pro všechna r_1 splňující nerovnosti $0 < r_1 < r - \varrho(x,y)$.

2. Uzavřená koule $K(x,r)$ je vždy uzavřená množina, protože z nerovnosti $\varrho(x,y) > r$ plyne, že $B(y,r_1) \cap K(x,r) = \emptyset$ pro všechna r_1, $0 < r_1 < \varrho(x,y) - r$.

3. V diskrétním prostoru a dokonce obecněji, ve všech ultrametrických prostorech, je např. $K(x,r)$ i otevřená a $B(x,r)$ i uzavřená množina. Jsou to tedy množiny *současně* otevřené i uzavřené; nazýváme je proto *obojetné* množiny. V diskrétním prostoru jsou dokonce *všechny* množiny obojetné.

4. Z Definice 12.2.3 je zřejmé, co je otevřená koule nebo otevřená množina v (M,ϱ) pro $M \subset P$. Závorka v definici otevřené a uzavřené množiny ukazuje, kterou část definice zpravidla v běžné řeči vynecháváme. Je-li obecněji $M \subset P$, pak podle Úmluvy 12.2.4

víme, co je *množina otevřená v M*, v tom případě ale část „v $M \subset (P, \varrho)$“ nebo alespoň „v M“, vynechat *nesmíme.* Později v Lemmatu 13.3.2 podáme charakteristiku otevřených množin v M pomocí otevřených množin (v (P, ϱ)).

Definice 12.4.16 (Cantor 1872). *Okolím bodu x* v prostoru (P, ϱ) rozumíme

(1) v užším smyslu otevřenou kouli $B(x, r)$, $r > 0$,

(2) v širším smyslu (což budeme užívat častěji) jakoukoliv otevřenou množinu $G \subset P$ obsahující bod $x \in G$ [8]).

Poznamenejme, že na podobnou situaci jsme zvyklí z $\mathbb{R}^1$, kde jsme pracovali se symetrickými okolími $\mathcal{U}_\varepsilon(x)$ bodu x a okolími $\mathcal{U}(x)$ bodu x. Za okolí bodu x lze ještě obecněji považovat každou množinu M, pro kterou existuje otevřená koule $B(x, r) \subset M$. Není obtížné si rozmyslit, že je jedno, s jak obecným pojmem okolí pracujeme.

Definice 12.4.17. Říkáme, že posloupnost $\{x_n\}$ bodů prostoru (P, ϱ) *konverguje k bodu* $x \in (P, \varrho)$, je-li $\varrho(x_n, x) \to 0$ (pro $n \to \infty$); je-li zřejmé, ve kterém prostoru pracujeme, píšeme krátce $x_n \to x$. Čtenář snadno nahlédne, že podmínka $x_n \to x$ je ekvivalentní s každou z následujících podmínek:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k \in \mathbb{N})(\forall n \geq k)(\varrho(x_n, x) < \varepsilon)\,,$$
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k \in \mathbb{N})(\forall n \geq k)(x_n \in B(x, \varepsilon))\,.$$

Existuje-li $x \in P$ tak, že $x_n \to x$, říkáme, že *posloupnost $\{x_n\}$ konverguje v P* (nebo že *je v P konvergentní*); pokud takový bod $x \in P$ neexistuje, říkáme, že posloupnost $\{x_n\}$ *v P diverguje* (nebo že *je v P divergentní*).

Poznámky 12.4.18. 1. Všimněme si, že pro $x, y \in (P, \rho)$ a členy posloupnosti $\{x_n\}$ z trojúhelníkové nerovnosti vyplývá

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, x_n) + \rho(x_n, y)\,,$$

a tedy že z $x_n \to x$ a $x_n \to y$ pro $n \to \infty$ vyplývá $x = y$; limita posloupnosti bodů v (P, ρ) je určena jednoznačně.

2. V této fázi výkladu by již mělo být zřejmé, že značnou část úvah, které jsme již jednou dělali pro speciální případ, opakujeme. Velmi často „přenášíme pojmy“ z $\mathbb{R}^1$ do obecnějšího kontextu a snažíme se pro ně dokázat tvrzení podobná těm, která již z $\mathbb{R}^1$ známe. Přitom však látku nejen zobecňujeme, ale i prohlubujeme.

Příklad 12.4.19. Pro každou posloupnost bodů $\{x^{(n)}\} = \{[\, x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}\,]\}$ bodů z $\mathbb{A}^m$ a $x = [\, x_1, x_2 \dots, x_m\,] \in \mathbb{A}^m$ je pro všechna k zřejmě

$$|\, x_k^{(n)} - x_k\,| \leq \|x^{(n)} - x\|_\infty \leq \|x^{(n)} - x\|_1 = \sum_{k=1}^{m} |\, x_k^{(n)} - x_k\,|\,, \tag{12.32}$$

z čehož plyne ekvivalence

$$(\varrho_m(x^{(n)}, x) = \|x^{(n)} - x\|_\infty \to 0) \iff (|\, x_k^{(n)} - x_k\,| \to 0 \text{ pro všechna } k = 1, 2, \dots, m)\,.$$

[8]) Hausdorff dospěl r. 1914, v první knize o topologii, již k obecnějšímu pojetí okolí.

Konvergence v $\mathbb{A}^m$ v eukleidovské normě (a ve všech normách s ní ekvivalentních) je „konvergence po souřadnicích“.

Tvrzení 12.4.20. *Označme $\mathcal{G}(P)$ systém všech otevřených podmnožin metrického prostoru (P,ϱ). Potom platí:*

(1) $\emptyset, P \in \mathcal{G}(P)$,

(2) *je-li $A \neq \emptyset$ libovolná množina a $G_\alpha \in \mathcal{G}(P)$ pro každé $\alpha \in A$, je $\bigcup_{\alpha\in A} G_\alpha \in \mathcal{G}(P)$,*

(3) *je-li $A \neq \emptyset$* konečná *množina a $G_\alpha \in \mathcal{G}(P)$ pro každé $\alpha \in A$, je $\bigcap_{\alpha\in A} G_\alpha \in \mathcal{G}(P)$.*

Důkaz. Tvrzení (1) je triviálním důsledkem definice otevřené množiny. Jestliže je $x \in G$, $G := \bigcup_{\alpha\in A} G_\alpha$, existuje $\alpha \in A$ tak, že $x \in G_\alpha$; protože G_α je otevřená množina, existuje $\varepsilon > 0$ a okolí $\mathcal{U}_\varepsilon(x) \subset G_\alpha$ a tedy i $\mathcal{U}_\varepsilon(x) \subset G$. Tím je tvrzení v (2) dokázáno.

Stačí dokázat třetí část tvrzení: Nechť $A = \{\,\alpha_k;\ k = 1,2,\dots,n\}$. Označíme-li nyní $G := \bigcap_{\alpha\in A} G_\alpha = \bigcap_1^n G_{\alpha_k}$ a budeme-li předpokládat, že $x \in G$, existují čísla $r_k > 0$ tak, že $B(x,r_k) \subset G_{\alpha_k}$ pro $k = 1,\dots,n$; pro $r := \min\{\,r_1,\dots,r_n\,\}$ leží okolí $B(x,r)$ v G. Tím je dokázáno i tvrzení (3). □

Poznámka 12.4.21. V každém metrickém prostoru (P,ϱ) lze (pomocí otevřených koulí, tedy konec konců pomocí metriky ϱ) definovat otevřené množiny a tak utvořit systém $\mathcal{G}(P)$ všech jeho otevřených podmnožin; tento systém se nazývá *topologie* prostoru (P,ϱ) a tvrzení (1) – (3) popisují jeho základní vlastnosti.

Zobecněním metrických prostorů jsou *prostory topologické*, definované jako dvojice (P,τ), kde $P \neq \emptyset$ je množina a τ nějaký systém jejích podmnožin, který splňuje podmínky analogické těm, které popisují (1) – (3). Říkáme pak, že systém τ je *topologie* prostoru (P,τ) a že množiny $G \in \tau$ jsou *otevřené množiny* prostoru (P,τ).

Otevřené podmnožiny metrického prostoru (P,ϱ) jsou (jednoznačně) určeny jeho metrikou. V případě topologického prostoru (P,τ) *definujeme* otevřené množiny výběrem systému τ; tento výběr je podřízen pouze trojici podmínek:

(1) $\emptyset, P \in \tau$;

(2) je-li $A \subset \tau$ *libovolný* podsystém systému τ, leží sjednocení všech jeho elementů v τ;

(3) je-li $A \subset \tau$ jakýkoli *konečný* podsystém systému τ, leží průnik všech jeho elementů v τ.

Poznamenejme, že v obecnějších topologických prostorech platí řada tvrzení, která se dokazují zpravidla jen pro prostory metrické. Definujeme-li např. v *topologickém prostoru* uzavřené množiny stejně jako v prostorech metrických, tj. jako doplňky množin otevřených, můžeme dokázat jejich tři základní vlastnosti i v obecnějších topologických prostorech stejně snadno, jako v MP.

Poznamenejme ještě, že pomocí vlastností tohoto „duálního“ systému všech uzavřených množin lze opět topologii *definovat*.

Tvrzení 12.4.22. *Systém $\mathcal{F}(P)$ všech uzavřených podmnožin prostoru P* [9] *má tyto tři základní vlastnosti:*

(1) $\emptyset, P \in \mathcal{F}(P)$;

(2) *je-li $A \subset \tau$* libovolný *podsystém systému $\mathcal{F}(P)$, leží průnik všech jeho elementů v $\mathcal{F}(P)$;*

(3) *je-li $A \subset \tau$* konečný *podsystém systému $\mathcal{F}(P)$, leží sjednocení všech jeho elementů v $\mathcal{F}(P)$.*

Důkaz. Protože $\emptyset, P$ jsou doplňky otevřených množin $P, \emptyset$, platí (1). Důkaz tvrzení (2) a (3) této věty se provede pomocí de Morganových pravidel (vzorec (1.3) z Kapitoly 1) a podmínek (2) a (3) z Tvrzení 12.4.20. Jsou-li množiny F_α, $\alpha \in A$, uzavřené, jsou jejich doplňky $G_\alpha := P \setminus F_\alpha$ otevřené, přičemž

$$\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha = \bigcap_{\alpha \in A} (P \setminus G_\alpha) = P \setminus \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha\,; \tag{12.33}$$

protože poslední sjednocení je otevřená množina, je její doplněk množina uzavřená. Tím je dokázáno tvrzení (2). Platnost tvrzení (3) se ověří zcela analogicky. □

Poznámka 12.4.23. Přechod od průniku uzavřených množin ke sjednocení jejich doplňků v (12.33) budeme často užívat při důkazech tvrzení o MP, často tak dostaneme jednoduše bez větší námahy další zajímavá tvrzení.

Definice 12.4.24. Je-li $M \subset (P, \rho)$, nazveme bod $x \in P$

(1) *vnitřním bodem* množiny M, existuje-li $r > 0$ tak, že $B(x,r) \subset M$, tj. jestliže $M \cap B(x,r) = B(x,r)$;

(2) *hromadným bodem* množiny M, když pro každé $r > 0$ je množina $M \cap B(x,r)$ nekonečná;

(3) *hraničním bodem* množiny M, když pro každé $r > 0$ jsou obě množiny $M \cap B(x,r)$ i $(P \setminus M) \cap B(x,r)$ neprázdné;

(4) *izolovaným bodem* množiny M, existuje-li $r > 0$ tak, že $M \cap B(x,r) = \{x\}$;

(5) *vnějším bodem* množiny M, existuje-li $r > 0$ tak, že $B(x,r) \subset P \setminus M$, tj. jestliže $M \cap B(x,r) = \emptyset$;

(6) *limitním bodem* množiny M, když existuje posloupnost $\{x_k\}$ bodů z M tak, že $\lim_{k\to\infty} x_k = x$.

Poznámky 12.4.25. 1. Některé pojmy zavedené v Definici 12.4.24 nemají velkou samostatnou důležitost a lze je lehce popsat jiným způsobem: Bod x je vnějším bodem množiny M, právě když je vnitřním bodem jejího komplementu.

2. Je-li bod x izolovaným bodem množiny M, je $\{x\}$ otevřenou podmnožinou v podprostoru $(M, \rho \,|\, M \times M)$.

3. Bod x množiny M je vždy jejím limitním bodem, ale pokud je hromadným bodem, existuje k němu *prostá* posloupnost bodů $x_k \in M$, $x_k \to x$; izolovaný bod x množiny M je limitou posloupnosti bodů $x_k \in M$, právě když je $\{x_k\}$ skoro konstantní (tj. existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že $\{x_{n+k}\}_{k=1}^{\infty}$ je konstantní posloupnost).

[9]) Metrického, nebo obecněji topologického.

4. Analogických vztahů mezi různými typy bodů v závislosti na M je mnoho, čtenář jistě některé další dokáže samostatně popsat. Důležitější jsou však množiny, které lze pomocí těchto bodů definovat a vztah těchto množin k množině M.

Definice 12.4.26. Množina všech vnitřních bodů množiny M tvoří *vnitřek* M° množiny M, množina všech vnějších bodů M tvoří *vnějšek* M. Množina všech hraničních bodů M je *hranice* ∂M množiny M. Množina $\overline{M} := M \cup \partial M$ se nazývá *uzávěr* množiny M. Množinu M' všech hromadných bodů množiny M nazýváme *derivací* množiny M.

Poznámky 12.4.27. Některé vztahy mezi zavedenými pojmy jsou zřejmé, jiné lze velmi snadno dokázat. Tak například zřejmě platí:

1. Pro každou $A \subset (P, \rho)$ je $A^\circ \subset A \subset \overline{A}$;

2. Je-li $A \subset B \subset (P, \rho)$, je $A^\circ \subset B^\circ$ a $\overline{A} \subset \overline{B}$;

3. Je $\partial A = \partial(P \setminus A)$ pro každou $A \subset (P, \rho)$, a tedy $\partial A \subset \overline{A} \cap \overline{P \setminus A}$; každý bod hranice množiny A je limitním bodem A i $P \setminus A$;

4. Pro každou *konečnou* množinu $A \subset (P, \rho)$ je $A' = \emptyset$;

5. Je $\overline{A} = A \cup A'$, protože $x \in P \setminus A$ leží v ∂A, právě když $x \in A'$.

Tvrzení 12.4.28. *Množina $A \subset (P, \rho)$ je otevřená, právě když je $A^\circ = A$. Množina $A \subset (P, \rho)$ je uzavřená, právě když je $A = \overline{A}$.*

Důkaz. Množina A je otevřená, právě když je každý její bod vnitřním bodem A, neboli $A = A^\circ$. Množina A je uzavřená, je-li její komplement $P \setminus A$ otevřená množina, a tedy žádný bod $P \setminus A$ není bodem hraničním. Proto $\partial A \cap (P \setminus A) = \emptyset$, a tedy $\partial A \subset A$, neboli $\overline{A} \subset A$; obrácená inkluze je zřejmá. Naopak při $A = \overline{A}$ je $\partial A = \partial(P \setminus A) \subset A$, takže všechny body $P \setminus A$ jsou vnitřní, $P \setminus A$ je otevřená, a tedy A je uzavřená. □

Tvrzení 12.4.29. *Množina A° je největší (ve smyslu inkluze) otevřenou podmnožinou množiny A. Množina $\overline{A}$ je nejmenší (ve smyslu inkluze) uzavřenou nadmnožinou A. Je tedy*

$$A^\circ := \bigcup \{G;\ G \subset A,\ G \in \mathcal{G}(P)\}, \quad \overline{A} := \bigcap \{F;\ A \subset F,\ F \in \mathcal{F}(P)\}. \tag{12.34}$$

Důkaz. Je-li x vnitřní bod množiny A, existuje otevřená koule $B(x, r_x) \subset A$ a

$$A^\circ \subset \bigcup \{\, B(x, r_x)\,;\ x \in A^\circ \,\} \subset \bigcup \{\, G\,;\ G \subset A,\ G \in \mathcal{G}(P) \,\} \subset A^\circ, \tag{12.35}$$

a proto lze všechny inkluze v předcházejícím vztahu nahradit rovnostmi. Předposlední množina v (12.35) je zřejmě největší otevřená podmnožina A.

Komplementem každé uzavřené množiny F, $A \subset F$, je otevřená množina $G \subset (P \setminus A)$, přičemž největší z nich je $(P \setminus A)^\circ$. Dále zřejmě je

$$\overline{A} = A = P \setminus (P \setminus A) = P \setminus (P \setminus A)^\circ, \tag{12.36}$$

což dává druhou část tvrzení. □

Poznámky 12.4.30. 1. To, že se dříve uzávěr A někdy nazýval *uzavřený obal* A, osvětluje (12.34). Z tohoto tvrzení též plyne

$$\overline{(\overline{A})} = \overline{A}\,, \quad (A^\circ)^\circ = A^\circ\,.$$

2. Z rovností (12.36) snadno obdržíme přechodem ke komplementům

$$P \setminus \overline{A} = (P \setminus A)^\circ\,, \quad P \setminus A^\circ = \overline{(P \setminus A)}\,. \tag{12.37}$$

Věta 12.4.31. *Uzávěr $\overline{A}$ množiny A v (P, ρ) je roven množině všech limitních bodů A, tj.*

$$\overline{A} = \{\, x \in P\,;\ \textit{existují } x_k \in A,\ k \in \mathbb{N},\ \textit{tak, že } x_k \to x \,\}\,.$$

Důkaz. Každý bod $x \in \overline{A}$ je buď z A a je limitou konstantní posloupnosti se členy $x_k = x$, nebo je hraničním bodem neležícím v A, ale pak je z A' a je dokonce limitou prosté posloupnosti bodů z A. Není-li $x \in \overline{A}$, leží podle (12.37) v $(P \setminus A)^\circ = P \setminus \overline{A}$ a existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $U_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset$. Proto pro každou posloupnost $\{x_k\}$ bodů $x_k \in A$ je $\varrho\,(x, x_k) \geq \varepsilon$, takže $\lim x_k \neq x$, čímž je tvrzení dokázáno. □

Důsledek 12.4.32. *Množina $A \subset (P, \varrho)$ je uzavřená, právě když platí:*

$$(x_n \in A\,,\ x_n \to x) \Rightarrow (x \in A)\,. \tag{12.38}$$

Důkaz. Podle vyjádření uzávěru z Tvrzení 12.4.28 plyne z podmínky (12.38) inkluze $\overline{A} \subset A$, a je tedy $\overline{A} = A$ (druhá inkluze je triviální). Zbytek je důsledkem Tvrzení 12.4.31. □

Příklad 12.4.33. Na množině $\mathbb{A}^1$ reálných čísel lze definovat metriku indukovanou z prostoru $\mathbb{R}^*$ z Příkladu 12.4.8. Označíme-li tuto metriku σ a ϱ eukleidovskou metriku na $\mathbb{A}^1$, snadno nahlédneme, že interval (a, b), $-\infty < a < b < \infty$, je otevřenou množinou v obou prostorech a že topologie v obou prostorech jsou tvořeny stejnými systémy (otevřených) množin, i když jako metrické prostory se $(\mathbb{A}^1, \sigma)$ a $(\mathbb{A}^1, \varrho)$ (neboli $\mathbb{R}^1$) výrazně liší; jeden je omezený a druhý nikoli.

Tvrzení 12.4.34. *Pro každou $M \subset (P, \varrho)$ je množina ∂M uzavřená množina v (P, ϱ). Dále platí*

$$\partial M = \overline{M} \cap \overline{P \setminus M} = \overline{M} \cap (P \setminus M^\circ) = \overline{M} \setminus M^\circ\,. \tag{12.39}$$

Důkaz. S přihlédnutím k Poznámce 12.4.27 (3) a ke vztahům (12.37) stačí dokázat inkluzi $\overline{M} \setminus M^\circ \subset \partial M$. Bod $x \in \overline{M} \setminus M^\circ$ je však limitním bodem M, který není vnitřním bodem M, je tedy i limitním bodem $P \setminus M$, leží tedy v ∂M, čímž je důkaz dokončen. □

Historická poznámka 12.4.35. Pojem hranice množiny se postupně vyvíjel; k vývoji přispěli zejména Carl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815 – 1897) prací z r. 1861, Richard Dedekind (1831 – 1916) (1871), Giuseppe Peano (1858 – 1932) (1887) a Marie Ennemond Camille Jordan (1838 – 1922) (1893).

Tvrzení 12.4.36 (Fréchet 1906). *Množina $M \subset (P, \varrho)$ je uzavřená v (P, ϱ), právě když $M' \subset M$.*

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že M je uzavřená množina. Je-li x hromadný bod množiny M, existuje posloupnost bodů $x_n \in M$, $x_n \neq x$, konvergující k bodu x. Z Důsledku 12.4.32 plyne $x \in \overline{M} = M$, takže $M' \subset M$. Není-li M uzavřená, pak neplatí $M' \subset M$. Existuje-li posloupnost $\{x_n\}$ bodů z M tak, že $x_n \to x \notin M$, pak pro žádné $r > 0$ neplatí $B(x,r) \subset P \setminus M$. Proto $P \setminus M$ není otevřená množina, a tedy M není uzavřená množina; snadno je však vidět, že $x \in M'$, a tedy neplatí ani $M' \subset M$. □

Tvrzení 12.4.37 (Fréchet 1906). *Nechť (P, ϱ) je MP, $M \subset P$. Potom množina M' všech hromadných bodů M je uzavřená v P.*

Důkaz. Je-li pro nějaké $r > 0$ a $x \in M$ množina $B(x,r) \cap M$ konečná, jsou vzdálenosti jejích bodů od x vesměs kladné a $x \notin M$, nebo $x \in M$. Je tedy $x \in P \setminus M'$, právě když existuje $r > 0$ tak, že $\mathcal{P}(x,r) := (B(x,r) \setminus \{x\}) \cap M = \emptyset$. Pak je však množina $B(x,r) \cap M$ jednobodová a x je izolovaný bod M, nebo je $B(x,r) \cap M$ prázdná. V obou případech je $B(x,r) \cap M'$ prázdná, a tedy $P \setminus M'$ je otevřená množina, což dává tvrzení. □

Poznámka 12.4.38. Mezi pojmy, které jsme zavedli, existuje celá řada souvislostí, zdaleka jsme nepopsali všechny. Tak např. z rovností, které jsou důsledkem (12.37), plyne

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{P \setminus A} = (P \setminus (P \setminus A)^\circ) \cap (P \setminus A^\circ) = P \setminus ((P \setminus A)^\circ \cup A^\circ)\,,$$

takže při $A \subset (P, \rho)$ se P rozpadá na tři disjunktní části: A°, ∂A a $(P \setminus A)^\circ$. Jiné souvislosti jsou důležitými důkazovými prostředky nebo umožňují lepší pochopení pojmů. Pro procvičení by se měl čtenář po prostudování této kapitoly sám pokusit nějakou další souvislost objevit a dokázat.

Příklad 12.4.39. Zamyslíme-li se nad oběma metrikami z Příkladu 12.4.33 a jejich splývajícími topologiemi, vidíme, že posloupnost $\{x_n\}$ konverguje k témuž bodu $x \in \mathbb{R}$ v obou prostorech, nebo v obou prostorech diverguje.

Znamená-li ϱ a σ totéž co v Příkladu 12.2.13, je pro každou posloupnost bodů $x_n \in P$ a každý bod $x \in P$ podmínka $\varrho\,(x_n, x) \to 0$ ekvivalentní s podmínkou $\sigma\,(x_n, x) \to 0$; zabýváme-li se jen těmito dvěma metrikami v P, lze psát $x_n \to x$ bez vysvětlení, zdali je konvergence myšlena při metrice ϱ nebo při metrice σ.

Přitom je situace trochu odlišná, než u ekvivalentních norem. Z definičního vztahu

$$\sigma(x,y) = \varrho(x,y)/(1 + \varrho(x,y))\,, \quad x, y \in P\,,$$

plyne $\sigma(x,y) \le \varrho\,(x,y)$. Jestliže však není metrika ϱ omezená na $P \times P$, pak pro žádné C, $0 < C < 1$, neplatí $C\varrho\,(x,y) \le \sigma(x,y)$. Pro každé $x \in P$ však platí

$$(1/2)\varrho(x,y) \le \sigma(x,y) \le \varrho(x,y) \tag{12.40}$$

pro ta $y \in P$, pro která je $\varrho(x,y) \le 1$ [10]; k tomu stačí zjistit, pro která $x \in [0, \infty)$ platí $x/2 \le x/(1+x)$. Je užitečné si povšimnout, že i když by byla metrika ϱ generována normou, metrika σ z ní vytvořená tuto vlastnost nemá. Příklad nás motivuje k následující definici.

---

[10]) Vztah (12.40) neplatí pro *všechna* $x, y \in P$!

Definice 12.4.40. Říkáme, že metriky ϱ a σ jsou v prostoru P ekvivalentní, platí-li pro každou posloupnost bodů $x_n \in P$ a každé $x \in P$ ekvivalence

$$\lim x_n = x \text{ v } (P, \varrho) \quad \Longleftrightarrow \quad \lim x_n = x \text{ v } (P, \sigma)\,. \tag{12.41}$$

Potom říkáme, že ϱ, σ jsou *ekvivalentní metriky* na P.

Cvičení 12.4.41. Dokažte, že pro každou spojitou rostoucí funkci $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce

$$\sigma(x,y) := |\,T(x) - T(y)\,|\,, \quad x, y \in \mathbb{R}\,,$$

metrika ekvivalentní s eukleidovskou metrikou.

Příklad 12.4.42. Označme s množinu všech posloupností reálných čísel, ve které je sčítání posloupností a násobení posloupností číslem definováno „po souřadnicích". Pak je s zřejmě lineární prostor. Pro každé dva jeho elementy $x = \{x_k\}$, $y = \{y_k\}$ položme

$$\varrho(x,y) := \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{|\,x_k - y_k\,|}{1 + |\,x_k - y_k\,|}, \quad x, y \in s\,.$$

Potom je ϱ metrika na s. Poznamenejme především, že řada vpravo konverguje, protože $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}$ je její konvergentní majoranta. Nezáporný výraz $\varrho(x,y)$ je roven 0, právě když je každý z nezáporných sčítanců vpravo roven 0, tj. právě při $x = y$. Protože symetrie je zřejmá, stačí dokázat trojúhelníkovou nerovnost; ověření ostatních vlastností metriky je lehké. S ohledem na Příklad 12.2.13 platí speciálně pro všechna $x_k, y_k, z_k \in \mathbb{R}$

$$\frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|} \le \frac{|x_k - z_k|}{1 + |x_k - z_k|} + \frac{|z_k - y_k|}{1 + |z_k - y_k|}\,, \quad k \in \mathbb{N}\,.$$

Nyní stačí nerovnosti postupně násobit faktorem 2^{-k} a sečíst od $k = 1$ do ∞.

I když je ϱ metrika na lineárním prostoru, není generována *žádnou normou* na s. To je snadný důsledek Poznámky 12.2.8, pro vzdálenost konstantní posloupnosti $\{x_k\}$, $x_k = 5$, od počátku dostáváme

$$\varrho(\{5\}, \{0\}) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{5}{1+5} = \frac{5}{1+5} \ne 5 = 5\varrho(\{1\}, \{0\})\,.$$

Ukažme ještě, že konvergence v (s, ϱ) je, podobně jako v $\mathbb{A}^m$ (viz Příklad 12.4.19) konvergencí po souřadnicích, tj. *pro každou posloupnost bodů $x^{(n)}$ z s, $x^{(n)} = \{x_k^{(n)}\}$ a každý bod $x = \{\,x_k\} \in s$ je*

$$\big(\lim_{n\to\infty} \varrho(x^{(n)}, x) = 0\big) \iff \big(\lim_{n\to\infty} x_k^{(n)} = x_k \textit{ pro všechna } k \in \mathbb{N}\big)\,. \tag{12.42}$$

Abychom nemuseli psát zbytečně složité výrazy, označme V levou stranu a W pravou stranu ekvivalence (12.42). Protože pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí nerovnost

$$\frac{|\,x_k^{(n)} - x_k\,|}{1 + |\,x_k^{(n)} - x_k\,|} \le 2^k \varrho(x^{(n)}, x)\,,$$

plyne z výroku V výrok W. Obráceně, jestliže je dáno $\varepsilon > 0$, zvolme $p \in \mathbb{N}$ tak, aby $\sum_{k=p+1}^{\infty} 2^{-k} < \varepsilon/2$. Z výroku W plyne existence takového indexu n_0, že pro všechna $n > n_0$ a všechna $k = 1, 2, \ldots, p$ je

$$|\, x_k^{(n)} - x_k \,| < \frac{\varepsilon}{2p}$$

Potom však je zřejmě

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\, x_k^{(n)} - x_k \,|}{1 + |\, x_k^{(n)} - x_k \,|} = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2^k} \frac{|\, x_k^{(n)} - x_k \,|}{1 + |\, x_k^{(n)} - x_k \,|} + \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\, x_k^{(n)} - x_k \,|}{1 + |\, x_k^{(n)} - x_k \,|} <$$
$$< \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2^k} \frac{\varepsilon}{2p} + \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \varepsilon$$

pro všechna $n > n_0$. Z výroku W plyne tedy výrok V, a tím je ekvivalence (12.42) dokázána.

Příklad 12.4.43. Nechť $A \neq \emptyset$ a $\mathcal{M}(A)$ je množina všech *omezených* (reálných nebo komplexních) funkcí definovaných na množině A. Vzhledem k „bodově" definovaným standardním operacím je to zřejmě lineární prostor. Položme pro každé $f \in \mathcal{M}(A)$

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(t)|;\ t \in A\}\,.$$

a dokažme, že jde skutečně o normu; říká se jí obvykle *supremová*. Všechny ostatní vlastnosti normy jsou evidentní, stačí dokázat trojúhelníkovou nerovnost. K tomu stačí vyjít z nerovnosti

$$|\,(f+g)(t)\,| \leq |\,f(t)\,| + |\,g(t)\,|$$

platné pro každé $t \in A$ a přejít k supremu nejdříve vpravo a pak vlevo. Konvergence v metrice $\varrho(x,y) = \|x - y\|_\infty$, generované touto normou, hraje v matematické analýze velmi důležitou úlohu; nazývá se *stejnoměrná konvergence*.

Položíme-li $A := [\,a, b\,]$, získáme důležitý prostor $M([\,a, b\,])$, jehož podprostorem je prostor $\mathcal{C}([\,a, b\,])$, ve kterém lze v definici normy nahradit supremum maximem.

Příklad 12.4.44. Obě normy zavedené v Příkladu 12.3.6 na $\mathcal{C}([\,a, b\,])$ lze velmi jednoduše srovnat v následujícím smyslu: připomeňme, že platí

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b \sup\{|f(x)|;\ x \in [\,a, b\,]\}\,\mathrm{d}t = (b-a)\|f\|_\infty\,.$$

Odtud plyne, že posloupnost funkcí $f_n \in \mathcal{C}([\,a, b\,])$ konvergentní v normě $\|\cdot\|_\infty$ konverguje i v normě $\|\cdot\|_1$. S metrikou odvozenou od normy $\|\cdot\|_1$ jsme se již jednou setkali při vyšetřování Riemannova integrálu v Poznámce 11.2.40, resp. ve vztazích (11.28) a (11.29).

Dá se ukázat, že definice všech základních pojmů, které jsme v této části kapitoly zavedli, by bylo možné vyslovit jak pomocí okolí, tak pomocí limit posloupností. Nežli se budeme zabývat v další kapitole MP se speciálními vlastnostmi, ukážeme si, jak se v MP pracuje s konvergencí a se spojitostí. Dokážeme o ní několik užitečných tvrzení.

12.5 Spojitost

Označme pro $x \in (P, \varrho)$ množinu všech $B(x,r) \subset P$ symbolem $\mathcal{B}_x$ a množinu všech otevřených $G \subset P$ obsahujících bod x symbolem $\mathcal{G}_x$; jsou to tedy všechna okolí bodu x v užším a širším smyslu.

Definice 12.5.1. Řekneme, že zobrazení $f : (P, \varrho) \to (Q, \sigma)$ je *spojité v bodě* $x \in P$, jestliže

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall y \in B(x,\delta))(f(y) \in B(f(x), \varepsilon))\,. \tag{12.43}$$

Snadno nahlédneme, že stejně jako v $\mathbb{R}$ můžeme použít ekvivalentních vyjádření, kdy okolím $\mathcal{U}(y)$ bodu y rozumíme libovolnou otevřenou množinu obsahující bod y: pro každé okolí $\mathcal{U}(f(x))$ bodu $f(x)$ existuje okolí $\mathcal{V}(x)$ bodu x tak, že je $f(\mathcal{V}(x)) \subset \mathcal{U}(f(x))$, resp. pro každou posloupnost $\{x_n\}$ bodů x_n z P, pro niž $x_n \to x \in P$, je $f(x_n) \to f(x)$. Logickými symboly vyjádřeno jde o podmínky

$$(\forall \mathcal{U}(f(x)) \in \mathcal{G}_{f(x)})(\exists \mathcal{V}(x) \in \mathcal{G}_x)(f(\mathcal{V}(x)) \subset \mathcal{U}(f(x)))\,, \tag{12.44}$$

$$(x_n \in P\,,\ x_n \to x \in P) \Longrightarrow (f(x_n) \to f(x))\,. \tag{12.45}$$

Ukažme např., že je jedno, zda pracujeme s „kulovými“ okolími z $\mathcal{B}_x$ nebo obecnými otevřenými množinami z $\mathcal{G}_x$, tj. že podmínky (12.43) a (12.44) jsou ekvivalentní: Je-li splněna podmínka (12.44), existuje speciálně k okolí $B(f(x), \varepsilon) \in \mathcal{B}_{f(x)}$ *otevřená* množina $\mathcal{V}(x)$ obsahující $B(x,\delta)$ pro nějaké $\delta > 0$ tak, že platí inkluze

$$f(B(x,\delta)) \subset f(\mathcal{V}(x)) \subset B(f(x), \varepsilon)\,.$$

Je-li splněna podmínka (12.43), postupujeme takto: Zvolme $\mathcal{U}(f(x)) \in \mathcal{G}_{f(x)}$. Dále zvolíme $B(f(x), \varepsilon) \subset \mathcal{U}(f(x))$ a k této množině najdeme podle (12.43) otevřenou kouli $B(x,\delta)$ tak, aby $f(B(x,\delta)) \subset B(f(x), \varepsilon)$. Položíme $B(x,\delta) = \mathcal{V}(x)$ a dostaneme

$$f(\mathcal{V}(x)) = f(B(x,\delta)) \subset B(f(x), \varepsilon) \subset \mathcal{U}(f(x))\,.$$

Definice 12.5.2. Říkáme, že zobrazení $f : (P, \varrho) \to (Q, \sigma)$ je *spojité* (na P), jestliže je spojité v každém bodě $x \in P$.

Jestliže chceme definovat limitu (reálné nebo komplexní) funkce vzhledem k množině M v kontextu metrických prostorů, musíme být opatrní. Je-li $M \subset (P, \rho)$ a je-li f funkce definovaná na M, definujeme její limitu *pouze v hromadných bodech množiny* M.

Definice 12.5.3. Řekneme, že číslo A je limitou f vzhledem k $M \subset (P, \rho)$ v hromadném bodě a množiny M, jestliže platí

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in M,\ 0 < \rho(x,a) < \delta)(|f(x) - A| < \varepsilon)\,.$$

V takové situaci užíváme obdobného označení jako dříve a píšeme

$$\lim_{x \in M,\, x \to a} f(x) = A\,. \tag{12.46}$$

Není obtížné si uvědomit, že opět platí ekvivalence stejného typu jako u Heineho definice limity. Platí (12.46), právě když pro každou posloupnost bodů $x_k \in M$, $x_k \neq a$, $k \in \mathbb{N}$, pro kterou $x_k \to a$, platí $f(x_k) \to A$. Důkaz této ekvivalence přenecháme čtenáři.

Poznámka 12.5.4. Je-li f definována na M, je f spojitá v bodě $a \in M$, právě když pro každou posloupnost bodů $x_k \in M$, $x_k \to a$ je také $f(x_k) \to f(a)$. Pro izolovaný bod množiny $a \in M$ jsou však posloupnosti $\{x_k\}$ konvergentní k a skoro konstantní, tj. existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $x_k = a$ pro všechna $k \geq n$.

S definicí limity f v bodě a je to složitější. I v jednoduchém případě prostoru $\mathbb{R}$ je $\lim_{x\to a} f(x) = A$, právě když pro každou posloupnost $\{x_k\}$, $x_k \neq a$, $x_k \to a$, je $f(x_k) \to A$. V bodě a, který je *izolovaným bodem* množiny M, není $\lim_{k\to\infty, x_k \in M} f(x_k)$ definována, neboť žádná taková posloupnost bodů $x_k \in M$, $x_k \to a$, pro kterou by platilo $x_k \neq a$, neexistuje. Naproti tomu je f v bodě a spojitá a bude spojitá i v případě, že její hodnotu v bodě a jakkoli změníme. Proto bychom při pokusu definovat konzistentně limitu f v izolovaném bodě M okamžitě narazili na problém její jednoznačnosti. Limitu vzhledem k $M \subset (P, \rho)$ funkce f definujeme tedy *pouze v hromadných bodech množiny* M.

Tvrzení 12.5.5. *Nechť $A \subset (P, \varrho)$, $A \neq \emptyset$. Potom $x \mapsto d_A(x)$, $x \in P$, je spojitá funkce na P.*

Důkaz. Stačí zvážit význam nerovnosti (12.27) z Příkladu 12.4.5, ze které spojitost přímo vyplývá. ☐

Poznámka 12.5.6. Z teoretického hlediska není na definici spojitosti zobrazení v bodě nic nového. S příklady spojitosti tohoto typu jsme se již setkali. Jestliže zavedeme na prostoru $\mathcal{C}([a, b])$ stejnoměrnou metriku, pak Důsledek 11.2.39 ukazuje, že funkcionál A, definovaný v Označení 11.2.31, je *spojitý*. Tam jsme odvodili odhad (11.29), který lze přepsat do tvaru

$$|A(f) - A(g)| \leq \varrho_1(f, g) \leq (b - a)\varrho_\infty(f, g)\,.$$

Na prostoru $\mathcal{R}(a, b)$ se supremovou metrikou je A rovněž spojitý. Je zde ale jeden rozdíl: je-li $f_n \in \mathcal{C}([a, b])$ a $\{f_n\}$ konverguje v supremové normě k f, je i $f \in \mathcal{C}([a, b])$, ale dosud nevíme, zda pro $f_n \in \mathcal{R}(a, b)$ leží stejnoměrná limita $\{f_n\}$ v $\mathcal{R}(a, b)$.

Uveďme nyní několik podmínek ekvivalentních s „globální spojitostí“, tj. spojitostí na celém prostoru.

Věta 12.5.7 (Hausdorff 1914). *Pro každé zobrazení $f : (P, \varrho) \to (Q, \sigma)$ jsou ekvivalentní tyto podmínky:*

(1) *zobrazení f je spojité na P;*

(2) *množina $f^{-1}(G)$ je otevřená v P pro každou množinu $G \subset Q$ otevřenou v Q;*

(3) *množina $f^{-1}(F)$ je uzavřená v P pro každou množinu $F \subset Q$ uzavřenou v Q;*

(4) *pro každé $A \subset P$ je $f(\overline{A}) \subset \overline{(f(A)}$.*

Poznámka 12.5.8. V části (4) je uzávěr $\overline{A}$ samozřejmě uzávěrem v prostoru P, $\overline{f(A)}$ uzávěrem v prostoru Q. Někdy se začleňují mezi podmínky věty i některá ekvivalentní vyjádření spojitosti ve všech bodech prostoru P, která jsme poznali dříve; srovnej např. [13]. Důsledkem podmínky (2) je např. charakteristika spojitých funkcí, se kterou se čtenář jistě setká: funkce f je spojitá na (P, ϱ), jestliže jsou pro všechna $\alpha \in \mathbb{R}$ množiny $\{x \in P\,;\ f(x) < \alpha\}$ a $\{x \in P\,;\ f(x) > \alpha\}$ otevřené.

Důkaz. Dokážeme postupně řetěz implikací

$$(1) \Rightarrow (4) \Rightarrow (3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1)\,.$$

(1) $\Rightarrow$ (4): Je-li $x \in \overline{A}$, existují body $x_n \in A$ tak, že $x_n \to x$. Pak je $f(x_n) \in f(A)$ a ze spojitosti f plyne, že $f(x_n) \to f(x)$; z toho plyne $f(x) \in \overline{f(A)}$.
(4) $\Rightarrow$ (3): Předpokládejme, že $F = \overline{F} \subset Q$ a dokažme, že pak je uzavřená i množina $A := f^{-1}(F)$, tj. že $\overline{A} \subset A$. Podle (4) je

$$f(\overline{A}) = f(\overline{f^{-1}(F)}) \subset \overline{f(f^{-1}(F))} \subset \overline{F} = F\,,$$

takže

$$\overline{A} \subset f^{-1}(f(\overline{A})) \subset f^{-1}(F) = A\,;$$

(3) $\Rightarrow$ (2): Je-li $G \subset Q$ otevřená množina, je $F := Q \setminus G$ uzavřená. Podle (3) je tedy uzavřená i $f^{-1}(F)$, takže

$$f^{-1}(G) = f^{-1}(Q \setminus F) = f^{-1}(Q) \setminus f^{-1}(F) = P \setminus f^{-1}(F)\,,$$

což je jakožto doplněk uzavřené množiny otevřená množina.
(2) $\Rightarrow$ (1): Je-li $\varepsilon > 0$ a $x \in P$ libovolně zvolený bod, pak

$$f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$$

je otevřená množina a s bodem x obsahuje i $B(x, \delta)$ pro jisté $\delta > 0$. Odtud ale plyne spojitost f v x, a proto je zobrazení f spojité v P. $\square$

Příklad 12.5.9. Funkce $f(x) = \sin(1/x)$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$, zřejmě není spojitá v bodě 0; všimněte si, že pro

$$M := f^{-1}([\,1/2, 1\,])$$

platí $0 \notin M$, i když zřejmě je $0 \in \overline{M}$. Funkce f tedy nesplňuje podmínku (3) z Věty 12.5.7.

Poznámka 12.5.10. V obou Čechových knihách [4] a [5] je uzávěr množiny $A \subset (P, \varrho)$ zaváděn pomocí funkce $d_A(x)$ vzdálenosti bodu x od množiny A. Toto pojetí má některé výhody, je ale vázáno pouze na práci v MP; časově je patrně ekonomičtější.

Definice 12.5.11. Nechť zobrazení $f : (P, \varrho) \to (Q, \sigma)$ je spojitá bijekce a inverzní zobrazení f^{-1} je také spojité. Potom říkáme, že f je *homeomorfismus mezi prostory P, Q*. Říkáme dále, že (P, ϱ), (Q, σ) jsou *homeomorfní*, existuje-li mezi (P, ϱ), (Q, σ) homeomorfismus.

Poznámky 12.5.12. 1. Pojmy, které se přenášejí (zachovávají) homeomorfismy, nazýváme *topologické*. Tak např. otevřenost množiny se při zobrazení homeomorfním zobrazením zachovává, jde tedy o topologický pojem. Omezenost metrického prostoru se homeomorfismem zachovat nemusí; viz Příklad 12.2.13. Tento pojem proto není topologický. Jak již víme, pojmy či vlastnosti, které se zachovávají izometriemi, se nazývají *metrické*. Izometrické prostory jsou zřejmě homeomorfní, avšak homeomorfní prostory nemusí být izometrické. Homeomorfismus je typickým pracovním nástrojem pro práci v *topologických* prostorech. Každá topologická vlastnost je i vlastností metrickou, nikoli však obráceně.

2. Homeomorfní obraz *diskrétního prostoru* je složen ze samých izolovaných bodů. Topologii takového prostoru tvoří systém všech jeho podmnožin, neboli všechny jeho podmnožiny jsou otevřené (a zároveň i uzavřené).

3. Interval $[0,1]$ s eukleidovskou metrikou je homeomorfní s $\mathbb{R}^*$, pokud zavedeme na $\mathbb{R}^*$ metriku postupem z Poznámky 12.4.7.

4. Je-li identické zobrazení homeomorfismem mezi prostory (P,ϱ) a (P,σ), jsou metriky ϱ a σ ekvivalentní metriky na P. Obráceně: Jsou-li ϱ a σ dvě ekvivalentní metriky na P, je identické zobrazení (P,ϱ) a (P,σ) homeomorfismem.

5. Pojmy, které jsou metrické, avšak nikoli topologické, mohou být přesto velmi důležité. Např. pojem stejnoměrné spojitosti, kterým se budeme dále zabývat, *není* topologickým pojmem.

I když dále pojem topologického prostoru nerozvíjíme, postupujeme tak, aby pro čtenáře nebylo obtížné se s ním eventuálně samostatně seznámit.

Příklad 12.5.13. Je-li $A \subset (P,\varrho)$ libovolná neprázdná množina a je-li $\varepsilon > 0$, nazývá se množina

$$G_\varepsilon(A) := \{x \in P; d_A(x) < \varepsilon\}$$

ε-okolí množiny A.

Lemma 12.5.14. *Pro* každou neprázdnou množinu $A \subset (P,\varrho)$ je

$$\overline{A} = \{x \in P; d_A(x) = 0\}\,.$$

Důkaz. Označme M množinu na pravé straně. Je zřejmě uzavřená, protože je vzorem uzavřené množiny při zobrazení spojitou funkcí d_A, a obsahuje A, tedy $\overline{A} \subset M$. Je-li $y \notin A$, existuje $\delta > 0$ tak, že $B(y,\delta) \cap A = \emptyset$. Je zřejmé, že pak $d_A(y) \geq \delta$ a bod y neleží v M. Tím je rovnost $M = \overline{A}$ dokázána. □

Věta 12.5.15. *Pro každé dvě neprázdné disjunktní uzavřené množiny v metrickém prostoru (P,ϱ) existuje spojitá funkce $f : P \to [0,1]$ tak, že $f^{-1}(0) = A$, $f^{-1}(1) = B$ a $0 < f(x) < 1$ pro všechna $x \in P \setminus (A \cup B)$.*

Důkaz. K důkazu použijeme vzdálenost d_A od množiny A. Stačí položit

$$f(x) := \frac{d_A(x)}{d_A(x) + d_B(x)}\,.$$

Jmenovatel zlomku na pravé straně je kladný, protože x nemůže ležet současně ve dvou disjunktních množinách; alespoň jeden ze sčítanců je tedy kladný. Funkce f je spojitá a zřejmě je $f(A) = 0$, $f(B) = 1$. Pro každé $x \in P \setminus (A \cup B)$ je čitatel zlomku vpravo menší nežli jeho jmenovatel, takže $0 < f(x) < 1$. □

Poznámka 12.5.16. Velmi důležitou partii analýzy tvoří vyšetřování funkcí více proměnných, případně zobrazení množin z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^k$ s $n, k \in \mathbb{N}$. Příslušnou teorii, která je relativně obsáhlá, nebudeme rozvíjet. Čtenář se s ní může seznámit např. v [16]. Poznamenejme jen, že znalost základních poznatků z teorie metrických prostorů nám v jejím studiu může významně pomoci. Na jednoduchém příkladu si však přibližme, že toto studium není jednoduché.

Z toho, s čím jsme se již seznámili, speciálně vyplývá definice spojitosti *funkce více proměnných*, tj. zobrazení f z $\mathbb{R}^m$ do $\mathbb{R}^1$. Všimneme si, že praktické vyšetření spojitosti nebo limity funkce více proměnných není až zas tak jednoduché, jak by se na první pohled po přečtení základních definic mohlo zdát.

Vyšetřeme limitu funkce dvou proměnných

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

v bodě $[0,0]$. Podle našich dřívějších úmluv, které opět přeneseme z $\mathbb{R}^1$ na $\mathbb{R}^m$, $m>1$, budeme pokládat za D_f množinu všech $[x,y] \in \mathbb{R}^2$, pro něž má výraz v rovnosti vpravo smysl, tedy

$$D_f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\, x^2+y^2 \neq 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{[0,0]\}\,.$$

Všimněme si, že funkce na přímkách o rovnicích $x=0$, resp. $y=0$ (osách souřadnic) nabývá hodnotu 0 a tak by mohlo zdát, že limita funkce f v počátku je rovna 0.

Je-li $\{y = kx;\, x \in \mathbb{R},\, k \in \mathbb{R}\}$ svazek přímek procházejících počátkem, pak pro každou přímku má restrikce f na tuto přímku v počátku limitu:

$$\lim_{x\to 0} f(x,kx) = \lim_{x\to 0} \frac{kx^2}{x^2+k^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{k}{1+k^2} = \frac{k}{1+k^2}\,.$$

Jak vidíme, tato limita závisí na k. Situace je ale ještě složitější: dá se poměrně snadno ukázat, že ani spojitost restrikce funkce na každou přímku procházející bodem $[0,0]$ nezaručuje spojitost funkce v tomto bodě! Viz např. [8]. Je také zřejmé, že při vyšetřování limity v $\mathbb{R}^2$ musíme pracovat s „dvourozměrnými“ okolími vyšetřovaného bodu. Při vývoji pojmu spojitosti funkcí více proměnných nebylo jednoduché překonání představy, že „oddělená spojitost“, tj. spojitost funkcí

$$f^x : y \mapsto f(x,y)\,, \quad f^y : x \mapsto f(x,y)$$

pro všechna $x,y \in \mathbb{R}$, *nesplývá* se spojitostí f v $\mathbb{R}^2$ podle naší definice; v minulosti, v zárodku teorie funkcí více proměnných, nebylo zcela jasné, jak se tyto věci liší.

Historická poznámka 12.5.17. V této kapitole je jen málo tvrzení, historický komentář se proto týká převážně vývoje teorie a jejích základních pojmů. Zatím jsme se většinou zabývali pouze příklady; pokud jsme uváděli tvrzení, jde ve většině případů o přepis něčeho, co jsme poznali již dříve, do jiného označení.

Cauchyho nerovnost prodělala poměrně dlouhý vývoj. Protože existují další zobecnění této nerovnosti, bývá k jejímu označení užíváno libovolné kombinace jmen Cauchy, Schwarz, Bunjakovskij. To má následující kořeny: Louis Augustin Cauchy (1789 – 1857) odvodil nerovnost v popsaném tvaru. Viktor Jakovlevič Bunjakovskij (1804 – 1889) dokázal platnost integrální varianty nerovnosti r. 1859. Nezávisle k ní dospěl r. 1875 Carl Hermann Amandus Schwarz (1843 – 1921), který ji pak zobecnil i na vícerozměrný integrál r. 1885.

Poznamenejme, že podstatnou část teorie normovaných lineárních prostorů vytvořil Frederik Riesz při studiu prostorů l^p (v obecnější formě) již v r. 1913 v práci [14]. Rovněž i stěžejní tvrzení z této oblasti matematiky byla známa před r. 1932, kdy vyšla kniha [1]. Vlastnosti normy v normovaném lineárním prostoru jsou v přímé souvislosti s konvexitou koulí $B(x,r)$ v tomto prostoru. Jednotkové koule v ℓ^p_m s rostoucím $p \in [1,\infty)$

rostou monotónně, mezními případy jsou „čtvercové koule“ v ℓ_2^1 a ℓ_2^∞, nebo osmistěn a krychle v ℓ_3^1 a ℓ_3^∞, atp. Viz Obr. 3 v této kapitole, na kterém čísla $1, 2, \ldots, \infty$ jsou vybranými hodnotami parametru p; obrázek je pouze schématem pro lepší představu věci. Za zmínku stojí ještě fakt, že nerovnost z Lemmatu 12.3.9 dokázal již o rok dříve v modifikované podobě Leonard James Roger (1862 – 1933), Otto Ludwig Hölder (1859 – 1937) jeho práci cituje; viz [12]. Myšlenka důkazu Minkowského nerovnosti z Hölderovy nerovnosti pochází od F. Riesze z práce [14].

Charakteristika globální spojitosti (ekvivalence podmínek (1) – (3) z Věty 12.5.7) pochází od Hausdorffa z práce [9]. Jiná závažnější tvrzení v této kapitole obsažena nejsou. Teprve však následující kapitola ukáže, proč je tento „nový jazyk“ tak významný. Jeho význam pro analýzu je srovnatelný s vlivem, který přinesla teorie množin, a je pokračováním jejího vývoje v jistém směru.

Již bylo řečeno výše, že metrické prostory zavedl Fréchet r. 1906. Někdy se udává jiná doba, většina autorů však odvozuje údaj od publikace jeho práce [7]. Přibližme si jeho definici: *Uvažujme třídu* (V) *prvků libovolné povahy, ale takových, že lze o každých dvou říci, zda splývají či nikoli. Navíc takovým dvěma prvkům lze přiřadit číslo* $(A, B) = (B, A) \geq 0$, *které má následující dvě vlastnosti:* 1° *Nutnou a postačující podmínkou k tomu, aby* (A, B) *byla nula je, aby* A *a* B *splývaly.* 2° *Existuje nezáporná funkce* $f(\varepsilon)$ *jdoucí k* 0 *spolu s* ε *taková, že nerovnosti* $(A, B) \leq \varepsilon$, $(B, C) \leq \varepsilon$ *dávají* $(A, C) \leq f(\varepsilon)$, *ať jsou body* A, B, C *jakékoli. Jinak řečeno, stačí, aby* (A, B) *a* (B, C) *byly malé, aby platilo totéž o* (A, C). *Číslo* (A, B) *nazýváme* odlehlost (*voisinage*) *bodů* A *a* B.

O kus dále Fréchet zavádí ve vší obecnosti *metriku* (l'écart) a uvádí i trojúhelníkovou nerovnost: $(A, B) \leq (A, C) + (C, B)$. Zřejmě předpokládá i její symetrii, ač ji výslovně neuvádí, neboť se vrací k definici třídy (V) popsané výše a říká, že pro metriku stačí volit např. $f(\varepsilon) = 2\varepsilon$. Pro prostor v našem smyslu metrický užívá označení (E) a upozorňuje, že (dle jeho definice) metrika je vždy vzdáleností, a tedy třída (E) je vždy i třídou (V).

Bylo by nespravedlivé nezmínit alespoň některé Fréchetovy předchůdce. K tvorbě jednotlivých základních pojmů v kontextu eukleidovských prostorů významně přispěli např. Camille Jordan, Jules Henri Poincaré (1854 – 1912), Félix Edouard Justin Émile Borel (1871 – 1956), René-Louis Baire (1874 – 1932) a Henri Léon Lebesgue (1873 – 1941). Na pozdějším formování teorie v obecnějším kontextu se podíleli Vitto Volterra (1860 – 1940), David Hilbert (1862 – 1943) a Ivar Fredholm (1866 – 1927). Zároveň je tím pokryt popis vzniku (metrizovatelných) topologických prostorů.

Poznamenejme ještě srovnání: Fréchetova teorie byla založena v podstatě na pojmu konvergentní posloupnosti a při svém zrodu nebyla dostatečně obecná. Frederik Riesz načrtl v letech 1907–8 obecnější teorii, jejímž základem byl pojem hromadného bodu; jeho pojetí bylo obecnější, ale i komplikovanější a sám autor se dalšímu rozpracovávání teorie metrických prostorů v celé šíři nevěnoval a soustředil se na některé speciální problémy.

Kromě Banachových prostorů (úplné normované lineární prostory) a Hilbertových prostorů (úplné prostory se skalárním součinem) se vyskytuje mnoho speciálních prostorů, pojmenovaných po slavných objevitelích. Pozor, např. *Fréchetův prostor není obecný MP*, ale *úplný metrický lineární prostor*, ve kterém je metrika definována pomocí tzv. paranormy (paranorma je funkce podobného typu jako norma, avšak s vlastnostmi, které jsou „slabší“ než vlastnosti normy: nemá vlastnosti (2) a (3) z Definice 12.2.5) tak, že platí

$$(x_n \to x,\, \alpha_n \to \alpha) \Rightarrow \alpha_n x_n \to \alpha x\,.$$

Čtenář se po přečtení následující kapitoly patrně přesvědčí, že se některá nám již známá tvrzení po zobecnění do kontextu MP stanou mnohem průhlednější, neboť se ozřejmí jejich jádro či mechanismus, který je použit při důkazu (platí to např. u tvrzení o spojitých funkcích na intervalu $[\,a, b\,]$).

V souvislosti s krátkou exkurzí do problematiky spojitosti funkcí více proměnných poznamenejme, že tyto funkce byly zkoumány již v 18. stol. Jean le Rond d'Alembert (1717 – 1783) studoval pomocí nich r. 1748 chvění strun. Ještě Cauchy r. 1821 zaměňoval oddělenou spojitost se spojitostí (na omyl upozornil r. 1884 Peano).

Literatura:

[1] Banach, S.: *Théorie des opérations linéaires*, Warszawa, 1932.

[2] Bourbaki, S.: *Očerki po istorii matěmatiki*, Izdatělstvo IL, Moskva, 1963, (překlad z francouzštiny).

[3] Cauchy, L. A.: *Course d'analyse de l'École Royal Polytechnique*, Paris, 1821.

[4] Čech, E.: *Bodové množiny. Část první*, Jednota československých matematiků a fyziků, Praha, 1936, (druhá část nevyšla; viz též následující citace).

[5] Čech, E.: *Bodové množiny*, Academia, Praha, 1974, (obsahuje první tři kapitoly knihy z předcházející citace a posmrtně upravený rukopis její druhé části).

[6] Engelking, R.: *General topology*, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[7] Fréchet, M.: *Sur quelques points du Calcul fonctionnel*, Rend. Circ. Math. Palermo **22** (1906), str. 1 – 74. (s poznámkou: Thèse prèsentée à la Facultè des Sciences pour obtenir le grade de Docteur ès Sciences).

[8] Gelbaum, B. R., Olmsted, J. M. H.: *Counterexamples in analysis*, Holden-Day, San Francisko, 1964.

[9] Hausdorff, F.: *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig, 1914.

[10] Hausdorff, F.: *Mengenlehre*, Berlin-Leipzig, 1927.

[11] Lukeš, J.: *Úvod do funkcionální analýzy*, Karolinum, Praha, 2005.

[12] Maligranda, L.: *Why Hölder's inequality should be called Rogers's inequality*, Research Report Dpt. of Math., Luleå Uni. **10** (1995), str. 1 – 17.

[13] Pultr, A.: *Matematická analýza* [I], Matfyzpress, Praha, 1995.

[14] Riesz, F.: *Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues*, Paris, 1913.

[15] Taylor, A. E.: *Úvod do funkcionální analýzy*, Academia, Praha, 1973.

[16] Zajíček, L.: *Vybrané partie z matematické analýzy pro 1. a 2. ročník*, Matfyzpress, Praha, 2003.

Kapitola 13

Separabilita, úplnost, kompaktnost a souvislost

Tato kapitola je ve skutečnosti pokračováním kapitoly předcházející. V ní jsme zavedli řadu pojmů a popsali mnoho příkladů. Nyní se soustředíme na nejdůležitější vlastnosti metrických prostorů.

13.1 Separabilní prostory

Definice 13.1.1. Nechť $A \subset P$ je libovolná podmnožina MP (P, ϱ). Jestliže $\overline{A} = P$, pak říkáme, že A je *hustá v prostoru* (P, ϱ), resp. krátce (není-li nebezpečí z nedorozumění), že A je hustá.

Hustota množiny A je, podobně jako uzavřenost nebo otevřenost, topologická vlastnost.

Příklady 13.1.2. 1. Je-li $A \subset B \subset (P, \varrho)$ a množina A je hustá v P, je $P = \overline{A} \subset \overline{B}$, a tedy B je rovněž hustá množina v P.

2. Zřejmě je $\mathbb{Q}$ hustou podmnožinou $\mathbb{R}$. Také všechny body z $\mathbb{R}^m$, jejichž souřadnice jsou vesměs racionální čísla, tvoří hustou množinu v $\mathbb{R}^m$. V jistém smyslu je tedy tato množina „dost velká“, odtud však *neplyne*, že doplněk husté množiny není hustý; stačí uvážit, že $\overline{\mathbb{Q}} = \overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Věta 13.1.3. *Množina A je hustá, právě když pro každou neprázdnou otevřenou $G \subset P$ je $G \cap A \neq \emptyset$.*

Důkaz. Nechť $\overline{A} = P$ a $G \neq \emptyset$ je otevřená množina. Pak z $G \cap A = \emptyset$ plyne $A \subset P \setminus G$, a proto je $P = \overline{A} \subset \overline{P \setminus G} = P \setminus G$, tedy $G = \emptyset$, což je spor. Není-li $\overline{A} = P$, pak $G = P \setminus \overline{A} \neq \emptyset$ je otevřená množina, pro kterou $A \cap G = \emptyset$. $\square$

Definice 13.1.4. Prostor (P, ϱ) se nazývá *separabilní*, jestliže v něm existuje *spočetná* hustá podmnožina.

Příklad 13.1.5. Z toho, že $\mathbb{Q}$ je spočetná množina, vyplývá separabilita prostoru $\mathbb{R}$. Z Příkladu 13.1.2 (2) plyne, že i $\mathbb{R}^m$ je pro všechna $m \in \mathbb{N}$ separabilní prostor.

Příklad 13.1.6. Také prostor $\mathcal{C}([\,a,b\,])$ s obvyklou supremovou normou je separabilní. Označme D_n ekvidistantní dělení intervalu $[\,a,b\,]$, tj. dělení

$$D_n = \left\{x_k\,;\, x_k = a + \frac{k(b-a)}{n},\ k = 0,1,\dots,n\right\}.$$

Spojité, *po částech lineární funkce*, které v dělících bodech x_k dělení $D_n \in \mathcal{D}(a,b)$ nabývají pouze racionálních hodnot a jsou lineární na každém z dílčích intervalů $[\,x_{k-1}, x_k\,]$, $k = 1,\dots,n$, tvoří spočetnou podmnožinu $M_n \subset \mathcal{C}([\,a,b\,])$.

Dokážeme, že systém $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ je hustou množinou v prostoru $\mathcal{C}([\,a,b\,])$. K tomu stačí dokázat, že pro každou funkci $f \in \mathcal{C}([\,a,b\,])$ a každé $\varepsilon > 0$ lze nalézt funkci $l \in M$ tak, že $\|f - l\|_\infty < \varepsilon$. K $\varepsilon/2 > 0$ existuje $\delta > 0$ ze stejnoměrné spojitosti funkce f na $[\,a,b\,]$ tak, že je

$$(x, y \in [\,a,b\,],\ |x-y| < \delta) \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon/2\,.$$

K tomuto δ zvolíme takové dělení D_n, jehož norma $\nu(D_n) = (b-a)/n < \delta$ (viz (11.5) v Kapitole 10). Zvolme hodnoty $l(x_k) \in \mathbb{Q}$ tak, aby bylo $|l(x_k) - f(x_k)| < \varepsilon/2$ pro všechna $k = 0,1,\dots,m$, kde $m+1$ je počet dělicích bodů zvoleného dělení. Pak je také pro všechna $k = 1,\dots,m$ a $t \in [\,x_{k-1}, x_k\,]$

$$\begin{aligned} l(t) &= \frac{t - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}\, l(x_k) + \frac{x_k - t}{x_k - x_{k-1}}\, l(x_{k-1})\,,\\ f(t) &= \frac{t - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}\, f(t) + \frac{x_k - t}{x_k - x_{k-1}}\, f(t)\,. \end{aligned}$$

Proto pro tato t dostáváme

$$|l(t) - f(t)| \le \frac{t - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}\, |\,l(x_k) - f(t)| + \frac{x_k - t}{x_k - x_{k-1}}\, |\,l(x_{k-1}) - f(t)|\,. \tag{13.1}$$

Konečně triviální odhady obou absolutních hodnot v (13.1) pomocí trojúhelníkové nerovnosti

$$\begin{aligned} |\,l(x_k) - f(t)| &\le |\,l(x_k) - f(x_k)| + |\,f(x_k) - f(t)| < \varepsilon\,,\\ |\,l(x_{k-1}) - f(t)| &\le |\,l(x_{k-1}) - f(x_{k-1})| + |\,f(x_{k-1}) - f(t)| < \varepsilon \end{aligned}$$

dávají $|l(t) - f(t)| < \varepsilon$ v každém dělícím intervalu dělení D_n, a tedy všude v $[\,a,b\,]$.

Abychom dokázali, že nějaký MP *není separabilní*, stačí v něm nalézt *nespočetnou* podmnožinu A tak, že pro nějaké $\varepsilon > 0$ je $\varrho(x,y) > \varepsilon$, $x, y \in A$. Každá množina, jejíž uzávěr by měl obsahovat A, musí již být nutně nespočetná.

Příklady 13.1.7. 1. Diskrétní prostor (P, ϱ) s nespočetnou P není separabilní, jedinou jeho hustou podmnožinou je P.

2. V Příkladu 12.4.43 jsme zavedli lineární prostor $\mathcal{M}(A)$ všech omezených funkcí na neprázdné množině A. Pro $A := (a, b)$ není tento normovaný lineární prostor separabilní, protože vzdálenost dvou charakteristických funkcí jednobodových podmnožin (a, b) je rovna 1 a množina B všech těchto funkcí je nespočetná. Potom i každá podmnožina C všech funkcí $f \in \mathcal{M}(A)$, pro kterou je $\operatorname{dist}(B, C) < \varepsilon < 1/2$ je také nespočetná, a tedy i každá hustá množina v $\mathcal{M}((a, b))$ je nespočetná.

13.2 Úplné prostory

Definice 13.2.1. Řekneme, že posloupnost $\{x_n\} \subset (P, \varrho)$ splňuje *Bolzano-Cauchyho podmínku* (krátce: *je cauchyovská*), jestliže

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists k \in \mathbb{N})\,(\forall\, m, n \geq k)\,(\varrho\,(x_n, x_m) < \varepsilon)\ .$$

Poznámky 13.2.2. 1. Definici 13.2.1 si lehce zapamatujeme, neboť je to opět „přepis“ analogické definice cauchyovské posloupnosti z $\mathbb{R}$.

2. Snadno dokážeme, analogicky jako v $\mathbb{R}$, že konvergentní posloupnost v metrickém prostoru je cauchyovská.

3. Není pravda, že každá cauchyovská posloupnost v (P, ϱ) konverguje v (P, ϱ). Uvažujte množiny $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nebo interval $(0, 1)$ jako podprostory $\mathbb{R}^1$. Pak $\sqrt{2}/n \to 0$, tedy tato posloupnost konverguje v $\mathbb{R}$, ale *v uvažovaných (pod)prostorech* nekonverguje.

4. Nechť f je homeomorfní zobrazení metrického prostoru (P, ϱ) na prostor (Q, σ). Je-li $\{x_n\}$ cauchyovská posloupnost v (P, ϱ), *nemusí* být posloupnost $\{f(x_n)\}$ cauchyovská. Uvažte posloupnost $a_n := 1 - 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, v prostoru $(0, 1)$ s eukleidovskou metrikou a homeomorfismus $f(x) = x/(1 - x)$ intervalů $(0, 1)$ a $(0, \infty)$, rovněž s eukleidovskou metrikou. Pak je $f(a_n) = n - 1$, a tedy $\{f(a_n)\}$ *není* cauchyovská posloupnost.

Definice 13.2.3 (Fréchet 1906). Prostor (P, ϱ), ve kterém každá cauchyovská posloupnost konverguje, se nazývá *úplný prostor.* Jinak řečeno, je-li $\{x_n\}$ cauchyovská posloupnost v úplném metrickém prostoru (P, ϱ), pak *existuje* $x \in P$ tak, že $x_n \to x$.

Historická poznámka 13.2.4. Pro možnost přímého porovnání uveďme původní definici z Fréchetovy práce [7]: *Říkáme, že třída (V) připouští zobecnění Cauchyho věty, pokud každá posloupnost jejích prvků splňující Cauchyho podmínku* [1]*), má (nutně jedinou) limitu.*

Příklady 13.2.5 (důležité). 1. Prostor $\mathbb{R}^1$ (s eukleidovskou metrikou) je úplný prostor. To jsme dokázali ve Větě 2.4.8.

2. Obecněji, prostor $\mathbb{R}^m$ je pro každé $m \in \mathbb{N}$ úplný prostor. Použijeme-li označení $x = [x_1, \ldots, x_m]$, $y = [y_1, \ldots, y_m]$, je

$$|x_k - y_k| \leq \|x - y\|_2\,, \quad k = 1, \ldots, m\,,$$

[1]) Cauchyovská posloupnost v naší terminologii.

a cauchyovská posloupnost bodů z $\mathbb{R}^m$ je cauchyovská „po složkách“: Odtud plyne, že cauchyovská posloupnost $\{x^n\}_{n=1}^{\infty} = \big\{[\,x_1^n, x_2^n, \dots, x_m^n\,]\big\}_{n=1}^{\infty}$ v $\mathbb{R}^m$ je konvergentní po složkách k nějakému bodu $x = [\,x_1, \dots, x_m\,]$, a $x^n \to x$ v $\mathbb{R}^m$. Stejnou úvahu jsme relativně podrobně provedli pro Gaussovu rovinu $\mathbb{C}$, která je izometrická s $\mathbb{R}^2$.

Lemma 13.2.6. *Prostor $\mathcal{C}([\,a,b\,])$ s normou $\|\cdot\|_\infty$ je úplný.*

Toto tvrzení není zcela jednoduché dokázat, neboť důkaz využívá znalostí o tzv. stejnoměrné konvergenci, což je právě konvergence v normě, které se běžně používá v $\mathcal{C}([\,a,b\,])$. Tato konvergence je mj. nástrojem pro zvládnutí záměny pořadí dvou limitních procesů; tomuto problému se budeme podrobně věnovat v Kapitole 15.

Důkaz. Posloupnost cauchyovská v supremové normě je zřejmě cauchyovská v každém bodě, neboť pro všechna $t \in [\,a,b\,]$

$$|f_n(t) - f_m(t)| \le \sup\{|f_n(t) - f_m(t)|;\, t \in [a,b]\} = \|f_n - f_m\|_\infty\,. \tag{13.2}$$

Lze tedy definovat $f(t) := \lim_{n\to\infty} f_n(t)$ pro všechna $t \in [\,a,b\,]$, neboť vlastní limita vpravo vždy existuje. Limitním přechodem pro $m \to \infty$ dostaneme z (13.2), že také $|f_n(t) - f(t)| \le \|f_n - f\|_\infty$ a tedy $f_n \rightrightarrows f$ na $[\,a,b\,]$. Zbývá dokázat spojitost funkce f na $[\,a,b\,]$. Zvolme bod $x_0 \in [\,a,b)$ a dokažme, že funkce f je spojitá zprava v bodě x_0. Zřejmě je pro h, $0 \le h \le b - x_0$,

$$\begin{gathered}|f(x_0+h) - f(x_0)| \le \\ \le |f(x_0+h) - f_n(x_0+h)| + |f_n(x_0+h) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|\,.\end{gathered}$$

Vágně řečeno, výraz na pravé straně nerovnosti je třeba „udělat“ menší než libovolně zvolené $\varepsilon > 0$ pro všechna h, $0 < h < \delta$, a to volbou dostatečně velkého $n \in \mathbb{N}$ a dostatečně malého $\delta > 0$. Podrobněji: zvolme $\varepsilon > 0$ a dále $n \in \mathbb{N}$ tak, aby $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon/3$. Pak je $|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon/3$ pro všechna $t \in [\,a,b\,]$, což nám umožní odhadnout první a třetí výraz číslem $\varepsilon/3$. Pak zvolíme s využitím spojitosti funkce f_n číslo $\delta > 0$ tak, aby pro všechna h, $0 \le h < \delta < b - x_0$ platilo

$$|f_n(x_0+h) - f_n(x_0)| < \varepsilon/3\,.$$

Spojitost zleva v bodě $x_0 \in (a,b\,]$ se dokáže obdobně. Toto tvrzení je jen malou ukázkou „síly“ stejnoměrné konvergence. ☐

Tvrzení 13.2.7. *Je-li (P,ϱ) úplný prostor a $A \subset P$, pak $(A, \varrho\,|\,A \times A)$ je úplný prostor, právě když je A uzavřená v (P,ϱ).*

Důkaz. Je-li $\{x_n\}$ cauchyovská posloupnost v A, je konvergentní v P, a protože je A uzavřená, leží její limita v A. Proto je i $(A, \varrho\,|\,A \times A)$ úplný prostor. Není-li A uzavřená v P, existuje podle Tvrzení 12.4.36 hromadný bod x množiny A, který neleží v A, a tedy i posloupnost bodů $x_n \in A$, $x_n \to x$. Ta je cauchyovská, avšak nekonverguje v A, takže $(A, \varrho\,|\,A \times A)$ není úplný. ☐

Poznámka 13.2.8 (důležitá). Když jsme se seznamovali s $\mathbb{R}$, zjistili jsme, že obsahuje $\mathbb{Q}$ jakožto svoji spočetnou hustou podmnožinu. Prostor $\mathbb{Q}$ však není úplný. Vnucuje se otázka, zda lze ke každému metrickému prostoru (P,ϱ) najít „nadprostor“, který by byl úplný. Jde tedy o úplný prostor (Q,σ) takový, aby (P,ϱ) byl jeho (metrickým) podprostorem. Takový prostor vždy existuje a při jisté „úspornosti“ je *do jisté míry* jednoznačně určen. Tento vágně popsaný fakt zpřesníme, neboť částečně osvětluje zavedení $\mathbb{R}$ a ukazuje, jak přesně jsou reálná čísla axiómy (1) – (13) z Kapitoly 1 určena.

Definice 13.2.9. Jsou-li (P,ϱ), (Q,σ) metrické prostory takové, že (P,ϱ) je podprostor (Q,σ), P je hustá v Q a (Q,σ) je úplný prostor, nazýváme metrický prostor (Q,σ) *úplný obal* (někdy též *zúplnění*) prostoru (P,ϱ).

Věta 13.2.10 (Baire, Hausdorff 1914). *Ke každému metrickému prostoru (P,ϱ) existuje jeho úplný obal. Jsou-li (Q_1,σ_1) a (Q_2,σ_2) dva úplné metrické obaly (P,ϱ), pak existuje* izometrie *mezi (Q_1,σ_1) a (Q_2,σ_2), která je identitou na P.*

Náznak důkazu. Nechť (P,ϱ) je *libovolný* MP. Označme C množinu všech *cauchyovských* posloupností bodů z P a definujme na C ekvivalenci $\sim$ vztahem

$$\{x_n\} \sim \{y_n\} \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \varrho\,(x_n,y_n) \to 0\,.$$

Množinu všech tříd vzájemně ekvivalentních posloupností z C označme Q_1. Označíme-li $[\{x_n\}]$ třídu určenou posloupností $\{x_n\}$, je funkce σ_1 definovaná na $Q_1 \times Q_1$ předpisem

$$\sigma_1([\{x_n\}],[\{y_n\}]) := \lim_{n\to\infty} \varrho\,(x_n,y_n)$$

metrika na Q_1. Je vcelku jednoduché, avšak pracné (srovnejte s [4], str. 92) dokázat, že (Q_1,σ_1) je úplný metrický prostor; ztotožníme-li $x \in P$ s třídou v Q_1, určenou posloupností $\{x,x,\dots\}$, lze (P,ϱ) považovat za podprostor (Q_1,σ_1). Dále lze dokázat i druhou část Věty 13.2.10 o izometrii. $\square$

Poznámka 13.2.11. Nabízí se možnost využít popsaného postupu k zavedení $\mathbb{R}$. Pak je nutno mít především základ, tj. mít vybudováno uspořádané pole $\mathbb{Q}$. K dalším krokům však nelze použít nic z teorie MP, neboť jsme v definici metriky již existenci $\mathbb{R}$ předpokládali. Přesto však lze analogickým postupem vytvořit z pole $\mathbb{Q}$ pole $\mathbb{R}$; srovnejte s [12], Ch. 1, str. 32. Platí totiž: (a) *Každé uspořádané pole obsahuje izomorfní obraz $\mathbb{Q}$, přičemž izomorfismus zachovává i uspořádání.* (b) *Každá dvě úplná archimedovská pole T_1 a T_2 s množinami kladných prvků P_1 a P_2 jsou algebraicky izomorfní, přičemž izomorfismus zachovává uspořádání.* Podrobnosti lze nalézt v [12]. V kontextu Věty 13.2.10 je $\mathbb{R}$ úplným obalem $\mathbb{Q}$. Dá se dokázat, že reálná čísla jsou soustavou axiomů (1) – (13) určena v podstatě jednoznačně, nebudeme to však dokazovat.

Věta 13.2.12 (Cantor 1872*). *Nechť (P,ϱ) je úplný metrický prostor a nechť $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí posloupnost neprázdných uzavřených množin v prostoru P, tj. $A_{n+1} \subset A_n$, $n \in \mathbb{N}$. Nechť dále* $\operatorname{diam}(A_n) \to 0$. *Potom existuje právě jeden bod $x \in P$ takový, že $\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.*

Poznámka 13.2.13. Předcházející Věta 13.2.12 je jedním z možných zobecnění Cantorovy věty o vložených intervalech (Věta 2.4.1). Všimněme si, jak se tvrzení liší od analogického tvrzení v $\mathbb{R}$: neříká, že bez posledního předpokladu o $\operatorname{diam}(A_n)$ je průnik $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ neprázdný. Poslední předpoklad přináší v tomto kontextu nejen *jednoznačnost* (průnik je jednobodový), ale i *existenci*; bez něj by „modifikovaná věta“ neplatila. Skutečně, intervaly $[\,n,\infty)$, $n \in \mathbb{N}$, jsou vesměs uzavřené množiny, jsou do sebe zařazené a přitom $\bigcap_{n=1}^{\infty}[\,n,\infty) = \emptyset$. V tomto případě je $\mathrm{diam}([\,n,\infty)) = \infty$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, a proto průměry množin *nekonvergují* k 0. Stejně snadno může čtenář dokázat, že i další předpoklady Věty 13.2.12 jsou *podstatné*, tj. po vynechání monotonie nebo uzavřenosti A_n takto modifikované tvrzení neplatí.

Poznamenejme, že se Cantor podobnou problematikou zabýval v souvislosti se zaváděním reálných čísel; k této době se váže letopočet uvedený u věty. Cantor *nepracoval* v kontextu MP, běžně užívané označení je spíše vyjádřením pocty zakladateli teorie množin.

Důkaz Věty 13.2.12. Zvolme posloupnost $\{x_n\}$ tak, že je $x_n \in A_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Tato posloupnost je cauchyovská, neboť pro všechna $m \ge n$ je $x_m, x_n \in A_n$,

$$\varrho\,(x_n, x_m) \le \mathrm{diam}(A_n)$$

a $\mathrm{diam}(A_n) \to 0$ při $n \to \infty$. Protože je prostor (P,ϱ) úplný, existuje bod $x \in P$ tak, že $x_n \to x$. Jelikož jsou dále množiny A_n vesměs uzavřené a $x_k \in A_n$ pro $k \ge n$, je $x \in \overline{A_n} = A_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a x tedy leží i v jejich průniku. Pro libovolné dva body x, y tohoto průniku je $\varrho\,(x,y) \le \mathrm{diam}(A_n) \to 0$, takže bod x je určen jednoznačně. □

Příklad 13.2.14. Následující dva příklady ukazují, jak složitá mohou být spojitá zobrazení. Budeme se zabývat zobrazením, které bývá někdy spojováno s pojmem tzv. Peanovy křivky. Nejprve sestrojíme zobrazení $\psi : [\,0,1\,] \to [\,0,1\,] \times [\,0,1\,]$, které zobrazí $[\,0,1\,]$ *na* $[\,0,1\,] \times [\,0,1\,]$. Vyjádříme-li každé $t \in [\,0,1)$ ve tvaru dyadického čísla $0{,}t_1t_2t_3\ldots$ tak, aby zápis obsahoval vždy nekonečně mnoho číslic 0 (tím zakazujeme zápis čísla tvaru $0{,}10\bar{1}$ s jednočlennou periodou 1), bude vyjádření každého t jednoznačné a lze definovat zobrazení

$$\psi : t \mapsto [\,0{,}t_1t_3t_5\ldots,\; 0{,}t_2t_4t_6\ldots\,]\,, \quad \psi(1) = [\,1,1\,]\,.$$

Toto zobrazení je surjekce (zobrazení na), ale není prosté ani spojité, protože např. bod $[\,0{,}1; 0{,}1\,]$ je obrazem bodů [2]) $0{,}11$, $0{,}10010101\ldots$ a $0{,}011010101\ldots$. Posloupnost $\{t_k\}$ bodů z $[\,0,1\,]$

$$\{\,t_k\,\} = \{0{,}0011;\; 0{,}001111;\; 0{,}00111111;\; 0{,}0011111111;\; \ldots\}$$

je volena tak, že $\psi(t_1) = [\,0{,}01;\, 0{,}01\,]$, $\psi(t_2) = [\,0{,}011;\, 0{,}011\,]$, $\psi(t_3) = [\,0{,}0111;\, 0{,}0111\,]$, $\psi(t_4) = [\,0{,}01111;\, 0{,}01111\,], \ldots$, takže $t_k \to 0{,}01$, $\psi(t_k) \to [\,0{,}1;\, 0{,}1\,]$ a zároveň platí $\psi(0{,}01) = [\,0{,}0;\, 0{,}1\,] \ne [\,0{,}1;\, 0{,}1\,]$. Je tedy

$$\lim_{k\to\infty} \psi(t_k) \ne \psi(\lim_{k\to\infty} t_k)\,.$$

Že je ψ zobrazením *na* $[\,0,1\,] \times [\,0,1\,]$ plyne z následují úvahy: Je $\psi(1) = [\,1,1\,]$. Alespoň jeden vzor pro bod $[\,0{,}t_1t_3t_5\ldots,\; 0{,}t_2t_4t_6\ldots\,]$, kde pro dyadické vyjádření obou souřadnic zakážeme zápis s jednomístnou periodou 1, získáme „proložením“: Bude jím bod $0{,}t_1t_2t_3\ldots$. Poznamenejme ještě, že použití dyadického vyjádření není podstatné.

[2]) Užijeme schematického zápisu, který umožní čtenáři snadno pochopit konstrukci příkladů.

Příklad 13.2.15. Nyní přidáme ve srovnání s Příkladem 13.2.14 požadavek spojitosti hledaného zobrazení. Sestrojíme *spojité* zobrazení $\varphi : [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$, zobrazující jednotkový interval *na* jednotkový čtverec. Ke konstrukci využijeme Cantorovu Větu 13.2.12. Sestrojíme ekvidistantní dělení $D_n \in \mathcal{D}(0,1)$ na 4^n dělicích intervalů a rozdělíme i čtverec $[0,1] \times [0,1]$ na 4^n shodných uzavřených čtverečků S_k, $k = 1, 2, \ldots, 4^n$; jsou to dvourozměrné uzavřené intervaly tvaru

$$\left[\frac{r-1}{2^n}, \frac{r}{2^n}\right] \times \left[\frac{s-1}{2^n}, \frac{s}{2^n}\right], \quad r, s = 1, 2, \ldots, 2^n .$$

Čtverečky S_k, $k = 1, 2, \ldots, 4^n$, tvoří dělení F_n intervalu $[0,1] \times [0,1]$. Toto provedeme pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Je vhodné si uvědomit, že při přechodu od D_n k D_{n+1} se dělí každý interval dělení D_n na čtyři intervaly dělení D_{n+1} a podobně každý (dvourozměrný) interval S_k dělení F_n na čtyři (dvourozměrné) intervaly dělení F_{n+1}. Nyní budeme přiřazovat zobrazením φ_n každému intervalu dělení D_n interval dělení F_n podle těchto pravidel:

(a) Zobrazení φ_n jsou prostá pro všechna $n \in \mathbb{N}$,

(b) sousedním intervalům dělení D_n přiřadíme vždy *stranami sousedící* intervaly (čtverečky) dělení F_n, a

(c) je-li J interval dělení F_n přiřazený zobrazením φ_n intervalu I dělení D_n, pak všechny čtyři intervaly dělení D_{n+1} ležící v I musí zobrazení φ_{n+1} zobrazit na intervaly ležící v J.

Jak to lze udělat naznačuje trojice schematických obrázků: Silnější lomená čára probíhá po řadě čtverce dělení F_1, F_2 a F_3 tak, jak jsou přiřazeny po sobě jdoucím intervalům dělení D_1, D_2 a D_3 [3]).

Podmínky (a) – (c) zaručí spojitost zobrazeni φ, definovaného takto: k bodu $t \in [0,1)$ sestrojíme posloupnost intervalů I_n dělení D_n, $n \in \mathbb{N}$, tak, aby tyto intervaly vždy obsahovaly bod t. Takový interval dělení D_n existuje a jsou (v každém dělení) maximálně dva; v takovém případě vybereme kterýkoli z nich. Vzniklou posloupnost intervalů I_n s $\operatorname{diam}(I_n) = 4^{-n} \to 0$ a $\cap_{n=1}^{\infty} I_n = \{t\}$ zobrazíme pomocí zobrazení φ_n. Pak posloupnost $\varphi_n(I_n)$ vyhovuje předpokladům Cantorovy Věty 13.2.12, $\operatorname{diam}(\varphi_n(I_n)) = \sqrt{2} \cdot 2^{-n} \to 0$ a lze definovat bod $\varphi(t)$ jako prvek jednobodové množiny

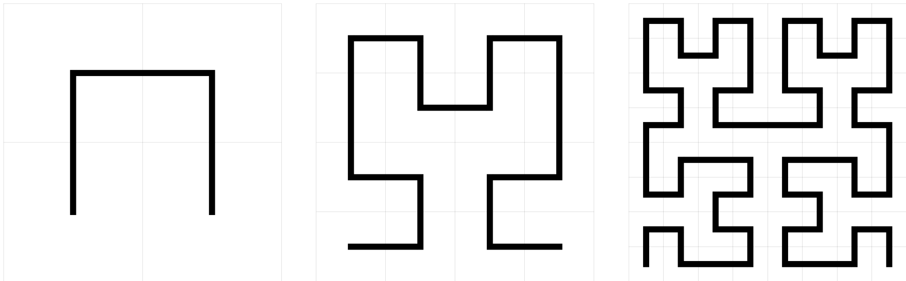
$$\{\varphi(t)\} := \bigcap_{n=1}^{\infty} \varphi_n(I_n) . \tag{13.3}$$

Zbývá dokázat, že zobrazení φ je korektně definované, že je zobrazením na $[0,1] \times [0,1]$ a že je spojité.

Pokud existují v nějakém dělení D_n dva intervaly dělení I_n, I'_n obsahující bod t, musí být t jejich společným koncovým bodem a ve všech děleních $D_{n+1}, D_{n+2}, \ldots$ jsou výběrem I_n nebo I'_n intervaly $I_{n+1}, I_{n+2}, \ldots$ jednoznačně určeny: Bod t je pro všechny koncovým bodem, nebo je bod t pro všechny počátečním bodem, a tak je bod t předpisem (13.3) definován pro posloupnost intervalů obsažených v I_n i pro posloupnost intervalů obsažených I'_n tentýž a díky pravidlu (b) je i $\varphi(t)$ určen jednoznačně.

---

[3]) Tento postup, popsaný r. 1891, pochází od Davida Hilberta.



Obr. 13. 1.

Obr. 13. 1 znázorňuje přiřazení φ_n: plná lomená čára prochází po řadě čtverci přiřazenými postupně intervalům $[x_{k-1}, x_k,]$, $k = 1, 2, \ldots, 4^n$. Spojitost zobrazení je dána pravidlem (c). Je-li dáno $t \in [0,1]$ a libovolná posloupnost $t_k \in [0,1]$, pak existuje m tak, že pro všechna $k \geq m$ je $|t - t_k| < 4^{-n}$, a tedy t_k i t leží v nějakém (ne nutně jediném) společném intervalu dělení S_n. Pak však eukleidovská vzdálenost $\varrho(f(t_k), f(t))$ je odhadnuta číslem $\sqrt{2} \cdot 2^{-n}$, a proto z $t_k \to t$ plyne $f(t_k) \to f(t)$ a φ je spojité.

Definice 13.2.16. Zobrazení $A : (P, \varrho) \to (P, \varrho)$ se často nazývá operátor na (P, ϱ). Pro operátory užíváme následující označení:

$$A^1(x) := A(x)\,, \quad A^{n+1}(x) := (A \circ A^n)(x)\,, \quad x \in P\,.$$

Jestliže existuje $\alpha \in [0,1)$ tak, že

$$\varrho(A(x), A(y)) \leq \alpha \varrho(x, y)\,, \quad x, y \in P\,, \tag{13.4}$$

říkáme, že A je *kontrakce* na (P, ϱ). Bod $\xi \in P$ se nazývá *pevný bod* operátoru A, pokud $A(\xi) = \xi$.

Poznámka 13.2.17 (důležitá). Každá kontrakce je spojitým zobrazením. Je-li A kontrakce na (P, ϱ), pak existuje $\alpha \in [0,1)$ tak, že pro každou konvergentní posloupnost $\{x_n\}$, $x_n \to x \in P$, je

$$\varrho(A(x_n), A(x)) \leq \alpha \varrho(x_n, x)\,, \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

a tedy $A(x_n) \to A(x)$; zobrazení A je spojité.

Věta 13.2.18 (Banach 1920). *Nechť (P, ϱ) je úplný MP a A je kontrakce na (P, ϱ). Potom existuje právě jeden pevný bod A.*

Důkaz. Zvolme $x_0 \in P$ libovolně a definujme $x_n = A^n(x_0)$, $n \in \mathbb{N}$. Ukážeme, že $\{x_n\}$ je cauchyovská a konverguje k hledanému pevnému bodu ξ. Podle definice kontrakce existuje $\alpha \in [0,1)$ tak, že je (13.4). Pro $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$, je

$$\begin{aligned}\varrho(x_n, x_m) &\leq \varrho(x_n, x_{n+1}) + \cdots + \varrho(x_{m-1}, x_m) \leq \\ &\leq \alpha^n \varrho(x_1, x_0) + \alpha^{n+1} \varrho(x_1, x_0) + \cdots + \alpha^{m-1} \varrho(x_1, x_0) \leq \\ &\leq (\alpha^n + \alpha^{n+1} + \alpha^{n+2} + \cdots\,)\, \varrho(x_1, x_0)\,,\end{aligned}$$

z čehož plyne odhad

$$\varrho\,(x_n, x_m) \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\,\varrho\,(x_1, x_0)\,; \tag{13.5}$$

proto s ohledem na $\alpha^n \to 0$ je $\{x_n\}$ cauchyovská. Existuje tedy $\xi = \lim_{n\to\infty} x_n$ a (využíváme spojitosti A)

$$A(\xi) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n = \xi\,.$$

Pokud by existovaly dva různé body ξ a ζ tak, že $A(\xi) = \xi$ a $A(\zeta) = \zeta$, pak by platilo

$$0 < \varrho\,(\xi, \zeta) = \varrho\,(A(\xi), A(\zeta)) < \varrho\,(\xi, \zeta)\,,$$

což je spor. □

Poznámky 13.2.19. 1. Předcházející větě se zpravidla říká *Banachova věta o pevném bodu.* Často se užívá její verze pro úplný normovaný lineární prostor. Tyto prostory se na Banachovu počest nazývají *Banachovy prostory.* Věta 13.2.18 však platí v každém úplném MP a má, jak je dobré si povšimnout, „nelineární charakter“, tj. operátor v ní vystupující *nemusí být obecně lineární.*

2. Nahlížíme-li na členy posloupnosti $\{x_n\}$ jako na jisté aproximace pevného bodu ξ, je užitečné přejít v odhadu (13.5) k limitě pro $m \to \infty$. Dostaneme tak nerovnost

$$\varrho\,(x_n, \xi) \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\,\varrho\,(x_1, x_0)\,,$$

pomocí níž můžeme odhadnout příslušnou vzdálenost (často užíváme označení *odhad chyby*) a „zastavit výpočet“ ξ po dosažení potřebné přesnosti.

Příklad 13.2.20. V Příkladu 2.4.15 jsme použili zobrazení

$$A(x) = \frac{1}{p}\Big((p-1)x + \frac{a}{x^{p-1}}\Big)\,, \quad x \in (0, \infty)\,,$$

k výpočtu $\sqrt[p]{a}$. Dokážeme postupně, že

(1) A' na intervalu $[\sqrt[p]{a}, +\infty)$ nabývá svého maxima $(p-1)/p$ v bodě $\sqrt[p]{a}$;

(2) A je na intervalu $[\sqrt[p]{a}, \infty)$ kontrakce.

Skutečně,

$$A'(x) = \frac{p-1}{p}\Big(1 - \frac{a}{x^p}\Big)\,;$$

Snadno nahlédneme, že maximum A' na intervalu $[\sqrt[p]{a}, \infty)$ je rovno $(p-1)/p$. Dostaneme tak pomocí Lagrangeovy věty odhad

$$|A(x) - A(y)| \le ((p-1)/p)|x-y|, \quad x, y \in [\sqrt[p]{a}, \infty)\,,$$

a funkce A, chápaná jako (nelineární) operátor na prostoru $[\sqrt[p]{a}, \infty)$, je kontrakce. V Příkladu 2.4.15 jsme ukázali, že při $x_0 \in (0, \infty)$ je posloupnost $\{A^n(x_0)\}$ (jde opět o skládání zobrazení jako ve Větě 13.2.18, ne o mocninu!) od indexu 1 nerostoucí (dokonce klesající, pokud není $x_0 = \sqrt[p]{a}$), a tak se v jistém smyslu konvergence „neustále zlepšuje“.

Poznámka 13.2.21. Čtenář snadno předcházející tvrzení zobecní: Je-li I interval v $\mathbb{R}$, který je uzavřenou množinou v $\mathbb{R}$, $f(I) \subset I$, kde f je spojité zobrazení a f má v každém vnitřním bodě $x \in I$ derivaci takovou, že $|f'(x)| < 1$, pak rovnice $f(x) = x$ má jediné řešení. Podstatně hlubší aplikaci Věty 13.2.18 o pevném bodu ukážeme v Kapitole 15.

V souvislosti s Příklady 13.1.2 se ještě informativně zmíníme o „velkých" a „malých" množinách v topologickém smyslu. Tato partie má řadu zajímavých aplikací, např. v teorii reálných funkcí. Příklad (2) 13.1.2 naznačil jednu obtíž spočívající v tom, že množina $\mathbb{Q}$ není uzavřená v $\mathbb{R}$.

Definice 13.2.22. Říkáme, že $A \subset P$ je *řídká v prostoru* (P, ϱ), jestliže

$$\overline{P \setminus \overline{A}} = P\,,$$

tj. uzávěr doplňku $\overline{A}$ je celý prostor P, neboli doplněk uzávěru A je hustý v P.

Důsledek 13.2.23. *Je-li A řídká množina a $\overline{A} = \overline{B}$, je B také řídká množina. Speciálně to platí např. když $A \subset B \subset \overline{A}$.*

Lemma 13.2.24. *Je-li $A \subset B \subset P$ a B je řídká množina, je řídká i množina A.*

Důkaz. Zřejmě je $\overline{A} \subset \overline{B}$, takže $P \setminus \overline{B} \subset P \setminus \overline{A}$. Odtud dostaneme

$$P = \overline{P \setminus \overline{B}} \subset \overline{P \setminus \overline{A}}\,,$$

a množina A je tudíž řídká. $\square$

Lemma 13.2.25. *Je-li množina $A \subset (P, \varrho)$ hustá a otevřená, je její komplement $P \setminus A$ řídká množina.*

Důkaz. Je-li A hustá a otevřená, je

$$P = \overline{A} = \overline{P \setminus (P \setminus A)} = \overline{P \setminus \overline{(P \setminus A)}}\,,$$

z čehož již plyne tvrzení lemmatu. $\square$

Věta 13.2.26. *Množina $A \subset P$ je řídká, právě když pro každou $\emptyset \neq G \subset P$ otevřenou existuje $\emptyset \neq G_1 \subset G$ otevřená, pro niž $G_1 \cap A = \emptyset$.*

Důkaz. Je-li množina A řídká, je podle Definice 13.2.22 $P \setminus \overline{A}$ hustá množina. Proto pro každou otevřenou množinu $G \neq \emptyset$ je $G_1 := G \cap (P \setminus \overline{A})$ podle Věty 13.1.3 neprázdná a otevřená, přičemž zřejmě $A \cap G_1 \subset A \cap (P \setminus \overline{A}) \subset A \cap (P \setminus A) = \emptyset$, takže podmínka je splněna.

Není-li množina A řídká, není $P \setminus \overline{A}$ hustá. Proto existuje otevřená $\emptyset \neq G \subset P$ tak, že $G \cap (P \setminus \overline{A}) = \emptyset$, tj. $G \subset \overline{A}$ (a mj. je $(\overline{A})^\circ \neq \emptyset$). Nyní stačí ukázat, že pro každou $\emptyset \neq G_1 \subset G$ je $G_1 \cap A \neq \emptyset$. To dokážeme sporem: Z $G_1 \cap A = \emptyset$ plyne $A \subset P \setminus G_1$, a tedy $G_1 \subset G \subset \overline{A} \subset \overline{P \setminus G_1} = P \setminus G_1$, z čehož vyplývá $G_1 = \emptyset$; nalezený spor dokazuje druhou část tvrzení. $\square$

Někdy se jako kritérium řídkosti může hodit ekvivalentní vlastnost, kterou popíšeme v následujícím tvrzení.

Lemma 13.2.27. *Množina $A \subset P$ je řídká, právě když $(\overline{A})^\circ = \emptyset$.*

Důkaz. Pokud množina A není řídká, dokázali jsme v průběhu předcházejícího důkazu, že $(\overline{A})^\circ \neq \emptyset$. Vnitřek $(\overline{A})^\circ$ je otevřená množina pro každou $A \subset P$ a jestliže je A řídká, je

$$P \setminus (\overline{A})^\circ \supset \overline{P \setminus \overline{A}} = P\,, \quad \text{a tedy } P \setminus (\overline{A})^\circ = P\,, \quad \text{nebo-li } (\overline{A})^\circ = \emptyset\,;$$

tím je tvrzení lemmatu dokázáno. □

Definice 13.2.28. Existují-li $A_n \subset P$ řídké v (P, ϱ) pro všechna $n \in \mathbb{N}$ tak, že je $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, nazývá se A *množinou 1. kategorie* (v Baireově smyslu).

Poznámka 13.2.29. Zřejmě je každá řídká množina v P také množinou 1. kategorie a všechny množiny 1. kategorie tvoří systém, který je uzavřený vzhledem ke spočetným sjednocením. V úplných MP jsou množiny 1. kategorie „malé“. Toho lze, jak uvidíme dále, využít v existenčních důkazech.

Věta 13.2.30 (Baire 1899). *Nechť (P, ϱ) je úplný prostor a nechť $\{G_k\,;\, k \in \mathbb{N}\}$ je systém otevřených hustých podmnožin P. Potom i $G := \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$ je hustá.*

Důkaz. Zvolme libovolně $\emptyset \neq H$ otevřenou v (P, ϱ) a dokažme, že $G \cap H \neq \emptyset$; tím bude s ohledem na 13.1.3 tvrzení dokázáno.

Protože G_1 je otevřená hustá, je $H \cap G_1 \neq \emptyset$ otevřená, a existuje tedy otevřená koule $B_1 = B(x_1, r_1)$ ležící i se svým uzávěrem v $G_1 \cap H$.

Protože G_2 je otevřená hustá, je $B_1 \cap G_2 \neq \emptyset$ otevřená, a existuje tedy otevřená koule $B_2 = B(x_2, r_2)$ ležící i se svým uzávěrem v $G_2 \cap B_1 \subset G_2 \cap (G_1 \cap H)$.

Takto postupujeme dále: Je-li již vybrána B_{k-1}, pak z hustoty otevřené G_k plyne existence koule $B_k = B(x_k, r_k)$ ležící i se svým uzávěrem v množině

$$G_k \cap B_{k-1} \subset \cdots \subset G_k \cap \big(G_{k-1} \cap \cdots \cap G_1 \cap H\big)\,.$$

Je zřejmé, že poloměry r_k koulí B_k lze přitom volit tak, že $r_k \to 0$, takže i $\operatorname{diam}(\overline{B_k}) \to 0$. Nyní na uzávěry $\overline{B_k}$ užijeme Cantorovu Větu 13.2.12 a dostaneme tak existenci bodu v $H \cap G$. Tím, že je tato množina neprázdná, jsme důkaz dokončili. □

Věta 13.2.31 (Baire 1899). *Úplný metrický prostor (P, ϱ) není 1. kategorie.*

Důkaz. Protože A je řídká, právě když je $P \setminus \overline{A}$ hustá, pro každou posloupnost $\{A_k\}$ řídkých množin, jsou množiny $(P \setminus \overline{A_k})$ otevřené a husté v (P, ϱ). Podle Věty 13.2.30 pak dostaneme

$$\emptyset \neq \bigcap_{k=1}^{\infty} (P \setminus \overline{A_k}) = P \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{A_k} \subset P \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\,,$$

takže (P, ϱ) nemůže být 1. kategorie. □

Poznámka 13.2.32 (důležitá). Množiny, které nejsou množinami 1. kategorie, se nazývají *množiny 2. kategorie.* Podle vyslovené věty je tedy úplný metrický prostor (v sobě) 2. kategorie. Doplňkem množiny 1. kategorie v prostoru 2. kategorie *nemůže být* množina 1. kategorie. Na tom je založena metoda důkazu existence funkcí s jistou zajímavou vlastností, která bývá velmi často nazývána *metoda kategorií.* Při důkazu postupujeme podle tohoto obecného principu:

(1) vybere se vhodný prostor funkcí, který je *úplným* metrickým prostorem (P, ϱ), a

(2) ukáže se, že všechny prvky (P, ϱ), které zkoumanou vlastnost nemají, tvoří v (P, ϱ) množinu 1. kategorie.

Předcházející věta pak říká, že v P existuje alespoň jeden prvek, který zkoumanou vlastnost má.

Pokud je A množina 1. kategorie, nazývá se často množina $P \setminus A$ *reziduální*; ta je v prostoru, který je 2. kategorie, také množinou 2. kategorie (je zřejmé, že systém všech množin 1. kategorie je uzavřený vzhledem ke sjednocení konečně mnoha prvků). V takovém případě též říkáme, že vlastnost určující příslušnost prvků k $P \setminus A$, je *typickou* vlastností prvků P.

Tak lze např. dokázat, že existuje spojitá funkce na $\mathbb{R}$, která nemá v žádném bodě (vlastní) derivaci, nebo která není monotónní na žádném intervalu $(a, b) \subset \mathbb{R}$ a řada dalších zajímavých tvrzení. My takovou funkci, která je spojitá na $\mathbb{R}$ a nemá v žádném bodě konečnou derivaci, později zkonstruujeme v Kapitole 14; právě popsaný postup vede kromě tvrzení o existenci i k poznání, že takových funkcí je v prostoru $\mathcal{C}([\,a, b\,])$ v jistém smyslu „velmi mnoho“.

Lemma 13.2.33. *Množina všech funkcí $f \in \mathcal{C}([\,a, b\,])$, které jsou monotónní na nějakém intervalu $(\alpha, \beta) \subset [\,a, b\,]$, je 1. kategorie v $\mathcal{C}([\,a, b\,])$.*

Důkaz. Protože každá funkce, která je monotónní na nějakém otevřeném intervalu ležícím v $[\,a, b\,]$, je monotónní i na nějakém otevřeném intervalu v $[\,a, b\,]$ s *racionálními koncovými body*, můžeme pracovat pouze s takovými intervaly. Tyto intervaly tvoří spočetnou množinu $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Označme A_n pro každé $n \in \mathbb{N}$ množinu všech funkcí, které jsou monotónní na intervalu I_n. Množiny A_n jsou uzavřené; k tomu stačí dokázat, že jejich doplňky jsou otevřené množiny. Pokud $f \in \mathcal{C}([\,a, b\,])$ *není* monotónní v intervalu I_n, existují body $x_1, x_2, x_3, x_4 \in I_n$ tak, že

$$(f(x_2) - f(x_1))(x_2 - x_1) > 0\,, \quad (f(x_4) - f(x_3))(x_4 - x_3) < 0\,.$$

Pro $r < \min(|f(x_2) - f(x_1)|, |f(x_4) - f(x_3)|)/2$ leží celá koule $B(f, r)$ v doplňku A_n, a proto je tento doplněk otevřená množina.

Množiny A_n jsou řídké v $\mathcal{C}([\,a, b\,])$: K tomu stačí pro dané $n \in \mathbb{N}$ nalézt k $\varepsilon > 0$ a k libovolné funkci $f \in A_n$ funkci $g \in (\mathcal{C}([\,a, b\,]) \setminus A_n)$ tak, aby $\|\,f - g\,\|_\infty < \varepsilon$. K libovolně zvolenému $\varepsilon > 0$ a např. k neklesající funkci f na I_n existují v I_n body $x_1 < x_2$ tak, že $f(x_2) - f(x_1) < \varepsilon/2$. Monotonii f lze „porušit“ přičtením k f po částech lineární funkce h, nabývající v bodě x_1 hodnoty $h(x_1) = \varepsilon$ a v bodě x_2 hodnoty $h(x_2) = 0$, lineární na $[\,x_1, x_2\,]$ a konstantní na intervalech doplňku $I_n \setminus (x_1, x_2)$. Pak je $\|h\| = \varepsilon$ a lze definovat $g = f + h$, takže $g(x_1) > g(x_2)$. Proto je doplněk $\mathcal{C}([\,a, b\,]) \setminus A_n$ hustý v $\mathcal{C}([\,a, b\,])$ a je to otevřená množina, takže podle Lemmatu 13.2.25 je A_n řídká. Množina $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ je tedy množinou 1. kategorie a tvrzení je dokázáno. $\square$

Důsledek 13.2.34. *Množina všech spojitých monotónních funkcí z prostoru $\mathcal{C}([\,a, b\,])$ je 1. kategorie v $\mathcal{C}([\,a, b\,])$, takže typická funkce z $\mathcal{C}([\,a, b\,])$ není monotónní na žádném nedegenerovaném intervalu ležícím v $[\,a, b\,]$.*

Příklad 13.2.35. Dokážeme, že typická funkce z $\mathcal{C}([a,b])$ nemá v žádném bodě intervalu $[a,b]$ konečnou jednostrannou derivaci. Označme A^+ množinu všech funkcí $f \in \mathcal{C}([a,b])$, pro něž existuje *vlastní* $f'_+(x)$ v nějakém bodě $x \in [a,b)$. Analogicky označme A^- množinu všech těch funkcí f, pro něž existuje vlastní $f'_-(x)$ v nějakém bodě $x \in (a,b]$.

Abychom dokázali, že funkce z doplňku $\mathcal{C}([a,b]) \setminus A$, kde $A := A^+ \cup A^-$, jsou typické, stačí ukázat že obě množiny A^+ i A^- jsou 1. kategorie v $\mathcal{C}([a,b])$. Provedeme to pro množinu A^+, pro množinu A^- je důkaz obdobný a lze ho převést na prvý případ. Důkaz rozdělíme do několika kroků (je vhodné si pomoci náčrtky):

1. Položíme-li pro $n \in \mathbb{N}$

$$A_n := \Big\{ f \in \mathcal{C}([a,b])\,;\, (\exists x \in [a, b-1/n])\, (\forall h \in (0,1/n))\, \Big(\Big|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\Big| \le n \Big) \Big\},$$

je $A^+ \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Inkluzi dokážeme, pokud k funkci $f \in \mathcal{C}([a,b])$ s vlastní $f'_+(x)$ v nějakém bodě $x \in [a,b)$ najdeme A_n, v níž tato funkce leží. Zřejmě existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna přirozená $n \ge n_1$ je $x < b - 1/n$; dále existuje $n_2 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna přirozená $n \ge n_2$ je $|\, f'_+(x)\,| < n$ a $n_3 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna přirozená $n \ge n_3$

$$h \in (0,1/n) \quad \Longrightarrow \quad \frac{|\, f(x+h) - f(x)\,|}{h} \le n\,.$$

Položme $n_0 = \max\{\, n_1,\, n_2,\, n_3\,\}$. Potom pro všechna $n \ge n_0$ leží f v A_n. Dále dokážeme, že množiny A_n jsou pro všechna $n \in \mathbb{N}$ uzavřené a řídké.

2. Zvolme pevně n a ukažme, že $A_n = \overline{A_n}$. K tomu postačí ukázat, že

$$\big(f_k \in A_n,\; f_k \to f \text{ v } \mathcal{C}([a,b])\big) \Longrightarrow f \in A_n\,,$$

neboli že

$$(\exists x \in [a, b-1/n])\, (\forall h \in (0,1/n))\, (|\, f(x+h) - f(x)\,| \le nh)\,. \tag{13.6}$$

Zvolíme nyní libovolně konvergentní posloupnost funkcí $f_k \in A_n$ a k těmto funkcím ty body $x_k \in [a, b-1/n]$, pro něž

$$(\forall h \in (0,1/n))(|\, f_k(x_k+h) - f_k(x_k)\,| \le nh)\,.$$

Můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $x_k \to x_0$, $x_0 \in [a, b-1/n]$, čehož lze dosáhnout přechodem k vybrané konvergentní posloupnosti z $\{x_k\}$ odpovídající $\{f_k\}$. Nyní budeme odhadovat pro $h \in (0,1/n)$:

$$\begin{aligned} |\, f(x_0+h) - f(x_0)\,| \le{} & |\, f(x_0+h) - f(x_k+h)\,| + |\, f(x_k+h) - f_k(x_k+h)\,| + \\ & + |\, f_k(x_k+h) - f_k(x_k)\,| + \\ & + |\, f_k(x_k) - f(x_k)\,| + |\, f(x_k) - f(x_0)\,|\,. \end{aligned} \tag{13.7}$$

Výraz na druhém řádku (13.7) je pro $h \in (0,1/n)$ shora odhadnut číslem nh, ostatní výrazy v nerovnosti vpravo konvergují pro $k \to \infty$ k 0: první a poslední vzhledem ke spojitosti f v bodech $x_0 + h$ a x_0, druhý a čtvrtý vzhledem k $f_k \rightrightarrows f$ na $[a,b]$, neboť konvergence v $\mathcal{C}([a,b])$ je stejnoměrná. Proto pro f dostáváme (13.6) s $x = x_0$, takže $f \in A_n$.

3. Nyní stačí podle Lemmatu 13.2.25 dokázat, že komplement $\mathcal{C}([a,b]) \setminus A_n$ je hustá množina pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Zvolme pevně n a popišme, jak ke každé $f \in \mathcal{C}([a,b])$ sestrojit v $C := \mathcal{C}([a,b]) \setminus A_n$ posloupnost funkcí $\{f_k\}$ konvergentní k f. I když je to pro $f \in C$ triviální (stačí volit konstantní posloupnost s $f_k = f$), uděláme to najednou pro jakoukoli $f \in \mathcal{C}([a,b])$. K tomu stačí ukázat, jak k $\varepsilon > 0$ nalézt $g \in C$ tak, že $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$. Funkci g sestrojíme postupně: nejprve k f sestrojíme „blízko“ funkci ℓ s odhadnutelnou derivací zprava a k této funkci přičteme „malou pilovitou funkci“ s_m s vhodným m tak, abychom dostali $g = \ell + s_m \notin A_n$. Nyní tuto ideu zpřesníme.

K dané funkci f najdeme analogicky jako v Příkladu 13.1.6 po částech lineární funkci ℓ tak, aby $\| f - \ell \|_\infty < \varepsilon/2$. Funkce ℓ má v každém bodě $x \in [a,b)$ vlastní derivaci zprava a existuje $M \in (0,+\infty)$ tak, že pro všechna tato x je $|\,\ell'_+(x)\,| \le M$. Nyní pro každé $m \in \mathbb{N}$ zvolme ekvidistantní dělení $D \in \mathcal{D}(a,b)$, $D = \{\, a = t_0 < t_1 \cdots < t_{2m} = b\}$ a v jeho dělicích bodech položme

$$s_m(t_v) := \frac{\varepsilon}{4}\left(1 - (-1)^v\right), \quad v = 1, 2, \ldots, 2m\,.$$

Funkce s_m mají derivaci zprava ve všech bodech $x \in [a,b)$ a absolutní hodnota této derivace je konstantní; je rovna $m\varepsilon/(b-a)$ a pro $m \to \infty$ má limitu $+\infty$. Nyní zvolíme funkci s_m s tak velkým indexem m, aby

$$(s_m + \ell)'_+(x) > n \quad \text{pro všechna} \quad x \in [a,b)\,,$$

Položíme-li $g := \ell + s_m$, je $g \notin A_n$ a zároveň $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$. Tím je dokázáno, že A_n je řídká množina pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Poznamenejme na závěr, že existují i funkce $f \in \mathcal{C}([a,b])$, které nemají v žádném bodě z $[a,b]$ derivaci (tedy ani vlastní, ani nevlastní), ale ty tvoří v $\mathcal{C}([a,b])$ množinu 1. kategorie a jejich konstrukce je velmi složitá. Jak se později ukáže, každá z těch funkcí, kterými jsme se zabývali v tomto příkladu, je i funkcí, která není monotónní na žádném otevřeném intervalu $I \subset [a,b]$; monotónní funkce na I mají vlastní derivaci všude v I až na množinu nulové Lebesgueovy míry.

13.3 Kompaktní prostory

Poznámka 13.3.1. Připomeňme, že jsme se domluvili, že každou $M \subset (P,\varrho)$ lze přirozeným způsobem chápat jako MP. Uveďme nejprve užitečnou charakteristiku pro otevřené a uzavřené množiny v M.

Lemma 13.3.2. *Je-li $A \subset M \subset (P,\varrho)$, pak A je uzavřená v M, právě když existuje uzavřená F v P tak, že $A = M \cap F$. Je-li $A \subset M \subset (P,\varrho)$, pak A je otevřená v M, právě když existuje otevřená G v P tak, že $A = M \cap G$.*

Důkaz. Zřejmě stačí dokázat pouze jedno z tvrzení, neboť druhé dostaneme jednoduchou úvahou o doplňcích. Dokažme např. tvrzení o uzavřenosti. Budeme pracovat s uzávěry vzhledem k ϱ v M a P, proto je rozlišíme přidáním označení k pruhu, který značí uzávěr. Zřejmě je

$$\overline{A}^{\,M} = M \cap \overline{A}^{\,P}\,,$$

tedy za F lze volit uzávěr $\overline{A}^P$ množiny A v (P, ϱ). Snadno dokážeme i obrácenou implikaci: je-li F uzavřená v (P, ϱ), tj. $F = \overline{F}^P$, a $A = M \cap F$, je

$$A \subset M \cap \overline{A}^P \subset M \cap \overline{F}^P = A\,,$$

a je tedy $A = M \cap \overline{A}^P = \overline{A}^M$. □

Definice 13.3.3. Budeme říkat, že systém množin $\{M_\alpha\}_{\alpha \in A}$ tvoří *pokrytí* množiny M, jestliže $M \subset \bigcup_{\alpha \in A} M_\alpha$. Jsou-li všechny M_α otevřené množiny, nazýváme takové pokrytí *otevřeným pokrytím* M.

Definice 13.3.4 (Aleksandrov, Uryson 1924*). Budeme říkat, že množina $M \subset P$ je *kompaktní* v prostoru (P, ϱ), jestliže z každého jejího otevřeného pokrytí lze vybrat konečné (pod)pokrytí. Podrobněji: Je-li systém $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ otevřeným pokrytím M, pak existují $\alpha_k \in A$, $k = 1, 2, \ldots, m$, tak, že $M \subset \bigcup_{k=1}^m G_{\alpha_k}$.

Poznámka 13.3.5. Lemma 13.3.2 ukazuje, že není podstatné, je-li pokrytí tvořeno otevřenými množinami v M či otevřenými množinami v P. Kompaktnost $\emptyset \neq M \subset (P, \varrho)$ je tedy vlastností podprostoru (M, ϱ). Není obtížné si rozmyslit, že Heine-Borelova věta (Věta 4.3.46) je z hlediska právě zavedené kompaktnosti tvrzením o tom, že interval $[\,a, b\,]$ je kompaktní. Konečně poznamenejme, že definice samozřejmě zahrnuje definici *kompaktního prostoru*, stačí volit $M = P$. V plné obecnosti je spojována věta se jménem Lebesgueovým (dříve se pracovalo se „spočetnými pokrytími").

Je užitečné si uvědomit, že k tvrzením o kompaktních množinách existují často „duální tvrzení", která jsou s nimi ekvivalentní: Ukážeme to nejprve na následující větě, která ve skutečnosti úzce souvisí se samotnou definicí kompaktního prostoru.

Věta 13.3.6 (Riesz F. 1908*). *Nechť* (P, ϱ) *je kompaktní metrický prostor a nechť* $\{F_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *je takový systém uzavřených množin, že pro každý jeho* konečný *podsystém* $\{\,F_{\alpha_1}, F_{\alpha_2}, \ldots, F_{\alpha_m}\}$ *je* $\bigcap_{k=1}^m F_{\alpha_k} \neq \emptyset$. *Potom také*

$$\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha \neq \emptyset\,. \tag{13.8}$$

Důkaz. Budeme dokazovat sporem. Neplatí-li (13.8), pak pro $G_\alpha := P \setminus F_\alpha$ je

$$P = P \setminus \bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} (P \setminus F_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha\,,$$

takže $\{G_\alpha\}$ je otevřeným pokrytím P. Pak by však existoval *konečný podsystém*, pro který

$$\bigcup_{k=1}^m G_{\alpha_k} = \bigcup_{k=1}^m (P \setminus F_{\alpha_k}) = P \setminus \bigcap_{k=1}^m F_{\alpha_k} = P\,,$$

což je ve sporu s předpokladem věty; tím je její tvrzení dokázáno. □

Definice 13.3.7 (Fréchet 1906, Hausdorff 1914*). Říkáme, že prostor (P, ϱ) je *totálně omezený*, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje *konečná* množina $A_\varepsilon \subset P$ tak, že pro všechna $x \in P$ je $\operatorname{dist}(x, A_\varepsilon) < \varepsilon$. Množině A_ε se někdy říká *ε-síť*, takže definici lze vyjádřit i tak, že (P, ϱ) je totálně omezený, má-li pro každé $\varepsilon > 0$ konečnou ε-síť.

Lemma 13.3.8. *Totálně omezený prostor* (P, ϱ) *je omezený.*

Důkaz. Zvolme $\varepsilon > 0$ a sestrojme konečnou síť $A_\varepsilon = \{x_1, \ldots, x_n\}$ prostoru P. Libovolné dva body $u, v \in P$ leží v ε-okolí množiny A_ε a proto existují body $x_j, x_k \in A_\varepsilon$ tak, že

$$\varrho(u, v) \leq \varrho(u, x_j) + \varrho(x_j, x_k) + \varrho(x_k, v)\,.$$

Diametr prostoru P lze proto shora snadno odhadnut

$$\mathrm{diam}(P) \leq 2\varepsilon + \max\{\, \varrho\,(x_j, x_k)\,;\, 1 \leq j, k \leq n\}\,,$$

takže totálně omezený prostor je omezený. □

Věta 13.3.9. *Každý totálně omezený prostor* (P, ϱ) *je separabilní.*

Důkaz. Sestrojme postupně konečné ε-sítě A_ε pro $\varepsilon = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$. Potom je množina $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{1/n}$ spočetným sjednocením konečných množin. Je to tedy spočetná a zároveň zřejmě hustá podmnožina (P, ϱ). □

Poznámka 13.3.10. Někdy se setkáváme s touto žertovnou interpretací: „*Totálně omezený prostor je město, které lze střežit konečným počtem libovolně krátkozrakých strážců.*" Doporučujeme čtenáři, aby se nad ní zamyslel; je to dobrá pomůcka k snadnému zapamatování definice.

Věta 13.3.11. *Každý kompaktní prostor je totálně omezený, a tedy omezený a separabilní.*

Důkaz. Uvažujme pokrytí prostoru P systémem otevřených koulí $\{B(x, \varepsilon)\,;\, x \in P\}$ s daným $\varepsilon > 0$. Pak vybereme konečné podpokrytí a středy vybraných koulí tvoří konečnou ε-síť prostoru P. Zbytek je důsledkem předcházejících tvrzení. □

Věta 13.3.12. *Je-li* $M \subset P$ *kompaktní v* (P, ϱ)*, pak je* M *uzavřená.*

Důkaz. Podle definice stačí dokázat, že $P \setminus M$ je otevřená množina. Je-li $x \in P \setminus M$, pak pro každé $y \in M$ lze nalézt $r_y > 0$ tak, že

$$B(x, r_y) \cap B(y, r_y) = \emptyset\,;$$

stačí např. volit $0 < r_y < \varrho\,(x, y)/2$. Koule $B(y, r_y)$ pro $y \in M$ tvoří otevřené pokrytí M, ke kterému lze najít konečné podpokrytí $\{B(y_k, r_{y_k});\, k = 1, \ldots, n\}$. Potom pro $0 < r < \min\{r_{y_k};\, k = 1, \ldots, n\}$ je $B(x, r) \cap M = \emptyset$ a koule $B(x, r)$ je okolím x, přičemž je $B(x, r) \subset P \setminus M$. □

Poznámka 13.3.13. Obecně lze říci, že velmi důležité jsou věty, které charakterizují kompaktní množiny v konkrétních metrických prostorech. Jednoduchý příklad: Podmnožina diskrétního prostoru je kompaktní, právě když je *konečná.* Zpravidla však jsou charakteristiky kompaktnosti v obvykle studovaných prostorech podstatně složitější.

Již víme, že každá kompaktní množina M je omezená a uzavřená, avšak odtud *obecně* kompaktnost M neplyne; viz dále Věta 13.3.25 a Příklady 13.3.26. Nicméně všechny pojmy, které k užitečným obecným charakteristikám kompaktnosti potřebujeme, již máme. Nejprve uvedeme jinou variantu Cantorovy věty.

Věta 13.3.14 (Cantor 1872*). *Nechť (P, ϱ) je kompaktní prostor a $\{A_n\}_1^\infty$ nerostoucí posloupnost neprázdných uzavřených množin v P, tj. $A_{n+1} \subset A_n$, $n \in \mathbb{N}$. Potom*

$$A := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{je } \textit{neprázdná} \text{ množina}^{4}).$$

Důkaz. Tvrzení je důsledkem Věty 13.3.6, neboť průnik libovolného konečného podsystému množin A_k je neprázdný. Důkaz lze však provést přímo stejným způsobem jako důkaz Věty 13.3.6. □

Poznámka 13.3.15. Čtenář by si měl povšimnout, že tato verze Cantorovy věty je přímým zobecněním Věty 2.4.1 (princip vložených intervalů). Je zajímavé, že k ní existuje duální tvrzení, jehož autorem je Félix Éduard Justin Émile Borel (1871 – 1956), a které říká: *Nechť (P, ϱ) je kompaktní prostor a $\{G_k\}_{k=1}^\infty$ je posloupnost otevřených množin v P taková, že $P = \cup_{k=1}^\infty G_k$. Potom existuje $m \in \mathbb{N}$ tak, že*

$$P = \bigcup_{k=1}^{m} G_k \,. \tag{13.9}$$

Důkaz tohoto tvrzení přenecháme čtenáři: může vyjít jednak z Definice 13.3.4, ale také z Věty 13.3.14, důkaz z definice je však velmi jednoduchý.

Věta 13.3.16. *Nechť (P, ϱ) je kompaktní prostor. Potom je množina $M \subset P$ kompaktní, právě když je uzavřená.*

Důkaz. Již jsme ve Větě 13.3.12 dokázali, že každá kompaktní množina je uzavřená. Tvoří-li systém $\{G_\alpha\,;\, \alpha \in A\}$ v prostoru P otevřené pokrytí množiny M, je systém $\{\, G_\alpha; \alpha \in A\} \cup \{P \setminus M\}$ otevřeným pokrytím P. Konečné podpokrytí M sestrojíme tak, že vybereme konečné pokrytí P a pak z něj odstraníme $P \setminus M$. Odtud vyplývá druhá implikace a tedy i tvrzení věty. □

Následující věta zobecňuje další z „hlubších vět“; porovnejte ji s Větou 4.3.31, kterou z ní obdržíme jako jednoduchý důsledek.

Věta 13.3.17. *Nechť $f : (P, \varrho) \to (Q, \sigma)$ je spojité zobrazení a P je kompaktní. Potom je i obraz $f(P)$ kompaktní.*

Důkaz. Zvolme libovolné otevřené pokrytí $\{G_\alpha; \alpha \in A\}$ obrazu $f(P)$. Potom systém $\{f^{-1}(G_\alpha); \alpha \in A\}$ tvoří otevřené pokrytí P a lze vybrat $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tak, že

$$P = \bigcup_{k=1}^{n} f^{-1}(G_{\alpha_k})\,, \text{ a proto } f(P) \subset \bigcup_{k=1}^{n} G_{\alpha_k}\,.$$

Tak jsme našli potřebné konečné pokrytí $f(P)$. □

Důsledek 13.3.18. *Je-li $M \subset P$ kompaktní v prostoru (P, ϱ) a $f : M \to \mathbb{R}$ je spojitá reálná funkce, pak je f omezená a nabývá na M svého maxima a minima.*

Důkaz. Stačí uvážit, že $f(M)$ je kompaktní, a tedy je omezenou a uzavřenou množinou v $\mathbb{R}$. Proto je i $\sup f(M) \in f(M)$, $\inf f(M) \in f(M)$ a jsou to reálná čísla. Tím je tvrzení dokázáno. □

4) O označení a dataci věty viz Poznámku 13.2.13.

Poznámka 13.3.19. Je zajímavé, že je-li $A \subset (P, \varrho)$ neprázdná kompaktní množina, má každý bod $x \in P \setminus A$ v A „nejbližší bod", tj. takový bod $x_0 \in A$, pro který

$$d_A(x) = \varrho\,(x, x_0)\,.$$

Bod x_0 s touto vlastností však nemusí být jediný. Podobně lze vyšetřit vzdálenost dvou množin: Je např. lehké sestrojit disjunktní množiny $A, B \in \mathbb{R}^2$ (doporučujeme čtenáři, aby si načrtl obrázky), jejichž vzdálenost je 0, a je to jen o trochu těžší, mají-li být tyto množiny uzavřené. Má-li však být navíc alespoň jedna z množin A, B kompaktní, není to již možné. Je-li např. množina A kompaktní, je

$$\operatorname{dist}(A, B) = \inf\{\, d_B(x)\,;\, x \in A\,\}\,,$$

a jde tedy o infimum spojité funkce na kompaktní množině. Tohoto infima se nabude alespoň v jednom bodě $x_0 \in A$ a jeho hodnota je kladná. Pokud by to byla 0, ležel by bod x_0 i v $\overline{B} = B$ a množiny A, B by nebyly disjunktní.

Věta 13.3.20 (Hausdorff 1914). *Prostor (P, ϱ) je kompaktní, právě když je úplný a totálně omezený.*

Důkaz. Dokážeme obě implikace. Nejprve předpokládejme, že P je kompaktní. Pak je podle Věty 13.3.11 totálně omezený. Zbývá tedy dokázat úplnost P. Nechť $\{x_n\}$ je cauchyovská posloupnost. Definujme množiny

$$A_n := \overline{\{x_k\,;\, k \geq n\}}\,;$$

pak jsou všechny A_n uzavřené a zřejmě $A_{n+1} \subset A_n \subset P$, $n \in \mathbb{N}$. Proto podle Věty 13.3.14 existuje bod $x \in P$, ležící v průniku $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

Ukážeme, že $x_n \to x$. Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně a zvolme $k \in \mathbb{N}$ tak, aby pro všechna $m, n \geq k$ platilo $\varrho\,(x_m, x_n) < \varepsilon/2$. Protože $x \in A_k$, lze nyní zvolit bod x_m s $m \geq k$ tak, že $\varrho\,(x_m, x) < \varepsilon/2$, a tedy podle trojúhelníkové nerovnosti

$$\varrho\,(x_n, x) \leq \varrho\,(x_n, x_m) + \varrho\,(x_m, x) < \varepsilon$$

pro všechna $n \geq k$. Proto je $x_n \to x$ a P je úplný.

Obrácenou implikaci dokážeme sporem. Nechť P je úplný a totálně omezený, avšak nikoli kompaktní. Pak existuje otevřené pokrytí $\{\, G_\gamma; \gamma \in \Gamma\,\}$ prostoru P, z něhož nelze vybrat konečné podpokrytí prostoru P. Z totální omezenosti P vyplývá, že pro každé kladné ε_k z posloupnosti $\{\varepsilon_k\}$, $\varepsilon_k \to 0$, existuje *konečná* ε_k-síť. Z ε_k-sítě sestrojíme pro každé $k \in \mathbb{N}$ systém $\mathcal{S}_k$ všech *uzavřených koulí* se středy v bodech ε_k-sítě a o poloměru ε_k. Množiny M z $\mathcal{S}_k$ pokrývají P a pro každou je $\operatorname{diam}(M) \leq 2\varepsilon_k$, přičemž $\varepsilon_k \to 0_+$. Nyní existuje alespoň jedna množina $M \in \mathcal{S}_1$, kterou nelze pokrýt konečně mnoha množinami z $\{\, G_\gamma\,\}$. Označme ji D_1.

Množiny konečného systému $\{D_1 \cap M\,;\, M \in \mathcal{S}_2\}$ pokrývají D_1, jejich průměr nepřevýší $2\varepsilon_2$ a alespoň jedna z nich není opět pokryta žádným konečným podsystémem $\{G_\alpha\}$. Označme ji D_2. Nyní je snad již čtenáři zřejmé, jak induktivně definujeme $\{D_k\}$, přičemž pro všechna $k \in \mathbb{N}$ je $D_{k+1} \subset D_k$, $\operatorname{diam}(D_k) \leq 2\varepsilon_k$, $\varepsilon_k \to 0$, a D_k *nelze* pro žádné $k \in \mathbb{N}$ pokrýt žádným konečným podsystémem $\{\, G_\gamma\,;\, \gamma \in \Gamma\,\}$.

Zvolíme $x_n \in D_n$, $n \in \mathbb{N}$. Protože $\varepsilon_k \to 0$, je posloupnost $\{x_n\}$ cauchyovská, a tedy existuje $x \in P$, $x_n \to x$, neboť P je úplný. Bod x je pokryt alespoň jednou množinou G_γ a ta obsahuje $B(x, r)$ pro vhodné $r > 0$, avšak pro všechna $k \in \mathbb{N}$ s $\operatorname{diam}(D_k) \leq 2\varepsilon_k < r$ je $D_k \subset B(x, r)$ a to je spor, neboť pak je $D_k \subset G_\gamma$. Prostor P je tedy kompaktní. $\square$

Důsledek 13.3.21. *Uzavřená podmnožina kompaktního prostoru je kompaktní, právě když je totálně omezená.*

Důkaz. Podle Věty 13.2.7 je podmnožina F úplného prostoru ve zřejmém smyslu úplným prostorem, právě když je uzavřená. Proto s ohledem na předcházející Větu 13.3.20 je F kompaktní, právě když je totálně omezená. □

Poznámka 13.3.22. Řadu důkazů tvrzení o funkcích z $\mathcal{C}([a,b])$ jsme založili na tom, že z omezené posloupnosti v $\mathbb{R}$ lze vybrat konvergentní posloupnost. Abychom mohli např. snadno modifikovat takové důkazy pro obecné MP, potřebovali bychom mít takovouto vlastnost k dispozici i v MP. To motivuje naše další úsilí o důkaz ekvivalentní podmínky pro kompaktnost $M \subset (P,\varrho)$. Ukazuje se, že to není obtížné.

Definice 13.3.23 (Fréchet 1906*). Je-li $M \subset (P,\varrho)$, pak nazýváme M *sekvenciálně kompaktní*, jestliže z každé posloupnosti $\{x_n\}$ bodů z M lze vybrat posloupnost konvergentní v M.

S ohledem na následující tvrzení není tato terminologie překvapivá. Zřejmě stačí uvedené tvrzení dokázat pouze pro prostor (P,ϱ).

Věta 13.3.24. *Nechť (P,ϱ) je MP. Potom P je sekvenciálně kompaktní, právě když je kompaktní.*

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že P je sekvenciálně kompaktní. Podle předcházejícího tvrzení stačí dokázat, že pak je P úplný a totálně omezený. Dokažme nejprve úplnost P: je-li $\{x_n\}$ cauchyovská, lze z ní díky sekvenciální kompaktnosti vybrat konvergentní $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, $x_{n_k} \to x \in P$ a zřejmě i $x_n \to x$: Je-li $\varepsilon > 0$ voleno libovolně, existuje $k \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $m,n \geq k$ je $\varrho(x_m,x_n) < \varepsilon/2$. Zvolíme-li nyní takové m, aby platilo $m \geq k$ a $\varrho(x,x_m) < \varepsilon/2$, je zřejmě $\varrho(x,x_n) \leq \varrho(x,x_m) + \varrho(x_m,x_n) < \varepsilon$.

Pro důkaz totální omezenosti P dokažme ekvivalentní tvrzení: není-li P totálně omezený, pak není sekvenciálně kompaktní. Nechť k jistému $\varepsilon > 0$ neexistuje konečná ε-síť. Definujme induktivně $\{x_n\}$ tak, že $\varrho(x_n,x_m) \geq \varepsilon$ pro všechna $n \neq m$, a to takto:

Zvolme libovolně $x_1 \in P$. S ohledem na to, že $\{x_1\}$ nemůže být ε-sítí v P, existuje x_2 tak, že $\varrho(x_1,x_2) \geq \varepsilon$. Obecně, je-li již zvoleno n prvků P, pak existuje $x \in P$ tak, že $\operatorname{dist}(x,\{x_1,\dots,x_n\}) \geq \varepsilon$, a lze definovat $x_{n+1} := x$. Nyní však žádná vybraná posloupnost z $\{x_n\}$ není cauchyovská, a proto neexistuje ani žádná vybraná konvergentní podposloupnost. Dokázali jsme, že prostor není sekvenciálně kompaktní.

Je-li P kompaktní a $\{x_n\}$ je libovolná posloupnost bodů z P, postupujeme jako při důkazu Tvrzení 13.3.20: Položíme $A_n := \overline{\{x_k\,;\,k \geq n\}}$. Potom je podle Cantorovy Věty 13.3.14 množina

$$A := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

neprázdná a snadno k $x \in A$ sestrojíme vybranou posloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ tak, že $x_{n_k} \to x$ pro $k \to \infty$: Vybereme $x_{n_1} \in A_1$ tak, aby $\varrho(x_{n_1},x) < 1$ a postupujeme induktivně dále. Pokud jsme naposled vybrali $x_{n_r} \in A_r$ tak, že $\varrho(x_{n_r},x) < 1/r$, vybereme $n_{r+1} > n_r$, pro něž $x_{n_{r+1}} \in A_{r+1}$ a $\varrho(x_{n_{r+1}},x) < 1/(r+1)$. Pak ale $\{x_{n_k}\}$ je hledaná vybraná posloupnost konvergentní k x. □

Věta 13.3.25. *Nechť $m \in \mathbb{N}$. Potom je množina $M \subset \mathbb{R}^m$ kompaktní, právě když je omezená a uzavřená.*

Důkaz. Omezenost a uzavřenost každé kompaktní množiny plyne z již dokázaných tvrzení 13.3.11 a 13.3.12. Obráceně, jestliže je $M \subset \mathbb{R}^m$ omezená a uzavřená, pak pro posloupnost $\{x_n\}$ bodů z $\mathbb{R}^m$ (značíme $x_n = [x_n^1, \dots, x_n^m]$) snadno sestrojíme vybranou posloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ z posloupnosti $\{x_n\}$ tak, že konvergují první složky, tj. posloupnost $\{x_{n_k}^1\}_{k=1}^{\infty}$, neboť i $\{x_n^1\}$ je omezená. Z posloupnosti $\{x_{n_k}\}$ vybereme posloupnost tak, aby konvergovaly druhé složky, atd. Po m krocích tak získáme posloupnost $\{y_k\}$ vybranou $\{x_n\}$ konvergentní „po složkách", tedy konvergentní i v $\mathbb{R}^m$ a také v M, protože M je uzavřená množina. Protože je množina M sekvenciálně kompaktní, je i kompaktní. $\square$

Příklady 13.3.26. 1. V prostoru $m = \ell^\infty$ všech omezených posloupností reálných čísel se supremovou normou *není* uzavřená jednotková koule kompaktní, neboť z posloupnosti $\{x_n\}$, kde

$$x_n := \{\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, 1, 0, \dots\},$$

nelze vybrat konvergentní podposloupnost. Zřejmě

$$\|x_k - x_l\|_\infty = 1 \quad \text{pro} \quad k \neq l\,,$$

a tedy žádná podposloupnost $\{x_n\}$ není ani cauchyovská.

2. Stejným způsobem dokážeme, že i v prostoru $\mathcal{C}([0,1])$ není uzavřená jednotková koule $K(0,1)$ kompaktní. Konstrukci $f_n \in \mathcal{C}([0,1])$ s analogickou vlastností provedeme např. tak, jak jsme to udělali v Příkladu 12.3.7; viz též Obr. 12. 1. Snadno nahlédneme, že $\|f_k - f_l\| = 2$ pro $f_k \neq f_l$. Avšak z posloupnosti $\{f_n\}$ nelze vybrat konvergentní podposloupnost, neboť opět žádná její podposloupnost nemůže splňovat Bolzano-Cauchyho podmínku.

Definice 13.3.27. Nechť $M \subset (P, \varrho)$. Říkáme, že zobrazení $f : M \to (Q, \sigma)$ je *stejnoměrně spojité na M*, jestliže

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x, y \in M\,;\ \varrho\,(x, y) < \delta)\,(\sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon)\,. \tag{13.10}$$

Jak vidíme, je to analogická definice (tj. je „stejná jako v $\mathbb{R}^1$"), nicméně zatím víme o MP relativně málo, abychom s ní mohli efektivně pracovat; připomeňme, že první věta, kterou jsme o stejnoměrné spojitosti v $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ dokázali, byla o stejnoměrné spojitosti funkce spojité na uzavřeném intervalu a sama uzavřenost množiny nestačí (např. funkce x^2 na $\mathbb{R}^1$ *není* stejnoměrně spojitá. Dokonce i při zkoumání spojitosti funkce f v bodě konkrétního MP můžeme mít obtíže, teoreticky jsme však již na vyšetřování spojitosti funkcí na $\mathbb{R}^m$ pro $m > 1$ připraveni.

Tvrzení 13.3.28. *Nechť $M \subset (P, \varrho)$. Zobrazení $f : M \to (Q, \sigma)$ je* stejnoměrně spojité *na M, právě když*

$$\big(x_k, y_k \in M,\ \varrho\,(x_k, y_k) \to 0\big) \Longrightarrow \big(\sigma(f(x_k), f(y_k)) \to 0\big)\,. \tag{13.11}$$

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že je splněna podmínka (13.10) a $\varrho(x_k, y_k) \to 0$; pak k $\varepsilon > 0$ nalezneme podle definice stejnoměrné spojitosti $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ a k němu $n \in \mathbb{N}$ tak, aby $\varrho(x_k, y_k) < \delta(\varepsilon)$ pro všechna $k \geq n$. Odtud dostaneme $\sigma(f(x_k), f(y_k)) < \varepsilon$ pro všechna $k \geq n$, z čehož již plyne (13.11).

Není-li splněna podmínka (13.10), existuje $\varepsilon_0 > 0$ tak, že pro všechna $\delta > 0$ lze nalézt body $x, y \in M$, pro které $\varrho(x, y) < \delta$ a současně $\sigma(f(x), f(y)) \geq \varepsilon_0$. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ lze tedy zvolit body $x_k, y_k \in M$, $\varrho(x_k, y_k) < k^{-1}$, pro které $\sigma(f(x_k), f(y_k)) \geq \varepsilon_0$. Pak však zřejmě

$$\varrho(x_k, y_k) \to 0\,, \quad \text{a současně} \quad \sigma(f(x_k), f(y_k)) \not\to 0\,. \tag{13.12}$$

Tím je důkaz ekvivalence podmínek (13.10) a (13.11) dokončen. □

Věta 13.3.29 (Heine 1872, Fréchet 1906*). *Reálná nebo komplexní funkce f spojitá na kompaktní množině $M \subset (P, \varrho)$ je stejnoměrně spojitá na M.*

Důkaz. Tvrzení dokážeme opět sporem: Stejně jako v důkazu Tvrzení 13.3.28 sestrojíme posloupnosti bodů $x_k, y_k \in M$, pro něž platí (13.12) ($\sigma(x, y)$ je nyní $|x - y|$). Protože M je kompaktní, lze vybrat z $\{x_k\}$ podposloupnost konvergentní k nějakému bodu $x \in M$; lze tedy bez újmy na obecnosti předpokládat, že existuje $\lim x_k = x$. Protože

$$\varrho(x, y_k) \leq \varrho(x, x_k) + \varrho(x_k, y_k) \to 0\,,$$

je také $\lim y_k = x$. Ze spojitosti f v bodě x plyne

$$\lim_{k\to\infty} |f(x_k) - f(y_k)| = |\,f(x) - f(x)\,| = 0\,,$$

což je ve sporu s (13.12) a tvrzení Věty 13.3.29 je dokázáno. □

Poznámka 13.3.30. Čtenář by měl porovnat předcházející (v podstatě Fréchetův) důkaz s důkazem Heineho Věty 11.1.3, neboť „obecný“ důkaz je patrně přehlednější. Je vhodné si uvědomit, že věta platí např. pro libovolný uzavřený interval

$$I = [\,a_1, b_1\,] \times [\,a_2, b_2\,] \times \cdots \times [\,a_m, b_m\,] \subset \mathbb{R}^m\,.$$

To se využívá při důkazu existence „vícerozměrného“ Riemannova integrálu ze spojité funkce na I.

Podle Věty 13.3.25 je v $\mathbb{R}^m$ každá omezená a uzavřená množina kompaktní. Analogické tvrzení prostoru $\mathcal{C}([\,a, b\,])$ *neplatí*, a tak vzniká přirozená otázka: Které množiny $M \subset \mathcal{C}([\,a, b\,])$ jsou kompaktní [5])? K tomu využijeme pojem stejné spojitosti, kterou zavedl Giulio Ascoli (1843 – 1896) v souvislosti se studiem konvergence posloupností spojitých funkcí.

Definice 13.3.31 (Ascoli 1883*). Nechť $M \subset (P, \varrho)$ a nechť $\mathcal{F}(M)$ je nějaký systém funkcí $f : M \to \mathbb{R}$. Říkáme, že funkce z $\mathcal{F}(M)$ jsou *stejně spojité na M*, jestliže je splněna podmínka

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall f \in \mathcal{F}(M))(\forall x_1,\, x_2 \in M)(\varrho(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon)\,.$$

[5]) Tato otázka má smysl i obecněji pro $M \subset (P, \varrho)$ v jiných prostorech.

Poznámka 13.3.32. Z Definice 13.3.31 vyplývá, že všechny funkce $f \in \mathcal{F}(M)$ jsou (stejně) stejnoměrně spojité na M. Podobně budeme říkat, že funkce ze systému $\mathcal{F}(M)$ jsou *stejně omezené*, existuje-li $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechny funkce $f \in \mathcal{F}(M)$ a všechna $x \in M$ je $|f(x)| \leq K$. Pro stručnost budeme někdy říkat krátce ve zřejmém významu, že *systém funkcí* $\mathcal{F}(M)$ *je stejně spojitý* nebo *stejně omezený.*

Věta 13.3.33 (Ascoli 1883*). *Nechť* $\emptyset \neq M \subset (P, \varrho)$ *je kompaktní. Potom uzavřená podmnožina* $\mathcal{F}(M)$ *prostoru* $\mathcal{C}(M)$ *všech spojitých funkcí na* M *je kompaktní, právě když je systém* $\mathcal{F}(M)$ *stejně omezený a stejně spojitý.*

Důkaz. Nejprve budeme předpokládat, že $\mathcal{F}(M)$ je kompaktní. Pak je systém $\mathcal{F}(M)$ totálně omezený, a tedy (stejně) omezený podle Věty 13.3.11. Musíme ještě ukázat, že je zároveň stejně spojitý. Z totální omezenosti $\mathcal{F}(M)$ plyne, že k danému $\varepsilon > 0$ existuje konečná $(\varepsilon/3)$ - síť $A = \{f_1, \ldots, f_m\} \subset \mathcal{F}(M)$. Ze stejnoměrné spojitosti funkcí f_k plyne existence $\delta_k > 0$ tak, že pro $k = 1, \ldots, m$ je

$$(x, y \in M,\ \varrho(x, y) < \delta_k) \implies (|\, f_k(x) - f_k(y)\,| < \varepsilon/3)\,.$$

Položme $\delta = \min\{\,\delta_k\,;\, k = 1, \ldots, m\}$ a zvolme libovolnou $f \in \mathcal{F}(M)$. K f nalezneme $f_{k_0} \in A$, pro kterou je $\|\, f - f_{k_0}\,\| < \varepsilon/3$. Nyní zřejmě

$$(x, y \in M,\ \varrho(x, y) < \delta) \implies |f(x) - f(y)| \leq$$
$$\leq |f(x) - f_{k_0}(x)| + |f_{k_0}(x) - f_{k_0}(y)| + |f_{k_0}(y) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\,,$$

takže systém $\mathcal{F}(M)$ je stejně spojitý.

Nyní ukážeme, že $\mathcal{F}(M)$ je sekvenciálně kompaktní, je-li stejně omezený a stejně spojitý. Nejprve ukážeme, že z každé posloupnosti funkcí $\{f_k\}$ z $\mathcal{F}(M)$ lze vybrat cauchyovskou podposloupnost. Podle Věty 13.3.11 je kompaktní prostor totálně omezený a je podle Věty 13.3.9 separabilní, existuje tedy spočetná množina $T \subset M$, která je hustá v M. Všechny její prvky seřadíme do (prosté) posloupnosti $\{t_k\}$. Nyní budeme postupně vytvářet vybrané posloupnosti: $\{f_{11}, f_{12}, f_{13}, \ldots\}$ je vybraná posloupnost z $\{f_k\}$, která je konvergentní v bodě t_1, $\{f_{21}, f_{22}, f_{23}, \ldots\}$ je vybraná posloupnost z $\{f_{1k}\}_{k=1}^{\infty}$ konvergentní v bodě t_2, atd. Obecně v m-tém kroku vybereme z posloupnosti $\{f_{(m-1)\,k}\}_{k=1}^{\infty}$ posloupnost $\{f_{mk}\}_{k=1}^{\infty}$ tak, aby konvergovala v bodě t_m. Povšimneme si, že $\{f_{mk}\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje na množině $\{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$.

Nyní vytvoříme diagonální posloupnost $\{g_m\} = \{f_{mm}\}_{m=1}^{\infty}$, vybranou z posloupnosti $\{f_k\}$ a ukážeme, že tato diagonální posloupnost je cauchyovská. Využijeme stejné spojitosti funkcí $f \in \mathcal{F}(M)$. Pro $\varepsilon > 0$ zvolíme konečnou množinu $T_\varepsilon \subset T$ tak, že tvoří ε-síť množiny M. Nyní zvolíme $k \in \mathbb{N}$ tak, že pro posloupnost $\{g_m\}_{m=1}^{\infty}$ je

$$(\forall t \in T_\varepsilon)(m, n \geq k \implies |g_m(t) - g_n(t)| < \varepsilon)\,.$$

Nyní pro každé $x \in M$ existuje vhodné $t \in T_\varepsilon$ tak, že

$$|g_m(x) - g_n(x)| \leq |g_m(x) - g_m(t)| + |g_m(t) - g_n(t)| + |g_n(t) - g_n(x)| \leq 3\varepsilon\,.$$

Odtud vyplývá, že je splněna Bolzano-Cauchyho podmínka pro posloupnost $\{g_m\}$ vybranou z $\{f_k\}$, a tedy $g_m \rightrightarrows$ na M.

Protože je $\mathcal{F}(M)$ uzavřená podmnožina prostoru $\mathcal{C}(M)$, leží limita posloupnosti $\{g_m\}$ v $\mathcal{F}(M)$; proto je $\mathcal{F}(M)$ sekvenciálně kompaktní, a tedy i kompaktní. Tím je důkaz tvrzení věty dokončen. $\square$

V průběhu důkazu jsme mj. ukázali, že platí následující tvrzení, které budeme potřebovat v Kapitole 15:

Tvrzení 13.3.34. *Je-li M kompaktní a $\mathcal{F}(M) \subset \mathcal{C}(M)$ je systém stejně omezených a stejně spojitých funkcí na M, lze z $\mathcal{F}(M)$ vybrat posloupnost konvergentní v $\mathcal{C}(M)$.*

Poznámka 13.3.35. Již na samém začátku výkladu o reálných číslech jsme se setkali s kompaktností, aniž jsme o tom hovořili. Vnořili jsme totiž $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}^*$, přičemž $\mathbb{R}^*$ je sekvenciálně kompaktní: přidali jsme k $\mathbb{R}$ „chybějící hromadné body". Ukazuje se tedy, že je $\mathbb{R}^*$ jakýmsi „zkompaktněním" $\mathbb{R}$, což ještě zpřesníme; jde však o „topologickou záležitost", otevřené množiny v $\mathbb{R}$ jsou otevřené i v $\mathbb{R}^*$.

Prostor $\mathbb{R}$ lze vnořit do kompaktu i přidáním „jediného nekonečna": označme ho ∞^* a definujme $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty^*$, jestliže $\lim_{n\to\infty} |\, x_n \,| = +\infty$. Zkuste si tento příklad rozmyslet dříve, nežli začnete číst další odstavec. Pro nedostatek místa budeme velmi struční, čtenáře odkazujeme např. na [5], str. 744.

V $\mathbb{R}^m$ bychom mohli provést analogickou úvahu a definovat množinu $\mathbb{R}^m_* = \mathbb{R}^m \cup \{\infty\}$, přičemž pro $x^n \in \mathbb{R}^m$, $n \in \mathbb{N}$, definujeme $\lim_{n\to\infty} x^n = \infty$, jestliže $\lim_{n\to\infty} \|x^n\|_2 = \infty$. Doufám, že se čtenář po promyšlení předcházejícího případu s $\mathbb{R}^1$ zorientuje a dvojí význam symbolu ∞ ho nezmate. Právem by se však mohl cítit poškozen, neboť jsme sice de facto použili jako okolí bodu ∞ v $\mathbb{R}^m$ množiny

$$\mathcal{U}_\varepsilon(\infty) := \{x \in \mathbb{R}^m;\ \|x\| > \varepsilon\},$$

avšak na $\mathbb{R}^m_*$ jsme nedefinovali žádnou metriku. Není tedy zřejmé, zda otevřené množiny v $\mathbb{R}^m_*$ lze popsat pomocí *nějaké* metriky. V $\mathbb{R}^m_*$ lze takovou metriku definovat např. tak, že definujeme vzdálenost pomocí *stereografické projekce*; pro jednoduchost to provedeme v $\mathbb{R}^2$. Uvažujme v $\mathbb{R}^3$ sféru S o rovnici $z^2 + u^2 + v^2 = 1$. Bodu $[\,x, y\,] \in \mathbb{R}^2$ přiřaďme bod $[\,x, y, 0\,] \in \mathbb{R}^3$ a určeme průsečík přímky, určené tímto bodem a bodem $[\,0, 0, 1\,]$. Její průsečík s uvažovanou sférou má souřadnice

$$z = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \quad u = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \quad v = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}.$$

Pomocí těchto vztahů je určeno zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \to S$. Zřejmě $v \in [\,-1, 1)$ a zobrazení f je na $S \setminus [\,0, 0, 1\,]$. Definujme ještě $f(\infty) = [\,0, 0, 1\,]$ a pro $[\,r, s\,] \in \mathbb{R}^2_*$ položme vzdálenost $\varrho\,(r, s)$ v $\mathbb{R}^2_*$ rovnou vzdálenosti obrazů $f(r)$ a $f(s)$ v $\mathbb{R}^3$. Pak ϱ je metrika na kompaktním prostoru $\mathbb{R}^2_*$.

Definice kompaktního prostoru, kterou užíváme, je založena pouze na topologických pojmech, takže se snadno přenese i do topologických prostorů. Existuje-li ke každému bodu prostoru okolí, jehož uzávěr je kompaktní, pak říkáme, že prostor je *lokálně kompaktní*. Z předchozího je patrné, že prostory $\mathbb{R}^m$ jsou lokálně kompaktními prostory. Naproti tomu $\mathbb{Q}$ s metrikou indukovanou z $\mathbb{R}$ *není* lokálně kompaktní prostor (čtenář se může pokusit to samostatně dokázat). Pomocí okolí bodů lze snadno popsat topologii τ topologického prostoru (X, τ). Je-li (Hausdorffův) [6]) prostor (X, τ) lokálně kompaktní, existuje jeho kompaktifikace (Y, τ') taková, že $Y \setminus X$ je jednobodová množina. Tento bod se obvykle značí ∞ a stačí popsat jeho okolí: ta však definujeme jako rozdíly $Y \setminus K$, kde za K volíme kompaktní množiny v (X, τ).

---

[6]) V Hausdorffově topologickém prostoru existují ke každým dvěma různým bodům x, y jejich okolí $\mathcal{U}(x)$, $\mathcal{U}(y)$, která jsou „disjunktní".

Věta 13.3.36. *Je-li f prosté spojité zobrazení kompaktního prostoru (P, ϱ) na metrický prostor (Q, σ), je inverzní zobrazení $g := f^{-1}$ rovněž spojité a oba prostory jsou homeomorfní; zobrazení f je homeomorfismem mezi prostory P, Q.*

Důkaz. Je-li $F \subset (P, \varrho)$ uzavřená množina, je podle Věty 13.3.16 kompaktní. Její obraz $H := f(F)$ je podle Věty 13.3.17 kompaktní, a tedy podle Věty 13.3.12 uzavřená množina v (Q, σ). Proto pro inverzní zobrazení g jsou vzory všech uzavřených množin v (Q, σ) uzavřené množiny v (P, ϱ) a g je spojité podle Věty 12.5.7. Zobrazení f je tedy homeomorfismem a oba prostory jsou homeomorfní. □

13.4 Souvislost

Tato partie je užitečná např. při vyšetřování funkcí nebo zobrazení více proměnných a ještě podstatněji při studiu funkcí komplexní proměnné.

Definice 13.4.1. Říkáme, že prostor (P, ϱ) je *souvislý*, pokud *neexistují* neprázdné disjunktní otevřené množiny G_1, G_2 v P tak, že $P = G_1 \cup G_2$.

Poznámky 13.4.2. 1. Souvislost množiny se definuje pomocí již vícekrát použité úmluvy: množina $M \subset (P, \varrho)$ je souvislá, je-li (M, ϱ) souvislým podprostorem prostoru (P, ϱ).

2. Je zřejmé, že obě množiny G_1, G_2 z předchozí definice jsou i uzavřené, protože jejich komplement v P je otevřená množina. Je-li $\emptyset \neq A \neq P$ obojetná množina, pak volba $G_1 := A$, $G_2 := P \setminus A$, ukazuje, že prostor (P, ϱ) není souvislý. Odtud vidíme, že *prostor (P, ϱ) je souvislý, právě když obojetnými množinami v P jsou pouze množiny $\emptyset$ a P.*

3. Prázdná a jednobodová podmnožina MP jsou vždy souvislé, neboť nejsou sjednocením disjunktních neprázdných množin.

4. Žádná alespoň dvoubodová podmnožina diskrétního prostoru *není* souvislá.

Úmluva 13.4.3. Množiny G_1, G_2 z definice, které jsou neprázdné, disjunktní, otevřené a pro které $G_1 \cup G_2 = P$, tvoří rozklad nesouvislého prostoru na obojetné množiny. Pro stručnost ho budeme nazývat *o-rozklad*. V symbolické formě pro tyto množiny je

$$G_1, G_2 \subset P, \quad G_1, G_2 \neq \emptyset, \quad G_1, G_2 \text{ jsou otevřené,}$$
$$G_1 \cap G_2 = \emptyset, \quad G_1 \cup G_2 = P\,.$$

Věta 13.4.4. *Neprázdná množina $M \subset \mathbb{R}^1$ je souvislá, právě když je M interval nebo jednobodová množina.*

Důkaz. Omezíme se na alespoň dvoubodové množiny. Nejprve dokážeme: Není-li množina M interval, existuje její o-rozklad: Nechť tedy existují body a, b, c tak, že $a, b \in M$, $a < c < b$ a $c \notin M$. Pak ale

$$G_1 := M \cap (-\infty, c) \quad \text{a} \quad G_2 := M \cap (c, +\infty)$$

je o-rozklad M a množina M není souvislá.

Předpokládejme nyní, že $M \subset \mathbb{R}^1$ je interval; sporem dokážeme, že M je souvislá množina. Nechť existuje o-rozklad M, tvořený množinami G_1, G_2 a nechť $a \in G_1$, $b \in G_2$,

$a < b$. Jelikož je M interval, je $t \in M$ pro všechna $a \le t \le b$. Položme

$$c = \sup \{ t \in [a, b] ; t \in G_1 \} .$$

Zřejmě bod c leží v $[a, b]$, a tedy $c \in M$. Protože je $b \in G_2$ a G_2 je otevřená množina, je $c < b$. Je-li $c \in G_1$, existuje $\delta_1 > 0$, pro něž $(c - \delta_1, c + \delta_1) \subset G_1$, neboť G_1 je otevřená. Potom však c nemůže být supremem G_1, čímž dostáváme spor. Je-li $c \in G_2$, je $c > a$ a existuje takové $\delta_2 > 0$, že $(c - \delta_2, c + \delta_2) \subset G_2$, protože G_2 je otevřená. Existuje proto $t \in G_1$ v intervalu $(c - \delta_2, c]$ a $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$, což je opět spor. Tím je Věta 13.4.4 dokázána. $\square$

Věta 13.4.5. *Nechť $f : (P, \varrho) \to (Q, \sigma)$ je spojité zobrazení a nechť P je souvislý prostor. Potom $f(P)$ je souvislá množina v (Q, σ).*

Důkaz. Pokud by G_1, G_2 tvořily o-rozklad $f(P)$, je $f^{-1}(G_1)$, $f^{-1}(G_2)$ o-rozklad P, což dává potřebný spor. $\square$

Důsledek 13.4.6. *Nekonstantní spojitá reálná funkce f na souvislém prostoru (P, ϱ) má Darbouxovu vlastnost, tj. pro každé dva body $y_1, y_2 \in f(P)$, $y_1 < y_2$, a každé c, $y_1 < c < y_2$, existuje bod $x \in P$, pro který $f(x) = c$.*

Důkaz. Podle Věty 13.4.5 je $f(P)$ souvislá množina v $\mathbb{R}$, a tedy podle Věty 13.4.4 je to interval. Ten spolu s body y_1, y_2 obsahuje i všechna $t \in [y_1, y_2]$, tedy i bod c. Stačí tedy volit $x \in f^{-1}(c) \neq \emptyset$ a dostaneme $f(x) = c$. $\square$

Poznámka 13.4.7. Snadno se ukáže, že Darbouxova vlastnost spojitých funkcí na (P, ϱ) charakterizuje souvislé prostory. Pokud totiž (P, ϱ) *není* souvislý prostor, existuje jeho o-rozklad $P = G_1 \cup G_2$. Definujeme-li funkci f na P tak, že $f(G_1) = 0$, $f(G_2) = 1$, je tato funkce podle Věty 12.5.7 spojitá a nemá Darbouxovu vlastnost.

Připomeňme, že jsou-li x, y body lineárního prostoru X, je úsečka $\overline{xy}$ množina bodů $\{z = tx + (1 - t)y ; t \in [0, 1]\}$ [7]). Je tedy obrazem intervalu $[0, 1]$ pomocí zobrazení $f : t \mapsto f(t) \in X$, kde

$$f(t) = tx + (1 - t)y , \quad t \in \mathbb{R} . \tag{13.13}$$

Je-li X *normovaný* lineární prostor, je zobrazení f v (13.13) spojité, protože

$$\|f(t) - f(u)\| = \|(tx + (1 - t)y) - (ux + (1 - u)y)\| \le |t - u| \, (\|x\| + \|y\|) .$$

Důsledek 13.4.8. *Každá úsečka v normovaném lineárním prostoru je souvislá množina.*

Lemma 13.4.9. *Nechť $\{A_\gamma ; \gamma \in \Gamma\}$ je systém souvislých množin v prostoru (P, ϱ) a nechť průnik všech těchto množin je neprázdný. Potom je $A = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ souvislá množina.*

Důkaz. Postupujeme opět sporem: Je-li G_1, G_2 o-rozklad A, leží společný bod všech A_γ v jedné z těchto množin. Nechť je to G_1. Pak G_2 má neprázdný průnik s alespoň jednou

---

[7]) Je-li $x \neq y$, nazýváme x, y krajními body této úsečky.

A_γ; označme ji A_{γ_0}. Pak však množiny

$$A_{\gamma_0} \cap G_1 \quad a \quad A_{\gamma_0} \cap G_2$$

tvoří o-rozklad A_{γ_0}, což je spor se souvislostí A_{γ_0}. ☐

Důsledek 13.4.10. *Jsou-li souvislé množiny $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ takové, že $A_k \cap A_{k+1} \neq \emptyset$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$, jsou souvislé i množiny $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a také množina $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$.*

Důkaz. Podle Lemmatu 13.4.9 jsou souvislé množiny $A_1 \cup A_2$, $(A_1 \cup A_2) \cup A_3$, …; indukcí snadno dokážeme souvislost množin $B_n := \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Dále je $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, což je souvislá množina, protože $A_1 \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$. ☐

Poznámky 13.4.11. 1. Je-li $A \subset \mathbb{R}^m$ (obecněji v normovaném LP) a $x_0 \in A$ takový bod, že pro každý bod $x \in A$ leží úsečka $\overline{x_0x}$ v A, pak je A podle Lemmatu 13.4.9 souvislá množina. Takové množiny se nazývají *hvězdovité* (vzhledem k x_0).

2. Připomeňme, že $A \subset \mathbb{R}^m$ je konvexní, obsahuje-li s každými dvěma body x, y i úsečku $\overline{xy}$. Konvexní množina A je hvězdovitá vzhledem ke všem svým bodům, a je proto souvislá.

3. V Příkladu 13.2.15 jsme sestrojili spojité zobrazení φ intervalu $[0,1]$ na uzavřený jednotkový čtverec $S := [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$. Toto zobrazení φ *není* prosté. Snadno nahlédneme, že rozdíl $S \setminus E$, kde E je množina všech vrcholů čtverce S, je hvězdovitá množina vzhledem k jeho středu (je to dokonce konvexní množina). Pokud by bylo zobrazení φ prosté, bylo by podle Věty 13.3.36 homeomorfismem a vzor množiny $S \setminus E$ by musel být souvislou množinou, tedy intervalem. Množina $[0,1] \setminus \varphi^{-1}(E)$ má však alespoň tři komponenty, což dává spor. Je to patrně jednodušší nežli dokazovat, že například

$$\varphi(1/6) = \varphi(1/2) = \varphi(5/6) = [1/2, 1/2].$$

To vede ke zdánlivému paradoxu: bodů intervalu $[0,1]$ se zdá být „více“ než bodů jednotkového čtverce S.

Věta 13.4.12. *Je-li množina $A \subset (P,\varrho)$ souvislá, je také souvislá každá množina B, pro kterou je $A \subset B \subset \overline{A}$. Speciálně: uzávěr souvislé množiny je souvislá množina.*

Důkaz. Provedeme důkaz sporem. Je-li A jednobodová, tvrzení platí. Nechť G_1, G_2 tvoří o-rozklad množiny B. Protože množina A je souvislá, musí být částí jedné z množin $G_1 \cap A$ nebo $G_2 \cap A$; pokud by obě množiny byly neprázdné, byly by množiny $G_1 \cap A$, $G_2 \cap A$ o-rozkladem A a dostali bychom spor. Nechť tedy např. $A \subset G_1$ a $A \cap G_2 = \emptyset$. Pak však i $\overline{A} \cap G_2 = \emptyset$ a protože $B \subset \overline{A}$, je také $B \cap G_2 = \emptyset$; proto G_1, G_2 není o-rozkladem B. Nalezený spor dokazuje tvrzení lemmatu. ☐

Příklad 13.4.13. Funkce $f(x) = \sin(x^{-1})$ je spojitá na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Sjednocení jejího grafu G_f s libovolnou neprázdnou podmnožinou A úsečky S s koncovými body $[0,-1]$ a $[0,1]$ je souvislou podmnožinou $\mathbb{R}^2$. Graf G_{f_1} restrikce $f_1 = f|(0,\infty)$ je obrazem intervalu a je tedy souvislý. Každý bod úsečky S leží v uzávěru množiny G_{f_1}. Podle Věty 13.4.12 je $G_{f_1} \cup A$ souvislá množina. Analogické tvrzení platí i pro restrikci $f_2 := f|(-\infty,0)$. Sjednocení souvislých množin s neprázdným průnikem je souvislá množina, z čehož již vyplývá dokazované tvrzení. Pokud by byla množina A prázdná, tvrzení by neplatilo, protože G_{f_1}, G_{f_2} by tvořily o-rozklad G_f.

Definice 13.4.14. Je-li $\{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$ konečná uspořádaná množina (ne nutně různých) bodů z $\mathbb{R}^m$, pak sjednocení úseček $\overline{x_0\, x_1}$, $\overline{x_1\, x_2}, \ldots, \overline{x_{n-1}\, x_n}$ nazýváme *lomená čára* v $\mathbb{R}^m$, spojující body a, b [8]).

V teorii funkcí komplexní proměnné nebo při práci s funkcemi více (reálných) proměnných se často pracuje se speciálními množinami. Uvedeme jednoduchou definici:

Definice 13.4.15. Neprázdná otevřená souvislá množina v $\mathbb{R}^m$ se nazývá *oblast*.

Věta 13.4.16. *Je-li $G \subset \mathbb{R}^m$ oblast, lze každé dva body množiny G spojit lomenou čarou, která leží v G.*

Důkaz. Zvolme $x_0 \in G$ libovolně. Pak množina A těch bodů $x \in G$, které lze spojit v G lomenou čarou s x_0, je zřejmě neprázdná: s bodem x_0 obsahuje všechny body koule $B(x_0, r)$ s dostatečně malým $r > 0$; ty lze spojit v G s bodem x_0 úsečkou.

Je otevřená, protože pro $x \in A$ existuje lomená čára L v G spojující x_0 s x a pro každé $y \in B(x, r) \subset G$ lze spojení lomenou čarou bodů x_0 a y získat sjednocením L s úsečkou $\overline{xy}$.

Doplněk $G \setminus A$ je také otevřený, protože pro jeho libovolný bod z nemůže v okolí $B(z, r)$ s dostatečně malým $r > 0$ ležet bod z A, jinak by totiž platilo $z \in A$. Protože G je souvislá, musí být $G \setminus A = \emptyset$, jinak by množiny A a $G \setminus A$ tvořily o-rozklad množiny G. $\square$

Definice 13.4.17. Maximální (ve smyslu inkluze) souvislou podmnožinu metrického prostoru (P, ϱ) nazýváme *komponenta souvislosti* prostoru (P, ϱ), krátce jen *komponenta* prostoru P.

Poznámka 13.4.18. Je-li A komponenta prostoru P a $A \subset A_1 \subset P$, kde A_1 je souvislá, je $A_1 = A$. Komponenty množiny $A \subset (P, \varrho)$ jsou ve smyslu naší úmluvy opět komponenty podprostoru $(A, \varrho|(A \times A))$.

Lemma 13.4.19. *Komponenta prostoru (P, ϱ) je uzavřenou podmnožinou (P, ϱ).*

Důkaz. Je-li A komponenta (P, ϱ), je podle Věty 13.4.12 i $\overline{A}$ souvislá množina. Zřejmě je $A \subset \overline{A}$ a vzhledem k maximalitě komponent $A = \overline{A}$, takže A je uzavřená množina. $\square$

Lemma 13.4.20. *Komponenty prostoru (P, ϱ) jsou totožné nebo disjunktní.*

Důkaz. Jsou-li A_1, A_2 komponenty P, pak při $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ je $A_1 \cup A_2$ souvislá množina obsahující A_1 i A_2. Komponenty jsou *maximální* souvislé podmnožiny P, z čehož již vyplývají rovnosti $A_1 = A_1 \cup A_2 = A_2$. $\square$

Důsledek 13.4.21. *Každý bod prostoru (P, ϱ) jednoznačně určuje komponentu prostoru P, ve které leží. Každá neprázdná souvislá podmnožina $A \subset (P, \varrho)$ leží v jediné komponentě prostoru P.*

---

[8]) Může to tedy být i jednobodová množina.

Věta 13.4.22. *Komponentami otevřené množiny $G \subset \mathbb{R}^m$ jsou oblasti.*

Důkaz. Nechť A je komponenta množiny G; stačí dokázat, že A je otevřená množina. Je-li $x \in A \subset G$, je $B(x,r) \subset G$ pro nějaké $r > 0$, přičemž $B(x,r)$ je konvexní, a tedy souvislá množina. Proto je $A \cup B(x,r)$ souvislá množina, takže $A \cup B(x,r) = A$, neboli $B(x,r) \subset A$. Množina A je tedy otevřená a důkaz je dokončen. □

Věta 13.4.23. *Každá otevřená množina G v prostoru $\mathbb{R}^m$ nebo v Gaussově rovině $\mathbb{C}$ je sjednocením spočetně mnoha disjunktních oblastí.*

Důkaz. Komponenty G jsou oblasti, stačí tedy dokázat, že disjunktních komponent je pouze spočetně. Každé komponentě přiřadíme jeden její bod, který má všechny souřadnice racionální. Získáme tak prosté zobrazení na (spočetnou) podmnožinu $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\cdots\times\mathbb{Q}$, tj. množinu všech m-tic racionálních čísel, z čehož již vyplývá dokazované tvrzení. □

Historická poznámka 13.4.24. Jak již bylo patrno z předcházejících kapitol, přesunul se v 19. stol. zájem matematiků od jednotlivých funkcí k jejich množinám či třídám. Byly vyšetřovány *funkcionály*, neboli funkce definované na množinách funkcí. Jako příklad připomeňme zmínku o Riemannově integrálu: Ten je podle Věty 11.23 *lineárním funkcionálem* na $\mathcal{C}([a,b])$, který je podle Poznámky 12.5.6 na tomto normovaném lineárním prostoru spojitý, pokud tento prostor opatříme supremovou metrikou. Poznamenejme, že např. již r. 1903 nalezl Jacques Hadamard (1865 – 1963) poněkud komplikovaný předpis popisující obecný tvar spojitého lineárního funkcionálu na prostoru $\mathcal{C}([a,b])$; viz [9], Vol. I, str. 405 – 408. Elegantní řešení tohoto problému nalezl Frederic Riesz (1880 – 1956) r. 1909. V jiné práci z r. 1910 poprvé použil termín *prostor funkcí* (Funktionenraum); viz též [15].

Metrické prostory zavedl Maurice René Fréchet (1878 – 1973) r. 1906 v práci [7]; byla to jeho doktorská disertační práce. Tam je také zavedena většina obecných pojmů, které byly vyloženy v této kapitole.

Uvedeme několik historických ukázek. Fréchet nejprve studuje obecnější množiny: *Pokud pečlivě studujeme různé klasické definice limity posloupnosti čísel, posloupnosti bodů nebo posloupnosti funkcí apod., ihned zjistíme, že všechny vyhovují podmínkám* I *a* II, *které nezávisí na povaze uvažovaných prvků posloupností. Jsou to ty podmínky, které nám postačí k zobecnění jistých tvrzení z teorie funkcí.*

Dále se omezíme na podmnožiny třídy (L) *prvků libovolné povahy, vyhovující následujícím podmínkám: je možné rozlišit, zda jsou prvky třídy různé či nikoli. Navíc lze definovat limitu posloupnosti prvků třídy* (L). *Předpokládáme tudíž, že pro libovolně zvolenou nekonečnou posloupnost* (*ne nutně různých*) *prvků třídy* (L) *lze s jistotou říci, zda tato posloupnost $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ má či nemá limitu A* (*jednoznačně určenou*). *Postup, který umožní nalézt odpověď,* (*jinak řečeno definice limity*), *ať je jakýkoli, musí splňovat podmínky* I *a* II, *o nichž jsme se zmínili, a které jsou následující:*

I) *Pokud jsou všechny prvky nekonečné posloupnosti $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ rovny témuž prvku A, má posloupnost limitu, kterou je A.*

II) *Pokud má nekonečná posloupnost $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ limitu A, každá posloupnost členů předchozí posloupnosti ve stejném pořadí $A_{n_1}, A_{n_2}, \ldots, A_{n_p}, \ldots$* (*celá čísla $n_1, n_2, \ldots, n_p$ tedy rostou*) *má opět limitu rovnou A.*

Fréchetova definice metrického prostoru se jen formálně odlišovala od Definice 12.2.1 z minulé kapitoly (srovnej s Historickou poznámkou 12.5.17). Mezi příklady uvádí lineární prostor s všech posloupností reálných čísel $x = \{x_1, x_2, \ldots\}$ se vzdáleností (l'écart) definovanou vzorcem (užíváme jeho označení)

$$(x, y) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}$$

a pro tuto metriku dokazuje i trojúhelníkovou nerovnost. Pro prostor s všech posloupností reálných čísel z Příkladu 12.4.42 dokazuje v práci [7] mj. Větu 13.3.17.

Fréchet užívá i označení „separabilní prostor", avšak v jiném smyslu, než jsme zavedli. Jeho definice tedy nesplývá s naší definicí separability. Píše: *Třídu prvků* nazýváme *separabilní*, pokud ji lze alespoň jedním způsobem vyjádřit jako derivaci [9]) spočetné množiny svých prvků. Poznamenejme ještě že téměř *polovina práce* je věnována aplikacím obecné teorie.

Fréchetovu definici úplného prostoru jsme uvedli v Historické poznámce 13.2.4; poznamenejme, že termíny *úplnost, úplný prostor* apod. jsou patrně pozdějšího data.

Dodnes je patrně největší nejednotnost v terminologii související s kompaktností. Fréchet zavedl v r. 1906 pojem (sekvenciální) kompaktnosti s označením „kompaktní". Použil následující definici: *Říkáme, že množina je* kompaktní*, jestliže je konečná nebo má-li každá její nekonečná podmnožina alespoň jeden hromadný bod* [10])*. Jestliže je množina zároveň uzavřená, nazýváme ji* extremální; (...). Dnes pojem extremální množiny znamená opět něco podstatně jiného.

Pavel Sergejevič Alexandrov (1896 – 1982) spolu s Pavlem Samujlovičem Urysonem (1898 – 1924) zavedli r. 1924 kompaktnost tak, jako jsme ji zavedli v Definici 13.3.4, ovšem pro *topologické* prostory. Použili pro ni termín *bikompaktnost*, který se stále ještě v rusky psané starší literatuře vyskytuje. Všeobecně se takto zavedené „pokrývací kompaktnosti" začalo říkat jen kompaktnost. Množiny, jejichž *uzávěr* je kompaktní (tedy ne nutně uzavřené!), se nazývají *relativně kompaktní*; pro ty užíval Fréchet termín kompaktní. Někdy se užívá pojem *prekompaktnost*, pro který jsme užili termín *totální omezenost*. Použijeme-li našeho označení a Fréchetovy terminologie, pak mj. dokázal tvrzení: *Aby pro každé $\varepsilon > 0$ existovala* konečná *ε-síť $K_\varepsilon \subset E$, je nutné a stačí, aby E byla kompaktní.* Fréchetovy extremální množiny jsou v našem smyslu sekvenciálně kompaktní. Proto např. Fréchet předpokládá ve Větě 13.3.29, že příslušná množina je extremální. Větu o ekvivalentních podmínkách pro kompaktnost dokázal v plném znění jako první patrně Felix Hausdorff (1868 – 1942) v [10]. Tam je zaveden i termín *totální omezenost*; viz str. 311. Borelova pokrývací věta pro spočetné systémy je z r. 1894, pro obecná pokrytí ji dokázal Lebesgue. Borel ji pak v r. 1903 zobecnil pro případ prostorů $\mathbb{R}^m$ s $m > 1$. Řada dalších vět byla dokázána nejprve pro speciální MP, nejčastěji pro $\mathbb{R}^m$. Patrně první dospěl k obecné definici kompaktního prostoru Vietoris v r. 1921, jehož práci Aleksandrov s Urysonem neznali.

Souvislost prostoru je pojmem velmi názorným. My jsme dokázali pouze její základní vlastnosti. Ukazuje se, že velmi užitečné jsou často „lokalizované" pojmy. *Lokálně kompaktní prostory* zavedl Aleksandrov v práci z r. 1923. Větší pozornost jsme věnovali lokální kompaktnosti, existuje však i tzv. lokální souvislost, která se uplatňuje např. při studiu křivek. *Prostor je* lokálně souvislý*, pokud ke každému jeho bodu x a každému jeho okolí $\mathcal{U}(x)$ existuje* souvislé *okolí $\mathcal{V}(x)$ bodu x, pro něž je $\mathcal{V}(x) \subset \mathcal{U}(x)$.* Čtenáře může

[9]) Autor má na mysli množinu hromadných bodů.
[10]) Pro hromadné body užívá Fréchet termín „limitní body".

překvapit, že MP může být lokálně souvislý aniž by byl souvislý, není však obtížné sestrojit příklad typu $A := (0,1) \cup (2,3) \subset \mathbb{R}$. Složitější je si uvědomit, že souvislý prostor nemusí být lokálně souvislý. Příklad 13.4.13 nám ještě jednou poslouží: Uvažovaný graf funkce $x \mapsto \sin(1/x)$ v $\mathbb{R}^2$, doplněný o úsečku S, má potřebné vlastnosti, neboť body „přidané úsečky“ *nemají* libovolně malá souvislá okolí.

Věta 13.3.33 bývá v různých modifikacích nazývána Arzelà-Ascoliho věta. Fréchet ve své fundamentální práci z r. 1906 vytvořením „funkcionálního počtu“ završil teorii, ke které významně přispěli Georg Cantor (1845 – 1918), Vito Volterra (1860 – 1940), Cesare Arzelà (1847 – 1912), Giulio Ascoli (1843 – 1896), Jacques Hadamard (1865 – 1963) a další; plný seznam by obsahoval podstatně více jmen. Protože se zde již dotýkáme historie *funkcionální analýzy*, omezíme se na odkaz na historické monografie [6] a [13].

Zrod obecné topologie souvisí s Cantorovými pracemi z let 1879 – 1884, rozhodující krok v přechodu od $\mathbb{R}^m$ k abstraktním prostorům lze však stopovat až k Riemannovi (1854). I zde je lépe doporučit čtenáři speciální studie, např. [16].

Literatura:

[1] Aleksandrov, P. S., Urysohn, P. S.: *Zur Theorie der topologischen Räume*, Math. Ann. **92** (1924), str. 258 – 266.

[2] Banach, S.: *Théorie des opérations linéaires*, série Monografie matematzcyne sv. I, Warszawa, 1932.

[3] Bourbaki, S.: *Očerki po istorii matěmatiki*, Izdatělstvo IL, Moskva, 1963, (překlad z francouzštiny).

[4] Čech, E.: *Bodové množiny*, Academia, Praha, 1974.

[5] Černý, I.: *Analýza v komplexním oboru*, Academia, Praha, 1983.

[6] Dieudonné, J.: *History of functional analysis*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1981.

[7] Fréchet, M.: *Sur quelques points du Calcul fonctionnel*, Rend. Circ. Math. Palermo **22** (1906), str. 1 – 74.

[8] Gelbaum, B. R., Olmsted, J. M. H.: *Counterexamples in analysis*, Holden-Day, San Francisko, 1964.

[9] Hadamard, J.: *Oeuvres*, Ed. du C.N.R.S., Paris, 1968, (ve čtyřech svazcích).

[10] Hausdorff, F.: *Grundzüge der Mengenlehre*, von Veit & Comp., Leipzig, 1914.

[11] Hausdorff, F.: *Mengenlehre*, Berlin-Leipzig, 1927.

[12] Hewitt, E., Stromberg, K.: *Real and abstract analysis*, Springer, Berlin, 1969.

[13] Kline, M.: *Mathematical thought from ancient to modern time*, Oxford university press, New York, 1972, 1990.

[14] Kuratovski, K.: *Wstęmp do teorii mnogości i topologii*, Państwowe wydawnictwo naukowe, Warszawa, 1955.

[15] Netuka, I., Veselý, J.: *F. Riesz a matematika 20. století*, Pokroky MFA **25** (1980), str. 128 – 138.

[16] Tietze, H., Vietoris, L.: *Beziehungen zwischen den verschiedenen Zweigen der Topologie*, obsaženo v: *Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften,* Band III., AB 13, Leipzig, 1930.

Kapitola 14

Stejnoměrná konvergence

14.1 Základní pojmy

Se stejnoměrnou konvergencí jsme se již setkali v Kapitolách 12 a 13, když jsme pracovali se supremovou normou na prostoru $\mathcal{C}([a,b])$. Nyní tuto konvergenci prostudujeme podrobněji. Je to pojem *náročný* a jeho dokonalé pochopení činilo v prvé polovině 19. století obtíže i špičkovým matematikům. Z toho důvodu uvedeme větší počet příkladů. Úvodní Příklady 14.1.12 ukazují důležitost tohoto pojmu: ilustrují totiž fakt, že pro (rádo by) „očekávaná“ tvrzení o konvergenci posloupností *funkcí* je jejich konvergence v každém bodě společného definičního oboru předpokladem příliš slabým.

Definice 14.1.1 (Weierstrass 1841). Nechť $A \neq \emptyset$ je libovolná množina a nechť f_n, $n \in \mathbb{N}$, a f jsou reálné nebo komplexní funkce definované na A. Potom říkáme, že posloupnost funkcí $\{f_n\}$ *konverguje stejnoměrně na A k funkci f*, jestliže

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k \in \mathbb{N})(\forall x \in A)(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq k)(|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)\,. \tag{14.1}$$

Píšeme pak $f_n \rightrightarrows f$ na A. Zápis $f_n \rightrightarrows$ na A znamená, že *existuje* taková f definovaná na A, že $f_n \rightrightarrows f$ na A.

Poznámky 14.1.2. 1. Srovnáním s látkou o MP vidíme, že na lineárním prostoru $\mathcal{M}(A)$ všech omezených funkcí na množině A lze ekvivalentně (14.1) vyjádřit ve tvaru

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{|f_n(x) - f(x)|;\, x \in A\} = \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0\,,$$

kde norma značí obvyklou supremovou normu, tj. $\|f\|_\infty = \sup\{\,|f(x)|\,;\, x \in A\}$.

2. Jestliže platí $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ pro všechna $x \in A$, pak říkáme, že posloupnost funkcí $\{f_n\}$ *konverguje* k funkci f, podrobněji *konverguje bodově* k funkci f. Zapíšeme-li tuto definici pomocí logických symbolů, dostaneme

$$(\forall x \in A)(\forall \varepsilon > 0)(\exists k \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq k)(|\,f_n(x) - f(x)\,| < \varepsilon)\,.$$

Srovnáním s (14.1) vidíme, že se definice bodové a stejnoměrné konvergence pevně zvolené posloupnosti funkcí $\{f_n\}$ na A liší pouze *pořadím kvantifikátorů*. Zatímco v definici bodové konvergence závisí číslo $k \in \mathbb{N}$ i na volbě $x \in A$, u stejnoměrné konvergence toto $k \in \mathbb{N}$ závisí pouze na čísle $\varepsilon > 0$, avšak nikoli na $x \in A$.

3. Často používáme tohoto obratu: platí $f_n \rightrightarrows f$ na A, právě když platí $|\, f_n - f \,| \rightrightarrows 0$ na A. To využijeme např. v Tvrzení 14.3.1.

Věta 14.1.3 (Cauchy 1853, Weierstrass 1861). *Posloupnost funkcí $\{f_n\}$ konverguje stejnoměrně na množině A, právě když*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k \in \mathbb{N})(\forall m, n \geq k)(\forall x \in A)(|\, f_m(x) - f_n(x) \,| < \varepsilon)\,. \tag{14.2}$$

Důkaz. Z (14.2) plyne, že posloupnost $\{f_n(x)\}$ je cauchyovská pro každé $x \in A$, a tedy konvergentní. Lze tedy definovat funkci f vztahem $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, $x \in A$ a je $f_n \to f$ na A. Dokážeme, že $f_n \rightrightarrows f$ na A. Při pevně zvoleném $\varepsilon > 0$ a pevně zvoleném n, $n \geq k$, limitním přechodem vzhledem k $m \to \infty$ ze (14.2) dostaneme

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k \in \mathbb{N})(\forall n \geq k)(\forall x \in A)(|\, f(x) - f_n(x) \,| \leq \varepsilon)\,,$$

neboli $f_n \rightrightarrows f$ na A. Obráceně, z $f_n \rightrightarrows f$ na A plyne $|\, f_n - f \,| \rightrightarrows 0$ na A. Zvolme $\varepsilon > 0$ a k němu $k \in \mathbb{N}$ tak, aby pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq k$, $n \geq k$, a všechna $x \in A$ bylo

$$|f_m(x) - f(x)| \leq \varepsilon/2\,, \quad |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon/2\,.$$

Odtud a z nerovnosti

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon\,, \quad x \in A\,,$$

která platí pro všechna $m, n \geq k$, plyne zbytek tvrzení. □

Poznámka 14.1.4. Jak se ukáže, význam stejnoměrné konvergence souvisí se záměnou limitních přechodů. Tážeme-li se například, zda limita f konvergentní posloupnosti $\{f_n\}$ spojitých funkcí f_n je spojitá funkce, jde vlastně o to zjistit, zda

$$\lim_{x\to y} f(x) = \lim_{x\to y}\big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\big) \overset{?}{=} \lim_{n\to\infty}\big(\lim_{x\to y} f_n(x)\big) = \lim_{n\to\infty} f_n(y) = f(y)\,.$$

S touto situací jsme se již jednou setkali při zkoumání úplnosti prostoru $\mathcal{C}([\,a,b\,])$ v Lemmatu 13.2.6. Právě díky tomu, že konvergence v $\mathcal{C}([\,a,b\,])$ je vlastně stejnoměrnou konvergencí, byla záměna limitních procesů možná. Přímým důsledkem pak byla úplnost prostoru $\mathcal{C}([\,a,b\,])$. Následující tvrzení tuto situaci pouze zobecňuje pro metrické prostory.

Věta 14.1.5 (Cauchy 1853*). *Nechť $f_n \rightrightarrows f$ na P a f_n jsou pro všechna $n \in \mathbb{N}$ spojité funkce na metrickém prostoru (P, ρ). Potom je f spojitá funkce na (P, ρ).*

Důkaz. Stačí dokázat spojitost f v každém bodě $y \in P$. Zvolme tedy libovolně $y \in P$. Pro důkaz logicky přepsané definice

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists\, \delta > 0)(\forall x \in P,\ \rho(x,y) < \delta)(|\, f(x) - f(y) \,| < \varepsilon)$$

použijeme jako již dříve v důkazu Lemmatu 13.2.6 analogický triviální odhad

$$|\, f(x) - f(y) \,| \leq |\, f(x) - f_n(x) \,| + |\, f_n(x) - f_n(y) \,| + |\, f_n(y) - f(y) \,|\,, \tag{14.3}$$

ve kterém pro dané $\varepsilon > 0$ nejprve ze stejnoměrné konvergence zvolíme $n \in \mathbb{N}$ tak, aby první a třetí sčítanec v předcházející nerovnosti (14.3) byly pro všechna $x \in P$ odhadnuty shora číslem $\varepsilon/3$. Pak ze spojitosti funkce f_n na P nalezneme $\delta > 0$ tak, aby pro všechny body $x \in P$, pro které je $\rho(x, y) < \delta$, byl prostřední sčítanec vpravo v (14.3) odhadnut shora $\varepsilon/3$; pak ale $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ pro všechna $x \in P$, pro něž je $\rho(x, y) < \delta$, což již dává spojitost funkce f v bodě y a důkaz je tak dokončen. □

Předcházející větu často užíváme k tomu, abychom dokázali, že posloupnost spojitých funkcí *nekonverguje stejnoměrně*. To ukazuje jednoduchý příklad:

Příklad 14.1.6. Snadno nahlédneme, že při $n \to \infty$ platí $x^n \to 0$ pro $x \in [0, 1)$ a $x^n \to 1$ pro $x = 1$. Proto nemůže platit $x^n \rightrightarrows$ na $[0, 1]$, neboť mocniny x^n jsou na $[0, 1]$ vesměs spojité a jejich limita je funkce, která na intervalu $[0, 1]$ *není spojitá*. Pro všechna q, $0 < q < 1$, platí však na $[0, q]$ odhad $x^n \leq q^n \to 0$, a tedy $x^n \rightrightarrows 0$ na $[0, q]$ pro každé $q \in (0, 1)$; viz např. Lemma 13.2.6. Přitom *neplatí* $f_n \rightrightarrows 0$ na $[0, 1)$, protože funkce f_n pro všechna $n \in \mathbb{N}$ jsou monotónní a mají Darbouxovu vlastnost, nabývají tedy na intervalu $[0, 1)$ všech hodnot z $[0, 1)$, takže $a_n := \sup\{|x^n - 0|\,;\, x \in [0, 1)\} = 1$, a $\{a_n\}$ tedy nekonverguje k 0.

Příklad 14.1.6 ukazuje, že konvergence funkcí $f_n(x) = x^n$, $x \in [0, 1)$, je „skoro" stejnoměrná (je zřejmě stejnoměrná na každém intervalu $[\alpha, \beta] \subset (0, 1)$) a každé $c \in (0, 1)$ leží uvnitř nějakého takového intervalu (α, β). Analogickou situaci popisuje následující definice.

Definice 14.1.7. Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost funkcí na intervalu (a, b) a nechť ke každému $c \in (a, b)$ existuje okolí $\mathcal{U}(c) \subset (a, b)$ tak, že $f_n \rightrightarrows f$ na $\mathcal{U}(c)$. Potom říkáme, že posloupnost $\{f_n\}$ konverguje *lokálně stejnoměrně na (a, b) k funkci f.*

Označení 14.1.8. K označení právě zavedeného pojmu lokálně stejnoměrné konvergence budeme používat symbol $f_n \rightrightarrows_{\mathrm{loc}} f$ na (a, b). Chceme-li zapsat definici pomocí kvantifikátorů, je to již trochu složitější ($\mathcal{U}(c)$ značí opět okolí bodu c):

$$\begin{aligned}&(\forall c \in (a, b))(\exists \mathcal{U}(c) \subset (a, b))(\forall \varepsilon > 0)(\exists k \in \mathbb{N})\\ &\qquad (\forall n \geq k, n \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathcal{U}(c))(|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)\,.\end{aligned}$$

Čtenář jistě bez obtíží přepíše definici lokálně stejnoměrné konvergence do kontextu metrického prostoru (P, ρ): místo okolí $\mathcal{U}(c)$ v intervalu (a, b) pracujeme s okolími v (P, ρ).

Poznámka 14.1.9. Velmi často se pracuje s *lokálně kompaktními prostory.* Připomeňme, že prostor (P, ρ) se nazývá lokálně kompaktní, jestliže ke každému bodu $x \in P$ existuje okolí $\mathcal{U}(x)$, jehož uzávěr $\overline{\mathcal{U}(x)}$ je kompaktní. V takovém prostoru můžeme lokálně stejnoměrnou konvergenci charakterizovat jiným způsobem:

Věta 14.1.10. *Na lokálně kompaktním prostoru (P, ρ) platí $f_n \rightrightarrows_{\mathrm{loc}} f$ na P, právě když pro každou kompaktní podmnožinu $K \subset P$ platí*

$$f_n \rightrightarrows f \quad na \quad K\,. \tag{14.4}$$

Důkaz. Nechť je konvergence stejnoměrná na všech kompaktních podmnožinách $K \subset P$. Zvolme nějaké $x \in P$ a jeho okolí $\mathcal{U}(x)$, jehož uzávěr je kompaktní množina $K \subset P$. Ze stejnoměrné konvergence na K plyne stejnoměrná konvergence na $\mathcal{U}(x)$. Stejnou úvahu lze aplikovat pro každý bod $x \in P$, takže dostáváme $f_n \rightrightarrows_{\text{loc}} f$ na P.

Obrácenou implikaci obdržíme z definice kompaktní množiny. K dané kompaktní množině K vybereme ke každému $x \in K$ jeho okolí $\mathcal{U}(x)$ tak, že $f_n \rightrightarrows f$ na $\mathcal{U}(x)$. Tento systém okolí $\{\mathcal{U}(x)\,;\, x \in K\}$ je otevřeným pokrytím K. Z tohoto pokrytí vybereme konečné podpokrytí K okolími $\mathcal{U}(x_1), \dots, \mathcal{U}(x_m)$. K $\varepsilon > 0$ existují čísla $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{N}$ tak, že

$$(\forall x \in \mathcal{U}(x_l))(\forall n \geq k_l)(|\, f_n(x) - f(x)\,| < \varepsilon)\,, \qquad l \in \{1, \dots, m\}\,,$$

a zvolíme $k = \max\{k_1, \dots, k_m\}$. Pak pro všechna $x \in K \subset \bigcup_{l=1}^{m} \mathcal{U}(x_l)$ je při $n \geq k$ splněna nerovnost $|\, f_n(x) - f(x)\,| < \varepsilon$. □

Poznámky 14.1.11. 1. Předcházející Věta 14.1.10 osvětluje užívání pojmu *kompaktní konvergence* na (P, ρ) pro případ $\{f_n\}$, která konverguje *stejnoměrně* k funkci f na každé kompaktní množině $K \subset P$. Tento pojem se často užívá v teorii funkcí komplexní proměnné, protože $\mathbb{C}$ je lokálně kompaktním prostorem.

2. Eukleidovské prostory $\mathbb{R}^m$ jsou zřejmě lokálně kompaktní. Naproti tomu množina $\mathbb{Q}$ s metrikou indukovanou z $\mathbb{R}$ *není* lokálně kompaktním prostorem, protože zvolíme-li v tomto prostoru libovolně bod a a libovolně jeho okolí $\mathcal{U}(a)$, lze v něm sestrojit omezenou posloupnost $\{q_k\}$ racionálních čísel, jejíž limitou (v $\mathbb{R}$) je iracionální číslo. Uzávěr tohoto okolí $\mathcal{U}(a)$ není kompaktní, protože z posloupnosti $\{q_k\}$ nelze vybrat podposloupnost konvergentní v uvažovaném prostoru.

Příklady 14.1.12. Všechny bezprostředně následující příklady mají jednu věc společnou. Posloupnost funkcí $\{f_n\}$ vždy konverguje *bodově* na nějakém intervalu v $\mathbb{R}$ k funkci f a určitá vlastnost, jakou je např. spojitost nebo integrovatelnost apod., kterou každá z funkcí f_n má, se na funkci f nepřenese. Příčinou tohoto efektu je fakt, že se, zhruba řečeno, bodovou konvergencí „příjemné vlastnosti“ funkcí f_n na limitní funkci f obecně nepřenášejí. Doporučujeme čtenáři, aby si při studiu následujících příkladů vždy načrtl obrázek, v tomto případě to často může pomoci objasnit podstatu věci.

1. Jestliže definujeme posloupnost funkcí vztahem $f_n(x) = \operatorname{arctg} nx$, $x \in \mathbb{R}$, pak snadno nahlédneme, že

$$f_n(x) \to (\pi/2) \operatorname{sgn} x\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Tato konvergence však není stejnoměrná, neboť

$$\sup\{|\,(\pi/2)\operatorname{sgn} x - \operatorname{arctg} nx|;\; x \in \mathbb{R},\; n \geq k\} = \pi/2\,,$$

ať zvolíme $k \in \mathbb{N}$ jakkoli. Všimněte si, že limitní funkce $(\pi/2)\operatorname{sgn} x$ *není* spojitá, že však

$$f_n'(x) = \frac{n}{1 + n^2x^2} \to \left(\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} x\right)'$$

všude v $\mathbb{R}$. Skutečně, pro $x = 0$ je tato limita rovna $+\infty$, v ostatních případech je rovna 0. Později uvidíme, že ani za předpokladu $f_n \rightrightarrows f$ na intervalu I nemusí obecně platit $f_n' \to f'$ na I.

2. Nechť pro $n \in \mathbb{N}$ je $f_n(x) = n^2x(1 - x^2)^n$, $x \in [\,0, 1\,]$. Potom se lehce ukáže, že platí $f_n \to 0$ na intervalu $[\,0, 1\,]$; k tomu stačí vyšetřit konvergenci řad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ pro každé

$x \in [\,0,1\,]$. Výpočtem dostaneme

$$\int_0^1 x(1-x^2)^n \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2n+2}\,, \quad \text{a tedy} \quad \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{n^2}{2n+2} \to +\infty\,.$$

Za povšimnutí stojí jiný zápis stejné věci:

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = 0 \neq +\infty = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

3. Zaměníme-li v předchozím příkladu koeficient n^2 ve vyjádření funkcí f_n za n, bude limita integrálů konečná a bude rovna $(1/2)$; závada tedy není „v nekonečnosti". Názornější a tak i zapamatovatelnější příklad sestrojíme takto: nechť pro všechna $n \in \mathbb{N}$ jsou funkce f_n definovány jako v Příkladu 12.3.7. Využijeme-li názorného významu integrálu, snadno nahlédneme, že $\int_0^1 f_n = 1/2^{n+1}$. Nyní definujeme posloupnost funkcí $\{g_n\}$: položíme $g_n := 2^{n+1} f_n$, $n \in \mathbb{N}$. Snadno nahlédneme, že $\int_0^1 g_n = 1$ (tak, jak se v „trojúhelníčcích" zkracuje základna, roste zároveň jejich výška, proto jejich obsah zůstává konstantní) a $g_n \to 0$; nulová funkce má i nulový integrál a je

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} g_n(x)\,\mathrm{d}x = 0 \neq 1 = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

4. Situace s derivováním je delikátnější. Definujeme-li

$$f_n(x) = (1/n)\,\mathrm{arctg}\, x^n\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

pak $\|\, f_n - 0\,\|_\infty \le \pi/2n \to 0$ a *nejen* $f_n \to 0$ na $\mathbb{R}$, ale dokonce i $f_n \rightrightarrows 0$ na $\mathbb{R}$. Přesto však pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je

$$f_n'(1) = \frac{x^{n-1}}{1+x^{2n}}\bigg|_{x=1} = \frac{1}{2}\,,$$

tedy f_n' nekonvergují k derivaci „limitní nulové funkce" v bodě 1. V bodě -1 nastává jiný efekt, neboť $\lim_{n\to\infty} f_n'(-1)$ dokonce neexistuje. Bližší pohled na derivace f_n' ukazuje, že $f_n'(x) \to 0$ na $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$; na intervalu $(-1,1)$ platí odhad $|f_n'(x)| \le |x|^{n-1} \to 0$, zatímco pro $|x| > 1$ je $|f_n'(x)| \le (1/|x|)^{n+1} \to 0$. Rozhodně však *neplatí* $f_n' \rightrightarrows 0$ na $\mathbb{R}$.

5. Definujme pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a všechna $n \in \mathbb{N}$

$$f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}\,; \tag{14.5}$$

Funkce f_n jsou zřejmě liché. Dále je

$$f_n'(x) = \frac{1+n^2x^2-2xn^2x}{(1+n^2x^2)^2} = \frac{1-x^2n^2}{(1+n^2x^2)^2}$$

a $f_n(0) = \lim_{x\to\infty} f_n(x) = 0$, $f_n'(1/n) = 0$. Bod $1/n$ je jediným nulovým bodem f_n' na intervalu $(0, +\infty)$, z čehož vyplývá

$$\sup\{|f_n(x) - 0|;\, x \in \mathbb{R}\} = \sup\{|f_n(x)|;\, x \in [\,0,\infty\,]\} = f_n(1/n) = (1/2n) \to 0\,.$$

Odtud dostáváme *stejnoměrný odhad* vzhledem k x nejen na intervalu $[\,0, +\infty)$, ale i na $\mathbb{R}$, takže $f_n \rightrightarrows 0$ na $\mathbb{R}$. Čtenář by si měl povšimnout, že i v tomto případě neplatí $f_n' \to 0$, neboť $f_n'(0) = 1$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Poznámka 14.1.13. Již dříve jsme ve Větě 5.2.14 dokázali, že je-li funkce f na intervalu (a,b) derivací (pro jistotu zdůrazněme, že f nabývá pouze hodnot z $\mathbb{R}$), má Darbouxovu vlastnost. Má však ještě i další vlastnost, která ukazuje, že i *bodová konvergence* spojitých funkcí je důležitá. Je-li funkce F pevně zvolenou primitivní funkci k f a definujeme-li

$$f_n(x) = \begin{cases} n(F(x+1/n) - F(x)), & \text{pro } x \in (a, b-2/n), \\ n(F(b-1/n) - F(b-2/n)), & \text{pro } x \in [b-2/n, b), \end{cases}$$

kde v případě $b = +\infty$ užijeme pouze definiční rovnosti z prvního řádku, jsou f_n spojité funkce na (a,b) pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $f_n \to f$ na (a,b). Derivace je tedy bodovou limitou spojitých funkcí. Popišme stručně další důležité pojmy: Protože je funkce f na (a,b) limitou spojitých funkcí, říkáme, že je funkcí z *první Baireovy třídy* na (a,b). Bairovy třídy se definují induktivně: Funkce g je z *n-té Baireovy třídy* B_n, je-li bodovou limitou posloupnosti funkcí $\{g_k\}$, $g_k \in B_{n-1}$, přičemž třída B_0 je tvořena všemi spojitými funkcemi (za označením třídy uvádíme eventuálně interval, na kterém se vše odehrává). Tuto klasifikaci zavedl v práci z r. 1899 René Louis Baire (1874 – 1932).

Obě popsané vlastnosti jsou základními vlastnostmi každé derivace. Proto pro každou derivaci f na (a,b) platí $f \in DB_1(a,b)$, což vyjadřuje, že f má současně Darbouxovu vlastnost a je z $B_1(a,b)$. Je např. známo, že funkce z $B_1(a,b)$ musí mít v intervalu (a,b) hustou množinu bodů spojitosti; viz např. [4], str. 115. Zároveň je vhodné si uvědomit, co toto tvrzení vypovídá o existenci primitivní funkce: nutnou podmínkou existence primitivní funkce k funkci f na (a,b) je $f \in DB_1(a,b)$.

Není obtížné ukázat, že Riemannova funkce z Příkladu 4.2.9 je z $B_1(0,1)$, avšak Dirichletova funkce z Příkladu 4.2.8 není prvkem této třídy, neboť je nespojitá *všude* v intervalu $(0,1)$. Platí však pro ni

$$\delta(x) = \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} (\cos m!\pi x)^n, \quad x \in (0,1),$$

takže je $\delta \in B_2(0,1)$; viz např. [4], str. 78.

14.2 Stejnoměrná konvergence řad funkcí

Čtenáře jistě nepřekvapí, že zcela analogickým způsobem zavádíme stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci řad funkcí.

Definice 14.2.1. Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ je řada reálných nebo komplexních funkcí, které jsou vesměs definovány na množině A. Říkáme, že *řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ konverguje stejnoměrně na A k funkci s*, jestliže částečné součty $s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ konvergují stejnoměrně k s na A.

Poznámka 14.2.2. Ačkoli součet $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$, $x \in A$, závisí na *každém* členu řady, její konvergence v daném bodě $x \in A$ nezávisí na konečně mnoha členech $f_k(x)$. Proto se někdy *při zkoumání konvergence* považuje řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ za konvergentní na A, pokud existuje k_0 tak, že konverguje řada $\sum_{k=k_0}^{\infty} f_k(x)$ pro všechna $x \in A$. My takovou licenci *nebudeme* užívat.

Označení 14.2.3. Pro stejnoměrnou konvergenci řad užíváme opět symbol $\rightrightarrows$ a popis množiny, k níž se limitní přechod vztahuje. Píšeme tedy např.

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k \rightrightarrows s \quad \text{na} \quad (0,1)\,.$$

Při použití symbolu pro stejnoměrnou konvergenci řad lze součet vynechat a psát

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k \rightrightarrows \ \text{na } A \quad \text{stejně jako u} \quad f_n \rightrightarrows \ \text{na } A\,,$$

existuje-li funkce, k níž řada na množině A stejnoměrně konverguje.

Příklady 14.2.4. 1. Snadno dokážeme, že pro řadu o členech

$$f_k(x) = \frac{x^k}{k} - \frac{x^{k+1}}{k+1}\,, \quad k \in \mathbb{N}\,,$$

platí $\sum_{k=1}^{\infty} f_k \rightrightarrows f$ na $[0,1]$, kde $f(x) = x$, $x \in [0,1]$, neboť na tomto intervalu je

$$\Big| x - \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{x^k}{k} - \frac{x^{k+1}}{k+1} \Big) \Big| = \Big| x - \Big(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \cdots \frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big) \Big| =$$
$$= \Big| \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big| = \frac{x^{n+1}}{n+1} \le \frac{1}{n+1} \to 0\,.$$

2. Řada funkcí $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$, kde

$$f_k(x) = (1-x)x^k, \quad x \in (0,1)\,,$$

konverguje na intervalu $(0,1)$ k funkci $f(x) = x$, $x \in (0,1)$, ale *nekonverguje stejnoměrně* na $(0,1)$. Platí totiž

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1-x)x^k = (1-x)\sum_{k=1}^{\infty} x^k = \frac{(1-x)x}{1-x} = x\,, \quad x \in (0,1)\,,$$

a je proto $\sum_{k=1}^{n} f_k \to f$, avšak

$$\Big| x - \sum_{k=1}^{n} (1-x)x^k \Big| = \Big| x - x\frac{(1-x)(1-x^n)}{1-x} \Big| = x^{n+1}, \quad x \in (0,1)\,,$$

a $\sup\{x^{n+1}\,;\, x \in (0,1)\} = 1$, $n \in \mathbb{N}_0$, tedy i $\lim_{n\to\infty} \sup\{x^{n+1}\,;\, x \in (0,1)\} \neq 0$; ostatně kdyby řada funkcí $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ konvergovala stejnoměrně na $(0,1)$, dospěli bychom snadno ke sporu s Příkladem 14.1.6.

Definice 14.2.5. Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ je řada funkcí, které jsou vesměs definovány na metrickém prostoru (P,ρ). Říkáme, že *řada* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ *konverguje lokálně stejnoměrně na* (P,ρ) *k funkci* s, jestliže částečné součty $s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ konvergují lokálně stejnoměrně k s na (P,ρ).

Označení 14.2.6. Pro lokálně stejnoměrnou konvergenci řad používáme symbol $\rightrightarrows_{\mathrm{loc}}$ a popis množiny, k níž se limitní přechod vztahuje; metriku vynecháváme, je-li zřejmé, v jakém metrickém prostoru pracujeme. Píšeme tedy např. $\sum_{k=1}^{\infty} f_k \rightrightarrows_{\mathrm{loc}} s$ na $(0,1)$, apod. Při použití symbolu $\rightrightarrows_{\mathrm{loc}}$ lze opět součet vynechat a psát

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k \rightrightarrows_{\mathrm{loc}} \text{ na } (P,\rho) \text{ jako u } f_n \rightrightarrows_{\mathrm{loc}} \text{ na } (P,\rho)\,,$$

existuje-li funkce, k níž řada na prostoru (P,ρ) lokálně stejnoměrně konverguje.

Poznámky 14.2.7. S ohledem na Příklad 14.1.6 je zřejmé, že řada vyšetřovaná v Příkladu 14.2.4 (2) konverguje *lokálně* stejnoměrně na intervalu $(0,1)$.

14.3 Kritéria stejnoměrné konvergence

Na uvedených příkladech jsme viděli, jak lze rozhodnout v některých případech o stejnoměrné konvergenci posloupností nebo řad funkcí podle definice. Předcházející příklady však také ukazují cestu k odvození *velmi jednoduchých* kritérií stejnoměrné konvergence. Je přitom lhostejné, na jaké množině A pracujeme.

Nejjednodušším a často užívaným kritériem pro stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí je patrně následující upravený „přepis definice“, se kterým jsme se v příkladech již seznámili.

Tvrzení 14.3.1. *Nechť funkce f_n, $n \in \mathbb{N}$, jsou definovány na A. Platí $f_n \rightrightarrows f$ na A, právě když existuje posloupnost nezáporných čísel $\{\alpha_n\}$ tak, že $\alpha_n \to 0$ a*

$$a_n := \sup\{|\, f_n(t) - f(t)\,|;\, t \in A\} \le \alpha_n\,.$$

Důkaz. Jestliže $\{a_n\}$ nekonverguje k 0, pak zřejmě $\limsup a_n = a > 0$ a pro nekonečně mnoho $n \in \mathbb{N}$ existují $t_n \in A$ tak, že $|\, f_n(t_n) - f(t_n)\,| > a/2 > 0$, tj. $\{f_n\}$ nekonverguje stejnoměrně k f na A.

Pokud $\alpha_n \to 0$, existuje ke každému $\varepsilon > 0$ takové $k \in \mathbb{N}$, že pro všechna $n \ge k$ je $\alpha_n < \varepsilon$. Potom pro všechna $n \ge k$ a všechna $x \in A$ je

$$|\, f_n(x) - f(x)\,| \le a_n \le \alpha_n < \varepsilon\,,$$

takže zřejmě je $f_n \rightrightarrows f$ na A. □

Poznámka 14.3.2. Zdůrazňujeme, že Tvrzení 14.3.1 v sobě skrývá jednak *ekvivalenci*

$$f_n \rightrightarrows f \text{ na } A, \text{ právě když } a_n \to 0\,,$$

a také *velmi užitečnou* implikaci $(\alpha_n \to 0) \Rightarrow (f_n \rightrightarrows f$ na $A)$. Čísla a_n totiž často nedokážeme přesně určit, přičemž může být lehké je shora odhadnout pomocí vhodných α_n.

Při vyšetřování stejnoměrné konvergence volíme zpravidla tuto strategii: snažíme se nalézt maxima, resp. suprema a_n funkcí $|\, f_n - f\,|$ na A a dokázat, že tvoří posloupnost konvergující k 0. Někdy je však jednodušší tato maxima odhadnout shora pomocí $\alpha_n \geq 0$ a ukázat, že $\alpha_n \to 0$. Je pochopitelné, že se snažíme vybrat postup, který snáze vede k cíli.

Nyní dokážeme další kritérium stejnoměrné konvergence posloupnosti $\{f_n\}$, které vyvozuje tuto konvergenci z monotonie posloupnosti $\{f_n\}$ a ze speciálních vlastností funkcí f_n. Vyslovíme ho ve znění pro kompaktní metrický prostor (P, ϱ); čtenář si může představit na místě (P, ϱ) např. interval $[\,a, b\,] \subset \mathbb{R}$.

Věta 14.3.3 (Dini 1878). *Je-li $\{f_n\}$ monotónní posloupnost spojitých funkcí konvergentní bodově na kompaktním metrickém prostoru (P, ϱ) ke spojité funkci f, pak je $f_n \rightrightarrows f$ na P.*

Důkaz. Uvědomme si nejprve, že stačí větu dokázat pro speciální případ posloupnosti nezáporných funkcí g_n konvergující monotónně k 0 a výsledek pak aplikovat na funkce $g_n = f_n - f$, resp. $g_n = f - f_n$. Je-li $\varepsilon > 0$, lze nalézt pro každé $x \in P$ takové $n = n_x$, že platí $g_{n_x}(x) < \varepsilon/2$. Všechny funkce g_{n_x} jsou spojité v P; posloupnost $\{g_n\}$ je nerostoucí. Zvolme ke každému x okolí $\mathcal{U}(x)$ tak, aby platilo $|\, g_{n_x}(y) - g_{n_x}(x)\,| < \varepsilon/2$ pro všechna $y \in \mathcal{U}(x)$. Platí tedy $g_{n_x}(y) < \varepsilon$ na $\mathcal{U}(x)$. Systém okolí $\{\mathcal{U}(x);\, x \in P\}$ tvoří pokrytí kompaktního prostoru P. Existuje proto $K \subset P$ konečná, pro kterou *konečný* systém $\{\mathcal{U}(x);\, x \in K\}$ rovněž pokrývá P. Je tedy

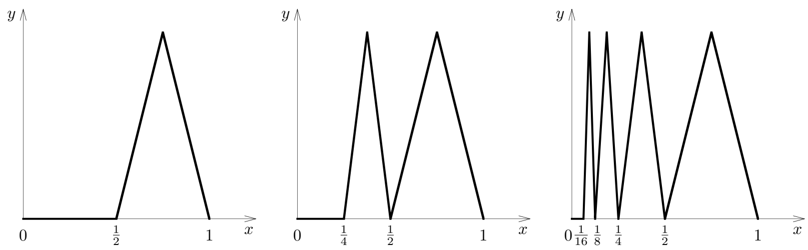
$$P \subset \bigcup \{\mathcal{U}(x);\, x \in K\}$$

a ke každému $x \in K$ přísluší ta funkce, pomocí níž bylo okolí definováno, a kterou budeme značit g_x. Nyní položme $k = \max\{n_x;\, x \in K\}$. Pro každé $y \in P$ existuje $x \in K$ tak, že $y \in \mathcal{U}(x)$. Pak pro všechna $n \geq k$ je

$$g_n(y) \leq g_k(y) < g_{n_x}(x) + \varepsilon/2 < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon\,,$$

čímž je tvrzení dokázáno. □

Příklad 14.3.4. Položme $g_n := f_1 + f_2 + \cdots + f_n$, $n \in \mathbb{N}$, kde f_n jsou funkce definované v Příkladu 12.3.7. Následující obrázek znázorňuje funkce g_1, g_2 a g_4:



Obr. 14. 1.

Funkce g_n jsou spojité a tvoří neklesající posloupnost funkcí z $\mathcal{C}([\,0, 1\,])$, která konverguje k funkci g (jde o součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$). Řada zřejmě bodově konverguje, neboť v každém bodě je nenulová maximálně jedna z funkcí f_n. Řada však zřejmě nekonverguje stejnoměrně na intervalu $[0,1]$. Podle Věty 14.3.3 nemůže být g spojitá funkce (je nespojitá právě v bodě 0). Funkce g je sice spojitá na intervalu (0, 1], to však není kompaktní množina. Odtud vidíme, že předpoklady spojitosti limitní funkce a také kompaktnosti intervalu v Diniho Větě 14.3.3 jsou podstatné.

Následující tvrzení pro řady je velmi užitečné; v literatuře bývá označováno často jako *Weierstrassův M-test* nebo *majorantní kritérium*. Jak snadno nahlédneme, jde o *postačující podmínku* pro stejnoměrnou konvergenci řady funkcí.

Věta 14.3.5 (o majorantní řadě). *Nechť $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ je řada funkcí definovaných na množině A a nechť pro (skoro všechna) $k \in \mathbb{N}$ je $\sup\{|f_k(t)|;\, t \in A\} \le \alpha_k$. Jestliže $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k < \infty$, potom řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ konverguje stejnoměrně na A.*

Důkaz. Pro částečné součty s_n řady $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ snadno dostaneme při $m > n$ odhad

$$\sup\{|s_m(t) - s_n(t)|; t \in A\} \le \alpha_{n+1} + \cdots + \alpha_m\,; \tag{14.6}$$

protože řada $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ konverguje, existuje k číslu $\varepsilon > 0$ takové $k \in \mathbb{N}$, pro které je součet na pravé straně nerovnosti (14.6) pro jakákoli $m > n \ge k$ odhadnut shora číslem ε. Posloupnost částečných součtů $\{s_n\}$ tedy splňuje podmínku z Věty 14.1.3, z čehož již tvrzení věty vyplývá. □

Příklad 14.3.6 (Riemann *1861). Definujeme-li funkci g jako součet řady

$$g(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k^2 x)}{k^2}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \tag{14.7}$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$ dostáváme

$$\left|\frac{\sin(k^2 x)}{k^2}\right| \le \frac{1}{k^2}$$

a řada $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2}$ konverguje. Podle Věty 14.3.5 konverguje proto řada v (14.7) stejnoměrně. Proto je funkce g spojitá na $\mathbb{R}$.

Věta 14.3.5 se dobře pamatuje, neboť de facto říká, že řada funkcí konverguje stejnoměrně, pokud „řada norem konverguje“. Jemnější kritéria pro stejnoměrnou konvergenci řad a další složitější věty o stejnoměrné konvergenci a integraci či derivování probereme v poslední části této kapitoly.

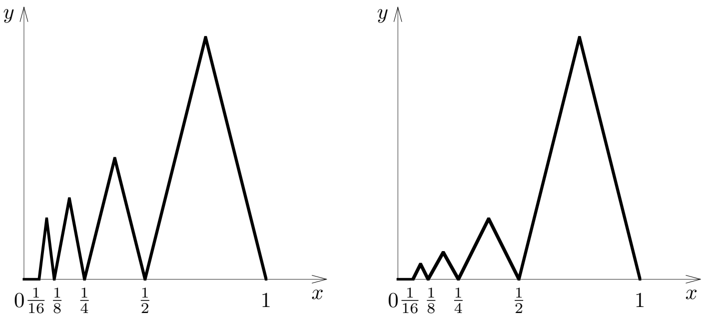
Příklad 14.3.7. Zvolme za A ve Větě 14.3.5 interval $[0,1]$; nechť funkce h_n, $n \in \mathbb{N}$, jsou definovány (načrtněte si eventuálně obrázek) *podobně* jako v Příkladu 12.3.7: je $h_n(t) = 0$ pro $t \in [0, 2^{-n}] \cup [2^{-n+1}, 1]$. Ve středovém bodě $s_n := 3/2^{n+1}$ intervalu $[2^{-n}, 2^{-n+1}]$ položíme $h_n(s_n) = 1/n$ a pak na obou intervalech $[2^{-n}, s_n]$ a $[s_n, 2^{-n+1}]$ definujeme h_n lineárně. Srovnání s Příkladem 12.3.7 ukazuje, že $h_n = \alpha_n f_n$, kde $\alpha_n = 1/n$. Snadno nahlédneme, jaký je součet h řady $\sum h_k$, neboť v každém bodě $x \in [0,1]$ je nenulová nejvýše jedna z funkcí h_k. Protože je

$$\sup\{\,|h_k(t)|\,;\; t \in [0,1]\,\} = \alpha_k\,,$$

zřejmě platí $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} = +\infty$, avšak pro $n \to \infty$ je

$$\sup\Big\{ \Big| h(t) - \sum_{k=1}^{n} h_k(t) \Big|, \, t \in [\,0,1\,] \Big\} \leq \frac{1}{n+1} \to 0\,.$$

Proto $\sum_{n=1}^{\infty} h_n \rightrightarrows$ na $[\,0,1\,]$, i když Weierstrassův M-test nám tuto informaci nepřinesl. Zvolíme-li však $\alpha_n = 1/n^2$, dostaneme snadno z Weierstrassova M-testu stejnoměrnou konvergenci takto modifikované řady $\sum h_n$. Následující obrázek znázorňuje pro lepší představu funkci h_4 v obou popsaných případech.



Obr. 14. 2.

Mnohokrát jsme použili funkce f_n z Příkladu 12.3.7, nebo jejich násobky. Na stejném principu lze konstruovat další zajímavé příklady. Pracujme s intervalem $(0,1)$ (kreslete si obrázek). Zvolíme-li např. hodnoty $\alpha_n = n$ a položíme $u_n = \alpha_n f_n$, pak nejenom $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ diverguje, ale dokonce je i $\alpha_n \to +\infty$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ nekonverguje stejnoměrně, avšak součet $u = \sum u_n$ je funkce spojitá na intervalu $(0,1)$.

Při vyšetřování stejnoměrné konvergence řad jsou často užitečná jednoduchá tvrzení, která lze poměrně snadno dokázat. Ta nám v konkrétních situacích ušetří práci, protože nebudeme muset některé standardní úvahy stále opakovat.

Tvrzení 14.3.8. *Nechť $p \in \mathbb{N}$, nechť pro $j = 1,2,\ldots,p$ jsou c_j reálná čísla a nechť řady $\sum_{k=1}^{\infty} f_{jk}(x)$ pro všechna tato j konvergují stejnoměrně na neprázdné množině M. Položme*

$$f_k(x) = c_1 f_{1k}(x) + c_2 f_{2k}(x) + \cdots + c_p f_{pk}(x)\,, \quad x \in M\,.$$

Potom řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje stejnoměrně na M.

Důkaz. Označíme-li $s_{jn}(x) := \sum_{k=1}^{n} f_{jk}(x)$ a $s_j(x) := \sum_{k=1}^{\infty} f_{jk}(x)$, $x \in M$, pak z předpokladů plyne, že pro každé $\varepsilon > 0$ lze volit indexy r_j tak, že pro všechna $n \geq r_j$, $j = 1,2,\ldots,p$ a $x \in M$ je

$$|s_{jn}(x) - s_j(x)| < \varepsilon\,.$$

Řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ zřejmě konverguje na M a označíme-li její součet S, pak pro její částečné součty S_n s $n \geq r := \max\{r_j\,;\, j = 1, 2, \dots, p\}$ dostaneme

$$\big|S_n(x) - S(x)\big| \leq |c_1||s_{1n}(x) - s_1(x)| + \cdots + |c_p||s_{pn}(x) - s_p(x)| \leq$$
$$\leq |c_1|\,\varepsilon + \cdots + |c_p|\,\varepsilon \leq \varepsilon \sum_{j=1}^{p} |c_j|\,, \quad x \in M,$$

z čehož již plyne dokazované tvrzení. □

Tvrzení 14.3.9. *Nechť řada funkcí $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje stejnoměrně na množině M. Je-li g omezená funkce na množině M, potom řada*

$$\sum_{k=1}^{\infty} g(x) f_k(x) \tag{14.8}$$

konverguje stejnoměrně na M.

Důkaz. Řada (14.8) zřejmě konverguje v každém bodě $x \in M$; označme její součet S a její částečné součty $S_n := \sum_{k=1}^{n} g \cdot f_k$. Pak ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $r \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \geq r$ je pro $s := \sum_{k=1}^{\infty} f_k$ a $s_n := \sum_{k=1}^{n} f_k$

$$|s_n(x) - s(x)| < \varepsilon\,, \quad x \in M\,.$$

Jestliže pro $K \geq 0$ je $|\,g(x)\,| \leq K$, je pro všechna $n \geq r$ a všechna $x \in M$

$$\big|S_n(x) - S(x)\big| \leq |\,g(x)\,s_n(x) - g(x)\,s(x)\,| \leq K|s_n(x) - s(x)| < K\,\varepsilon\,,$$

takže řada (14.8) konverguje stejnoměrně na M. □

Tvrzení 14.3.10. *Nechť řada funkcí $\sum_{k=1}^{\infty} |\,f_k(x)\,|$ konverguje stejnoměrně na množině M. Je-li $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ posloupnost funkcí na množině M, pro kterou existuje $K > 0$ tak, že $|\,g_k(x)\,| \leq K$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$ a všechna $x \in M$, pak řada*

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x) f_k(x) \tag{14.9}$$

konverguje stejnoměrně na M.

Důkaz. Zvolme $\varepsilon > 0$ a nalezněme $m \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \geq m$ a všechna $x \in I$ je

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |\,f_k(z)\,| < \frac{\varepsilon}{K}\,.$$

Potom pro součet S a částečné součty S_n vyšetřované řady (14.9) dostaneme

$$|S(x) - S_n(x)| = \Big|\sum_{k=n+1}^{\infty} g_k(x) f_k(x)\Big| \leq$$
$$\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |\,g_k(x)\,|\,|\,f_k(x)\,| < K \sum_{k=n+1}^{\infty} |\,f_k(x)\,| < \varepsilon$$

pro všechna $n \geq m$ a všechna $x \in I$, z čehož již vyplývá dokazované tvrzení. □

14.4 Stejnoměrná aproximace polynomy

Jestliže f, g jsou (obecně komplexní) funkce definované na množině A a pro každé $x \in A$ platí $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$, říkáme, že *$g$ stejnoměrně aproximuje f na A s přesností menší než ε*. Je to vztah symetrický, zpravidla však aproximujeme funkci „složitější“ nějakou funkcí „jednodušší“. Může být trochu překvapující, že pro každé $\varepsilon > 0$ lze každou funkci f z prostoru $\mathcal{C}([a, b])$ stejnoměrně aproximovat polynomem s přesností menší než ε.

Věta 14.4.1 (Weierstrass 1885). *Je-li f komplexní funkce spojitá na intervalu $[a, b]$, pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje polynom P takový, že*

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon \quad \textit{pro všechna} \quad x \in [a, b]\,.$$

Jak uvidíme dále, tento výsledek dostaneme z následující věty:

Věta 14.4.2. *Nechť $f \in \mathcal{C}([a, b])$ je komplexní funkce. Potom existují polynomy P_n takové, že $P_n \rightrightarrows f$ na $[a, b]$. Je-li navíc f reálná funkce, existují polynomy P_n s reálnými koeficienty, pro něž $P_n \rightrightarrows f$ na $[a, b]$.*

Tuto větu dokážeme pomocí velmi zajímavé (a podstatně mladší) Věty 14.4.4, která bývá označována jako *věta o třech funkcích*. Větu 14.4.2 však dokážeme také přímo, nezávisle na ní.

Poznámka 14.4.3. Připomeňme, že je-li operátor L na lineárním prostoru reálných spojitých funkcí $\mathcal{C}([a, b])$ (a) *lineární* (tj. pro všechny funkce $f, g \in \mathcal{C}([a, b])$ a všechna čísla $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ je $L(\alpha f + \beta g) = \alpha Lf + \beta Lg$) a (b) *nezáporný* (tj. z $f \geq 0$ plyne $Lf \geq 0$), je také *monotónní*: Z $f \leq g$ plyne $Lf \leq Lg$ [1]). Snadno nahlédneme, že

$$Lg - Lf = L(g - f) \geq 0\,.$$

Věta 14.4.4 (Korovkin 1953). *Nechť $L_n \colon \mathcal{C}([a, b]) \to \mathcal{C}([a, b])$, $n \in \mathbb{N}$, jsou nezáporné lineární operátory [2]) takové, že posloupnost $\{L_n f\}$ konverguje stejnoměrně na $[a, b]$ k funkci f pro $f = 1, \mathrm{Id}, \mathrm{Id}^2$. Potom posloupnost $\{L_n f\}$ konverguje stejnoměrně na $[a, b]$ k funkci f pro každou funkci $f \in \mathcal{C}([a, b])$.*

Důkaz. Pro pochopení věty je užitečné si uvědomit intuitivně přijatelný fakt: každá funkce $f \in \mathcal{C}([a, b])$ je infimem všech kvadratických polynomů, jejichž graf leží nad grafem funkce f. Platí totiž toto tvrzení:

(T) *Nechť $f \in \mathcal{C}([a, b])$ a nechť $\varepsilon > 0$. Potom existuje $\alpha > 0$ takové, že pro každé $y \in [a, b]$ je*

$$f(y) - \varepsilon - \alpha(\mathrm{Id} - y)^2 \leq f \leq f(y) + \varepsilon + \alpha(\mathrm{Id} - y)^2. \tag{14.10}$$

K důkazu tohoto tvrzení se vrátíme, nejprve však ukážeme, jak z něj vyplývá Korovkinova Věta 14.4.4. Zvolme $f \in \mathcal{C}([a, b])$, $\varepsilon > 0$ a $y \in [a, b]$. Protože jsou operátory

[1]) U lineárních operátorů se obvykle užívá zápisu Lf místo $L(f)$.

[2]) Pracujeme tedy zřejmě na prostoru reálných funkcí $\mathcal{C}([a, b])$, kde Id je identita na $[a, b]$. Tradiční označení identity jako „funkce x“ by v tomto případě vedlo k nepřesnostem nebo komplikovanému zápisu.

L_n lineární a nezáporné, jsou i monotónní, takže z (14.10) plynou pro funkce na $[a,b]$ nerovnosti (pro větší přehlednost užijeme závorky)

$$f(y)L_n(1) - \varepsilon L_n(1) - \alpha\big(L_n(\mathrm{Id}^2) - 2yL_n(\mathrm{Id}) + y^2L_n(1)\big) \le L_n(f) \le$$
$$\le f(y)L_n(1) + \varepsilon L_n(1) + \alpha\big(L_n(\mathrm{Id}^2) - 2yL_n(\mathrm{Id}) + y^2L_n(1)\big)\,,$$

neboli, po jednoduché úpravě

$$\big|\, L_n(f) - f(y)L_n(1)\,\big| \le \varepsilon L_n(1) + \alpha\big(L_n(\mathrm{Id}^2) - 2y\,L_n(\mathrm{Id}) + y^2L_n(1)\big) =$$
$$= \varepsilon L_n(1) + \alpha\big((L_n(\mathrm{Id}^2) - y^2) - 2y(L_n(\mathrm{Id}) - y) + y^2(L_n(1) - 1)\big)\,.$$

Tato nerovnost platí pro všechna $y \in [a,b]$. Protože z trojúhelníkové nerovnosti

$$|\, L_n(f) - f\,| - |\, f - fL_n(1)\,| \le |\, L_n(f) - fL_n(1)\,|$$

vyplývá po elementární úpravě $|\, L_n(f) - f\,| \le |\, fL_n(1) - f\,| + |L_n(f) - fL_n(1)\,|$, dostáváme odtud

$$|\, L_n(f) - f\,| \le \|\, f\,\|\,\big|\, L_n(1) - 1\,\big| + \varepsilon L_n(1) +$$
$$+\alpha\big(\,|L_n(\mathrm{Id}^2) - \mathrm{Id}^2\,| - 2\,\|\,\mathrm{Id}\,\|\,|L_n(\mathrm{Id}) - \mathrm{Id}\,| + \|\,\mathrm{Id}^2\,\|\,|L_n(1) - 1\,|\,\big)\,, \tag{14.11}$$

z čehož již plyne $L_nf \rightrightarrows f$ na $[a,b]$. Nyní se vrátíme k důkazu tvrzení (T).

Protože je f stejnoměrně spojitá na $[a,b]$, existuje takové $\delta > 0$, že

$$\big(\forall x, y \in [a,b], |x-y| \le \delta\big)\big(|\, f(x) - f(y)\,| \le \varepsilon\big)\,. \tag{14.12}$$

Dále je

$$\big(\forall x, y \in [a,b], |x-y| > \delta\big)\big(|f(x) - f(y)| \le 2\,\|f\| \le \varepsilon + 2\|f\|\,(x-y)^2\delta^{-2}\big)\,. \tag{14.13}$$

Položíme-li $\alpha = 2\|f\|\,\delta^{-2}$, plyne z (14.12) a z (14.13) tvrzení (T), čímž je důkaz Korovkinovy věty dokončen. ☐

Vztah Korovkinovy Věty 14.4.4 k Weierstrassově větě je zřejmý: Pokud existují lineární operátory L_n takové, že L_nf jsou polynomy pro každou $f \in \mathcal{C}([a,b])$, jsme s důkazem Weierstrassovy věty pro prostor *reálných* funkcí $\mathcal{C}([a,b])$ hotovi.

Pro interval $[a,b] = [0,1]$ nyní takto Weierstrassovu větu znovu dokážeme. Použijeme k tomu klasický vzorec, kterým se definují pro $n \in \mathbb{N}$ aproximující (Bernsteinovy) polynomy [3]) B_nf:

$$B_nf : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big)\binom{n}{k}\,x^k(1-x)^{n-k}\,, \quad x \in [0,1]\,. \tag{14.14}$$

Z definice (14.14) je zřejmé, že operátory $B_n : f \mapsto B_nf$ jsou na $\mathcal{C}([0,1])$ lineární, nezáporné a zobrazují tento prostor do prostoru polynomů. Nyní dokážeme následující vlastnost zobrazení B_n:

[3]) Užíváme obvyklé transkripce; jde však o ruského, resp. sovětského matematika, takže patrně správnější by bylo užít jména ve formě *Bernštejn*. Bernstein r. 1912 dokázal $B_nf \rightrightarrows f$ na $[0,1]$ pro každou $f \in \mathcal{C}([0,1])$.

Lemma 14.4.5. *Posloupnost* $\{B_n f\}$ *stejnoměrně konverguje na intervalu* $[0,1]$ *k funkci* f *pro tři funkce* $f = 1$, Id, Id^2.

Důkaz. Označme $f_k = \mathrm{Id}^k$, $k = 0, 1, 2$. Rovnost $B_n f_0 = f_0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ plyne z binomické věty. Uvažme dále, že pro $1 \le k \le n$ je

$$\frac{k}{n}\binom{n}{k} = \frac{k}{n} \cdot \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} = \binom{n-1}{k-1}. \tag{14.15}$$

Dosazením f_1 do (14.14) dostaneme pomocí rovnosti (14.15)

$$\begin{aligned} B_n f_1(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n}\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = x \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^{k-1}(1-x)^{n-k} = \\ &= x \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} x^j (1-x)^{(n-1)-j} = x \cdot 1 = f_1(x)\,, \quad x \in [0,1]\,, \end{aligned}$$

takže pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $B_n f_1 = f_1$. Konečně pomocí (14.15) spočteme pro $1 \le k \le n$

$$\Big(\frac{k}{n}\Big)^2 \binom{n}{k} = \frac{k}{n}\binom{n-1}{k-1} = \frac{k-1}{n}\binom{n-1}{k-1} + \frac{1}{n}\binom{n-1}{k-1}\,; \tag{14.16}$$

první člen posledního součtu pro $2 \le k \le n$ ještě upravíme:

$$\frac{k-1}{n}\binom{n-1}{k-1} = \frac{n-1}{n}\,\frac{k-1}{n-1}\binom{n-1}{k-1} = \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\binom{n-2}{k-2}. \tag{14.17}$$

Po dosazení f_2 do (14.14) obdržíme pro všechna $x \in [0,1]$

$$B_n f_2(x) = \sum_{k=0}^{n} \Big(\frac{k}{n}\Big)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

a pomocí (14.16) a (14.17) jednoduchou úpravou postupně dostaneme

$$\begin{aligned} B_n f_2(x) &= \Big(1 - \frac{1}{n}\Big) \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} x^k (1-x)^{n-k} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} = \\ &= \Big(1 - \frac{1}{n}\Big) x^2 \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} x^j (1-x)^{(n-2)-j} + \frac{x}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} x^j (1-x)^{(n-1)-j} = \\ &= \Big(1 - \frac{1}{n}\Big) x^2 + \frac{x}{n} = \Big(1 - \frac{1}{n}\Big) f_2(x) + \frac{1}{n} f_1(x)\,; \end{aligned}$$

Odtud vyplývá $B_n f_2 \rightrightarrows f_2$ na $[0,1]$. □

Z předcházejícího Lemmatu 14.4.5 a z Věty 14.4.4 obdržíme $B_n f \rightrightarrows f$ na $[0,1]$ při $n \to \infty$ pro všechny reálné funkce $f \in \mathcal{C}([0,1])$, tedy i druhou část Věty 14.4.2. Poznamenejme ještě, že odhad (14.4) v případě užití Bernsteinových polynomů nabude s ohledem na předcházející Lemma 14.4.5 jednoduššího tvaru:

$$|\,B_n f - f\,| \le \varepsilon + \frac{\alpha}{n}\big(\,\|\,\mathrm{Id} - \mathrm{Id}^2\,\|\big)\,. \tag{14.18}$$

V následujících Poznámkách 14.4.6 ukážeme, že z dokázaného tvrzení již snadno vyplývá (zdánlivě) obecnější plné znění Věty 14.4.2.

Poznámky 14.4.6. 1. Nejprve ukážeme, jak se případ aproximace komplexních funkcí převede na případ aproximace reálných funkcí: Je-li f komplexní funkce na intervalu $[a,b]$, $f = f_1 + \mathrm{i} f_2$, kde $f_1(x) = \mathrm{Re} f(x)$, $f_2(x) = \mathrm{Im}\, f(x)$, $x \in [a,b]$, a jsou-li p_1, p_2 polynomy s reálnými koeficienty, pro něž pro $k = 1, 2$ platí $|f_k - p_k| < \varepsilon$ na $[a,b]$, pak je

$$|(f_1 + \mathrm{i} f_2) - (p_1 + \mathrm{i} p_2)| = \sqrt{(f_1 - p_1)^2 + (f_2 - p_2)^2} \le \sqrt{2} \cdot \varepsilon < 2\varepsilon\,.$$

Proto pro komplexní funkci $p := p_1 + \mathrm{i} p_2$ platí $|f - p| < 2\varepsilon$. Přitom je $p_1 + \mathrm{i} p_2$ polynom s komplexními koeficienty. Proto stačí tvrzení dokazovat jen pro reálné funkce.

2. Je-li $f \in \mathcal{C}([a,b])$ reálná funkce a $\varphi(t) = a + t(b-a)$ lineární funkce zobrazující interval $[0,1]$ na interval $[a,b]$, definujme $g = f \circ \varphi$. Potom $g \in \mathcal{C}([0,1])$ je spojitá reálná funkce na intervalu $[0,1]$. Je-li q_n polynom s reálnými koeficienty, pro který $|g(t) - q_n(t)| < 1/n$ pro všechna $t \in [0,1]$, definujme $p_n := q_n \circ \varphi^{-1}$. Potom p_n je polynom s reálnými koeficienty a je-li $x \in [a,b]$, $x = \varphi(t)$, je také

$$\begin{aligned} |f(x) - p_n(x)| &= |(g \circ \varphi^{-1})(x) - (q_n \circ \varphi^{-1})(x)| = \\ &= |g(t) - q_n(t)| < 1/n\,, \quad x \in [a,b]\,; \end{aligned}$$

je tedy $p_n \rightrightarrows f$ na $[a,b]$. Odtud je také zřejmé, že z platnosti Věty 14.4.2 pro *jeden* speciálně zvolený uzavřený interval (v našem případě to byl interval $[0,1]$) plyne její platnost pro *každý* interval $[a,b]$.

3. Je-li l lineární funkce a P polynom, pak $|(f - l) - P| = |f - (P + l)|$ a $P + l$ je opět polynom.

Jiný důkaz Věty 14.4.2. S ohledem na Poznámky 14.4.6 stačí tvrzení dokázat pouze pro reálné funkce $f \in \mathcal{C}([0,1])$, pro které platí $f(0) = f(1) = 0$. Se zachováním označení této funkce symbolem f rozšíříme f na $\mathbb{R}$ hodnotou 0 mimo $[0,1]$, takže f je *stejnoměrně* spojitá na intervalu $[0,1]$, a tedy i na $\mathbb{R}$.

Definujeme pro všechna $n \in \mathbb{N}$ polynomy $Q_n(x) = c_n(1 - x^2)^n$, přičemž koeficienty $c_n \in \mathbb{R}$ volíme tak, aby platilo

$$\int_{-1}^{1} Q_n(x)\,\mathrm{d}x = 1\,, \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{14.19}$$

Odhadneme velikost c_n pomocí výpočtu

$$\begin{aligned} (c_n)^{-1} &= \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^n\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 (1 - x^2)^n\,\mathrm{d}x \ge 2\int_0^{1/\sqrt{n}} (1 - x^2)^n\,\mathrm{d}x \ge \\ &\ge 2\int_0^{1/\sqrt{n}} (1 - nx^2)\,\mathrm{d}x = 2\Big[x - \frac{nx^3}{3}\Big]_{x=0}^{1/\sqrt{n}} = \frac{4}{3\sqrt{n}} > (\sqrt{n})^{-1}\,, \end{aligned}$$

z něhož vyplývá odhad shora

$$c_n < \sqrt{n}\,. \tag{14.20}$$

K odhadu integrované funkce jsme použili Bernoulliho nerovnost, kterou jsme dokázali v Příkladu 1.3.24. Pro libovolné δ, $0 < \delta < 1$, a $x \in [\,\delta, 1\,]$ platí

$$0 \le Q_n(x) \le \sqrt{n}\,(1-\delta^2)^n =: a_n\,. \tag{14.21}$$

Protože $a_{n+1}/a_n \to (1-\delta^2) < 1$, řada $\sum a_n$ konverguje, z čehož plyne $a_n \to 0$, a tedy podle Věty 14.3.1 platí $Q_n(x) \rightrightarrows 0$ na $\{x \in \mathbb{R}\,;\, \delta \le |x| \le 1\}$. Nyní budeme definovat aproximující polynomy p_n

$$p_n(x) := \int_{-1}^{1} f(x+t)\,Q_n(t)\,\mathrm{d}t\,, \quad x \in [\,0,1\,]\,.$$

Využijeme toho, že funkce f se anuluje na $\mathbb{R} \setminus [\,0,1\,]$ a změníme integrační meze a pak pomocí substituce $u = x + t$ dostaneme pro funkce p_n vyjádření

$$p_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x+t)\,Q_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-x}^{1-x} f(x+t)\,Q_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{1} f(u)\,Q_n(u-x)\,\mathrm{d}u\,.$$

Z tvaru posledního integrálu vidíme, že p_n je polynom v proměnné x, přičemž je to reálný polynom, protože f je reálná funkce. Nechť $\varepsilon > 0$. Ze stejnoměrné spojitosti funkce f plyne, že existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $x, y \in [\,0,1\,]$, $|x-y| < \delta$ je

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2\,.$$

Označme $M := \max\{|f(x)|;\, x \in [\,0,1\,]\}$ a zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $4Ma_n < \varepsilon/2$ pro všechna $n \ge n_0$. Protože Q_n jsou sudé a nezáporné funkce, dostaneme pro všechna $x \in [\,-1,1\,]$ a všechna $n \ge n_0$ s použitím (14.19) – (14.21) postupně

$$\begin{aligned}|f(x) - p_n(x)| &= \left|\int_{-1}^{1} (f(x) - f(x+t))\,Q_n(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \int_{-1}^{1} \big|\,f(x) - f(x+t)\,\big|\,Q_n(t)\,\mathrm{d}t \le \\ &\le 4M \int_{\delta}^{1} Q_n(t)\,\mathrm{d}t + \frac{\varepsilon}{2}\int_{-\delta}^{\delta} Q_n(t) \le 4Ma_n + \varepsilon/2 < \varepsilon\,;\end{aligned}$$

odtud plyne $p_n \rightrightarrows f$ na $[\,0,1\,]$ pro $n \to \infty$, což jsme chtěli dokázat. □

14.5 Zobecnění Weierstrassovy věty

Ukážeme, že Weierstrassova věta připouští dalekosáhlé zobecnění. Je-li X kompaktní metrický prostor a je-li $\mathcal{S}(X)$ systém spojitých funkcí (reálných nebo komplexních) na prostoru X, který je „dostatečně bohatý“ a má určité algebraické vlastnosti, pak je každá spojitá funkce na X limitou stejnoměrně konvergentní posloupnosti funkcí z $\mathcal{S}(X)$.

Nahradit interval $[\,a,b\,]$ ve Větě 14.4.1 kompaktním metrickým prostorem X je vcelku přirozené, narazíme však na překážku: v tvrzení vystupují polynomy. Je proto vhodné si rozmyslet, co to vlastně polynomy z algebraického hlediska jsou. V klasickém případě jsou to reálné nebo komplexní funkce, které jsou lineárními kombinacemi mocnin $1, x, x^2, \ldots$. Tyto funkce jsou mocninami funkce Id, které všechny vzniknou (v systému uzavřeném na násobení) z funkcí $1, \mathrm{Id}$. To nás vede k následujícím jednoduchým definicím.

Definice 14.5.1. Systém funkcí $\mathcal{A}(X)$ na množině X se nazývá *algebra*, je-li (reálným nebo komplexním) lineárním prostorem uzavřeným na násobení, tj.

$$f,\, g \in \mathcal{A}(X) \;\Rightarrow\; f \cdot g \in \mathcal{A}(X)\,.$$

Definice 14.5.2. Systém reálných funkcí $\mathcal{A}(X)$ na množině X se nazývá *svaz*, je-li uzavřený na operace tvoření maxima a minima, tj.

$$f, g \in \mathcal{A}(X) \;\Rightarrow\; \max\{f, g\} \in \mathcal{A}(X) \quad \text{a} \quad \min\{f, g\} \in \mathcal{A}(X)\,.$$

Oba tyto systémy hrají při zobecňování Weierstrassovy věty významnou roli. Nejprve se budeme věnovat systémům funkcí, které tvoří svaz; uveďme jednoduché příklady:

Příklady 14.5.3. 1. Lineární prostor reálných funkcí $\mathcal{C}([\,a, b\,])$ nebo $\mathcal{C}((P, \rho))$ je současně svazem i algebrou. Lineární prostor komplexních funkcí $\mathcal{C}([\,a, b\,])$ nebo $\mathcal{C}((P, \rho))$ je algebrou.

2. Systém všech reálných nebo komplexních polynomů na intervalu $[\,a, b\,]$ je vlastním podprostorem lineárního prostoru $\mathcal{C}([\,a, b\,])$ a je i algebrou, není to však (ani v reálném případě) svaz. Tato algebra je „nejmenší“ z těch, které obsahují konstantní funkci 1 a identitu Id.

Lemma 14.5.4. *Jestliže je $\mathcal{A}(X)$ vektorový prostor (nad $\mathbb{R}$) reálných funkcí na množině X a jestliže z $f \in \mathcal{A}(X)$ plyne, že $|f| \in \mathcal{A}(X)$, potom je $\mathcal{A}(X)$ svaz.*

Důkaz. Z $f,\, g \in \mathcal{A}(X)$ plyne, že funkce $f + g$ i $f - g$ leží v $\mathcal{A}(X)$. Zbývá pouze si uvědomit, že z rovností

$$\max\{f,\, g\} = \big((f+g) + |f-g|\big)/2 \quad \text{a} \quad \min\{f,\, g\} = \big((f+g) - |f-g|\big)/2$$

vyplývá, že $\mathcal{A}(X)$ je svaz. □

Definice 14.5.5. Množinu všech takových funkcí f, pro které existuje posloupnost funkcí $f_n \in \mathcal{A}(X)$, $n \in \mathbb{N}$, taková, že pro $n \to \infty$ je $f_n \rightrightarrows f$ na X, budeme značit $\mathrm{cl}\,(\mathcal{A}(X))$ (toto označení pro „stejnoměrný uzávěr“ je odvozeno od anglického termínu *closure*).

Definice 14.5.6. Systém funkcí $\mathcal{B}(X)$ definovaných na X *odděluje body* X, jestliže ke každé dvojici bodů $x, y \in X$, $x \neq y$, existuje funkce $f \in \mathcal{B}(X)$, pro kterou $f(x) \neq f(y)$ (funkce f tedy obecně závisí na volbě dvojice bodů $x, y \in X$).

Věta 14.5.7 (Stone *1937). *Nechť $\mathcal{S}(X) \neq \emptyset$ je svaz a současně i lineární prostor reálných spojitých funkcí na kompaktní množině $X \subset (P, \rho)$. Nechť $\mathcal{S}(X)$ odděluje body X a obsahuje konstantní funkci 1. Potom $\mathrm{cl}\,(\mathcal{S}(X)) = \mathcal{C}(X)$.*

Důkaz. Zvolme $f \in \mathcal{C}(X)$ a $\varepsilon > 0$. Ukážeme, jak se z předpokladů odvodí existence funkce $g \in \mathcal{S}(X)$, pro kterou $\|f - g\| = \sup\{\,|f(t) - g(t)|\,;\, t \in X\} < \varepsilon$, tj.

$$f(t) - \varepsilon \,<\, g(t) \,<\, f(t) + \varepsilon\,, \quad t \in X\,.$$

Zvolme tedy $x \in X$ a pro každé $y \in X \setminus \{x\}$ funkci $g_{x,y} \in \mathcal{S}$ tak, aby

$$g_{x,y}(x) = f(x) \quad \text{a}\; g_{x,y}(y) = f(y)\,.$$

Takovou funkci snadno sestrojíme: $\mathcal{S}(X)$ obsahuje všechny konstantní funkce a jelikož v $\mathcal{S}(X)$ existuje funkce h, pro kterou $h(x) \neq h(y)$, stačí definovat

$$g_{x,y}(t) = f(x)\,\frac{h(t)-h(y)}{h(x)-h(y)} + f(y)\,\frac{h(t)-h(x)}{h(y)-h(x)}\,, \quad t \in X\,.$$

Dále definujme

$$\mathcal{U}_x(y) := \{\, t \in X\,;\, g_{x,y}(t) < f(t) + \varepsilon \,\}\,.$$

Protože $g_{x,y}$ i f jsou spojité funkce, je $\mathcal{U}_x(y)$ otevřená množina obsahující bod y. Každá z těchto množin obsahuje i bod x. Systém otevřených množin

$$\{\mathcal{U}_x(y)\,;\, y \in X \setminus \{x\}\}$$

pokrývá kompaktní prostor X, existuje tedy $m \in \mathbb{N}$ a body $y_1, y_2, \ldots, y_m$ tak, že

$$\{\mathcal{U}_x(y_1), \mathcal{U}_x(y_2), \ldots, \mathcal{U}_x(y_m)\}$$

je pokrytí X. Položíme-li $g_x := \min\{g_{x,y_1}, \ldots, g_{x,y_m}\}$, pak na každém z okolí $\mathcal{U}_x(y_k)$ je $g_x \le g_{x,y_k} < f + \varepsilon$. Jelikož je $\mathcal{S}(X)$ svaz, je $g_x \in \mathcal{S}(X)$ a $g_x < f + \varepsilon$ na X. Podobně definujeme

$$\mathcal{V}(x) := \{\, t \in X\,;\, g_x(t) > f(t) - \varepsilon \,\}\,, \quad x \in X\,.$$

Protože g_x i f jsou spojité funkce, je $\mathcal{V}(x)$ otevřená množina obsahující bod x. Systém $\{\, \mathcal{V}(x)\,;\, x \in X \,\}$ je tedy otevřeným pokrytím kompaktního prostoru X. Z tohoto systému vybereme konečné pokrytí X

$$\{\, \mathcal{V}(x_1), \mathcal{V}(x_2), \ldots, \mathcal{V}(x_n) \,\}$$

a sestrojíme funkci $g = \max\{\, g_{x_1}, g_{x_2}, \ldots, g_{x_n} \,\}$. Je zřejmě $g \in \mathcal{S}(X)$ a protože je $g \ge g_{x_k} > f - \varepsilon$ na každém $\mathcal{V}(x_k)$ a zároveň $g \le g_{x,y_k}(t) < f + \varepsilon$ na každém okolí $\mathcal{U}_x(y_k)\,,\ k = 1, 2, \ldots, m,$ plyne odtud

$$f(t) - \varepsilon < g(t) < f(t) + \varepsilon\,, \quad t \in X\,.$$

Odtud vyplývá, že funkce f leží v $\operatorname{cl}(\mathcal{S}(X))$, a tedy $\mathcal{C}(X) \subset \operatorname{cl}(\mathcal{S}(X))$. Protože z Věty 14.1.5 plyne opačná inkluze, dostáváme rovnost $\operatorname{cl}(\mathcal{S}(X)) = \mathcal{C}(X)$. □

Dokázaná Věta 14.5.7 Weierstrassovu větu nezobecňuje, neboť restrikce všech polynomů na interval $[\,a, b\,]$ netvoří svaz. Abychom dostali takovou verzi, ze které Věta 14.4.1 vyplyne jako speciální případ, musíme ještě dokázat některá jednoduchá tvrzení.

Lemma 14.5.8. *Nechť $\mathcal{A}(X)$ je algebra (reálných nebo komplexních) omezených funkcí definovaných na množině X a nechť $\|f\|_\infty = \sup\{\, |f(x)|\,;\, x \in X \,\}$ je norma na X. Potom uzávěr $\operatorname{cl}(\mathcal{A}(X))$ v této normě je opět algebra.*

Důkaz. Pro každou funkci $f \in \mathcal{A}(X)$ odhadneme $|f|$ pomocí jejího suprema $\|f\|_\infty$. Popíšeme podrobněji pouze případ s *reálným* lineárním prostorem, pro komplexní lineární prostor probíhá důkaz analogicky.

Podle Definice 14.5.5 leží funkce f v $\operatorname{cl}(\mathcal{A}(X))$, právě když existují $f_n \in \mathcal{A}(X)$ tak, že $f_n \rightrightarrows f$ na X. K libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje takové $k \in \mathbb{N}$, že $\|f_k - f\| < \varepsilon$. Pak je $\|f\| \le \|f_n\| + \|f - f_n\| < \|f_n\| + \varepsilon$, takže funkce f je omezená.

Pro každé dvě funkce $f, g \in \mathrm{cl}\,(\mathcal{A}(X))$ a každé číslo $c \in \mathbb{R}$ existují posloupnosti funkcí $f_n, g_n \in \mathcal{A}(X)$ tak, že $\|f_n - f\| \to 0$ a $\|g_n - g\| \to 0$. Pak

$$\|(f_n + g_n) - (f+g)\| \leq \|f_n - f\| + \|g_n - g\| \quad \text{a} \quad \|cf_n - cf\| \leq |c|\,\|f_n - f\|\,,$$

z čehož již lehce plyne, že $\mathrm{cl}\,(\mathcal{A}(X))$ je lineární prostor. Z nerovnosti

$$\|f_n g_n - fg\| \leq \|f_n - f\|\,\|g\| + \|g_n - g\|\,\|f\| + \|f_n - f\|\,\|g_n - g\|\,,$$

pak již snadno vyplývá, že $\mathrm{cl}\,(\mathcal{A}(X))$ je algebra. □

Lemma 14.5.9. *Nechť $a > 0$. Potom existuje posloupnost polynomů $\{p_n\}$ s reálnými koeficienty taková, že $p_n(0) = 0$ a zároveň $p_n \rightrightarrows |\,\mathrm{Id}\,|$ na $[-a, a\,]$.*

Důkaz. Weierstrassova Věta 14.4.2 zaručuje existenci reálných polynomů q_n takových, že $q_n \rightrightarrows |\,\mathrm{Id}\,|$ na $[-a, a\,] \subset \mathbb{R}$. Pak pro $p_n = q_n - q_n(0)$ je $p_n(0) = 0$ a

$$\|\, p_n - |\,\mathrm{Id}\,|\, \| \leq \|\, q_n - |\,\mathrm{Id}\,|\, \| + \|\, q_n(0)\,\| \to 0\,,$$

čímž je tvrzení dokázáno. □

Lemma 14.5.10. *Je-li $\mathcal{A}(P)$ uzavřená algebra omezených spojitých funkcí na metrickém prostoru (P, ρ) (vzhledem ke stejnoměrné konvergenci na P), pak*

$$f,\, g \in \mathcal{A}(P) \;\Rightarrow\; \max\{f, g\} \in \mathcal{A}(P) \quad \text{a} \quad \min\{f, g\} \in \mathcal{A}(P)\,.$$

Důkaz. S ohledem na Lemma 14.5.4 stačí dokázat, že z $f \in \mathcal{A}(P)$ plyne $|f| \in \mathcal{A}(P)$, protože $f+g$ i $f-g$ leží v $\mathcal{A}(P)$. Zvolme $\varepsilon > 0$ a $f \in \mathcal{A}(P)$. Dále zvolme $a > \|f\|$. Podle Lemma 14.5.9 existuje polynom p s vlastností $p(0) = 0$ tak, že platí $p(t) = \sum_{k=1}^m a_k t^k$ a

$$\Big\|\, \sum_{k=1}^m a_k t^k - |t|\, \Big\| < \varepsilon\,, \quad t \in [-a, a\,]\,.$$

Jelikož $-a \leq f(x) \leq a$ pro všechna $x \in P$, vyplývá odtud pro funkci f

$$\Big\|\, \sum_{k=1}^m a_k \big(f(x)\big)^k - |\, f(x)\,|\, \Big\| < \varepsilon\,, \quad x \in P\,,$$

a protože $\mathcal{A}(P)$ je algebra, je funkce $g := \sum_{k=1}^m a_k\, f^k$ z $\mathcal{A}(P)$ a platí $\|\,|f| - g\,\| < \varepsilon$. To již stačí pro konstrukci posloupnosti funkcí $g_n \in \mathcal{A}(P)$, pro kterou je $g_n \rightrightarrows |f|$ na P. Proto $|\,f\,| \in \mathrm{cl}\,(\mathcal{A}(P)) = \mathcal{A}(P)$. □

Důsledek 14.5.11. *Nechť (P, ϱ) je kompaktní metrický prostor. Je-li $\mathcal{A}(P)$ libovolná uzavřená algebra reálných funkcí v $\mathcal{C}(P)$, je $\mathcal{A}(P)$ zároveň (uzavřený) svaz.*

Nyní již můžeme vyslovit tvrzení, které bývá často označováno jako *reálná verze Stone-Weierstrassovy věty.* Čtenář by si měl povšimnout, že jeho předpoklady se odlišují od „svazové verze“ jen v tom, že systém funkcí, se kterým pracujeme, je nyní místo svazem algebrou.

Věta 14.5.12 (Stone *1937). *Nechť $X \subset (P, \rho)$ je kompaktní a nechť $\mathcal{A}(X)$ je algebra reálných funkcí spojitých na X. Odděluje-li algebra $\mathcal{A}(X)$ body X a obsahuje-li i konstantní funkci 1, je $\mathrm{cl}\,(\mathcal{A}(X)) = \mathcal{C}(X)$.*

Důkaz. Případ množiny X obsahující jediný bod je triviální, neboť všechny konstantní funkce na X tvoří již prostor $\mathcal{C}(X)$. Dále platí podle Lemmatu 14.5.8, že $\mathrm{cl}\,(\mathcal{A}(X))$ je algebra. Ta podle Lemmatu 14.5.10 obsahuje s každou funkcí f také funkci $|f|$, proto je dle Důsledku 14.5.11 svazem (a tedy i lineárním prostorem). Tvrzení pak již plyne ze Stoneovy Věty 14.5.7. Tím je důkaz reálné verze Stone-Weierstrassovy věty dokončen. □

Poznámka 14.5.13. V základním Příkladu 14.5.3 (2) musí existovat polynom p, který podmínku Lemmatu 14.5.4 nesplňuje. To je např. polynom $p(x) = x - (a+b)/2$, $x \in \mathbb{R}$, protože funkce $|p|$ není na $[\,a, b\,]$ restrikcí polynomu.

Příklady 14.5.14. 1. Triviálně platí: Algebra $\mathcal{C}([\,a, b\,])$ všech spojitých funkcí na intervalu $[\,a, b\,]$ odděluje body intervalu $[\,a, b\,]$, neboť obsahuje např. funkci $f(x) = x$, $x \in [\,a, b\,]$. Uzávěr $\mathrm{cl}\,(\mathcal{C}([\,a, b\,]))$ je roven $\mathcal{C}([\,a, b\,])$.

2. Také algebra $\mathcal{P}([\,a, b\,])$ všech (restrikcí) polynomů na $[\,a, b\,]$ odděluje body $[\,a, b\,]$, je však vlastní podalgebrou $\mathcal{C}([\,a, b\,])$. Podle Weierstrassovy věty je jejím uzávěrem $\mathrm{cl}\,(\mathcal{P}([\,a, b\,]))$ algebra $\mathcal{C}([\,a, b\,])$.

3. Systém všech funkcí z $\mathcal{P}([\,a, b\,])$, které se anulují v bodě $(a+b)/2$, odděluje body $[\,a, b\,]$, avšak tato algebra obsahuje jedinou konstantní funkci na $[\,a, b\,]$, a to funkci $f \equiv 0$.

4. Snadno nahlédneme, že systém všech funkcí z $\mathcal{C}([\,a, b\,])$, které se anulují v bodě $(a+b)/2$, odděluje body $[\,a, b\,]$, a je to algebra $\mathcal{A}$, obsahuje však opět jedinou konstantní funkci $f \equiv 0$. Uzávěr této algebry obsahuje pouze funkce z $\mathcal{C}([\,a, b\,])$ ležící v $\mathcal{A}$.

5. Systém $\mathcal{B}$ všech funkcí z $\mathcal{C}([\,a, b\,])$, které se anulují ve dvou různých bodech $x, y \in [\,a, b\,]$, je algebra, která však neodděluje body intervalu $[\,a, b\,]$.

6. Uzávěr $\mathrm{cl}(\mathcal{B})$ systému $\mathcal{B}$ z bodu 5 obsahuje pouze ty funkce z $\mathcal{C}([\,a, b\,])$, které leží v $\mathcal{B}$. Systém $\mathcal{P}$ všech *polynomů* z $\mathcal{B}$ obsahuje pouze jedinou konstantní funkci $f \equiv 0$, ale snadno lze nahlédnout, že $\mathrm{cl}\,(\mathcal{P}) = \mathcal{B}$ a je to algebra.

14.6 Další důležitá tvrzení

Ilustrovali jsme jistou nedostatečnost bodové konvergence pro přenášení některých vlastností na limitní funkci. Lepší schopnost přenášet „příjemné vlastnosti" funkcí má však stejnoměrná konvergence. Jedno z tvrzení, které matematicky dokumentuje toto vágní vyjádření, jsme dokázali v Kapitole 13 o metrických prostorech v Lemmatu 13.2.6. Nyní si analogických tvrzení dokážeme více.

Věta 14.6.1. *Nechť funkce f_n mají Riemannův integrál na intervalu $[\,a, b\,]$, nechť $f_n \rightrightarrows f$ na $[\,a, b\,]$. Potom i funkce f má Riemannův integrál na $[\,a, b\,]$ a platí*

$$\lim_{n\to\infty} (\mathcal{R})\!\int_a^b f_n = (\mathcal{R})\!\int_a^b f\,. \tag{14.22}$$

Důkaz. V důkazu pracujeme pouze s $(\mathcal{R})$-integrály. Z $f_n \rightrightarrows f$ na $[\,a, b\,]$ plyne, že

$$a_n := \sup\bigl\{|f(x) - f_n(x)|\,;\, x \in [\,a, b\,]\bigr\} \to 0\,.$$

Proto k $\varepsilon > 0$ existuje $k \in \mathbb{N}$ tak, že pro $n \geq k$ je $a_n < \varepsilon$. Zvolme takové $n \in \mathbb{N}$; pak je

$$f_n - \varepsilon \leq f \leq f_n + \varepsilon\,,$$

a tedy pro libovolné dělení $D \in \mathcal{D}([\,a, b\,])$ snadno dostaneme

$$s(f_n; D) - \varepsilon(b-a) \leq s(f; D) \leq S(f; D) \leq S(f_n; D) + \varepsilon(b-a)\,.$$

Odtud jednoduchou úpravou obdržíme

$$S(f; D) - s(f; D) \leq (S(f_n; D) - s(f_n; D)) + 2\varepsilon(b-a)\,.$$

Protože je $f_n \in \mathcal{R}([\,a, b\,])$, lze volit dělení $D \in \mathcal{D}([\,a, b\,])$ tak, že první člen na pravé straně je odhadnut např. číslem $\varepsilon(b-a)$. Z toho, že je $S(f; D) - s(f; D) \leq 3\varepsilon(b-a)$ plyne podle Věty 11.2.12, že i limitní funkce f má Riemannův integrál.

Dále platí

$$\Big| \int_a^b f - \int_a^b f_n \Big| \leq \int_a^b |\, f_n - f\,| \leq \|\, f_n - f\,\|_\infty \cdot (b-a)\,,$$

z čehož plyne vztah (14.22). □

Jádro důkazu Věty 14.1.5 o spojitosti a stejnoměrné konvergenci je patrně nejvíce zřejmé z obecnější věty, kterou si nyní dokážeme v kontextu MP. Připomeňme, že se záměnou limit jsme se setkali již např. při vyšetřování spojitosti „limitní funkce“.

Věta 14.6.2 (Moore 1900, Osgood 1897). *Nechť* (P, ϱ) *je metrický prostor a nechť* $x_0 \in P$ *je jeho hromadný bod. Nechť dále* $\{f_n\}$ *je posloupnost (komplexních) funkcí na* $P \setminus \{x_0\}$ *a platí*

(1) $f_n \rightrightarrows f$ *na* $P \setminus \{x_0\}$,

(2) $f_n(x) \to a_n$ *pro* $x \to x_0$.

Potom též existují vlastní $\lim_{n\to\infty} a_n$ *a* $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *a jsou si rovny.*

Důkaz. K $\varepsilon > 0$ existuje $k \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $m, n \geq k$, $m, n \in \mathbb{N}$, a $x \in P \setminus \{x_0\}$, platí

$$(x \in P \setminus \{x_0\}) \Rightarrow (|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon)\,,$$

a tedy, po limitním přechodu $x \to x_0$, rovněž i $|a_m - a_n| \leq \varepsilon$. Odtud vyplývá konvergence $\{a_n\}$. Položme $\lim a_n = a$. Dále platí

$$|\, f(x) - a\,| \leq |\, f(x) - f_n(x)\,| + |\, f_n(x) - a_n\,| + |\, a_n - a\,|\,.$$

Nyní lze volbou $n \in \mathbb{N}$ dosáhnout toho, že první a třetí člen na pravé straně nerovnosti je odhadnut pro všechna $x \in P \setminus \{x_0\}$ pomocí $\varepsilon/3$. Potom zvolíme $\delta > 0$ tak, že pro prstencové okolí $\mathcal{P}_\delta$ bodu x_0 v P platí

$$(x \in \mathcal{P}_\delta) \Rightarrow |f_n(x) - a_n| < \varepsilon/3\,,$$

z čehož už lehce dostaneme dokazované tvrzení. □

Důsledek 14.6.3. *Nechť existuje* $\delta > 0$ *tak, že*

(1) $f_n \rightrightarrows f$ *na* $(c, c+\delta)$,

(2) $f_n(x) \to a_n$ *pro* $x \to c_+$.

Potom též existují vlastní $\lim_{n\to\infty} a_n$ *a* $\lim_{x\to c_+} f(x)$ *a jsou si rovny.*

Poznámka 14.6.4. Obdobná podmínka „funguje" i pro případ $x \to c_-$, jestliže interval v (1) bude tvaru $(c-\delta, c)$ a obecně s libovolným prstencovým okolím $\mathcal{P}(c)$ bodu c, na němž je $f_n \rightrightarrows f$. To je důležité pro lokální vlastnosti (spojitost, diferencovatelnost apod.), neboť někdy stačí ověřovat stejnoměrnou konvergenci pouze *lokálně*. Promyslete si důkaz Věty 14.1.5, založený na právě dokázané Moore-Osgoodově větě.

Věta 14.6.5 (Weierstrass 1861). *Nechť funkce* f_n, $n \in \mathbb{N}$, *mají vesměs vlastní derivaci všude v intervalu* (a,b), *a nechť*

(1) *existuje* $x_0 \in (a,b)$ *tak, že* $\{f_n(x_0)\}$ *konverguje,*

(2) *pro derivace* f_n' *platí* $f_n' \rightrightarrows_{\mathrm{loc}}$ *na* (a,b).

Potom též $f_n \rightrightarrows_{\mathrm{loc}}$ *na* (a,b) *a označíme-li* $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, $x \in (a,b)$, *má* f *na* (a,b) *derivaci* f' *a platí*

$$f_n' \rightrightarrows_{\mathrm{loc}} f' \quad \textit{na} \quad (a,b)\,.$$

Důkaz. Důkaz využívá zejména Moore-Osgoodovu větu (Věta 14.6.2) a je složitější pouze formálně. Postupně dokážeme, že z předpokladů plyne pro vhodně zvolený interval $[\,c,d\,] \subset (a,b)$

$$f_n \rightrightarrows \text{ na } [\,c,d\,] \quad \text{a potom pro} \quad f := \lim_{n\to\infty} f_n \quad \text{též} \quad f_n' \rightrightarrows_{\mathrm{loc}} f' \text{ na } (a,b)\,.$$

Pro práci s lokálně stejnoměrnou konvergencí využijeme tvrzení Věty 14.1.10 a zvolíme (zatím libovolně) nedegenerovaný interval $[\,c,d\,] \subset (a,b)$. Pro $x,t \in [\,c,d\,]$, $x \neq t$, platí podle Lagrangeovy věty (Věta 5.2.18) pro funkci $(f_m - f_n)$, přičemž v čitateli zlomku ještě přehazujeme pořadí členů

$$\frac{(f_m(t) - f_m(x)) - (f_n(t) - f_n(x))}{t-x} = (f_m'(\xi) - f_n'(\xi))\,, \tag{14.23}$$

kde ξ leží mezi body t a x, tj. v (c,d). Odtud snadno dostaneme

$$|(f_m(t) - f_m(x)) - (f_n(t) - f_n(x))| \le (d-c)\,|f_m'(\xi) - f_n'(\xi)|\,. \tag{14.24}$$

Předpokládejme nyní, že platí $x_0 \in [\,c,d\,]$. Z odhadu (14.24) plyne splnění Bolzano-Cauchyho podmínky pro stejnoměrnou konvergenci posloupnosti $\{f_n\}$ na $[\,c,d\,]$, neboť platí

$$|f_m(x) - f_n(x)| \le |(f_m(x) - f_n(x)) - (f_m(x_0) - f_n(x_0))| + |f_m(x_0) - f_n(x_0)|\,,$$

a proto je

$$|f_m(x) - f_n(x)| \le (d-c)|f_m'(\xi) - f_n'(\xi)| + |f_m(x_0) - f_n(x_0)|\,.$$

Z $f'_n \rightrightarrows$ na $[\,c,d\,]$ a konvergence posloupnosti $\{f_n(x_0)\}$ dostáváme $f_n \rightrightarrows$ na $[\,c,d\,]$; to však platí pro každý interval $[\,c,d\,] \subset (a,b)$ obsahující x_0, a proto podle Věty 14.1.10 je $f_n \rightrightarrows_{\text{loc}}$ na (a,b). Zvolme nyní pevně interval $[\,c,d\,]$, bod $x \in [\,c,d\,]$ a definujme

$$\Phi_n(t) := \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x}\,, \quad \Phi(t) := \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

pro $t \in [\,c,d\,] \setminus \{x\}$. Použijeme opět rovnost (14.23) a obdržíme z ní

$$\left| \frac{(f_m(t) - f_m(x))}{t - x} - \frac{(f_n(t) - f_n(x))}{t - x} \right| \le |f'_m(\xi) - f'_n(\xi)|\,;$$

z této nerovnosti dostaneme Bolzano-Cauchyho podmínku pro $\{\Phi_n\}$, takže je

$$\Phi_n(t) \rightrightarrows \text{ na } [\,c,d\,] \setminus \{x\}\,.$$

Nyní se využije Věty 14.6.2 na okolí bodu $\{x\}$ v $[\,c,d\,]$. Zřejmě $\Phi_n(t) \rightrightarrows \Phi(t)$ na $[\,c,d\,]\setminus\{x\}$ a pro $t \in [\,c,d\,] \setminus \{x\}$, $t \to x$ dostaneme

$$\lim_{t\to x} \Phi_n(t) = f'_n(x)\,, \quad f'(x) = \lim_{t\to x} \Phi(t) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x)\,.$$

Tím je důkaz dokončen. □

Příklad 14.6.6. Předcházející věta ukazuje, že při derivování posloupnosti funkcí „člen po členu“ není situace jednoduchá. Položme

$$f_n(x) = \frac{\sin(n^2 x)}{n}\,, \qquad g_n(x) = \sin\frac{x}{n^2}\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Potom platí $f_n \to 0$ a $g_n \to 0$ na $\mathbb{R}$. Je však $|f_n(x) - 0| \le 1/n \to 0$, a proto $f_n \rightrightarrows$ na $\mathbb{R}$, ale zároveň je $|g_n(n^2\pi/2) - 0| = 1$, a tedy *neplatí* $g_n \rightrightarrows$ na $\mathbb{R}$. Všimněte si, že všechny funkce jsou dokonce z $\mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R})$. Pro derivace f'_n a g'_n dostáváme

$$f'_n(x) = n\cos(n^2 x)\,, \quad g'_n(x) = \frac{1}{n^2}\cos\frac{x}{n^2}\,,$$

a tedy neplatí $f'_n \to 0$ na $\mathbb{R}$, avšak platí $g'_n \rightrightarrows 0$ na $\mathbb{R}$. Z Věty 14.6.5 snadno dostaneme, že $g_n \rightrightarrows_{\text{loc}} 0$ na $\mathbb{R}$, protože $g_n(0) = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, a tedy $\{g_n(0)\}$ konverguje.

Příklad 14.6.7. Nežli budeme dokazovat následující větu, uvedeme další ilustrativní příklad pro Newtonův integrál. Definujme

$$f(x) := (1 - |x|)^+ = \max(1 - |x|, 0)\,.$$

Pomocí f definujeme posloupnost funkcí $\{g_n\}$

$$g_n(x) := (1/n) f(x/n)\,, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Zřejmě existují Newtonovy integrály z g_n přes $\mathbb{R}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a jsou vesměs rovny 1. I když platí $g_n \rightrightarrows 0$, je

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)\,\mathrm{d}x \ = 1 \ne 0 = \int_{-\infty}^{\infty} (\lim_{n\to\infty} g_n(x))\,\mathrm{d}x\ .$$

Příklad ukazuje důležitost předpokladu omezenosti intervalu v následující větě, která je analogií Věty 14.6.1.

Věta 14.6.8. *Nechť $f_n \rightrightarrows f$ na omezeném intervalu (a,b), nechť f_n mají primitivní funkce na (a,b) a nechť $f_n \in \mathcal{N}(a,b)$, tj. f_n, $n \in \mathbb{N}$, mají konečný Newtonův integrál na (a,b). Potom existuje primitivní funkce k f na (a,b), Newtonův integrál z f přes (a,b) konverguje a je*

$$\lim_{n\to\infty} (\mathcal{N})\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = (\mathcal{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{14.25}$$

Důkaz. Označme F_n primitivní funkce k f_n, přičemž F_n volme tak, aby pro pevně zvolený bod $x_0 \in (a,b)$ platilo $F_n(x_0) = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Zopakujeme úvahu z důkazu předchozí věty; platí

$$\begin{aligned}|F_m(x) - F_n(x)| = |(F_m(x) - F_n(x)) - (F_m(x_0) - F_n(x_0))| \le\\ \le |f_m(\xi) - f_n(\xi)| \cdot (b-a)\,,\end{aligned}$$

kde jsme odhadli rozdíl pomocí Lagrangeovy věty (Věta 5.2.18). Bod ξ leží mezi x a x_0, tedy v (a,b) a rozdíl $|x - x_0|$ jsme odhadli délkou (omezeného dle předpokladů!) intervalu (a,b). Použijeme ještě předchozí větu na funkce F_n a obdržíme pro $F := \lim_{n\to\infty} F_n$ rovnost $F'(x) = f(x)$, $x \in (a,b)$. Na koncové body a, b uvažovaného intervalu aplikujeme Větu 14.6.2, čímž dostaneme pro $x \to a_+$, resp. $x \to b_-$, vztahy

$$\lim_{n\to\infty} F_n(a+) = \lim_{x\to a+} F(x) = F(a+)\,, \quad \lim_{n\to\infty} F_n(b-) = \lim_{x\to b-} F(x) = F(b-)\,.$$

Odtud snadno dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} (F_n(b-) - F_n(a+)) = F(b-) - F(a+) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

což je žádaná rovnost (14.25). □

Poznámka 14.6.9. Čtenář snadno nahlédne, že i když jsme pro zjednodušení pracovali v předcházejících větách pouze s primitivními funkcemi, jejich tvrzení platí i pro zobecněné primitivní funkce. Věty jsme vyslovili pro posloupnosti. Přihlédneme-li ke vztahu

$$\sum f_n \rightrightarrows_{\text{loc}} \text{ na } (a,b) \iff s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k \rightrightarrows_{\text{loc}} \text{ na } (a,b)\,,$$

dostaneme odtud snadno obdobná tvrzení pro řady funkcí. Proto následující tvrzení dokazovat nebudeme.

Věta 14.6.10. *Nechť $\sum f_k$ je řada funkcí majících vesměs vlastní derivaci na (a,b) a nechť existuje bod $x_0 \in (a,b)$ tak, že $\sum f_k(x_0)$ konverguje. Jestliže platí $\sum f_k' \rightrightarrows_{\text{loc}}$ na (a,b), je rovněž $\sum f_k \rightrightarrows_{\text{loc}}$ na (a,b) a pro $s := \sum f_k$ platí*

$$s'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)\,, \quad x \in (a,b)\,.$$

Zkráceně, i když ne zcela přesně, říkáme, že „řadu $\sum f_n$ lze derivovat člen po členu“. Podobná věta platí pro integrál, avšak jako u Riemannova integrálu musíme v případě $(\mathcal{N})$-integrálu pracovat s *omezeným* intervalem (a,b). Vyslovíme ji pro Newtonův integrál.

Věta 14.6.11. *Nechť* $\sum f_k$ *je řada funkcí newtonovsky integrovatelných na* omezeném *intervalu o koncových bodech* a, b, *a* $\sum f_k \rightrightarrows$ *na* (a, b). *Označíme-li* $f := \sum f_k$, *je funkce* f *newtonovsky integrovatelná a je*

$$(\mathcal{N})\int_a^b f = \sum_{k=1}^{\infty} (\mathcal{N})\int_a^b f_k \,.$$

Poznámka 14.6.12. Analogická věta platí i pro Riemannův integrál.

Je přirozené, že čtenáře může napadnout otázka, jak souvisí absolutní a stejnoměrná konvergence. Pozitivní výsledek ve speciálním případě by mohl čtenáře svést k mylným domněnkám.

Příklad 14.6.13 (Pringsheim 1899). Vyšetřeme funkci f definovanou součtem řady

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2}\Big(\frac{1}{1+x^2}\Big)^n \,.$$

Zřejmě pro všechna $x \neq 0$ platí rovnost $f(x) = (1+x^2)^{-1}$, což po vytknutí prvého zlomku dostaneme snadno sečtením geometrické řady. Dosazením též snadno ověříme $f(0) = 0$. Protože jde o řadu s nezápornými členy, konverguje *absolutně* všude v $\mathbb{R}$. Jelikož jde o řadu spojitých funkcí, jejíž součet je evidentně funkce nespojitá v bodě 0, řada *nekonverguje stejnoměrně* na $\mathbb{R}$, ani např. na intervalu $[\,0, 1\,]$. Konvergence je však lokálně stejnoměrná na $(\,0, 1\,]$.

Příklad 14.6.14. Vyšetřeme podrobněji řadu funkcí

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^2+n}{n^2} \,.$$

Protože platí pro každé $x \in \mathbb{R}$ a každé $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{n} \le \frac{x^2+n}{n^2} = \Big|(-1)^{n+1}\frac{x^2+n}{n^2}\Big| =: a_n \,,$$

řada nekonverguje absolutně *v žádném bodě* $x \in \mathbb{R}$. Bodová konvergence řady je však zřejmá z Leibnizova kritéria (viz Věta 3.3.1) a naprosto analogicky jako tam dostáváme pro $m > n$ obecně odhad

$$|s_m(x) - s_n(x)| \le a_{n+1}(x) \,.$$

Vidíme tedy, že pro (lokálně) stejnoměrnou konvergenci řady se střídavými znaménky $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n(x)$ stačí dokázat (lokálně) $a_n \rightrightarrows 0$. V našem konkrétním případě platí

$$\Big|(-1)^{n+1}\frac{x^2+n}{n^2}\Big| \le \frac{M^2}{n^2} + \frac{1}{n} \le \frac{M^2+1}{n}, \quad \text{pro všechna } x,\ |x| \le M \,,$$

takže řada *konverguje lokálně stejnoměrně* na $\mathbb{R}$.

Předcházející dvojice příkladů dostatečně přesvědčivě ukazuje, že spolu stejnoměrná a absolutní konvergence v obecném případě příliš nesouvisí. To ostatně ilustrují i neabsolutně konvergentní číselné řady; zároveň ukazují další směr postupu.

14.7 Další kritéria

Připomeňme nejprve Abelovu parciální sumaci, se kterou jsme se již setkali.

Lemma 14.7.1 (Abel 1826). *Nechť $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$, $\{b_k\}_{k=0}^{\infty}$ jsou posloupnosti komplexních čísel, $p, q \in \mathbb{Z}$, $-1 \le p < q$. Označme*

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k\,, \quad n \in \mathbb{N}_0\,, \quad s_{-1} = 0\,. \tag{14.26}$$

Potom

$$\sum_{k=p+1}^{q} a_k b_k = \sum_{k=p+1}^{q} s_k(b_k - b_{k+1}) + s_q b_{q+1} - s_p b_{p+1}\,. \tag{14.27}$$

Důkaz. Stručně připomínáme: pro $k \ge 0$ je

$$a_k b_k = (s_k - s_{k-1})\, b_k = s_k(b_k - b_{k+1}) + s_k b_{k+1} - s_{k-1} b_k\,,$$

a tyto rovnosti „sečteme“ pro $k = p+1, p+2, \dots q$, čímž obdržíme dokazovanou rovnost (14.27). □

Věta 14.7.2 (Abel). *Nechť $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ a $\{b_k\}_{k=0}^{\infty}$ jsou posloupnosti omezených komplexních funkcí na množině $X \ne \emptyset$, a nechť s_n jsou definovány pomocí* (14.26)*. Potom řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k$ konverguje stejnoměrně na X, je-li splněna alespoň jedna z následujících podmínek* (*v případech označených* *) *jsou samozřejmě funkce b_k, $k \in \mathbb{N}_0$, reálné*) *:*

(1) $\{s_n\,;\, n \in \mathbb{N}_0\}$ *je systém stejně omezených funkcí na X a*

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\, b_k - b_{k+1}\,| \rightrightarrows \ \text{na } X, \quad b_k \rightrightarrows 0 \ \text{na } X; \tag{14.28}$$

(2) $\{s_n\,;\, n \in \mathbb{N}_0\}$ *je systém stejně omezených funkcí na X a*

$$\{b_k\} \text{ je monotónní posloupnost }^*) \text{ a } \quad b_k \rightrightarrows 0 \ \text{na } X\,; \tag{14.29}$$

(3) $s_n \rightrightarrows$ *na X a systémy $\left\{ \sum_{k=0}^{n} |\, b_k - b_{k+1}\,|\,;\, n \in \mathbb{N}_0 \right\}$ a $\{b_k\,;\, k \in \mathbb{N}_0\}$ jsou oba stejně omezené na X;*

(4) $s_n \rightrightarrows$ *na X, $\{b_k\}$ je monotónní posloupnost* *) *a systém $\{b_k\,;\, k \in \mathbb{N}_0\}$ je stejně omezený na X.*

Poznámka 14.7.3. Předcházející věta je označena jako Abelova, ač její jednotlivé části bývají spojovány se jmény Niels Henrik Abel (1802 - 1829), Pierre Gustav Lejeune Dirichlet (1805 – 1859), Paul David Du Bois-Reymond (1831 – 1889) a Richard Julius Wilhelm Dedekind (1831 – 1916) (viz [13], str. 421, odkud je též převzat důkaz této věty). Označení je přirozené v tom smyslu, že důkazy všech jednotlivých částí jsou založeny na Abelově parciální sumaci.

Důkaz. Využijeme Bolzano-Cauchyho podmínku pro stejnoměrnou konvergenci *funkcí*. Budeme užívat označení $\|\cdot\|$ pro supremovou normu vzhledem k X. V každém z případů (1) – (4) existují $A, B \in \mathbb{R}$ tak, že je

$$|s_k(x)| \le A\,, \quad |b_k(x)| \le B$$

pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$ a $x \in X$; uvažte, že jsou-li funkce a_k omezené na X, jsou omezené i s_k na X a $s = \lim s_k$ je rovněž omezená na X. Dále platí odhad $\|s_k\| \le \|s - s_k\| + \|s\|$. Z (14.27) dostaneme

$$\Big|\sum_{k=p+1}^{q} a_k(x)\, b_k(x)\Big| \le A \sum_{k=p+1}^{q} |\, b_k(x) - b_{k+1}(x)| + A\big(\,|b_{q+1}(x)\| + \|\, b_{p+1}(x)|\,\big)\,, \quad (14.30)$$

pro všechna $x \in X$ a $0 < p < q$. Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Protože každý ze sčítanců na pravé straně nerovnosti (14.30) lze odhadnout volbou dostatečně velkých $p, q \in \mathbb{N}$, $p < q$, shora daným ε, plyne odtud $\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k \rightrightarrows$ na X v případě (1).

Při splnění podmínek (2) mají všechny rozdíly $b_k - b_{k+1}$ buď kladné znaménko nebo mají všechny záporné znaménko. Pak je ale

$$\begin{aligned}\sum_{k=p+1}^{q} |\, b_k(x) - b_{k+1}(x)\,| &= \Big|\sum_{k=p+1}^{q} \big(b_k(x) - b_{k+1}(x)\big)\Big| = \\ &= \big|\, b_{q+1} - b_{p+1}\big| \le \|\, b_{q+1}\,\| + \|\, b_{p+1}\,\| \le 2B\,, \end{aligned} \quad (14.31)$$

přičemž odtud a z (14.30) vyplyne odhad

$$\Big|\sum_{k=p+1}^{q} a_k(x) b_k(x)\Big| \le 2A\,\big(\|\, b_{q+1}\,\| + \|\, b_{p+1}\,\|\big)\,,$$

a tedy i Bolzano-Cauchyho podmínka pro stejnoměrnou konvergenci řady; platí tedy $\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k \rightrightarrows$ na X i v případě (2).

Jestliže $s_k \rightrightarrows$ na X, položíme $s = \lim s_k$. Výpočtem ověříme rovnost (nyní však již pracujeme s funkcemi, pouze argument x vynecháváme)

$$0 = \sum_{k=p+1}^{q} s(b_k - b_{k+1}) + s b_{q+1} - s b_{p+1}\,,$$

a tuto rovnost „odečteme“ od (14.27). Obdržíme tak

$$\sum_{k=p+1}^{q} a_k b_k = \sum_{p+1}^{q} (s_k - s)(b_k - b_{k+1}) + (s_q - s) b_{q+1} - (s_p - s) b_{p+1}\,. \quad (14.32)$$

Označme ještě $C_p = \sup\{\|s_k - s\|\,;\, k \ge p\}$; zřejmě $C_p \to 0$ pro $p \to \infty$. Užitím (14.32) dostaneme

$$\Big|\sum_{k=p+1}^{q} a_k b_k\Big| \le \sum_{k=p+1}^{q} C_p\,|\, b_k - b_{k+1}\,| + C_p\, B + C_p\, B \le C_p\,(M + 2B) \to 0\,,$$

kde M je horní odhad částečných součtů $\sum_{k=0}^{n} |\, b_k - b_{k+1}\,|$ pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ (a všechna $x \in X$). Tak opět dostáváme $\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k \rightrightarrows$ na X v případě (3).

V posledním případě (4) uvážíme, že odhad (14.31) dává „stejnoměrný odhad“ pro částečné součty řady $\sum_{k=0}^{n} |\, b_k - b_{k+1}\,|$ hodnotou $2B$, čímž se tento případ převede na případ předcházející. $\square$

Poznámky 14.7.4. 1. V předcházející větě vystupují dvě posloupnosti funkcí, avšak jedna či obě tyto posloupnosti mohou mít vesměs konstantní členy. Je proto použitelná i na řady typu $\sum f_k\, g_k$, $\sum c_k\, f_k$, $\sum c_k\, d_k$, kde f_k, g_k jsou funkce a c_k, d_k jsou z $\mathbb{C}$ či $\mathbb{R}$.

2. Každou řadu typu $\sum u_k$ lze vyjádřit ve tvaru $\sum a_k b_k$ mnoha způsoby. Potenciálně lze tedy užít Větu 14.7.2 na *jakoukoli* řadu, ale věta nedává žádný návod, jak takovou vhodnou faktorizaci obecně získat.

3. Sama Věta 14.7.2 je složitější, je proto zbytečné ji užívat v případech, kdy k cíli vedou prostředky mnohem jednodušší, např. Weierstrassův M-test.

Příklady 14.7.5. 1. Je-li $\{b_k\}_{k=0}^{\infty}$ monotónní posloupnost reálných čísel, $b_k \to 0$, pak pro každé $0 < \delta < 2$ mocninná řada $\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ konverguje stejnoměrně na množině $X_\delta = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| \le 1,\ |z-1| \ge \delta\}$. Položíme-li totiž $a_k(z) = z^k$, potom pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ a všechna $z \in X_\delta$ je

$$|\,s_n(z)\,| = \Big|\sum_{k=0}^{n} z^k\Big| = \Big|\frac{z^{n+1}-1}{z-1}\Big| \le \frac{2}{|\,z-1\,|} \le \frac{2}{\delta},$$

a můžeme tedy použít Větu 14.7.2, (2), ze které vyplyne tvrzení.

2. Pro $|z| = 1$, $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ je $|z-1| = \big|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\big| \cdot \big|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t/2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t/2}\big| = 2|\sin(t/2)|$. Proto pro $t \in [\,\delta, 2\pi-\delta\,]$ je $|z-1| \ge 2|\sin(\delta/2)|$, a tedy řady (reálná a imaginární část řady z předcházejícího příkladu pro $|z| = 1$)

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k \cos(kx)\,, \quad \text{a} \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k \sin(kx)$$

konvergují stejnoměrně na intervalu $[\,\delta, 2\pi-\delta\,]$. S analogickými řadami budeme ještě dále pracovat.

3. Doporučujeme čtenáři k samostatnému rozmyšlení, že podobně i řady

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k b_k \cos(kx)\,, \quad \text{a} \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} b_k \sin(kx)$$

konvergují stejnoměrně na intervalu $[\,-\pi+\delta, \pi-\delta\,]$.

4. Zacházíme-li s mocninnými řadami, je přirozené si všimnout speciálního případu řady z předcházejícího příkladu. Řada s $b_n = 1/n$, tj.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}$$

konverguje pro $z \in (-1,1)$ k funkci $-\log(1-z)$ a zřejmě konverguje stejnoměrně na každé množině X_δ z předcházejícího příkladu. Je proto její součet přirozené považovat za „komplexní logaritmus“ definovaný na této množině. Odtud dostaneme např. rovnost

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \log 2\,.$$

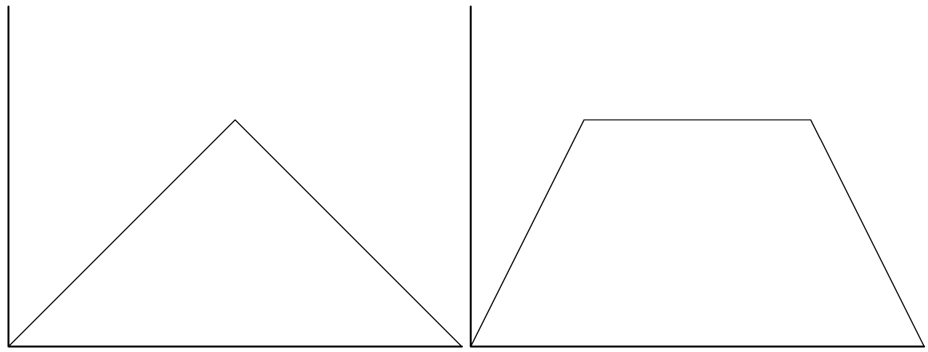
Příklad 14.7.6. V Příkladu 11.5.1 jsme sestrojili „pilovitou funkci“ f, která je lineární na každém intervalu $[\,k-1, k\,]$ pro $k \in \mathbb{Z}$. Funkce f je 2-periodická a spojitá na $\mathbb{R}$, přičemž platí $0 \le f \le 1$. Pro všechna $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ je $f'(x) = \pm 1$. Položme $f_k(x) = f(2^k x)/2^k$, $k \in \mathbb{N}$, a definujme

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Každá z funkcí f_k je spojitá a řada $\sum f_k$ konverguje stejnoměrně podle Věty 14.3.5, neboť pro všechna $x \in \mathbb{R}$ je

$$|f_k(x)| \le 2^{-k} \quad \text{a platí} \quad \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1 < \infty\,.$$

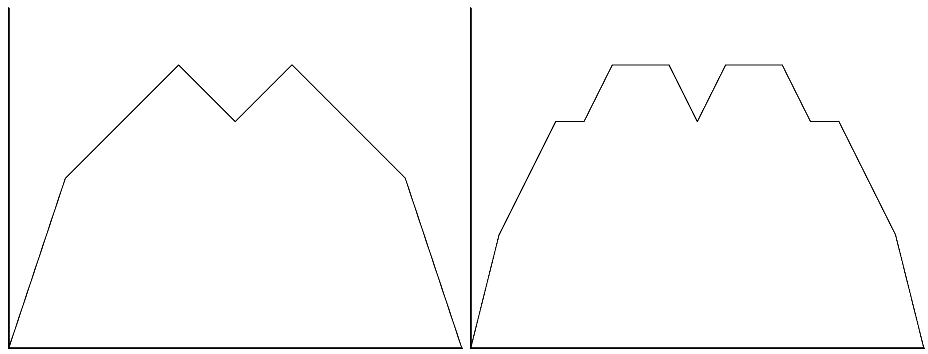
Obrázky Obr. 14. 3 – 14. 5 zachycují prvních sedm částečných součtů řady na intervalu $[\,0,1\,]$; funkce g je zřejmě 1-periodická funkce, obrázky proto dávají dobrou představu o chování řady na $\mathbb{R}$.



Obr. 14. 3.

Funkce g je tedy spojitá na $\mathbb{R}$ podle Věty 14.1.5. Pro $k \in \mathbb{N}$ je funkce f_k lineární na intervalech $[\,(s-1)/2^k, s/2^k\,]$ pro každé $s \in \mathbb{Z}$ a uvnitř těchto intervalů, kterým budeme říkat intervaly řádu k, platí $f_k'(x) = \pm 1$; zároveň je funkce f_k periodická s periodou 2^{1-k}. Zvolme libovolně $x \in \mathbb{R}$. Dokážeme, že $g'(x)$ není vlastní, tj. že neexistuje vlastní limita

$$\lim_{y \to x} \frac{g(y) - g(x)}{y - x}\,.$$



Obr. 14. 4.

Protože x leží vždy alespoň v jednom z intervalů I_n řádu n, lze zvolit posloupnost do sebe zařazených intervalů $I_{n+1} \subset I_n$, $n \in \mathbb{N}$, tak, že $x \in I_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. V každém z intervalů I_n o délce 2^{-n} existuje bod x_n tak, že $|x_n - x| = 2^{-(n+1)}$. Zřejmě platí $x_n \to x$ a

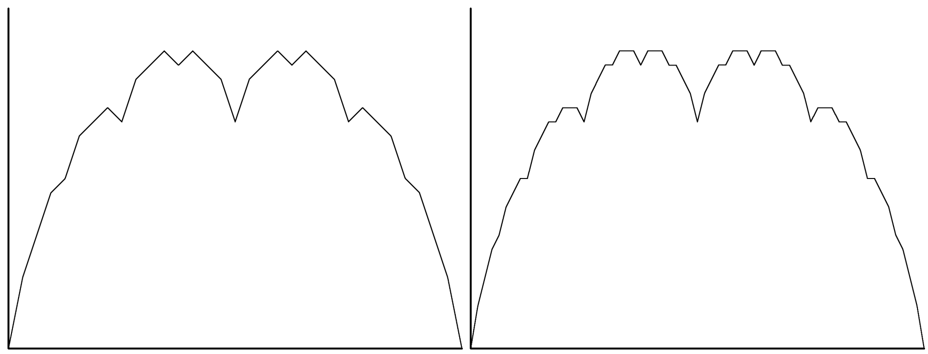
$$\frac{f_k(x_n) - f_k(x)}{x_n - x} = 0$$

pro všechna $k > n + 1$. Proto je

$$\frac{g(x_n) - g(x)}{x_n - x} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f_k(x_n) - f_k(x)}{x_n - x} = \sum_{k=1}^{n+1} (\pm 1)\,,$$

kde sčítáme $(n + 1)$ nenulových hodnot, z nichž každá je rovna $+1$ nebo -1. Hodnota posledního součtu je tedy liché číslo pro n sudé a sudé číslo pro n liché, zruší se vždy jen sudý počet sčítanců. Proto posloupnost čísel $(g(x_n) - g(x))/(x_n - x)$ obsahuje pouze celá čísla a *není cauchyovská*, nemůže tedy pro $n \to \infty$ konvergovat.

Vzhledem k volbě x jsme tak sestrojili funkci $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, která nemá vlastní derivaci v žádném bodě z $\mathbb{R}$. Popsaný důkaz je modifikací postupu, který se v literatuře označuje jako *Waerdenův příklad spojité funkce bez derivace*. Funkci tohoto typu vyšetřoval již r. 1903 Teiji Takagi (1875 – 1960); viz též [13], str. 174. Ač se Waerdenův příklad liší od Takagiho jen nepodstatně, metoda důkazu je založena na triku, který v případě vyšetřované funkce nelze použít.



Obr. 14. 5.

Sčítáním vhodně volených funkcí lze sestrojit zajímavé příklady; vyložený aparát umožňuje užívat i nekonečné součty (řady) funkcí a tak „kumulovat“ body zvláštního charakteru.

Příklad 14.7.7. Označme $\{r_n\}$ *prostou* posloupnost *všech* racionálních čísel z intervalu $(0,1)$ a položme $h_n(x) = \operatorname{sgn}(x - r_n)$, $x \in (0,1)$. Pak je funkce

$$h(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\, h_n(x)\,, \quad x \in (0,1)\,,$$

součtem neklesajících funkcí, a je tedy rovněž neklesající. Řada je podle Weierstrassova M-testu stejnoměrně konvergentní. Proto pro všechna $y \in (0,1)$ platí

$$\lim_{x\to y+} h(x) = \lim_{x\to y+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\, h_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to y+} \frac{1}{2^n}\, h_n(x)$$

a podobně i pro $\lim_{x\to y-} h(x)$. Je zřejmé, že funkce h je spojitá v každém iracionálním bodě $y \in (0,1) \setminus \mathbb{Q}$, neboť každá funkce h_n má v těchto bodech stejné jednostranné limity. V každém bodě $y \in (0,1) \cap \mathbb{Q}$ je nespojitá, neboť v součtu existuje *právě jedna* funkce h_l, pro kterou je $\lim_{x\to y-} h_l < \lim_{x\to y+} h_l$. Protože mezi každými dvěma body $u, v \in (0,1)$, $u < v$, existuje alespoň jedno racionální číslo, je h rostoucí funkce na $(0,1)$, která je nespojitá ve všech bodech nekonečné spočetné množiny $(0,1) \cap \mathbb{Q}$ husté v $(0,1)$.

Příklad 14.7.8. Je-li $\{r_n\}$ opět prostá posloupnost všech racionálních čísel z intervalu $(0,1)$, $g_n(x) = |x - r_n|$, $x \in (0,1)$, pak je funkce

$$g(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\, g_n(x)\,, \quad x \in (0,1)\,,$$

konvexní, avšak v každém bodě r_n, $n \in \mathbb{N}$, je $g'(r_n-) < g'(r_n+)$, a tedy $g''(x)$ neexistuje pro žádné $x \in (0,1)$. Snadno zjistíme, že g je součtem stejnoměrně konvergentní řady spojitých funkcí, a je tedy spojitá. Je konvexní, neboť je součtem konvexních funkcí a má v každém bodě jednostranné derivace. Protože

$$\frac{g(x) - g(y)}{x - y} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\, \frac{g_n(x) - g_n(y)}{x - y}$$

a řada vpravo přitom opět konverguje stejnoměrně, lze jednostranné derivace funkce g spočítat jako součty jednostranných derivací funkcí g_n. Označíme-li

$$h_n^r(y) := \lim_{x\to y+} \operatorname{sgn}(\, x - r_n\,)\,, \quad h_n^l(y) := \lim_{x\to y-} \operatorname{sgn}(\, x - r_n\,)\,, \quad y \in (0,1)\,,$$

pak je

$$g'_+(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\, h_n^r(x)\,, \quad g'_-(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\, h_n^l(x)\,, \quad x \in (0,1)\,.$$

a je $g'_-(x) < g'_+(x)$ pro všechna $x \in (0,1) \cap \mathbb{Q}$; v ostatních bodech $g'(x)$ existuje.

Příklad 14.7.9 (Lerch 1888). Je-li $\{r_n\}$ opět prostá posloupnost všech racionálních čísel z intervalu $(0,1)$,

$$f_n(x) := (x - r_n)^2 \sin \frac{1}{x - r_n}\,, \quad f_n(r_n) = 0\,, \quad x \in (0,1)\,,$$

pak funkce

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n(x)$$

je součtem stejnoměrně konvergentní řady spojitých funkcí (používáme Weierstrassův M-test), a proto je spojitá na intervalu $(0,1)$. Pro derivace platí

$$f_n'(x) = 2(x - r_n) \sin \frac{1}{x - r_n} - \cos \frac{1}{x - r_n}\,, \quad f_n'(r_n) = 0\,, \quad x \in (0,1)\,,$$

tedy sčítanci mají všude na intervalu $(0,1)$ vlastní derivaci, tyto derivace jsou omezené, a proto rovněž $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} f_n' \rightrightarrows$ na $(0,1)$; použili jsme opět M-test, z něhož stejnoměrná konvergence vyplývá. V každém bodě $x \in (0,1) \setminus \mathbb{Q}$ jsou vesměs všechny f_n' spojité, a tedy i f' je spojitá v x. Stejnou úvahu lze aplikovat na $f' - f_n'$ v bodě r_n, avšak f_n' *není spojitá* v bodě r_n. Tak jsme získali spojitou funkci f s *velmi nespojitou* derivací f' (je nespojitá ve všech bodech množiny $\mathbb{Q} \cap (0,1)$).

Příkladů podobného typu lze nalézt mnohem více, uvedli jsme jen některé pro pochopení principu.

Historické poznámky 14.7.10. Pojem stejnoměrné konvergence byl obtížně zvládnutelný i pro špičkové matematiky minulého století. Tak např. Louis Augustin Cauchy (1789 – 1857) „dokázal", že součet konvergentní řady spojitých funkcí je spojitá funkce (protipříklad podal Abel v r. 1826). Někteří historikové interpretují Cauchyho důkazy jako použití metod nestandardní analýzy a tak dokazují, že Cauchyho nelze ze záměny bodové a stejnoměrné konvergence vinit. Odhlédneme-li od práce z r. 1841 o funkcích komplexní proměnné, kterou napsal Carl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815 – 1897) (otištěna 1894) ještě jako gymnaziální profesor, publikovali r. 1848 nezávisle poměrně cenné, ne však zcela jasné, příspěvky k problému spojitosti součtu řady spojitých funkcí Philipp L. Seidel (1821 – 1896) a George Gabriel Stokes (1819 – 1903). Cauchy později svou práci z r. 1821 opravil a současně r. 1857 definoval stejnoměrnou konvergenci. Weierstrass pak r. 1861 dokázal tentýž výsledek o spojitosti limity posloupnosti spojitých funkcí spolu s Větou 14.6.5 o derivování (za vcelku nepodstatně silnějších předpokladů).

Jak již bylo jednou zmíněno, vyvíjely se představy o derivaci relativně pomalu; při jejich studiu je nutné vždy pečlivě zkoumat i soudobé představy o jiných pojmech (např. o funkci, její spojitosti apod.). Je známo, že Bernhard Riemann (1826 – 1866) již v roce 1854 uváděl na přednáškách jako příklad funkci

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\{nx\}}{n^2}$$

(zde $\{\dots\}$ značí funkci „lomená (zlomková) část", tj. $\{x\} = x - [x]$; příklad byl publikován v roce 1867). Tato funkce je *nespojitá* na husté podmnožině $\mathbb{R}$, má však Riemannův integrál např. přes interval $[0,1]$. Nejpozději kolem roku 1861 rovněž na přednáškách uváděl příklad funkce

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2}\,, \tag{14.33}$$

která neměla mít v žádném bodě vlastní derivaci (všimněte si, že přitom sčítáme funkce třídy $\mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R})$).

Weierstrass ještě v roce 1872 napsal, že i přední matematici jako např. Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855), Cauchy i Pierre Gustav Lejeune Dirichlet (1805 – 1859) patrně plně akceptovali soudobou představu, že derivace spojité funkce nemusí existovat (nebo být nevlastní) jen na izolované množině bodů. Když se Weierstrass snažil dokázat, že Riemannem definovaná funkce g z (14.33), resp. (14.7), nemá nikde derivaci, ztroskotal. Posléze však přesto dokázal sestrojit jinou *spojitou funkci h na $\mathbb{R}$, která nemá v žádném bodě vlastní derivaci.* Definoval ji podobným způsobem jako Riemann, a to jako součet řady

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)\,,$$

kde b je liché číslo, $b > 1$ a $0 < a < 1$; přitom předpokládal, že platí $ab > 1 + (3/2)\pi$ [4]).

Jádro věty o spojitosti a dalších vět o záměně limit popsal William Fogg Osgood (1864 – 1943) v práci z r. 1897. Tím patrně završil cestu k chápání pojmu stejnoměrné konvergence a jejího významu pro věty, které v sobě skrývají „záměnnost“. U nás je užíván obvykle název *Moore-Osgoodova věta*.

Weierstrassův příklad funkce h publikoval v r. 1875 Paul David Du Bois Reymond (1831 – 1889). Weierstrass o příkladu referoval již 18. 7. 1872, ale publikoval ho až r. 1880. Je poučné se u této problematiky ještě zastavit. Teprve v r. 1918 se podařilo Hardymu dokázat, že Riemannem definovaná funkce g z (14.33), *nemá* derivaci ve všech iracionálních násobcích čísla π a taktéž i v *některých* racionálních násobcích π. Avšak v r. 1970 (!) ukázal Joseph L. Gerver, že existují body, v nichž g *má* vlastní derivaci (!) a o rok později podal jejich úplnou charakteristiku; viz [6].

Weierstrassův příklad byl přijímán s rozpaky. Je znám například výrok, jehož autorem je Charles Hermite (1822 – 1901), který v dopise Thomasovi-Janu Stieltjesovi (1856 – 1894) napsal o spojitých funkcích, které nemají nikde derivaci: *Ale tyto vývody, jakkoli jsou elegantní, jsou postiženy klatbou* (...). *Se zděšením a hrůzou se odvracím od té politováníhodné rány, kterou nám zasadily tyto spojité funkce* (...). K funkcím podobných vlastností dospěli Charles Cellérier (1818 – 1889) kolem r. 1860 a ne později než r. 1834 Bernard Bolzano (1781 – 1848). Bolzanova konstrukce je geometrické povahy, Cellérier pracoval s řadou funkcí. Je vcelku pochopitelné, že přesné vyšetření (ne)diferencovatelnosti pro tyto funkce bylo provedeno až později. Objev Bolzanovy funkce byl značně stimulující pro české matematiky; učinil ho středoškolský profesor Martin Jašek (1879 – 1945), který ve třicátých letech vytvořil fotodokumentaci těch Bolzanových rukopisů, které byly uloženy ve vídeňském archívu; srovnej [7].

Již jsme se zmínili o konstrukci složitých funkcí pomocí řad a o prioritě Bernarda Bolzana, který si nejen jako první uvědomil, že spojité funkce mohou mít mnoho bodů, ve kterých derivace neexistuje, ale funkci tohoto typu i jako první popsal. Viděli jsme, jak

[4]) Později v r. 1916 dokázal Gotfried Harold Hardy (1877 – 1947), že stačí předpokládat $0 < a < 1$ a $ab \geq 1$.

lze metodou kategorií existenci „spojitých funkcí bez derivace“ dokázat, příklady konkrétních funkcí této vlastnosti jsou však vždy nutně netriviální. Patrně nejjednodušší příklad, který je v současné době znám, je spojován se jménem Bartel Leendert van der Waerden (1903 – 1996), i když Waerden pouze reprodukoval řešení úlohy o nediferencovatelných funkcích, které podali Heyting a Buseman. Již před jeho objevením na konci 30. let tohoto století existovaly „tovární“ postupy na konstrukci funkcí tohoto typu, bylo jich více a byly považovány za vcelku standardní. Příklad 14.7.6 je modifikovaným příkladem Waerdenovým, náleží však zřejmě Takagimu; viz např. [13], str. 174. Protože platí tvrzení, že *monotónní funkce na intervalu* $(0,1)$ *má v tomto intervalu derivaci všude až na množinu Lebesgueovy míry 0*, je každý příklad spojité funkce bez derivace na intervalu $(0,1)$ i příkladem funkce, která není monotónní v žádném intervalu $(a,b) \subset (0,1)$.

Další příklady ilustrují metodu, které se někdy říká *metoda kondenzace singularit.* Pochází od Hermana Hankela (1839 – 1873); k dokonalosti ji dovedl Ulisse Dini (1845 – 1918). Příklad 14.7.9 pochází od Matyáše Lercha (1860 – 1922) z r. 1888; viz [9]. Za zmínku stojí i fakt, že i před Jaškovým objevem byla tato problematika u nás populární. Jeden z prvních přehledných článků s touto problematikou je [5].

Dá se dokázat, že spojitých funkcí, které nemají v žádném bodě vlastní derivaci, je v jistém smyslu v prostoru $\mathcal{C}([a,b])$ většina: ty, které mají alespoň v jednom bodě vlastní derivaci, tvoří množinu 1. kategorie v Baireově smyslu (viz Kapitola 13). Důkaz existence spojité nikde nediferencovatelné funkce metodou kategorií pochází od Stefana Banacha (1892 – 1945) z r. 1931; viz [1].

R. 1827 pozoroval Robert Brown (1773 – 1858) částečky pylu ve vodě a popsal tzv. *Brownův pohyb.* Ten hraje důležitou roli ve fyzice. Jeho matematický popis je podstatně mladší, zde se však opět spojité funkce bez derivace uplatňují při popisu trajektorií Brownovských částic. Je patrné, že *monstra* lze použít k popisu jevů, která mají pro fyziku značnou důležitost. Poznamenejme ještě, že tudy vede cesta k souvislostem mezi analytickým popisem a pravděpodobnostním popisem objektů matematické teorie potenciálu.

Elegantní větu o monotonii a stejnoměrné konvergenci (Věta 14.3.3) dokázal již r. 1878 Dini. Jednou z nejdůležitějších vět v této kapitole byla věta Weierstrassova o polynomiální aproximaci (Věta 14.4.1). Ve stejném roce jako Weierstrass (1885) ji nezávisle dokázal Carl David Tolmé Runge (1856 – 1927). Další zjednodušující důkazy podali např. Henri León Lebesgue (1875 – 1941) r. 1898 a mj. též r. 1892 a 1893 Matyáš Lerch (1860 – 1922). Důkaz, který jsme použili, pochází od Edmunda Georga Hermanna Landaua (1877 – 1938). Jiný velmi známý a používaný důkaz Weierstrassovy věty publikoval r. 1911, resp. r. 1912 Sergej Natanovič Bernstein[5]) (1880 – 1968). Tento důkaz je založen na explicitním vzorci (14.14) pro aproximující polynomy, který neobsahuje integrál.

V dnešní době je známo zhruba asi 100 více či méně odlišných důkazů Weierstrassovy věty. Další výše zmíněný výsledek (*věta o třech funkcích*) publikoval Pavel Petrovič Korovkin (1913 – 1985). Zvídavému čtenáři doporučuji náhled do článku [2].

Zobecnění, z nichž může Věta 14.4.1 při šikovném postupu vyplynout (jako ne zcela triviální důsledek), je závislé na stejnoměrné aproximaci polynomy pro funkci $f(x) = |x|$,

[5]) Užíváme obvyklé transkripce; jde však o ruského, resp. sovětského matematika, takže patrně správnější by bylo užít jména ve formě *Bernštejn.*

$x \in [-1, 1]$. Ukazuje se však, že tím se důkaz klasické Weierstrassovy věty již *podstatně* nezjednoduší; viz např. [13].

Čtenáře by mohla napadnout následující cesta k důkazu Weierstrassovy věty. K reálné funkci $f \in \mathcal{C}([a, b])$ a posloupnosti ekvidistantních dělení $D_n \in \mathcal{D}([0, 1])$ s normou $\nu(D_n) = n^{-1}$ sestrojíme interpolační polynomy p_n (viz Historická poznámka 7.4.17), které v dělících bodech D_n nabývají stejných hodnot jako f; pak dokážeme $p_n \rightrightarrows f$ na $[0, 1]$. Tak se však *nedá důkaz provést* z principiálních důvodů, nemusí totiž platit ani $p_n \to f$ na $[0, 1]$.

Poznamenejme, že Weierstrass větu o polynomiální aproximaci spojitých funkcí dokázal i pro vícerozměrný případ. Tento výsledek vzbudil značnou pozornost a vedl v poslední čtvrtině 19. stol. k intenzivnímu vyšetřování polynomiální aproximace komplexních funkcí komplexní proměnné a aproximace racionálními funkcemi.

Literatura :

[1] Banach, S.: *Über die Bairesche Kategorie gewisser Funktionenmengen*, Studia Math. **3** (1931), str. 174 – 179.

[2] Bauer, H.: *Aproximace a abstraktní hranice*, Pokroky MFA **26** (1981), str. 305 – 326.

[3] Bernštejn, N. S.: *Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités*, Communications of the Charkov Math. Society 1912. .

[4] Boas, R. P. jr.: *A primer of real functions*, The Mathematical Association of America, 1981, (3. vydání).

[5] Čupr, K.: *O funkcích anorthoidních*, Druhá výroční zpráva II. české stát. reálky v Brně (1912), 27 str.

[6] Gerver, J.: *More on the differentiability of the Riemann function*, Amer. J. Math. **93** (1971), str. 33 – 41.

[7] Jarník, V.: *Bolzano a základy matematické analýzy*, Jednota československých matematiků a fyziků, Praha, 1981.

[8] Korovkin, P. P.: *O schodimosti linějnych položitělnych operatorov v prostranstve něpreryvnych funkcij*, Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.) **90** (1953), str. 961 – 964.

[9] Lerch, M.: *Über die Nicht-differenzierbarkeit gewisser Funktionen*, Crelle Journ. für Math. **103** (1888), str. 126 – 138.

[10] Pinkus, A.: *Weierstrass and approximation theory*, J. Approx. Theory **107** (2000), str. 1 – 66.

[11] Rudin, W.: *Analýza v reálném a komplexním oboru*, Academia, Praha, 1977.

[12] Runge, C.: *Über die Darstellung willkürlicher Funktionen* (*Auszug eines Briefes an Herrn G. Mittag-Leffler*), Acta Math. **7** (1885), str. 387–392.

[13] Stromberg, K. R.: *An introduction to classical real analysis*, Wadsworth, Inc., Belmont, CA, 1981.

[14] Weierstrass, K.: *Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Funktionen reeller Argumente.* (Aus dem Sitzungbericht der Königl. Akademie der Wischenschaften vom 9. und 30. Juli 1885.), Mathematische Werke von Karl Weierstrass, Mayer & Müller, Berlin 1903, str. 1 – 37.

Kapitola 15

Diferenciální rovnice

15.1 Úvod

Poznámka 15.1.1. V Kapitole 10 jsme řešili jednoduché diferenciální rovnice. I když jsme potřebné pojmy ve speciálních případech již jednou definovali, uděláme to nyní stručně v obecnější situaci znova. Budeme podstatně využívat základní poznatky z algebry a některé elementární vlastnosti funkcí více proměnných, nebudeme je však dokazovat. Výklad bude mít navíc volnější popisnou formu, neboť striktní formalizace by byla pro naše potřeby příliš náročná a neúčelná. Pokud nebude výslovně řečeno něco jiného, pracujeme v této kapitole pouze s reálnými funkcemi.

Označení 15.1.2. *Obyčejnou diferenciální rovnicí* budeme rozumět rovnici

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0\,, \tag{15.1}$$

kde F je funkce definovaná na nějaké oblasti $G \subset \mathbb{R}^{n+2}$. Nejvyšší řád derivace efektivně vystupující v rovnici nazýváme *řád rovnice.* Je-li F polynom, pak jeho stupeň je *stupněm rovnice. Řešením rovnice* (15.1), podrobněji *řešením rovnice* (15.1) *na intervalu* (c, d), nazýváme každou funkci φ definovanou na intervalu (c, d) takovou, že existuje její derivace $\varphi^{(n)}$ na (c, d), je $[\,x, \varphi(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)\,] \in G$ pro všechna $x \in (c, d)$ a

$$F\big(x, \varphi(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)\big) = 0\,, \qquad x \in (c, d)\,.$$

Řešení rovnice (15.1) se nazývá *maximální řešení* (někdy se užívá i termín *úplné řešení*), je-li definováno na maximálním intervalu, tj. není restrikcí řešení rovnice (15.1), definovaného na intervalu (c', d'), pro nějž $(c, d) \subset (c', d') \neq (c, d)$. Množinu všech maximálních řešení rovnice (15.1) nazýváme *obecným řešením* (15.1). Každé řešení rovnice (15.1) je tedy restrikcí nějakého maximálního řešení, tj. jednoho prvku obecného řešení.

Poznámka 15.1.3. Velmi často pracujeme s rovnicemi tvaru

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})\,, \tag{15.2}$$

které jsou *rozřešeny vzhledem k nejvyšší derivaci.* Jelikož vlevo stojí derivace $y^{(n)}$ neznámé spojité funkce $y^{(n-1)}$, je tato rovnice řešitelná pouze v případě, že i funkce f na pravé straně v (15.2) je „dostatečně rozumná“. My se v dalším výkladu omezíme na případ *spojité funkce* f.

Budeme nejprve podrobně studovat jednodušší případ diferenciální rovnice prvního řádu se spojitou funkcí f. Uvedeme nejprve úlohu s předpoklady, se kterými budeme nadále pracovat.

Úmluva 15.1.4. Budeme řešit diferenciální rovnici

$$y' = f(x,y) \tag{15.3}$$

s funkcí f spojitou na oblasti (tj. otevřené souvislé množině) $G \subset \mathbb{R}^2$, která je zároveň definičním oborem f a pro $[\,x_0, y_0\,] \in G$ budeme hledat její řešení φ definované na nějakém intervalu $(c,d) \subset \mathbb{R}$ obsahujícím bod x_0, pro něž bude platit

$$\varphi(x_0) = y_0\,. \tag{15.4}$$

Podrobněji: žádáme, aby řešení vyhovovalo podmínce

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))\,, \quad x \in (c,d)\,,$$

(plyne z ní i inkluze $\{[\,x, \varphi(x)\,];\, x \in (c,d)\} \subset G$) a současně splňovalo rovnost (15.4). S ohledem na některé fyzikální aplikace, kde proměnnou x bývá často čas, se tato úloha nazývá *počáteční úlohou.* Obvykle užívaný stručný zápis úlohy je tvaru

$$y' = f(x, y(x))\,, \quad y(x_0) = y_0\,,$$

kde rovnost $y(x_0) = y_0$ vyjadřuje tzv. *počáteční podmínku.*

Při geometrické interpretaci řešení jakožto „křivky“ popsané funkcí φ (zde však pracujeme s otevřeným intervalem) hovoříme pak o *řešení, procházejícím bodem* $[\,x_0, y_0\,]$. Přirozené otázky, na které budeme hledat odpověď, jsou dvě:

(a) kdy existuje řešení rovnice (15.3) vyhovující počáteční podmínce (15.4) a

(b) kdy ke každým dvěma řešením této úlohy existuje okolí $\mathcal{U}(x_0)$ bodu x_0, na kterém tato řešení splývají.

V tomto smyslu také popsaný problém chápeme jednak jako problém *existence řešení* (15.3) *procházejícího bodem* $[\,x_0, y_0\,]$ a problém jeho *jednoznačnosti.*

Nejprve dokážeme jednoduché lemma, jímž počáteční úlohu z předcházející Úmluvy 15.1.4 budeme převádět do jiného tvaru.

Lemma 15.1.5. *Nechť φ je, v kontextu Úmluvy 15.1.4, spojitá funkce na otevřeném intervalu I obsahujícím bod x_0. Potom φ je řešením počáteční úlohy, právě když pro všechna $x \in I$ je $[\,x, \varphi(x)\,] \in G$ a φ je řešením* integrální rovnice

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\,\mathrm{d}t\,. \tag{15.5}$$

Důkaz. Připomeňme již zavedené označení: máme řešit rovnici

$$y' = f(x,y) \tag{15.6}$$

spolu s počáteční podmínkou (15.4), tj. $y(x_0) = y_0$. Pokud platí (15.5), pak integrál ze spojité funkce $f(x, \varphi(x))$, $x \in I$, v této rovnici vpravo je primitivní funkcí k integrandu, takže odtud zderivováním plyne (15.3). Pro $x = x_0$ dostaneme $\varphi(x_0) = y_0$. Obráceně, z rovnice (15.3) plyne integrací rovnost funkcí

$$\int_{x_0}^{x} \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\,\mathrm{d}t\,, \quad x \in I\,;$$

integrál na levé straně předcházející rovnice je roven $\varphi(x) - \varphi(x_0) = \varphi(x) - y_0$, z čehož již dostaneme (15.5) jednoduchou úpravou. □

15.2 Peanova existenční věta

Nyní dokážeme tvrzení velmi často označované *Peanova existenční věta.* Na základě práce, v níž bylo toto tvrzení dokázáno, získal r. 1886 Giuseppe Peano (1858 – 1932) doktorát. Často se však cituje až práce z r. 1890; viz [6], str. 150.

Tvrzení 15.2.1 (Peano 1886). *Předpokládejme, že v rovnici* (15.3)*, tj. rovnici*

$$y' = f(x, y)$$

je funkce f spojitá *na oblasti $G \subset \mathbb{R}^2$ a že platí $[\,x_0, y_0\,] \in G$. Potom existuje $\alpha > 0$ a funkce $\varphi : (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha) \to \mathbb{R}$ tak, že pro všechna x z tohoto intervalu $[\,x, \varphi(x)\,] \in G$ a platí*

$$\begin{aligned} \varphi'(x) = f(x, \varphi(x))\,, \quad x \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)\,, \\ \varphi(x_0) = y_0\,, \end{aligned} \tag{15.7}$$

tj. počáteční úloha má alespoň jedno řešení.

Pro větší přehlednost nejprve popíšeme v hrubých rysech postup důkazu Peanovy věty; jednotlivé kroky označíme (K1) – (K5) a budeme se na ně dále odvolávat.

(K1) Od počáteční úlohy přejdeme k „lépe zvládnutelné“ ekvivalentní úloze.

(K2) Zavedeme pro $\varepsilon > 0$ pojem ε-přibližného řešení.

(K3) Vytvoříme pro $\varepsilon_n \to 0_+$ posloupnost ε_n-přibližných řešení φ_n na vhodném intervalu I obsahujícím bod x_0 z počáteční podmínky.

(K4) Využijeme důsledek Ascoliho věty (Tvrzení 13.3.34) a z posloupnosti $\{\varphi_n\}$ vybereme podposloupnost stejnoměrně konvergentní na I k φ.

(K5) Dokážeme, že φ je hledaným řešením počáteční úlohy.

Krok (K1) důkazu Peanovy věty spočívá v aplikaci Lemmatu 15.1.5: budeme hledat řešení integrální rovnice. Nyní vyslovíme definici ε-přibližného řešení, o kterém jsme se zmínili v kroku (K2).

Definice 15.2.2. Nechť je funkce f v rovnici (15.3) spojitá v oblasti $G \subset \mathbb{R}^2$ a nechť ψ je *spojitá* funkce na intervalu $I \subset \mathbb{R}$, pro kterou $[\,t, \psi(t)\,] \in G$ pro všechna $t \in I$. Jestliže pro $\varepsilon > 0$ a všechna $t \in I \setminus K$

$$|\,\psi'(t) - f(t, \psi(t))\,| \le \varepsilon\,,$$

kde $K \subset I$ je *konečná* množina, pak funkci ψ nazýváme *ε-přibližným řešením* rovnice (15.3).

Je zřejmé, že pro ε-přibližné řešení ψ existuje vlastní derivace $\psi'(t)$ pro všechna $t \in I \setminus K$, tedy všude v I až na konečnou množinu.

Abychom mohli využít Ascoliho větu, musíme popsat volbu „vhodného" uzavřeného intervalu, na kterém budeme pracovat. Pracujeme s počáteční úlohou s pevně zvolenou spojitou funkcí f, oblastí $G \subset \mathbb{R}^2$ a bodem $[\,x_0, y_0\,]$. Zvolíme $\delta > 0$ tak, aby

$$A := \{[\,x, y\,]\,;\, |x - x_0| \le \delta,\ |y - y_0| \le \delta\} \subset G\,; \tag{15.8}$$

je užitečné si načrtnout obrázek. Protože A je omezená a uzavřená, a tedy kompaktní množina, je f omezená na A. Existuje tedy číslo $M \in (0, \infty)$ tak, že $|\,f(x, y)\,| \le M$ pro všechny body $[\,x, y\,] \in A$. Zvolíme nyní

$$\alpha := \min\Big(\,\delta,\ \frac{\delta}{M}\Big) \tag{15.9}$$

a budeme pracovat s intervalem $I = [\,x_0 - \alpha,\ x_0 + \alpha\,]$. Smysl této volby spočívá v tom, že graf restrikce každého řešení y vyhovujícího podmínce $y(x_0) = y_0$ na interval I leží v A.

Lemma 15.2.3. *Pro počáteční úlohu z Úmluvy 15.1.4 existuje ke každému $\varepsilon > 0$ takové ε-přibližné řešení ψ_ε definované na intervalu $(x_0 - \alpha,\ x_0 + \alpha)$, které prochází bodem $[\,x_0, y_0\,]$, tj. takové, pro něž $\psi_\varepsilon(x_0) = y_0$.*

Důkaz. Nechť na A platí jako výše $|\,f(x, y)\,| \le M$. Funkce f je *stejnoměrně spojitá* na množině A definované v (15.8), takže k $\varepsilon > 0$ existuje δ_ε, pro které

$$|\,f(x, y) - f(x', y')\,| \le \varepsilon\,, \tag{15.10}$$

jakmile $[\,x, y\,], [\,x', y'\,] \in A$, a $|x - x'| \le \delta_\varepsilon$, $|y - y'| \le \delta_\varepsilon$.

Nyní zvolíme dělení $D = \{x_0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = x_0 + \alpha\}$ intervalu $[\,x_0, x_0 + \alpha\,]$ s normou dělení $\nu(D) < \min\{\delta_\varepsilon,\ \delta_\varepsilon/M\}$ a sestrojíme po částech lineární funkci ψ_ε na $[\,x_0, x_0 + \alpha\,]$, pro kterou

$$\psi_\varepsilon(x_0) := y_0\,, \quad \psi_\varepsilon(t) := \psi_\varepsilon(t_{k-1}) + f\big(t_{k-1}, \psi_\varepsilon(t_{k-1})\big)(t - t_{k-1})$$

pro $t \in [\,t_{k-1}, t_k\,]$, $k = 1, \ldots, n$. Analogickou konstrukci provedeme také na intervalu $[\,x_0 - \alpha,\ x_0\,]$, ovšem „zpětně": směrnice lineárních částí v dělících intervalech dělení $D = \{x_0 - \alpha = t_0 < \ldots < t_m = x_0\}$ jsou nyní určeny vždy hodnotou $f(t_k, \psi_\varepsilon(t_k))$ v koncovém bodě intervalu $[\,t_{k-1}, , t_k\,]$, $k = 1, \ldots, m$. Dále postačí, budeme-li se zabývat pouze intervalem $[\,x_0,\ x_0 + \alpha\,]$, pro interval $[\,x_0 - \alpha,\ x_0\,]$ se provede úvaha analogicky. Závěr pak bude platit na intervalu $[\,x_0 - \alpha,\ x_0 + \alpha\,]$.

Je zřejmé, že derivace $\psi'_\varepsilon(t)$ existuje pro všechna $t \in [\,x_0,\ x_0 + \alpha\,]$ mimo body dělení D, tedy až na konečnou množinu. Dále pro $t \in (t_{k-1}, t_k)$, $k = 1, \ldots, n$, platí s ohledem na (15.10)

$$|\,\psi'_\varepsilon(t) - f(t, \psi_\varepsilon(t))\,| = |\,f(t_{k-1}, \psi_\varepsilon(t_{k-1})) - f(t, \psi_\varepsilon(t))\,| \le \varepsilon\,,$$

protože $|t_{k-1} - t| < \delta_\varepsilon$ a

$$\begin{aligned} |\,\psi_\varepsilon(t_{k-1}) - \psi_\varepsilon(t)\,| &\le \big|\,\psi_\varepsilon(t_{k-1}) - \psi_\varepsilon(t_{k-1}) - f\big(t_{k-1}, \psi_\varepsilon(t_{k-1})\big)(t - t_{k-1})\,\big| = \\ &= \big|\,f\big(t_{k-1}, \psi_\varepsilon(t_{k-1})\big)\big|\,\big|\,t - t_{k-1}\,\big| \le M\,\delta_\varepsilon / M = \delta_\varepsilon\,; \end{aligned}$$

analogická úvaha pro interval $[\,x_0 - \alpha,\, x_0\,]$ dává spolu s předcházející úvahou závěr: funkce ψ_ε je ε-přibližným řešením rovnice (15.3) na intervalu $[\,x_0 - \alpha,\, x_0 + \alpha\,]$, splňujícím počáteční podmínku $\psi_\varepsilon(x_0) = y_0$. □

Odhadneme přírůstek $|\,\psi_\varepsilon(t') - \psi_\varepsilon(t)\,|$ pro $t, t' \in [\,x_0 - \alpha, x_0 + \alpha\,]$, $t \ne t'$. Nechť např. $t < t'$. Body t, t' a všechny body $u \in (t, t')$, ve kterých neexistuje $\psi'_\varepsilon(u)$, určují dělení intervalu $[\,t, t'\,]$. Aplikujeme-li na intervalech tohoto dělení odhad pomocí Lagrangeovy věty, dostaneme po sečtení

$$|\,\psi_\varepsilon(t') - \psi_\varepsilon(t)\,| = \left|\,\int_t^{t'} \psi'_\varepsilon(u)\,\mathrm{d}u\,\right| \le M\,|t' - t|\,. \tag{15.11}$$

Dále pro všechna $t \in [\,x_0 - \alpha, x_0 + \alpha\,]$ dostaneme pomocí (15.11) odhad

$$|\,\psi_\varepsilon(t)\,| \le |\,\psi_\varepsilon(t) - \psi_\varepsilon(x_0)\,| + |\,\psi_\varepsilon(x_0)\,| \le M\,|\,t - x_0\,| + |\,y_0\,| \le M\alpha + |\,y_0\,|\,, \tag{15.12}$$

který platí pro každou funkci ψ_ε. Všimneme si podstatné věci, týkající se závislosti na parametru ε: oba odhady (15.11) a (15.12) platí pro ψ_ε, ať je $\varepsilon > 0$ jakékoli. Odtud plyne, že systém $\mathcal{F}$ funkcí $\{\psi_\varepsilon\,;\, \varepsilon > 0\}$ je tvořen podle (15.12) funkcemi stejně omezenými, které splňují Lipschitzovu podmínku (15.11); proto jsou tyto funkce i stejně spojité.

Další krok (K3) je jednoduchý: zvolíme posloupnost kladných čísel ε_n konvergující k 0 a ke každému z těchto čísel sestrojíme podle Lemmatu 15.2.3 ε_n-přibližné řešení, které označíme ψ_n. Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí pro ψ_n vztahy analogické (15.12) a (15.11), takže funkce systému $\{\psi_n\,;\, n \in \mathbb{N}\}$ jsou stejně omezené a stejně spojité. Můžeme použít důsledek Ascoliho věty z Tvrzení 13.3.34 a tak lze bez újmy na obecnosti předpokládat (museli bychom ještě přejít k vybrané posloupnosti), že existuje funkce φ definovaná na intervalu $[\,x_0 - \alpha, x_0 + \alpha\,]$ tak, že

$$\psi_n \rightrightarrows \varphi \text{ na } [\,x_0 - \alpha, x_0 + \alpha\,]\,.$$

Tím jsme provedli současně kroky (K3) i (K4) a zbývá krok poslední: dokážeme, že φ je řešením studované počáteční úlohy. Tím bude důkaz Peanovy věty dokončen.

Důkaz Věty 15.2.1. Dokážeme, že funkce φ na intervalu $[\,x_0 - \alpha, x_0 + \alpha\,]$ vyhovuje integrální rovnici (15.5), tj. rovnici

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\,\mathrm{d}t\ .$$

Poznamenejme nejprve, že ψ_n je zobecněnou primitivní funkcí k funkci ψ'_n, a že následující rovnost platí všude v intervalu $[\,x_0 - \alpha, x_0 + \alpha\,]$ (v těch bodech t konečné množiny, ve kterých neexistuje $\psi'_n(t)$, derivaci dodefinujeme hodnotou 0):

$$\psi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} \psi'_n(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

Počítejme dále: jednoduchými úpravami dostaneme

$$\psi_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}\big(f(t,\psi_n(t))+[\,\psi_n'(t)-f(t,\psi_n(t))\,]\big)\,\mathrm{d}t\;=$$
$$=y_0+\int_{x_0}^{x}\big(f(t,\varphi(t))+[\,f(t,\psi_n(t))-f(t,\varphi(t))\,]+[\,\psi_n'(t)-f(t,\psi_n(t))\,]\big)\,\mathrm{d}t\,. \tag{15.13}$$

Protože ψ_n je ε_n-přibližným řešením, lze absolutní hodnotu výrazu ve druhé hranaté závorce v integrandu posledního integrálu v (15.13) stejnoměrně odhadnout číslem ε_n (v bodech, kde není výraz v závorce definován, ho dodefinujeme hodnotou 0). Je tedy

$$\int_{x_0}^{x}\big|\,\psi_n'(t)-f(t,\psi_n(t))\,\big|\,\mathrm{d}t\;\leq\varepsilon_n\alpha\,,$$

z čehož plyne, že tento integrál konverguje pro $n\to\infty$ stejnoměrně k 0 vzhledem k proměnné $x\in[\,x_0-\alpha,x_0+\alpha\,]$.

Ukážeme ještě, že $|\,f(t,\psi_n(t))-f(t,\varphi(t))\,|\rightrightarrows 0$ na $[\,x_0-\alpha,x_0+\alpha\,]$. Zvolme $\varepsilon>0$; ze stejnoměrné spojitosti f na A vyplývá existence $\delta>0$, pro které platí

$$(|y_1-y_2|<\delta)\Rightarrow(|f(x,y_1)-f(x,y_2)|<\varepsilon)\,.$$

Zvolme dále vzhledem k $\psi_n\rightrightarrows\varphi$ na $[\,x_0-\alpha,x_0+\alpha\,]$ k tomuto δ číslo $k\in\mathbb{N}$ tak, aby pro všechna $n\geq k$ bylo $|\,\psi_n-\varphi\,|<\delta$; dostaneme tak

$$(n\geq k)\Rightarrow(|f(t,\psi_n(t))-f(t,\varphi(t))|<\varepsilon)$$

pro všechna $t\in[\,x_0-\alpha,x_0+\alpha\,]$. Odtud dostáváme vzhledem k proměnné x

$$\int_{x_0}^{x}\big|\,f(t,\psi_n(t))-f(t,\varphi(t))\,\big|\,\mathrm{d}t\rightrightarrows 0\quad\text{na}\quad[\,x_0-\alpha,x_0+\alpha\,]\,.$$

Limitním přechodem pro $n\to\infty$ dostaneme z (15.13) rovnost (15.5), čímž je důkaz Peanovy existenční věty dokončen. $\square$

Poznámka 15.2.4. Uvedená Peanova věta *nezaručuje* jednoznačnost řešení rovnice (15.3) ani lokálně. Jestliže si čtenář připomene Příklad 10.3.3, snadno nahlédne, že na libovolně malém otevřeném intervalu obsahujícím bod x_0 mohou existovat dvě různá řešení (dokonce i nekonečně mnoho) rovnice (15.3), splňující podmínku (15.4). Již v r. 1925 byl dokonce sestrojen příklad takové rovnice tvaru (15.3) se spojitou funkcí f, že dokonce každým bodem $[\,x_0,y_0\,]\in G$ procházejí alespoň dvě řešení, která nesplývají v žádném okolí bodu x_0.

Historická poznámka 15.2.5. Je na místě připojit krátký historický komentář. Již v r. 1694 Johann Bernoulli (1667 – 1748) používal *přibližné řešení* rovnice (15.3). Popsaná metoda konstrukce přibližného řešení, kterou v podstatě používal již Euler, je z r. 1768, avšak historicky prvním tvrzením o *existenci* (a dokonce i o jednoznačnosti řešení, ovšem za silnějších předpokladů) bylo tvrzení, které dokázal Louis Augustin Cauchy (1789 – 1857) r. 1824. Kompaktnost množiny spojitých funkcí na intervalu studovali Cesare Arzelà (1847 – 1912) a Giulio Ascoli (1843 – 1896), jejich tvrzení je však pouze jednou z možných cest k důkazu výše uvedeného Peanova tvrzení. Viz dále komentář v Historické poznámce 15.4.3.

15.3 Věta o existenci a jednoznačnosti

Seznámíme se ještě s podobnou důležitou větou, v níž se o funkci f předpokládá více a která dává i (lokální) jednoznačnost řešení popsané počáteční úlohy. Peanova věta z předchozí části ilustruje užití kritéria kompaktnosti v prostoru $\mathcal{C}([\,a,b\,])$ a stejnoměrné konvergence, nebývá však součástí základního kurzu analýzy. Důkaz v následující části uvedené frekventovanější věty je založen na užití Banachovy věty o kontrakci. Budeme postupovat zcela nezávisle na předchozí části a proto některé úvahy zopakujeme.

Věta 15.3.1 (Picard 1890, Lindelöf 1894). *Nechť $\delta > 0$ a nechť*

$$I = (x_0 - 2\delta, x_0 + 2\delta) \times (y_0 - 2\delta, y_0 + 2\delta)\,.$$

Předpokládejme, že v rovnici (15.3)

$$y' = f(x,y)\,, \tag{15.3}$$

je funkce f spojitá v intervalu I a že existuje kladné číslo K takové, že pro všechna $x \in (x_0 - 2\delta, x_0 + 2\delta)$ a pro všechna $y_1, y_2 \in (y_0 - 2\delta, y_0 + 2\delta)$ platí

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le K|y_1 - y_2|$$

(stručněji říkáme, že $f(x,\cdot\,)$ jsou pro $x \in (x_0 - 2\delta, x_0 + 2\delta)$ (stejně) lipschitzovské v proměnné $y \in (y_0 - 2\delta, y_0 + 2\delta)$). Potom platí:

(a) *Existuje interval (c,d) a řešení φ rovnice* (15.3) *na intervalu (c,d) takové, že je $x_0 \in (c,d)$ a $\varphi(x_0) = y_0$, tj. řešení vyhovuje* počáteční podmínce (15.4).

(b) *Jestliže řešení φ_1, φ_2 splňují podmínku* (15.4)*, existuje okolí bodu x_0, na kterém tato řešení splývají.*

Důkaz. Z kompaktnosti intervalu $[\,x_0-\delta, x_0+\delta\,]\times[\,y_0-\delta, y_0+\delta\,]$ plyne existence takového čísla $M \in (0,+\infty)$, že na tomto intervalu je $|f| \le M$. Nejprve převedeme řešení popsané úlohy pomocí Lemmatu 15.1.5 na řešení jiné úlohy (místo diferenciální rovnice budeme pracovat s *integrální* rovnicí). Zvolíme interval $[\,c,d\,]$ tak, aby $x_0 \in (c,d)$ a byly splněny současně dvě podmínky:

$$(1^*)\quad M(d-c) < \delta \qquad \text{a} \qquad (2^*)\quad q := K(d-c) < 1\,.$$

Smysl této speciální volby bude zřejmý dále.

Označme $\mathcal{C}_p = \mathcal{C}_p([\,c,d\,])$ podmnožinu všech funkcí φ prostoru $\mathcal{C}([\,c,d\,])$, vyhovujících podmínce

$$|\,\varphi(x) - y_0| \le M|x - x_0|\,, \quad x \in [\,c,d\,]\,. \tag{p}$$

Pro všechna $x \in [\,c,d\,]$ je zřejmě (využíváme podmínku (1*))

$$|\,\varphi(x) - y_0| \le M|x - x_0| \le M(d-c) < \delta\,; \tag{15.14}$$

definujeme-li nyní zobrazení $A : \varphi \mapsto A\varphi$ vztahem

$$(A\varphi)(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,\varphi(t))\,\mathrm{d}t\,, \quad \varphi \in \mathcal{C}_p([\,c,d\,])\,, \tag{15.15}$$

je integrand v integrálu na pravé straně (15.15) korektně definován a je to spojitá funkce na $[\,c,d\,]$. Řešit rovnici (15.3) s podmínkou (15.4) je ekvivalentní s problémem řešit

rovnici $\varphi = A\varphi$; srovnej s Lemmatem 15.1.5. Všimneme si ještě, že pro $\varphi \in \mathcal{C}_p([c,d])$ je pravá strana rovnosti (15.5) spojitá funkce na $[c,d]$.
Podmínka (1^*) dává

$$|A\varphi(x) - y_0| = \Big| \int_{x_0}^{x} f(t,\varphi(t))\,\mathrm{d}t \Big| \le \int_{x_0}^{x} |f(t,\varphi(t))|\,\mathrm{d}t \le M|x - x_0|\,,$$

takže $A(\mathcal{C}_p) \subset \mathcal{C}_p$. Množina $\mathcal{C}_p$ je uzavřenou podmnožinou metrického prostoru $\mathcal{C}([c,d])$, a tedy podle Tvrzení 13.2.7 jeho úplným podprostorem. Na množinu $\mathcal{C}_p$ a na zobrazení $A : \varphi \mapsto A\varphi$ použijeme Větu 13.2.18 o pevném bodu. Dříve však musíme ještě ukázat, že A je na $\mathcal{C}_p$ se „supremovou" metrikou $\rho(\varphi,\psi) = \|\varphi - \psi\|_\infty$ kontrakce.

Víme, že v I je splněna výše uvedená lipschitzovská podmínka

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le K|y_1 - y_2|$$

pro všechna $x \in [c,d] \subset (x_0 - 2\delta, x_0 + 2\delta)$, $y_1, y_2 \in (y_0 - 2\delta, y_0 + 2\delta)$. Pro operátor A, pro $\varphi, \psi \in \mathcal{C}_p$, a pro každé $x \in [c,d]$ platí odhady (nyní užíváme podmínku (2^*))

$$\begin{aligned} |A\varphi(x) - A\psi(x)| = {} & \Big| \int_{x_0}^{x} f(t,\varphi(t))\,\mathrm{d}t - \int_{x_0}^{x} f(t,\psi(t))\,\mathrm{d}t \Big| \le \\ & \le \int_{x_0}^{x} \big| f(t,\varphi(t)) - f(t,\psi(t)) \big|\,\mathrm{d}t \le \int_{x_0}^{x} K\,|\varphi(t) - \psi(t)|\,\mathrm{d}t \le \\ & \le K\int_{x_0}^{x} \|\varphi - \psi\|_\infty\,\mathrm{d}t \le K(d-c)\|\varphi - \psi\|_\infty \le q\,\|\varphi - \psi\|_\infty\,. \end{aligned}$$

Přejdeme-li ještě vlevo k supremu přes všechna $x \in [c,d]$, dostaneme

$$\|A\varphi - A\psi\|_\infty \le q\,\|\varphi - \psi\|_\infty\,,$$

kde $\|\cdot\|_\infty$ je „supremová" metrika v úplném metrickém prostoru $\mathcal{C}_p = \mathcal{C}_p([c,d])$ a $q < 1$. Volbou intervalu $[c,d]$ dostatečně malé délky ve smyslu podmínky (2^*) jsme tedy dosáhli toho, že A je kontrakce. Tím jsme ověřili předpoklady Banachovy věty.

Pro pevný bod φ operátoru A na prostoru $\mathcal{C}_p$ zřejmě platí $\varphi \in \mathcal{C}_p$ a

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,\varphi(t))\,\mathrm{d}t\,, \qquad x \in (c,d)\,, \tag{15.16}$$

čímž je důkaz tvrzení dokončen; funkce φ je dokonce z prostoru $\mathcal{C}^1((c,d))$, neboť vyhovuje předcházející integrální rovnici. Banachova věta dává zároveň (lokální) jednoznačnost řešení φ rovnice (15.15), a tedy i počáteční úlohy z Věty 15.3.1: pokud by existovala řešení φ a ψ počáteční úlohy, jejichž restrikce na interval $[c,d]$ zvolený v průběhu důkazu by byly *různé*, řešily by φ a ψ rovnici (15.16) a muselo by platit

$$0 < \|\varphi - \psi\|_\infty = \|A\varphi - A\psi\|_\infty \le q\,\|\varphi - \psi\|_\infty$$

s $0 < q < 1$, což vede ke sporu. □

15.4 Rovnice vyšších řádů

Případ složitější rovnice

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

můžeme formálně upravit. Položíme-li

$$y(x) = y_1(x)\,, \quad y'(x) = y_2(x)\,, \dots, \quad y^{(n-1)}(x) = y_n(x)\,,$$

přejdeme k ekvivalentní úloze řešit *soustavu* rovnic 1. řádu

$$y_1' = y_2\,, \quad y_2' = y_3\,, \dots, \quad y_n' = f(x, y_1, y_2, \dots, y_n)\,.$$

Bez zjevného zvýšení obtížnosti lze vyšetřovat soustavu tvaru

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n)\,,\\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n)\,,\\ &\vdots\\ y_n' &= f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)\,. \end{aligned}$$

Stručnější zápis této soustavy využívá vektorového označení: $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})$. Vektorová funkce

$$\boldsymbol{y} = (y^1, y^2, \dots, y^n)$$

zobrazuje interval $[\,a, b\,]$ na reálné ose do $\mathbb{R}^n$. Funkce $\boldsymbol{f} = (f^1, f^2, \dots, f^n)$ je definována na oblasti $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ a zobrazuje G do $\mathbb{R}^n$. Pro funkci $\boldsymbol{g} = (g^1, g^2, \dots, g^n)$ na $[\,a, b\,]$ se spojitými složkami g^k definujeme

$$\|\,\boldsymbol{g}\,\|_\infty = \max\{\,\sup\{|\,g^k(t)\,|\,;\, t \in [\,a, b\,]\},\ k = 1, \dots, n\}\,.$$

Množinu všech takových funkcí označíme ${}^n\mathcal{C}([\,a, b\,])$; jde tedy vlastně o kartézský součin n prostorů $\mathcal{C}([\,a, b\,])$. Zformulujme větu obdobnou předchozí větě:

Věta 15.4.1. *Nechť $\delta > 0$ a nechť*

$$I = (x_0 - 2\delta, x_0 + 2\delta) \times (y_0^1 - 2\delta, y_0^1 + 2\delta) \times \cdots \times (y_0^n - 2\delta, y_0^n + 2\delta)\,.$$

Nechť $\boldsymbol{y} = (y^1, \dots, y^n)$ a $\boldsymbol{f} = (f^1, \dots, f^n)$. Předpokládejme, že v rovnici

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}) \tag{15.17}$$

je zobrazení $\boldsymbol{f}$ spojité v intervalu I. Dále předpokládáme, že existuje kladné číslo K takové, že pro všechna $(x, \boldsymbol{y}_1), (x, \boldsymbol{y}_2) \in I$ platí

$$\|\,\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}_1) - \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}_2)\,\|_\infty \le K\,\|\,\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_2\,\|_\infty\,,$$

takže $\boldsymbol{f}$ je (stejně) lipschitzovská vůči $\boldsymbol{y}$ pro všechna x v $(x_0 - 2\delta, x_0 + 2\delta)$. Potom

(a) *existuje řešení $\boldsymbol{\varphi}$ rovnice* (15.17) *na intervalu $(c, d\,)$ obsahujícím x_0 takové, že platí*

$$\boldsymbol{\varphi}(x_0) = \boldsymbol{y}_0, \quad (\textit{po složkách:}\ \ \varphi^k(x_0) = y_0^k,\ \ k = 1, \dots, n)\,, \tag{15.18}$$

tj. řešení $\boldsymbol{\varphi}$ vyhovuje předcházející počáteční podmínce;

(b) *řešení je určeno lokálně jednoznačně, tj. každá dvě taková řešení splývají na nějakém okolí x_0.*

Důkaz předcházející Věty 15.3.1 lze skoro „okopírovat", je však *technicky* složitější. Popíšeme proto jen stručně jeho hlavní kroky. Z důvodů snazšího chápání budeme vektorové označení nejprve rozepisovat po složkách. Zvolíme vhodně interval $[c, d]$ vyhovující obdobným podmínkám (1^*) a (2^*) a jako při důkazu Věty 15.3.1 přejdeme k ekvivalentní integrální formulaci úlohy

$$\varphi^k(x) = y_0^k + \int_{x_0}^{x} f^k(t, \varphi^1(t), \dots, \varphi^n(t))\,\mathrm{d}t\,, \quad k = 1, \dots, n\,.$$

Dále definujeme operátor $\boldsymbol{A}$ na (metrickém) podprostoru ${}^n\mathcal{C}_p([c, d])$ prostoru ${}^n\mathcal{C}([c, d])$ všech funkcí $\boldsymbol{\varphi}$ vyhovujících podmínce

$$\|\boldsymbol{\varphi}(x) - \boldsymbol{y}_0\|_\infty \le M|x - x_0|\,, \quad x \in [c, d]\,, \tag{p}$$

a to analogicky jako v předcházejícím důkazu, tj.

$$(\boldsymbol{A\varphi})^k(x) := y_0^k + \int_{x_0}^{x} f^k(t, \varphi^1(t), \dots, \varphi^n(t))\,\mathrm{d}t\,, \quad x \in [c, d]\,,\ k = 1, \dots, n\,.$$

Při užití vektorového zápisu má tvar

$$\boldsymbol{A\varphi}(x) := \boldsymbol{y}_0 + \int_{x_0}^{x} \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{\varphi}(t))\,\mathrm{d}t\,, \quad x \in [c, d]\,. \tag{15.19}$$

Podmínka (2^*) zaručuje volbu $[c, d]$ takovou, že operátor $\boldsymbol{A}$ je kontrakcí na prostoru ${}^n\mathcal{C}_p([c, d])$. Analogicky spočteme, že pro každé $x \in [c, d]$ (místo absolutní hodnoty stojí nyní nalevo „maximová" metrika)

$$\|\boldsymbol{A\varphi}(x) - \boldsymbol{A\psi}(x)\|_\infty \le K\,(d - c)\|\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\psi}\|_\infty \le q\|\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\psi}\|_\infty\,.$$

Po úpravě levé strany, podobně jako v důkazu, který jsme již dělali, posléze dostaneme

$$\|\boldsymbol{A\varphi} - \boldsymbol{A\psi}\|_\infty \le q\,\|\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\psi}\|_\infty\,,$$

kde je $0 < q < 1$. Zbytek je zřejmý.

Jako důsledek předcházející věty dostaneme větu pro počáteční úlohu pro rovnici n-tého řádu; užijeme standardního označení, běžného v teorii obyčejných diferenciálních rovnic, a to i za cenu ztráty přímé souvislosti s předcházejícím označením.

Věta 15.4.2. *Nechť $\delta > 0$, $[x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}] \in \mathbb{R}^{n+1}$, a nechť*

$$I = (x_0 - 2\delta, x_0 + 2\delta) \times (y_0 - 2\delta, y_0 + 2\delta) \times \cdots \times (y_{n-1} - 2\delta, y_{n-1} + 2\delta)\,.$$

Nechť dále je funkce f v rovnici

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \tag{15.20}$$

spojitá v intervalu $I \subset \mathbb{R}^{n+1}$ a (stejně) lipschitzovská pro každé x vzhledem k posledním n proměnným. Potom platí:

(a) *Existuje řešení φ rovnice* (15.20) *takové, že je*

$$\varphi(x_0) = y_0\,, \quad \varphi'(x_0) = y_1\,, \quad \dots, \quad \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}\,,$$

tj. toto řešení vyhovuje počáteční podmínce.

(b) *Jestliže dvě řešení φ_1, φ_2 splňují obě počáteční podmínku, shodují se na nějakém okolí bodu x_0.*

Historická poznámka 15.4.3. Cauchy dokázal pouze „slabší Větu 15.3.1“, pracoval totiž se silnějším předpokladem spojitosti derivace funkce f podle proměnné y. Teprve později r. 1876 RUDOLF OTTO SIGISMUND LIPSCHITZ (1832 – 1903) oslabil tuto podmínku do formy, kterou jsme použili v této větě my. Jestliže generujeme posloupnost postupných aproximací $\Phi_{n+1} = A(\Phi_n)$, která je skryta v důkazu Banachovy věty o pevném bodu, nazývá se tato posloupnost *Picardova posloupnost postupných aproximací.* K důkazu věty ji použil CHARLES ÉMILE PICARD (1856 – 1941) r. 1890. Tento nástroj byl však již používán dříve. Picardův důkaz dále zlepšil r. 1894 ERNST LEONARD LINDELÖF (1870 – 1946). Viz [6], str. 146.

Vzniká přirozená otázka, zda existuje nějaké *maximální* řešení, které vyhovuje podmínce (15.4). Odpověď na tuto otázku je kladná. Řešení, jejichž existenci jsme dokázali, se totiž „dají slepit“.

Věta 15.4.4. *Nechť $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ je oblast a nechť funkce $\boldsymbol{f}$ v rovnici*

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}), \tag{15.17}$$

je v G spojitá a lokálně lipschitzovská vůči $\boldsymbol{y}$. Potom

(a) *existuje interval (c, d) obsahující bod x_0 a na něm definované maximální řešení $\boldsymbol{\varphi}$ rovnice* (15.17) *takové, že platí*

$$\boldsymbol{\varphi}(x_0) = \boldsymbol{y}_0,$$

tj. toto maximální řešení $\boldsymbol{\varphi}$ vyhovuje počáteční podmínce (15.18)*;*

(b) *toto maximální řešení je určeno jednoznačně.*

Poznámka 15.4.5. Než předcházející větu dokážeme, dodejme na vysvětlenou, že předpokládáme, že ke každému bodu $[x, \boldsymbol{y}] \in G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ existuje interval $I \subset G$, který tento bod obsahuje a na kterém jsou splněny pro tento bod a I předpoklady Věty 15.4.1. Protože v takovém bodě se nemůže řešení „štěpit“, je tvrzení intuitivně zřejmé.

Důkaz Věty 15.4.4. Nechť $\boldsymbol{\varphi}$ a $\boldsymbol{\psi}$ jsou dvě řešení (15.17), definovaná na intervalech (c_1, d_1) a (c_2, d_2), obsahujících bod x_0, a nechť platí $\boldsymbol{\varphi}(x_0) = \boldsymbol{\psi}(x_0) = \boldsymbol{y}_0$. Označme

$$(c, d) := (c_1, d_1) \cap (c_2, d_2), \quad H := \{x \in (c, d)\,;\, \boldsymbol{\varphi}(x) = \boldsymbol{\psi}(x)\}.$$

Potom $x_0 \in H$, a tedy $H \neq \emptyset$. Použijeme nyní Větu 13.4.4, podle které je interval souvislou množinou. Množina H je uzavřená v intervalu (c, d), neboť pro posloupnost bodů $x_n \in H$, $x_n \to x^* \in (c, d)$ plyne ze spojitosti funkcí $\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}$, že

$$(\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\psi})(x_n) \to (\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\psi})(x^*) = 0.$$

Množina H je však i otevřená v (c, d), neboť podle věty o lokální jednoznačnosti plyne z $\boldsymbol{\varphi}(x) = \boldsymbol{\psi}(x)$ rovnost $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\psi}$ na nějakém okolí $\mathcal{U}(x)$ bodu x. Proto je $H = (c, d)$, a lze tedy definovat $\boldsymbol{\varphi}^*$ na sjednocení obou intervalů tak, že položíme

$$\boldsymbol{\varphi}^* := \boldsymbol{\varphi} \ \text{ na } \ (c_1, d_1), \quad \boldsymbol{\varphi}^* := \boldsymbol{\psi} \ \text{ na } \ (c_2, d_2).$$

Avšak stejným způsobem lze definovat maximální řešení $\boldsymbol{\varphi}_{\max}$ pomocí množiny všech řešení $\{\boldsymbol{\varphi}_\alpha\,;\ \alpha \in A\}$, splňujících podmínku $\boldsymbol{\varphi}_\alpha(x_0) = \boldsymbol{y}_0$. Je-li (c_α, d_α) definiční obor řešení $\boldsymbol{\varphi}_\alpha$, je $x_0 \in (c_\alpha, d_\alpha)$. Položíme pro všechna $\alpha \in A$

$$\boldsymbol{\varphi}_{\max} := \boldsymbol{\varphi}_\alpha \ \text{ na } \ (c_\alpha, d_\alpha)\,;$$

definice je dle předchozí úvahy korektní, $\boldsymbol{\varphi}_{\max}$ je hledané maximální řešení, přičemž $c := \inf\{c_\alpha;\ \alpha \in A\}$ a $d := \sup\{d_\alpha;\ \alpha \in A\}$. □

Poznámky 15.4.6. 1. V Příkladu 10.3.3 lze za G z předcházející Věty 15.4.4 volit oblasti $G_1 := \{[\,x, y\,];\ y > 0\}$ nebo $G_2 := \{[\,x, y\,];\ y < 0\}$, neboť to jsou *maximální* oblasti, v nichž jsou splněny předpoklady Věty 15.4.4. Čtenář by si měl znovu uvědomit, že definiční obor (interval) každého maximálního řešení v G_1 závisí na počáteční podmínce, tj. bodu $[\,x_0, y_0\,]$, který v G_1 zvolíme.

2. Je-li G množina z Věty 15.4.4, pak by se čtenář mohl domnívat, že pro každé maximální řešení $\boldsymbol{\varphi}$ s definičním oborem (c, d) existuje $\lim_{x\to d-} \boldsymbol{\varphi}(x)$ a že „graf maximálního řešení končí v nějakém bodě hranice G“. Platí však jen mnohem méně: označíme-li $\mathrm{Gr}(\boldsymbol{\varphi})$ graf $\boldsymbol{\varphi}$, platí

$$\operatorname{dist}(\mathrm{Gr}(\boldsymbol{\varphi}), \mathbb{R}^2 \setminus G) = 0\,,$$

tj. graf $\boldsymbol{\varphi}$ „se neomezeně blíží k doplňku $\mathbb{R}^2 \setminus G$ množiny G“.

Protože je např. $\big[(1/x)\sin(1/x)\big]' = (-1/x^2)\big[(1/x)\cos(1/x) + \sin(1/x)\big]$, má rovnice

$$y' = (-1/x^2)\big[(1/x)\cos(1/x) + \sin(1/x)\big]$$

v $G = \{[\,x, y\,];\ x > 0\}$ maximální řešení $\varphi(x) = (1/x)\sin(1/x)$, $x \in (0, \infty)$, které se však k doplňku G „blíží“ velmi komplikovaným způsobem.

Jako důsledek Věty 15.4.4 dostaneme tvrzení o existenci maximálního řešení pro rovnice n-tého řádu.

Důsledek 15.4.7. *Nechť $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ je oblast, $[\,x_0, y_0, \dots, y_{n-1}] \in G$, a nechť funkce f v rovnici*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \tag{15.20}$$

je v G spojitá a lokálně lipschitzovská vůči posledním n proměnným. Potom

(a) *existuje interval (c, d) obsahující bod x_0 a na (c, d) definované maximální řešení φ rovnice* (15.20) *takové, že platí*

$$\varphi(x_0) = y_0\,, \quad \varphi'(x_0) = y_1\,, \quad \dots, \quad \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}\,,$$

tj. toto maximální řešení φ vyhovuje předcházejícím počátečním podmínkám;

(b) *toto maximální řešení φ je určeno jednoznačně.*

15.5 Lineární diferenciální rovnice

V dalším se budeme zabývat *lineární diferenciální rovnicí* řádu n. Její jednotlivá řešení budeme odlišovat indexy y_1, y_2, atd., proto změníme označení předepsaných hodnot v počáteční podmínce. Čtenáři doporučujeme, aby si připomenul jednoduchá tvrzení z Kapitoly 10. Budeme pracovat s pevně zvoleným intervalem (c, d); *funkce* $a_1, \dots, a_n, b$ jsou spojité funkce na (c, d). Vyšetřovaná rovnice je tvaru (dále však označení proměnné x budeme vynechávat)

$$L(y) := y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)\, y = b(x)\,, \quad x \in (c, d)\,. \tag{15.21}$$

Stejně jako v případě rovnice prvního řádu i zde snadno nahlédneme, že řešením rovnice (15.21) je funkce z prostoru $\mathcal{C}^{(n)}((c, d))$. Terminologie souvisí s tím, že levá strana rovnice (15.21) je lineární zobrazení prostoru $\mathcal{C}^{(n)}((c, d))$ do $\mathcal{C}((c, d))$: je zřejmé, že pro y, y_1, y_2 z tohoto prostoru a $\alpha \in \mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned} L(y_1 + y_2) =& L(y_1) + L(y_2)\,, \\ L(\alpha y) =& \alpha L(y)\,. \end{aligned}$$

Kromě rovnice (15.21) budeme ještě uvažovat rovnici

$$L(y) = y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)\, y = 0\,, \tag{15.22}$$

což je *přiřazená rovnice k* (15.21) *s nulovou pravou stranou*; někdy se užívá i názvu *přiřazená homogenní rovnice.* Náš postup je založen stejně jako v případě rovnice 1. řádu opět na myšlence nalézt všechna řešení rovnice (15.21) pomocí všech řešení rovnice (15.22).

Funkce $a_1, \dots, a_n$ jsou spojité na (c, d) a tedy i lokálně omezené. Pravá strana rovnosti

$$y^{(n)}(x) = b(x) - a_n(x)y(x) - \cdots - a_1(x)y^{(n-1)}(x)$$

uvažovaná jako funkce proměnných x, y, $\dots y^{(n-1)}$, vyhovuje předpokladům Důsledku 15.4.7: Je-li totiž $\mathcal{U}(x)$ okolí bodu x, které leží i se svým uzávěrem v (c, d), pro všechna $t \in \mathcal{U}(x)$ je

$$\begin{aligned} &|b(t) - a_n(t)u_1 - \cdots - a_1(t)u_n - (b(t) - a_n(t)v_1 - \cdots - a_1(t)v_n)| \le \\ &\le \sup\{|a_k(t)|\,;\, k = 1, 2, \dots, n,\ t \in \mathcal{U}(x)\}\big(|u_1 - v_1| + \cdots + |u_n - v_n|\big)\,. \end{aligned}$$

Lze dokázat, že maximální řešení rovnice (15.21) jsou definována na intervalu (c, d) a jsou jednoznačně určena počátečními podmínkami. Poznamenejme, že pro rovnici 1. řádu jsme maximální řešení jednoduše přímo spočetli.

Zcela analogicky jako v případě rovnice prvního řádu se dokáží následující jednoduchá tvrzení (důkazy vynecháme):

Lemma 15.5.1. *Je-li y_1 řešení rovnice* (15.21) *na (γ, δ) a y_2 řešením rovnice* (15.22) *na (γ, δ), pak je součet $y_1 + y_2$ řešením rovnice* (15.21) *na (γ, δ). Speciálně to platí pro maximální řešení.*

Lemma 15.5.2. *Jsou-li y_1, y_2 dvě řešení rovnice* (15.21) *na intervalu (γ, δ), pak je jejich rozdíl $y_1 - y_2$ řešením rovnice* (15.22) *na (γ, δ). Speciálně to opět platí pro maximální řešení.*

Věta 15.5.3. *Obecné řešení rovnice* (15.21) *obdržíme jako součet jednoho maximálního řešení rovnice* (15.21) *a obecného řešení rovnice* (15.22)*. Jinak řečeno, je-li y_1 maximálním řešením rovnice* (15.21)*, pak pro každé maximální řešení y rovnice* (15.21) *existuje maximální řešení y_2 rovnice* (15.22) *tak, že platí*

$$y = y_1 + y_2\,.$$

Tvrzení 15.5.4. *Všechna maximální řešení rovnice* (15.22) *tvoří lineární prostor.*

Protože nás tento lineární prostor (podprostor $\mathcal{C}^{(n)}((c,d))$) zajímá, budeme nejprve studovat lineární nezávislost diferencovatelných funkcí.

Definice 15.5.5. Nechť $y_1, \dots, y_n \in \mathcal{C}^{(n-1)}((c,d))$. Potom funkci [1]) definovanou na (c,d) předpisem

$$W[\,y_1,\dots,y_n\,](x) := \det\begin{pmatrix} y_1(x), & \dots, & y_n(x) \\ y_1'(x), & & y_n'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x), & \dots, & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}, \quad x \in (c,d)\,,$$

budeme nazývat podle jejího objevitele Józefa Marii Höne-Wrońskiho (1776 – 1853) *Wrońskiho determinantem* funkcí $y_1, \dots, y_n$, resp. krátce, avšak nespisovně, *wronskiánem* funkcí $y_1, \dots, y_n$.

Tvrzení 15.5.6. *Nechť $y_1, \dots, y_n$ jsou lineárně závislé funkce z $\mathcal{C}^{(n-1)}((c,d))$. Potom*

$$W[\,y_1,\dots,y_n\,](x) = 0\,,\ x \in (c,d)\,,$$

tj. wronskián těchto funkcí je roven identicky 0.

Důkaz. Pokud jsou funkce $y_1, \dots, y_n$ lineárně závislé, existují konstanty $c_1, \dots, c_n$, které nejsou vesměs rovny 0 tak, že platí

$$c_1 y_1 + \dots + c_n y_n = 0$$

(jde o rovnost funkcí na (c,d) !). Zderivujeme tuto rovnost $(n-1)$-krát, čímž dostaneme pro všechna $x \in (c,d)$

$$\begin{array}{ccccccc} c_1y_1(x) & + & \cdots & + & c_ny_n(x) & = & 0\,, \\ c_1y_1'(x) & + & \cdots & + & c_ny_n'(x) & = & 0\,, \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ c_1y_1^{(n-1)}(x) & + & \cdots & + & c_ny_n^{(n-1)}(x) & = & 0\,. \end{array} \tag{15.23}$$

Pro každé x má tato soustava lineárních rovnic s neznámými $c_1, c_2, \dots, c_n$ netriviální řešení, a to dokonce nezávislé na x. Odtud ale plyne, že matice soustavy musí být singulární pro každé $x \in (c,d)$, a proto platí

$$W[\,y_1,\dots,y_n\,](x) = 0\,, \quad x \in (c,d)\,.$$

Tím je důkaz dokončen. □

Připomínáme Důsledek 15.4.7 (pozor na změnu označení !), z něhož plyne existence a jednoznačnost maximálního řešení rovnice (15.22) pro $x_0 \in (c,d)$ a každou počáteční podmínku tvaru

$$y(x_0) = z_0\,,\ \dots,\ y^{(n-1)}(x_0) = z_{n-1}\,.$$

[1]) Stejně bývá nazýván i determinant v následující rovnosti na pravé straně.

Zvolíme-li nyní postupně např.

$$\begin{array}{llll} y(x_0) = 1\,, & y'(x_0) = 0\,, & \dots, & y^{(n-1)}(x_0) = 0\,, \\ y(x_0) = 0\,, & y'(x_0) = 1\,, & \dots, & y^{(n-1)}(x_0) = 0\,, \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y(x_0) = 0\,, & y'(x_0) = 0\,, & \dots, & y^{(n-1)}(x_0) = 1\,, \end{array} \tag{15.24}$$

pak tomuto systému n počátečních podmínek odpovídá n lineárně nezávislých řešení $y_1, \dots, y_n$ rovnice (15.22), protože $W[\,y_1, \dots, y_n\,](x_0) \neq 0$.

Tvrzení 15.5.7. *Nechť $y_1, \dots, y_n$ jsou lineárně nezávislé funkce z $\mathcal{C}^{(n)}((c,d))$, které jsou* řešeními rovnice (15.22). *Potom platí pro všechna $x \in (c,d)$*

$$W[\,y_1, \dots, y_n\,]\,(x) \neq 0\,.$$

Důkaz. Nechť existuje nějaké $x_0 \in (c,d)$ tak, že

$$W[\,y_1, \dots, y_n\,]\,(x_0) = 0\,.$$

Potom má soustava (15.23) pro $x = x_0$ netriviální řešení $(c_1, \dots, c_n)$. Položme

$$y^* := c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n\,.$$

Zřejmě je $y^*(x_0) = 0$. Jestliže však jsou $y_1, \dots, y_n$ řešení (15.22), je i y^* řešením (15.22) a

$$y^*(x_0) = 0\,,\ (y^*)'(x_0) = 0\,, \dots, (y^*)^{(n-1)}(x_0) = 0\,;$$

podle věty o jednoznačnosti je $y^*(x) \equiv 0$, tj. y^* je nulové řešení. Je tedy

$$c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n \equiv 0$$

a tato rovnost platí všude v (c,d). Odtud plyne, že $W[\,y_1, \dots, y_n\,]$ nemůže nabývat hodnoty 0 v žádném bodě $x \in (c,d)$, pokud jsou řešení $y_1, \dots, y_n$ nezávislá. □

Poznámka 15.5.8. Není-li wronskián funkcí $y_1, \dots, y_n$ z $\mathcal{C}^{(n-1)}((c,d))$ identicky roven 0, jsou tyto funkce lineárně nezávislé, což plyne z již dříve dokázaného tvrzení. Předchozí tvrzení ukazuje, že pro $y_1, \dots, y_n \in \mathcal{C}^{(n)}((c,d))$, které *jsou řešeními* (15.22), nastává právě jedna z možností:

1. $W[\,y_1, \dots, y_n\,](x) = 0$ pro všechna $x \in (c,d)$, nebo
2. $W[\,y_1, \dots, y_n\,](x) \neq 0$ pro všechna $x \in (c,d)$.

Poznámka 15.5.9. Tvrzení podstatně závisí na větě o jednoznačnosti: jsou-li $y_1, \dots, y_n$ pouze (dostatečně hladké) funkce, pro které je wronskián nulový, pak *neplyne* z podmínky 1. jejich lineární závislost. Doporučujeme čtenáři, aby se pokusil nalézt vhodný ilustrativní příklad.

Tvrzení 15.5.10. *Dimenze prostoru všech maximálních řešení rovnice n-tého řádu* (15.22) *je právě n.*

Důkaz. Víme již, jak lze např. pomocí (15.24) nalézt n lineárně nezávislých maximálních řešení rovnice (15.22). Nyní dokážeme, že tato řešení tvoří bázi lineárního prostoru všech maximálních řešení rovnice (15.22): Jestliže je y libovolné řešení rovnice $L(y) = 0$, pak zvolme $x_0 \in (c, d)$ a označíme

$$z_0 := y(x_0)\,,\ z_1 := y'(x_0)\,, \dots\,,\ z_{n-1} := y^{(n-1)}(x_0)\,;$$

Nyní ze soustavy rovnic

$$\begin{array}{ccccccc} c_1 y_1(x_0) & + & \cdots & + & c_n y_n(x_0) & = & z_0\,, \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) & + & \cdots & + & c_n y_n^{(n-1)}(x_0) & = & z_{n-1} \end{array}$$

určíme koeficienty $c_1, \dots, c_n$. Matice soustavy je totiž zřejmě regulární, takže koeficienty $c_1, \dots, c_n$ jsou určeny jednoznačně. Potom je

$$y(x) = c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x)\,, \quad x \in (c, d)\,,$$

protože levá i pravá strana jsou maximálními řešeními (15.22) se shodnými počátečními podmínkami v bodě x_0. □

Rovnice (15.22) má tedy právě n lineárně nezávislých maximálních řešení, která tvoří bázi prostoru všech maximálních řešení (15.22); je vhodné si však uvědomit, že pouze víme, že tato řešení *existují*, ale nemáme obecně žádnou metodu, jak je spočítat.

Definice 15.5.11. Každá n-tice lineárně nezávislých řešení rovnice (15.22) definovaných na intervalu (γ, δ) se nazývá *fundamentální systém řešení* rovnice (15.22) na (γ, δ).

Úlohu řešit rovnici (15.22) jsme převedli na úlohu nalézt její fundamentální systém *maximálních* řešení; potom lze *každé řešení* rovnice (15.22) vyjádřit jako restrikci vhodné lineární kombinace funkcí z tohoto fundamentálního systému. Obecné řešení rovnice (15.22) je tedy tvaru

$$y = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n\,,$$

kde $\{\, y_1, \dots, y_n \,\}$ je nějaký fundamentální systém maximálních řešení rovnice (15.22) a $c_1, \dots, c_n$ jsou libovolné (reálné) konstanty.

Při hledání obecného řešení rovnice (15.21) postupujeme analogicky jako v případě rovnice 1. řádu, podle tvrzení z Lemmat 15.5.1, 15.5.2 a Věty 15.5.3. Odtud ihned plyne praktický návod: Obecné řešení rovnice (15.21) je součtem obecného řešení rovnice (15.22) a jednoho libovolně zvoleného řešení rovnice (15.21); tomuto řešení se opět říká *partikulární řešení.*

Určení obecného řešení rovnice (15.22) není v obecném případě lehké. Tak např. pro rovnice prvního řádu umíme úlohu zredukovat na hledání vhodné primitivní funkce. Umíme-li nějaké partikulární řešení rovnice (15.21) uhodnout, lze řešení někdy převést na řešení rovnice nižšího řádu. Někdy je rovnice (15.22) speciálního tvaru, a pak ji lze díky tomu rovněž vyřešit. Tyto metody nebudeme podrobněji rozebírat a čtenáře, pokud by se tyto metody chtěl naučit, odkazujeme např. na [3], [11], [15] a další učebnice.

Známe-li obecné řešení rovnice (15.22), existuje metoda, pomocí níž lze určit potřebné partikulární řešení rovnice (15.21). Je zobecněním metody, se kterou se čtenář setkal v Poznámce 10.1.13 a která je založena na předpokladu, že se toto partikulární řešení dá vyjádřit ve tvaru lineární kombinace fundamentálního systému řešení s koeficienty, které jsou *funkcemi* na (c, d), tj.

$$y(x) = c_1(x)y_1(x) + \cdots + c_n(x)y_n(x)\,, \quad x \in (c,d)\,. \tag{15.25}$$

Historická poznámka 15.5.12. Tato metoda se objevuje v jednoduché verzi v souvislosti se studiem speciální rovnice 2. řádu poprvé u Leonharda Eulera (1707 – 1783) r. 1739. V obecnější podobě ji při systematickém studiu lineárních diferenciálních rovnic (s nekonstantními koeficienty) použil později Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813); ten se patrně inspiroval staršími metodami výpočtů v astronomii. Viz [6].

Provedeme nyní následující výpočet: derivujeme y ve tvaru (15.25) a ve vyjádření y' položme součet členů obsahujících $c_1', \dots, c_n'$ roven 0; pak počítáme y'' a postupujme obdobně, atd. Klademe výrazy ve druhé až předposlední rovnici zcela vpravo v závorkách, obsahující derivace $c_1', \dots, c_n'$, vždy rovny 0, čímž dostaneme $(n-1)$ rovnic pro neznámé $c_1', \dots, c_n'$. Formální úprava dává dobrou představu o podstatě věci, pro stručnost vynecháváme proměnnou x:

$$\begin{aligned}
y &= c_1y_1 + \cdots + c_ny_n\,, \\
y' &= c_1y_1' + \cdots + c_ny_n' && + \left(c_1'y_1 + \cdots + c_n'y_n\right), \\
y'' &= c_1y_1'' + \cdots + c_ny_n'' && + \left(c_1'y_1' + \cdots + c_n'y_n'\right), \\
&\ \vdots \\
y^{(n-1)} &= c_1y_1^{(n-1)} + \cdots + c_ny_n^{(n-1)} && + \left(c_1'y_1^{(n-2)} + \cdots + c_n'y_n^{(n-2)}\right), \\
y^{(n)} &= c_1y_1^{(n)} + \cdots + c_ny_n^{(n)} && + \ c_1'y_1^{(n-1)} + \cdots + c_n'y_n^{(n-1)}\,.
\end{aligned}$$

Upravme předcházejících $(n+1)$ rovnic tak, že vynásobíme prvou rovnici funkcí a_n, druhou rovnici funkcí a_{n-1} atd. Předposlední rovnici násobíme funkcí a_1. Všechny takto získané rovnice včetně poslední neupravované sečteme. Protože $y_1, \dots, y_n$ jsou řešeními (15.22), dostáváme po snadné úpravě s přihlédnutím k (15.21)

$$L(y) = c_1L(y_1) + \cdots + c_nL(y_n) + c_1'y_1^{(n-1)} + \cdots + c_n'y_n^{(n-1)} = b\,.$$

Prvých n sčítanců se zřejmě anuluje; dostaneme tak poslední, tj. n-tou rovnici

$$c_1'y_1^{(n-1)} + \cdots + c_n'y_n^{(n-1)} = b\,.$$

Nalezená soustava

$$\begin{array}{ccccccc}
c_1'y_1 & + & \cdots & + & c_n'y_n & = & 0\,, \\
c_1'y_1' & + & \cdots & + & c_n'y_n' & = & 0\,, \\
\vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
c_1'y_1^{(n-1)} & + & \cdots & + & c_n'y_n^{(n-1)} & = & b\,,
\end{array}$$

pro neznámé funkce $c_1', \dots, c_n'$ má regulární matici, proto se problém redukuje na nalezení n primitivních funkcí k n spojitým funkcím, čímž získáme potřebné partikulární řešení. Podotýkáme, že zde užíváme Cramerovo pravidlo známé z algebry, pomocí kterého vyjadřujeme $c_1', \ldots, c_n'$ ve tvaru podílů spojitých funkcí (dělíme wronskiánem fundamentálního systému řešení).

Popsaná metoda se nazývá *metoda variace konstant.* Její aplikace na konkrétní případy může být velmi pracná, zejména pokud ji provádíme „ručně“.

15.6 Případ konstantních koeficientů

Vraťme se k problému určení fundamentálního systému řešení rovnice (15.22). Ve speciálním případě, kdy má rovnice (15.21), resp. (15.22), za koeficienty $a_1, \ldots, a_n$ *konstantní* funkce na (c, d), můžeme převést úlohu nalézt fundamentální systém řešení rovnice (15.22) na ryze algebraickou úlohu. Zdůrazněme, že naším cílem je najít pro případ takové rovnice (15.22) s koeficienty $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ *reálné funkce* (na $\mathbb{R}$), tvořící fundamentální systém řešení (15.22).

Předpokládejme, že rovnice (15.22), tj. $L(y) = 0$, má řešení tvaru

$$y(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}\,, \tag{15.26}$$

a pokusme se nalézt podmínky charakterizující volbu takových α. Po zderivování a dosazení do (15.22) obdržíme

$$L(\mathrm{e}^{\alpha x}) = \mathrm{e}^{\alpha x}\left(\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \cdots + a_n\alpha^0\right) = 0\,. \tag{15.27}$$

Stačí tedy nalézt $\alpha \in \mathbb{R}$, které je kořenem tzv. *charakteristické rovnice* příslušné k (15.22)

$$P(\alpha) = \alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \cdots + a_n = 0\,. \tag{15.28}$$

a máme jedno (reálné) řešení tvaru (15.26). Tímto způsobem přiřazujeme operátoru L *charakteristický polynom* P.

Avšak rovnice (15.28) nemusí vůbec mít *reálné* kořeny: Základní věta algebry o existenci kořene každé algebraické rovnice tvaru $P(x) = 0$, kde P je polynom stupně $\mathrm{st}(P) \geq 1$, nám jako důsledek dává pro rovnici stupně n, $n \geq 1$, existenci *právě n obecně komplexních kořenů*, počítaných včetně jejich násobnosti.

Vznikají přirozené otázky:

1. Je-li charakteristická rovnice přiřazená operátoru L z rovnice (15.22) tvaru

   $$P(\alpha) = 0\,, \tag{15.29}$$

   pak její vícenásobné kořeny dávají pouze jedno „přirozené řešení“; jak lze nalézt celý fundamentální systém řešení rovnice (15.22)?

2. Co dělat s komplexními kořeny rovnice (15.29) v případě, že hledáme *reálný* fundamentální systém (P je polynom s reálnými koeficienty)?

Výsledky jsou průhlednější, interpretujeme-li je z hlediska *komplexních funkcí* reálné proměnné. Jsou-li $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ (obecně komplexní) kořeny (15.29) a jsou-li tyto kořeny navzájem různé, jsou funkce

$$\mathrm{e}^{\alpha_1 x},\ \mathrm{e}^{\alpha_2 x},\ \ldots,\ \mathrm{e}^{\alpha_n x}$$

řešeními (15.22) a jsou navzájem nezávislé, tj. tvoří fundamentální systém. Pro jejich wronskián dostaneme snadným výpočtem

$$W[\,\mathrm{e}^{\alpha_1 x}, \dots, \mathrm{e}^{\alpha_n x}\,] = \mathrm{e}^{(\alpha_1+\dots+\alpha_n)x} \cdot \begin{vmatrix} 1, & 1, & \dots, & 1 \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \dots, & \alpha_n \\ \vdots & & & \vdots \\ \alpha_1^{n-1}, & \alpha_2^{n-1}, & \dots, & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

přičemž determinant vpravo je tzv. *Vandermondův determinant*; jeho hodnota je rovna součinu všech dvojčlenů $(\alpha_j - \alpha_k)$ pro $1 \le j < k \le n$, a je tedy nenulová. Jsou-li tyto kořeny vesměs reálné, získáme tak fundamentální systém složený z n reálných funkcí.

Poznámka 15.6.1. Má-li charakteristický polynom P v (15.28) pouze *reálné* koeficienty $a_1, \dots, a_n$, pak s každým kořenem α má též kořen $\overline{\alpha}$ (číslo komplexně sdružené). Je-li totiž $P(\alpha) = 0$, je také

$$0 = \overline{P(\alpha)} = \overline{\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \dots + a_n} = (\overline{\alpha})^n + a_1(\overline{\alpha})^{n-1} + \dots + a_n\,. \tag{15.30}$$

Když některé kořeny charakteristické rovnice nejsou reálné, dostáváme řešení rovnice (15.22), která jsou však komplexními funkcemi reálné proměnné. Ta jsou nad $\mathbb{R}$ nezávislá. Je-li $\alpha = \beta + \mathrm{i}\gamma$, jsou řešení tvaru

$$\mathrm{e}^{\beta x}\,(\cos\gamma x + \mathrm{i}\sin\gamma x)\ , \quad \mathrm{e}^{\beta x}\,(\cos\gamma x - \mathrm{i}\sin\gamma x)\ .$$

Přejdeme k jejich vhodným lineárním kombinacím, které dají reálnou a imaginární část:

$$\mathrm{e}^{\beta x}\cos\gamma x\,, \quad \mathrm{e}^{\beta x}\sin\gamma x\,.$$

Z předcházející úvahy nebo přímým výpočtem snadno ověříme, že jsou to lineárně nezávislé funkce: Z rovnosti

$$c_1\mathrm{e}^{\beta x}\cos\gamma x + c_2\mathrm{e}^{\beta x}\sin\gamma x = 0$$

dostaneme dělením $\mathrm{e}^{\beta x} \neq 0$ a pak zderivováním a dělením $\gamma \neq 0$ dvojici rovnic:

$$\begin{aligned} c_1\cos\gamma x + c_2\sin\gamma x &= 0\,, \\ -c_1\sin\gamma x + c_2\cos\gamma x &= 0\,. \end{aligned}$$

Tato soustava má pouze triviální řešení $c_1 = c_2 = 0$.

Poznámka 15.6.2. Zbývá vyřešit případ vícenásobných kořenů. Motivací nám bude úvaha: Jsou-li $\alpha_1 \neq \alpha_2$ reálná čísla, která jsou kořeny (15.29), je

$$\frac{\mathrm{e}^{\alpha_1 x} - \mathrm{e}^{\alpha_2 x}}{\alpha_1 - \alpha_2} = \frac{\mathrm{e}^{\alpha_2 x}\big(\mathrm{e}^{(\alpha_1-\alpha_2)x} - 1\big)}{(\alpha_1 - \alpha_2)x}\,x$$

rovněž řešení (15.22). Představíme-li si, že dvojnásobný kořen vzniká „splynutím“ dvou kořenů, můžeme provést experiment: Při $\alpha_1 \to \alpha_2$ má zlomek vpravo zřejmě limitu $x\mathrm{e}^{\alpha_2 x}$. To nás vede k *domněnce*, že tato funkce je rovněž řešením (15.22) a že toto řešení je s ostatními „zřejmými“ lineárně nezávislé. Ověření správnosti domněnky, ke které jsme popsanou úvahou dospěli, není složité, ale je pracnější a *technicky* trochu náročnější.

Tvrzení 15.6.3. *Jsou-li $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ navzájem různé kořeny rovnice* (15.29) *s násobnostmi $s_1, \ldots, s_r$ a je $s_1 + s_2 + \cdots + s_r = n$, pak*

$$\begin{array}{llll} e^{\alpha_1 x}, & x e^{\alpha_1 x}, & \ldots, & x^{s_1 - 1} e^{\alpha_1 x}, \\ e^{\alpha_2 x}, & x e^{\alpha_2 x}, & \ldots, & x^{s_2 - 1} e^{\alpha_2 x}, \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e^{\alpha_k x}, & x e^{\alpha_k x}, & \ldots, & x^{s_r - 1} e^{\alpha_r x} \end{array} \tag{15.31}$$

tvoří fundamentální systém řešení (15.22).

Pokud má charakteristický polynom P reálné koeficienty, lze přechodem k vhodným lineárním kombinacím řešení příslušných komplexně sdruženým kořenům dosáhnout toho, že vzniklý fundamentální systém je tvořen pouze reálnými funkcemi.

Pro důkaz Tvrzení 15.6.3 je vhodné si připravit několik jednoduchých lemmat.

Lemma 15.6.4. *Nechť operátor v rovnici $L(y) = 0$ má charakteristickou rovnici $Q(\alpha) = 0$ s kořenem $\alpha_0 = 0$ násobnosti s, tj.*

$$Q(\alpha) = \alpha^n + b_1 \alpha^{n-1} + \cdots + b_{n-s} \alpha^s = 0\,,$$

kde $b_{n-s} \neq 0$. Pak má rovnice $L(y) = 0$ lineárně nezávislá řešení

$$1\,,\ x\,, \ldots, x^{s-1}\,.$$

Důkaz. Dosazením se snadno přesvědčíme, že funkce jsou řešeními rovnice. Stejně snadno zjistíme, že wronskián těchto funkcí $W[\,1, x, \ldots, x^{s-1}] \neq 0$; jde totiž o determinant trojúhelníkové matice, na jejíž hlavní diagonále jsou vesměs nenulové prvky. Proto jsou tato řešení lineárně nezávislá. □

Lemma 15.6.5. *Nechť operátor v rovnici $L(y) = 0$ má charakteristickou rovnici $Q(\alpha) = 0$ s obecným kořenem α_0 násobnosti s. Potom má rovnice $L(y) = 0$ řešení*

$$1 \cdot e^{\alpha_0 x},\ x\, e^{\alpha_0 x},\ \ldots,\ x^{s-1} e^{\alpha_0 x}\,.$$

Důkaz. Hledejme řešení y rovnice $L(y) = 0$ ve tvaru součinu: $y(x) = z(x)\, e^{\alpha_0 x}$; proměnnou x budeme u funkce z pro zestručnění zápisu vynechávat. Je

$$y = z\, e^{\alpha_0 x},\ y' = z'\, e^{\alpha_0 x} + z\, \alpha_0\, e^{\alpha_0 x}, \ldots\,,$$

takže po dosazení dostaneme $L(y) = L\big(z\, e^{\alpha_0 x}\big) = e^{\alpha_0 x} M(z)$, kde M je lineární diferenciální operátor s konstantními koeficienty. Najdeme charakteristický polynom Q_1 operátoru M. Z (15.27) dostáváme

$$L(e^{\alpha x}) = e^{\alpha x} Q(\alpha)\,. \tag{15.32}$$

Dále platí

$$e^{\alpha x} Q_1(\alpha) = M\big(e^{\alpha x}\big)\,, \qquad \text{tedy} \qquad Q_1(\alpha) = \frac{M\big(e^{\alpha x}\big)}{e^{\alpha x}}\,.$$

Odtud snadno spočteme

$$Q_1(\alpha) = \frac{M\big(e^{\alpha x}\big)}{e^{\alpha x}} = \frac{L\big(e^{\alpha x} e^{\alpha_0 x}\big)}{e^{\alpha_0 x}} \cdot \frac{1}{e^{\alpha x}} = \frac{L\big(e^{(\alpha + \alpha_0)\, x}\big)}{e^{(\alpha + \alpha_0)\, x}} = Q\big(\alpha + \alpha_0\big)\,,$$

z čehož vyplývá: Má-li charakteristický polynom Q kořen α_0 násobnosti s, má charakteristický polynom Q_1 kořen 0 násobnosti s. Podle Lemmatu 15.6.4 jsou funkce $1, x, \ldots, x^{s-1}$ řešeními rovnice $M(z) = 0$, takže funkce

$$1 \cdot \mathrm{e}^{\alpha_0 x},\ x\,\mathrm{e}^{\alpha_0 x},\ \ldots,\ x^{s-1}\mathrm{e}^{\alpha_0 x}$$

jsou řešeními rovnice $L(y) = 0$. □

Tím jsme získali „stavební prvky" pro systém (15.31). Nyní dokážeme platnost tvrzení, které je samo o sobě zajímavé, a pomocí kterého již důkaz snadno dokončíme.

Lemma 15.6.6. *Nechť $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ jsou libovolná navzájem různá (komplexní) čísla. Jestliže polynomy $H_1, H_2, \ldots, H_r$ vyhovují rovnici*

$$\sum_{k=1}^{r} \mathrm{e}^{\alpha_k x} H_k(x) = 0\,,$$

potom jsou H_k identicky nulové polynomy pro všechna $k = 1, 2, \ldots, r$.

Důkaz. Nejprve si povšimneme, že je-li $\mu \in \mathbb{C}$, $\mu \neq 0$ a $H \not\equiv 0$ je polynom stupně m, pak

$$\big(\mathrm{e}^{\mu x} H(x)\big)' = \mathrm{e}^{\mu x}\mu H(x) + \mathrm{e}^{\mu x} H'(x) = \mathrm{e}^{\mu x}\big(H'(x) + \mu H(x)\big) =: \mathrm{e}^{\mu x} K(x)\,,$$

kde polynom K má rovněž stupeň m. Dále postupujeme „konečnou" indukcí vzhledem k r: Dokážeme, že vždy všechny K_k a tedy i H_k jsou identicky nulové. Pro $r = 1$ je tvrzení zřejmé, protože exp nenabývá nikde hodnoty 0, a tak musí platit $H_1 \equiv 0$. Dále ukážeme, že pokud platí tvrzení pro $r - 1 \geq 1$, platí i pro r : z rovnosti

$$\sum_{k=1}^{r} \mathrm{e}^{\alpha_k x} H_k(x) = 0 \quad \text{plyne} \quad H_r(x) = -\sum_{k=1}^{r-1} \mathrm{e}^{(\alpha_k - \alpha_r)\,x} H_k(x)\,.$$

Nyní derivujeme poslední rovnost tolikrát, abychom dostali (poprvé) vlevo identicky nulovou funkci; obdržíme tak rovnost

$$0 = \sum_{k=1}^{r-1} \mathrm{e}^{(\alpha_k - \alpha_r)\,x} K_k(x)\,,$$

přičemž stupně každých dvou polynomů H_k a K_k jsou pro $k = 1, 2, \ldots, r - 1$ stejné. Vzhledem k tomu, že exponenty v exponenciále jsou všechny různé, je podle indukčního předpokladu $K_k \equiv 0$ a také $H_k \equiv 0$ pro $k = 1, 2, \ldots, r-1$. Odtud plyne, že také $H_r \equiv 0$, čímž je tvrzení lemmatu dokázáno. □

Důkaz Tvrzení 15.6.3. Protože lineární kombinace řešení ze seznamu (15.31) má formálně tvar kombinace

$$\sum_{k=1}^{r} \mathrm{e}^{\alpha_k x} H_k(x) = 0\,,$$

kde H_k je polynom, který má stupeň s_{k-1}, $k = 1, 2, \ldots, r$, dostáváme odtud, že funkce v seznamu (15.31) jsou lineárně nezávislé a tedy (15.31) je popis fundamentálního systému řešení rovnice (15.22).

Pokud má charakteristický polynom P rovnice $L(y) = 0$ všechny koeficienty reálné, postupujeme jako v Poznámce 15.6.1 a z „párových" komplexních řešení vytvoříme řešení reálná. Tím je důkaz Tvrzení 15.6.3 dokončen. □

Příklad 15.6.7. Pro lineární diferenciální rovnici 2. řádu

$$L_1(y) := y'' - 3y' + 2y = 0 \tag{15.33}$$

má její charakteristická rovnice tvar $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$. Jejími různými kořeny jsou čísla 1 a 2, proto je fundamentální systém řešení tvořen funkcemi e^x a e^{2x} a její obecné řešení obvykle zapisujeme ve tvaru $y = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{2x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, což je popis prvků dvojrozměrného prostoru generovaného funkcemi e^x a e^{2x}. Podobně v případě dvojnásobného kořene charakteristické rovnice pro rovnici

$$L_2(y) := y'' - 2y' + y = 0 \tag{15.34}$$

je tvořen fundamentální systém řešení funkcemi e^x a $x\mathrm{e}^x$. Konečně pro rovnici

$$L_3(y) := y'' + 4y' + 13y = 0\,, \tag{15.35}$$

jejíž charakteristická rovnice $\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$ má dvojici komplexně sdružených kořenů $-2+3\mathrm{i}$ a $-2-3\mathrm{i}$, dostaneme jim odpovídající komplexní funkce $\mathrm{e}^{(-2+3\mathrm{i})x}$ a $\mathrm{e}^{(-2-3\mathrm{i})x}$. Zřejmě je

$$\mathrm{e}^{(-2\pm 3\mathrm{i})x} = \mathrm{e}^{-2x}(\cos 3x \pm \mathrm{i}\sin 3x)\,.$$

Obě komplexní funkce reálné proměnné mají (až na znaménko) shodnou reálnou a imaginární část $\mathrm{e}^{-2x}\cos 3x$ a $\mathrm{e}^{-2x}\sin 3x$; tyto funkce rovněž tvoří fundamentální systém řešení rovnice (15.35). O správnosti těchto jednoduchých tvrzení se lze přesvědčit přímým výpočtem.

Existuje „jednoduchý trik“, který umožňuje snadno, bez použití další integrace, kterou bychom prováděli při užití variace konstant, nalézt partikulární řešení rovnice (15.21) pro speciální pravé strany. Je vhodné si pamatovat jeho „komplexní verzi“, ze které snadno plyne postup v „reálném případě“. *Jestliže je pravá strana* $b(x)$ *rovnice* (15.21) *tvaru*

$$f(x)\,\mathrm{e}^{\lambda x}\,,$$

kde f *je* polynom stupně r *(s komplexními koeficienty) a* $\lambda \in \mathbb{C}$, *pak klademe* $k = 0$ *pro případ* $P(\lambda) \neq 0$, *respektive* $k =$„násobnost kořenu λ charakteristického polynomu P“, *a rovnice* (15.21)

$$L(y) = f(x)\,\mathrm{e}^{\lambda x}$$

má partikulární řešení tvaru

$$x^k\,g(x)\,\mathrm{e}^{\lambda x}\,,$$

kde g *je polynom (s komplexními koeficienty) téhož stupně* r *jako* f. Ostatní případy pravých stran typu $f(x)\cos x$, resp. $f(x)\sin x$ apod. jsou v tomto případu zahrnuty, čtenář si je však musí samostatně promyslet. Jelikož při aplikaci metody zároveň ověřujeme, že předpokládané řešení je skutečně partikulárním řešením (15.21), nebudeme tento trik nijak teoreticky zdůvodňovat; viz [11], str. 128, [8], str. 52, nebo [15], str. 244. Praktickou ukázku poskytuje následující příklad.

Příklad 15.6.8. Navážeme na předcházející Příklad 15.6.7. Řešme rovnici

$$L_1(y) = y'' - 3y' + 2y = 2x + 3\,. \tag{15.36}$$

Kořeny příslušné charakteristické rovnice pro (15.33) jsou čísla 1 a 2, pravá strana (15.36) má tvar $e^{0x}(2x+3)$ a 0 *není* kořenem charakteristické rovnice. Protože $2x+3$ je polynom stupně 1, hledáme partikulární řešení rovnice (15.36) ve tvaru $e^{0x}(ax+b) = ax+b$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Po zderivování a dosazení do (15.36) dostaneme rovnici

$$0 - 3a + 2(ax+b) = 2x + 3\,,$$

ze které snadno spočteme $a = 1$, $b = 3$. Tímto způsobem jsme snadno určili partikulární řešení $y_1 = x + 3$ rovnice (15.36), a proto je její obecné řešení tvaru

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + x + 3\,.$$

Pro rovnici $L_1(y) = x^2 e^{2x}$ je situace nepatrně složitější, protože 2 je (jednoduchým) kořenem charakteristické rovnice pro (15.33); v tomto případě hledáme partikulární řešení ve tvaru

$$y_1 = e^{2x}(ax^3 + bx^2 + cx)\,.$$

Konečně pro rovnici $L_1(y) = e^x \cos 2x$ uvážíme, že její pravá strana je reálnou částí funkce $e^{(1+2i)x}$, a protože komplexní číslo $1 + 2i$ není kořenem charakteristické rovnice pro (15.33), hledáme v tomto případě partikulární řešení ve tvaru

$$y_1 = a e^x \cos 2x + b e^x \sin 2x\,,$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$. Podobně pro rovnici $L_2(y) = e^x(x+3)$ hledáme partikulární řešení ve tvaru $y_1 = e^x(ax^3 + bx^2)$, protože číslo 1 je *dvojnásobným* kořenem charakteristické rovnice pro (15.34). Konečně pro rovnici $L_3(y) = x^2 e^{-2x} \sin 3x$ hledáme partikulární řešení ve tvaru

$$y_1 = (ax^3 + bx^2 + cx)\, e^{-2x} \cos 3x + (dx^3 + fx^2 + gx)\, e^{-2x} \sin 3x\,,$$

kde $a, b, c, d, f, g \in \mathbb{R}$, protože komplexní čísla $-2 \pm 3i$ jsou jednoduchými kořeny charakteristické rovnice pro (15.35).

Poznamenejme, že je pak již jen záležitostí početní praxe odhadnout, zda je výhodnější použít variaci konstant nebo „hádání“ tvaru řešení. Pokud se zbavíme nutnosti hledat primitivní funkce, neznamená to zdaleka, že jiný postup je časově méně výhodný. Podrobný výklad metody nalezne čtenář např. v [11], str. 128.

Příklad 15.6.9. Dostatek praktických příkladů na užití rovnic vyšších řádů poskytuje např. fyzika. Rovnice

$$y'' + 2ay' + \omega^2 y = 0$$

s $\omega > 0$ a s $a = 0$ je rovnice tzv. *harmonického lineárního oscilátoru.* Jejím netriviálním obecným řešením ($c_1^2 + c_2^2 > 0$) jsou funkce

$$y(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t\,, \quad t \in \mathbb{R}\,. \tag{15.37}$$

Položíme-li $C = (\,c_1^2 + c_2^2\,)^{1/2} > 0$, pak existuje $t_0 \in \mathbb{R}$ tak, že je

$$y(t) = C \sin(\omega t + t_0)\,.$$

Číslo C je tzv. *amplituda* a t_0 *fáze.* Jestliže je $a > 0$, pak povaha řešení rovnice (15.37) závisí na vztahu ω a a. Řešení popisují silně tlumené ($a > \omega$), kriticky tlumené ($a = \omega$) či slabě tlumené ($a < \omega$) kmity. Viz např. [10], str. 76 a násl. V těchto skriptech nalezne čtenář mnoho příkladů aplikací teorie (obyčejných) diferenciálních rovnic.

15.7 Systémy lineárních diferenciálních rovnic

Budeme se ještě krátce zabývat systémy diferenciálních rovnic. V této části budeme užívat ještě hlubší poznatky z algebry. Následující výklad ukazuje jejich využití. Ilustrativní příklad nám ukáže, že se budeme moci omezit, podobně jako již dříve, na systémy (soustavy) rovnic prvního řádu.

Příklad 15.7.1. Mechanickou konfiguraci, v níž je na pružině o tuhosti k_1 zavěšeno závaží o hmotnosti m_1, na kterém je na pružině o tuhosti k_2 zavěšeno závaží o hmotnosti m_2, popisuje systém

$$\begin{aligned} m_1 y_1'' &= m_1 g - k_1 y_1 + k_2(y_2 - y_1)\,, \\ m_2 y_2'' &= m_2 g - k_2(y_2 - y_1)\,. \end{aligned}$$

Předpokládáme, že kromě gravitační síly nepůsobí na systém žádná další vnější síla. Funkce y_1 a y_2 popisují výchylky závaží od rovnovážného stavu. Pomocí substituce $y_1' = (1/m_1)y_3$, $y_2' = (1/m_2)y_4$ dostaneme systém prvního řádu

$$\begin{aligned} y_1' &= (1/m_1)y_3\,, \\ y_2' &= (1/m_2)y_4\,, \\ y_3' &= m_1 g - k_1 y_1 + k_2(y_2 - y_1)\,, \\ y_4' &= m_2 g - k_2(y_2 - y_1)\,. \end{aligned}$$

Předešlý příklad lze snadno zobecnit: každý podobný systém lze analogicky převést na systém prvního řádu. Dále ukážeme, jak *ve speciálních případech* řešit systém (soustavu) diferenciálních rovnic prvního řádu

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)\,, \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)\,, \\ &\ \vdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)\,, \end{aligned}$$

který jsme zkráceně zapisovali ve tvaru

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}\,(x, \boldsymbol{y})\,,$$

a pro který jsme odvodili „lokální“ existenční Větu 15.4.1. Chceme-li systém prakticky řešit, jsou zjednodušení nutná: omezíme se proto na *lineární systémy.* Obecně jde totiž o složitý problém, avšak, stejně jako výše, pro speciální případy je k dispozici poměrně jednoduchá teorie. Budeme se tedy zabývat systémem

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \cdots + a_{1n}(x)y_n + b_1(x)\,, \\ y_2'(x) &= a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \cdots + a_{2n}(x)y_n + b_2(x)\,, \\ &\ \vdots \\ y_n'(x) &= a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \cdots + a_{nn}(x)y_n + b_n(x)\,, \end{aligned} \tag{15.38}$$

který budeme zapisovat „maticově“ ve tvaru

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\,\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(x)\,;$$

zde $\boldsymbol{y}$ a $\boldsymbol{b}$ chápeme jako *sloupcové n-rozměrné vektory*, $\boldsymbol{A}$ je čtvercová matice typu $n \times n$, jejímiž prvky jsou (reálné) funkce. Přitom budeme předpokládat, že a_{jk} a b_j jsou *spojité* funkce na otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$. V tomto případě pro každý bod $[\,x_0, \boldsymbol{y}^0\,] \in I \times \mathbb{R}^n$ existuje podle Věty 15.4.4 právě jedno řešení $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi^1, \dots, \varphi^n)$ definované na intervalu I, splňující podmínku $\boldsymbol{\varphi}(x_0) = \boldsymbol{y}^0$.

Není příliš překvapující, že budeme uvažovat opět *dva* systémy rovnic, a to jednak systém

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\,\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(x)\,, \tag{15.39}$$

a pak systém

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\,\boldsymbol{y}\,. \tag{15.40}$$

Postupně odvodíme tvrzení, která budou obdobná jako v případě lineární diferenciální rovnice n-tého řádu.

Lemma 15.7.2. *Všechna řešení systému* (15.40) *definovaná na tomtéž intervalu tvoří lineární prostor. Speciálně to platí pro všechna maximální řešení.*

Důkaz. Pro řešení $\boldsymbol{y}_1$, $\boldsymbol{y}_2$ systému (15.40) a $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ zřejmě platí

$$(\,c_1\boldsymbol{y}_1 + c_2\boldsymbol{y}_2)' = c_1\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}_1 + c_2\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{A}(x)\,(\,c_1\boldsymbol{y}_1 + c_2\boldsymbol{y}_2)\,,$$

což dokazuje tvrzení. □

Nyní ukážeme, že tento prostor má dimenzi n. Nejprve budeme řešit důležitou otázku, kdy jsou n-rozměrné vektorové funkce $\boldsymbol{g}_k(x) = (g_k^1(x), g_k^2(x), \dots, g_k^n(x))$, $x \in I$, $k = 1, \dots, n$, lineárně nezávislé na intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Jsou-li lineárně závislé, pak musí existovat netriviální lineární kombinace těchto vektorů s koeficienty $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ tak, že (vektorová) funkce

$$c_1\boldsymbol{g}_1(x) + \dots + c_n\boldsymbol{g}_n(x) \equiv \boldsymbol{0}\,,$$

tj. tato kombinace je n-rozměrným nulovým vektorem v každém bodě $x \in I$. K tomu je nutné, aby determinant matice, jejíž sloupce tvoří vektorové funkce $\boldsymbol{g}_1(x), \dots, \boldsymbol{g}_n(x)$, $x \in I$, byl na I *nulovou funkcí.* Determinant funkční matice, jejíž sloupce tvoří funkce $\boldsymbol{g}_1(x), \dots, \boldsymbol{g}_n(x)$, $x \in I$, má analogické vlastnosti jako dříve zavedený Wrónskiho determinant. To nám bude vodítkem pro další postup.

Pomocí Věty 15.4.4 o jednoznačnosti najdeme n lineárně nezávislých řešení

$$\boldsymbol{y}_1 = (y_1^1, y_1^2, \dots, y_1^n),\ \dots,\ \boldsymbol{y}_n = (y_n^1, y_n^2, \dots, y_n^n)\,,$$

která splňují rovnici (15.40) a pro nějaké $x_0 \in I$ podmínku

$$\boldsymbol{y}_k(x_0) = \mathbf{e}^k\,, \quad k = 1, \dots, n\,; \tag{15.41}$$

vektor $\mathbf{e}^k$ je standardní souřadnicový vektor $(0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$, který má k-tou souřadnici rovnou 1, zatímco ostatní jsou rovny 0. Řešení jsou opravdu lineárně nezávislá, protože z $\sum_{k=1}^n c_k\boldsymbol{y}_k = \boldsymbol{0}$ plyne dosazením x_0 rovnost

$$\sum_{k=1}^n c_k\boldsymbol{y}_k(x_0) = \sum_{k=1}^n c_k\mathbf{e}^k = \boldsymbol{0}\,.$$

Protože $\mathbf{e}^k$, $k = 1, \ldots, n$, jsou lineárně nezávislé, plyne odtud $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$.

Lemma 15.7.3. *Všechna maximální řešení systému* (15.40) *tvoří lineární prostor dimenze n.*

Důkaz. Z předchozí úvahy vyplývá, že dimenze tohoto prostoru je alespoň n. Je-li $\boldsymbol{y}^*$ libovolné řešení systému (15.40), je $\boldsymbol{y}^*(x_0) = \boldsymbol{h} = (h^1, h^2, \ldots, h^n)$ a $\boldsymbol{y}^*(x_0) = \sum_{k=1}^n h^k \mathbf{e}^k$. Pak podle věty o jednoznačnosti je $\boldsymbol{y}^*(x) = \sum_{k=1}^n h^k \boldsymbol{y}_k(x)$ pro všechna $x \in I$. □

Jsou-li funkce $\boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_n$, resp. jejich složky g_j^k, $j, k = 1, 2, \ldots, n$, funkcemi z $\mathcal{C}^k(I)$, je i jejich determinant funkcí z $\mathcal{C}^k(I)$. Přitom je pro lineárně závislé funkce roven 0 všude v I. Ukážeme, že v případě vektorových funkcí $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_n$, které jsou *řešeními systému* (15.40), platí alternativa v „silnější" podobě: je-li determinant matice $\big(y_j^k\big)$ různý od 0 alespoň v jednom bodě intervalu I, je nenulový ve *všech* bodech I. Je-li totiž nulový v nějakém bodě $x_0 \in I$, existuje netriviální lineární kombinace taková, že $c_1\boldsymbol{y}_1(x_0) + \cdots + c_n\boldsymbol{y}_n(x_0) = \mathbf{0}$. Pak podle věty o jednoznačnosti je

$$c_1\boldsymbol{y}_1(x) + \cdots + c_n\boldsymbol{y}_n(x) = \mathbf{0}$$

pro všechna $x \in I$. Jestliže srovnáme dosud nalezené poznatky s tím, co jsme odvodili pro lineární rovnici n-tého řádu, vidíme, že je účelné i v tomto případě zavést pojem *fundamentálního systému řešení.*

Definice 15.7.4. Množinu každých n lineárně nezávislých řešení systému (15.40) na intervalu (c, d) nazýváme *fundamentální systém řešení soustavy* (15.40) na (c, d). Matici, jejíž *sloupce* tvoří fundamentální systém maximálních řešení soustavy (15.40), nazýváme *fundamentální maticí soustavy* (15.40). Budeme ji značit $\boldsymbol{Y} := \boldsymbol{Y}(x)$. Je tedy

$$\boldsymbol{Y}(x) := \begin{pmatrix} y_1^1 & y_2^1 & \cdots & y_n^1 \\ y_1^2 & y_2^2 & \cdots & y_n^2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ y_1^n & y_2^n & \cdots & y_n^n \end{pmatrix} \tag{15.42}$$

Důsledek 15.7.5. *Determinant fundamentální matice systému* (15.42) *je na I všude různý od* 0*.*

Označíme-li $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ *sloupcový* vektor, můžeme zkráceně zapisovat *obecné řešení* jako maticový součin $\boldsymbol{y}(x) = \boldsymbol{Y}(x)\,\boldsymbol{c}$. Snadno nahlédneme, že i v tomto případě platí analogická tvrzení jako pro lineární rovnici n-tého řádu; jejich důkaz by byl jen opakováním úvah, které jsme již jednou prováděli a které mají elementární charakter. Shrneme tyto poznatky do jediného tvrzení:

Tvrzení 15.7.6. *Obecné řešení systému* (15.40) *obdržíme jako množinu všech lineárních kombinací fundamentálního systému řešení soustavy* (15.40)*; závisí tak na n parametrech, kterými jsou koeficienty této lineární kombinace. Rozdíl každých dvou řešení systému* (15.39) *je řešením* (15.40)*. Proto obecné řešení systému* (15.39) *obdržíme jako* (*množinový*) *součet obecného řešení systému* (15.40) *a* (*jednoho*) *partikulárního řešení systému* (15.39)*.*

Jestliže známe fundamentální systém řešení systému (15.40), můžeme pro určení partikulárního řešení systému (15.39) užít metodu variace konstant. Při jejím odvození použijeme s výhodou maticový zápis.

Budeme hledat řešení systému (15.39) ve tvaru

$$\boldsymbol{y}(x) = \boldsymbol{Y}(x)\,\boldsymbol{c}(x)\,,$$

kde sloupcový vektor $\boldsymbol{c}(x)$ je (vektorovou) *funkcí* na intervalu I a $\boldsymbol{Y}(x)$ je fundamentální matice systému (15.40), která je tedy regulární v každém bodě $x \in I$ a jejíž prvky jsou spojité funkce na I. Pro toto řešení dostaneme

$$\boldsymbol{Y}'(x)\,\boldsymbol{c}(x) + \boldsymbol{Y}(x)\,\boldsymbol{c}'(x) = \big(\boldsymbol{Y}(x)\,\boldsymbol{c}(x)\big)' = \boldsymbol{A}(x)\,\boldsymbol{Y}(x)\,\boldsymbol{c}(x) + \boldsymbol{b}(x)\,.$$

Protože $\boldsymbol{Y}'(x) = \boldsymbol{A}(x)\,\boldsymbol{Y}(x)$, porovnáním výrazů stojících vlevo a vpravo vyplývá, že $\boldsymbol{Y}(x)\,\boldsymbol{c}'(x) = \boldsymbol{b}(x)$, $x \in I$, a tedy

$$\boldsymbol{c}'(x) = \boldsymbol{Y}^{-1}(x)\,\boldsymbol{b}(x)\,.$$

Inverzní matice $\boldsymbol{Y}^{-1}$ je regulární v každém bodě $x \in I$ a její prvky jsou spojité funkce na I; to plyne z vlastností $\boldsymbol{Y}$ a ze vzorce pro výpočet prvků inverzní matice. Proto na pravé straně předcházející rovnosti stojí spojitá vektorová funkce. Integrací poslední rovnosti (v mezích x_0 a x) dostaneme pro každé $x \in I$ vzorec

$$\boldsymbol{c}(x) = \boldsymbol{c}(x_0) + \int_{x_0}^{x} \boldsymbol{Y}^{-1}(t)\,\boldsymbol{b}(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

Věta 15.7.7. *Jestliže jsou maticová funkce $\boldsymbol{A}$ a vektorová funkce $\boldsymbol{b}$ spojité na otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$ a je-li $x_0 \in I$, má Cauchyho počáteční úloha pro systém*

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\,\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(x)\,, \quad \boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}^0\,,$$

právě jedno řešení na I pro každý bod $\boldsymbol{y}^0 \in \mathbb{R}^n$. Toto řešení je popsáno vzorcem

$$\boldsymbol{y}(x) = \boldsymbol{Y}(x)\boldsymbol{Y}^{-1}(x_0)\,\boldsymbol{y}^0 + \boldsymbol{Y}(x)\int_{x_0}^{x} \boldsymbol{Y}^{-1}(t)\,\boldsymbol{b}(t)\,\mathrm{d}t\ , \quad x \in I\,. \tag{15.43}$$

Důkaz. Pro důkaz správnosti vzorce si stačí uvědomit, že výraz vpravo je v bodě x_0 roven vektoru $\boldsymbol{y}^0$. □

15.8 Systémy rovnic s konstantními koeficienty

Zařazení této části má poměrně zřejmý charakter. V předchozí části jsme poznali, že jsme schopni nalézt metodou variace konstant obecné řešení soustavy lineárních rovnic, pokud známe její *fundamentální!systém řešení*. Ten však obecně nalézt neumíme. Ukážeme si však, jak je to možné v případě, že jde o soustavu lineárních rovnic s konstantními koeficienty.

V této části musíme využít poměrně hlubokých poznatků z lineární algebry. Doporučujeme čtenáři, aby si tuto partii přečetl např. v [2], kde je vyložena právě jako aplikace příslušných poznatků z lineární algebry.

Nejprve se seznámíme s tzv. *eliminační metodou*. Budeme řešit systém rovnic

$$\begin{aligned}
(y^1)'(x) &= a_{11}y^1 + a_{12}y^2 + \cdots + a_{1n}\,y^n + b^1(x)\,,\\
(y^2)'(x) &= a_{21}y^1 + a_{22}y^2 + \cdots + a_{2n}\,y^n + b^2(x)\,,\\
&\ \vdots\\
(y^n)'(x) &= a_{n1}y^1 + a_{n2}y^2 + \cdots + a_{nn}y^n + b^n(x)\,,
\end{aligned}\tag{15.44}$$

ve kterém jsou koeficienty a_{jk} konstantní a b^i jsou spojité (reálné) funkce na intervalu (c, d). V maticovém tvaru zapisujeme systémy, se kterými budeme pracovat, takto:

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}\,, \tag{15.45}$$

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}\,. \tag{15.46}$$

Poslední systém se často nazývá *autonomní systém lineárních diferenciálních rovnic* a užívá se k popisu fyzikálních nebo technických problémů, jejichž prvky nejsou závislé na čase.

Popišme nejprve některé možné přístupy k řešení systému (15.44). Jsou-li funkce $b^i \in \mathcal{C}^{(n-1)}((c, d))$, zvolme jednu z rovnic, např. první a zderivujme výrazy na obou jejích stranách. Obdržíme rovnici

$$(y^1)''(x) = a_{11}(y^1)' + a_{12}(y^2)' + \cdots + a_{1n}(y^n)' + (b^1)'(x)\,,$$

do které dosadíme za $(y^1)', (y^2)', \dots, (y^n)'$ ze systému (15.44). Rovnici upravíme na tvar

$$(y^1)''(x) = d_{21}y^1 + d_{22}y^2 + \cdots + d_{2n}y^n + \delta^2(x)\,.$$

V dalším kroku zderivováním dostaneme

$$(y^1)'''(x) = d_{21}(y^1)' + d_{22}(y^2)' + \cdots + d_{2n}(y^n)' + (\delta^2)'(x)\,,$$

do které opět dosadíme za $(y^1)', (y^2)', \dots, (y^n)'$ ze systému (15.44). Obdrženou rovnici upravíme na tvar

$$(y^1)'''(x) = d_{31}y^1 + d_{32}y^2 + \cdots + d_{3n}y^n + \delta^3(x)\,.$$

Po konečně mnoha krocích dostaneme rovnici

$$(y^1)^{(n)}(x) = d_{n1}y^1 + d_{n2}y^2 + \cdots + d_{nn}y^n + \delta^n(x)\,.$$

Získali jsme tak soustavu rovnic pro $(y^1)', (y^1)'', \dots, (y^1)^{(n)}$, která je tvaru (v první rovnici $(y^1)'(x) = a_{11}y^1 + a_{12}y^2 + \cdots + a_{1n}y^n + b^1(x)$ jen formálně změníme označení koeficientů)

$$\begin{aligned}
(y^1)'(x) &= d_{11}y^1 + d_{12}y^2 + \cdots + d_{1n}\,y^n + \delta^1(x)\,,\\
(y^1)''(x) &= d_{21}y^1 + d_{22}y^2 + \cdots + d_{2n}\,y^n + \delta^2(x)\,,\\
&\ \vdots\\
(y^1)^{(n)}(x) &= d_{n1}y^1 + d_{n2}y^2 + \cdots + d_{nn}y^n + \delta^n(x)\,.
\end{aligned}\tag{15.47}$$

Z těchto rovnic postupně vyloučíme $y^2, \dots, y^n$, a to tak, že např. z první rovnice vypočteme y^2 a dosadíme do zbývajících rovnic. Dostaneme tak $(n-1)$ rovnic, které již neobsahují y^2. Tak postupně snižujeme počet rovnic i neznámých, až dospějeme k jediné rovnici n-tého řádu pro y^1. Vypočteme její obecné řešení (bude obsahovat n konstant $c^1, \dots, c^n$). Pak dosadíme do systému (15.47) za $(y^1)', (y^1)'', \dots, (y^1)^{(n)}$ a dopočteme $y^1, y^2, \dots, y^n$ z *algebraického systému* n rovnic o n neznámých.

Z popisu metody vidíme, že je sice pracná, ale elementární. Takto hladce však nevede vždy k cíli. Může se stát, že nedojdeme až k systému (15.47), ale po menším počtu kroků se na pravé straně všechny neznámé $y^2, \dots, y^n$ zruší. Dostaneme tak pro y^1 lineární rovnici s konstantními koeficienty nižšího řádu nežli n. Její obecné řešení bude záviset na méně nežli n konstantách. Pak lze dosadit y^1 do (15.44) a ze vzniklého systému vytvořit novou diferenciální rovnici s konstantními koeficienty pro y^2 analogickým postupem, který jsme užili pro y^1. Tato situace může nastat několikrát za sebou. Tak se řešení systému n rovnic může převést na řešení několika lineárních rovnic s konstantními koeficienty řádů nižších než n (součet jejich řádů je n); viz např. [7].

V dalších odstavcích si připomeneme několik pojmů z lineární algebry. Doporučujeme čtenáři, aby si příslušnou látku eventuálně prostudoval v [2]. Tento text obsahuje totiž i kapitolu, v níž čtenář nalezne aplikaci teorie na řešení systémů diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty tvaru (15.40).

Definice 15.8.1. Je-li $\boldsymbol{A}$ matice typu $n \times n$, jejímiž prvky jsou reálná čísla, tj.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

nazýváme polynom (symbolem $\boldsymbol{E}$ značíme jednotkovou matici typu $n \times n$)

$$P(\lambda) = \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}) = \det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{n2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

charakteristickým polynomem matice $\boldsymbol{A}$ [2]). Jeho kořeny se nazývají *vlastní čísla* nebo *vlastní hodnoty* matice $\boldsymbol{A}$, rovnice $P(\lambda) = 0$ je *charakteristická rovnice příslušná k* $\boldsymbol{A}$. Množinu všech vlastních čísel matice $\boldsymbol{A}$ nazýváme *spektrum* matice $\boldsymbol{A}$ a značíme ji $\sigma(\boldsymbol{A})$.

Příklad 15.8.2. Matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{15.48}$$

[2]) Pokud se zavádí charakteristický polynom pomocí matice $(\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})$, dostaneme stejné výsledky; odpovídající teorie se liší jen nepodstatně.

má charakteristický polynom

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= -(1+\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda) + 2 + 12 - 8(2-\lambda) + \\ &\quad + (1-\lambda) - 3(1+\lambda) = (1-\lambda)(\lambda-3)(\lambda+2) \end{aligned}$$

a její spektrum je tedy $\sigma(\boldsymbol{A}) = \{1, 3, -2\}$.

Definice 15.8.3. Je-li λ vlastní číslo matice $\boldsymbol{A}$, nazýváme každý *nenulový* vektor $\boldsymbol{v}$ vyhovující rovnici $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}$ *vlastním vektorem matice* $\boldsymbol{A}$ *příslušným k vlastnímu číslu* λ.

Poznámka 15.8.4. Vlastní vektory hrají důležitou roli v mnoha aplikacích. Je-li λ vlastní číslo matice $\boldsymbol{A}$, pro vlastní vektor $\boldsymbol{v}$ příslušný k λ je $\boldsymbol{A}c\boldsymbol{v} = \lambda c\boldsymbol{v}$, takže $\boldsymbol{A}$ transformuje podprostor generovaný $\boldsymbol{v}$ na tentýž podprostor, který je proto invariantní. V předcházející definici vlastního vektoru jsme se omezili na nenulové vektory. Pro nulový vektor $\boldsymbol{v}$ je $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}$ pro *každé* $\lambda \in \mathbb{C}$, což je nezajímavý případ. Na druhé straně připouštíme, že jak vlastní čísla, tak i vlastní vektory mohou být komplexní. Budeme pracovat i s komplexními funkcemi v roli řešení, i když je naším cílem vyjádřit obecné řešení pomocí reálných funkcí.

Příklad 15.8.5. Nyní navážeme na Příklad 15.8.2. Potom je vlastní vektor[3] $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v} = (v^1, v^2, v^3)$, matice $\boldsymbol{A}$ odpovídající vlastnímu číslu $\lambda_1 = 1$, netriviálním řešením soustavy $(\boldsymbol{A} - 1\boldsymbol{E})\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$, neboli soustavy

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = 0\,.$$

Jejím řešením obdržíme $\boldsymbol{v}_1 = (v^1, v^2, v^3) = c(-1, 4, 1)$, $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, což je popis *všech* vlastních vektorů odpovídajících vlastnímu číslu $\lambda_1 = 1$.

Podobně dospějeme k vyjádření všech vlastních vektorů odpovídajících vlastnímu číslu $\lambda_2 = 3$, které jsou tvaru $\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v} = (v^1, v^2, v^3) = d(1, 2, 1)$, $d \in \mathbb{R}$, $d \neq 0$, a všech vlastních vektorů, které odpovídají poslednímu vlastnímu číslu $\lambda_3 = -2$ a které jsou tvaru $\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v} = (v^1, v^2, v^3) = e(-1, 1, 1)$, $e \in \mathbb{R}$, $e \neq 0$.

Je vhodné si nyní ukázat, k čemu nám vlastní čísla a vlastní vektory budou. Poznamenejme, že u lineární rovnice n-tého řádu jsme hledali řešení ve tvaru $y(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$ a tímto obratem jsme převedli problém na řešení algebraické rovnice stupně n. Nyní budeme hledat řešení ve tvaru (je to vektorová funkce!) $\boldsymbol{y}(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}\,\boldsymbol{v}$, kde $\boldsymbol{v}$ je vektor s konstantními složkami. Dosazením do vyšetřovaného systému dostaneme

$$\lambda \mathrm{e}^{\lambda x} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{y}'(x) = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{y}(x) = \boldsymbol{A}\mathrm{e}^{\lambda x} \boldsymbol{v}\,,$$

což nás přivádí ke hledání čísel λ a (netriviálních) vektorů $\boldsymbol{v}$, pro které platí $\lambda \boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}$, a tedy i $\big(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}\big)\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$. V případě, že se nám podaří takto najít n lineárně nezávislých řešení, je tím problém nalezení obecného řešení systému $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ vyřešen.

[3]) Při výpočtu by se nám dvojí indexy mohly plést, užíváme proto zjednodušené označení a pamatujeme si, že počítáme vektor $\boldsymbol{v}_1$ příslušný k vlastnímu číslu λ_1. Tak postupujeme i při výpočtu dalších vlastních vektorů.

Lemma 15.8.6. *Nechť* $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$, $1 \le k \le n$, *jsou* nezávislé *vlastní vektory, příslušné (ne nutně různým) vlastním číslům* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ *matice* $\boldsymbol{A}$. *Potom*

$$\boldsymbol{y}_1(x) = \mathrm{e}^{\lambda_1 x}\boldsymbol{v}_1\,,\ \boldsymbol{y}_2(x) = \mathrm{e}^{\lambda_2 x}\boldsymbol{v}_2\,, \ldots,\ \boldsymbol{y}_k(x) = \mathrm{e}^{\lambda_k x}\boldsymbol{v}_k$$

jsou lineárně nezávislá řešení systému $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$.

Důkaz. Ověřme ještě jednou, že takto dostáváme řešení systému: je

$$\boldsymbol{y}_k'(x) = \lambda_k \mathrm{e}^{\lambda_k x}\boldsymbol{v}_k = \mathrm{e}^{\lambda_k x}\lambda_k\boldsymbol{v}_k = \mathrm{e}^{\lambda_k x}\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{A}\mathrm{e}^{\lambda_k x}\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}_k\,.$$

Položme $\sum_{j=1}^{k} c_j\, \boldsymbol{y}_j = \mathbf{0}$. Dosazením $x = 0$ do lineární kombinace řešení $\boldsymbol{y}_j$ dostaneme

$$\sum_{j=1}^{k} c_j\, \boldsymbol{y}_j(x)\Big|_{x=0} = \sum_{j=1}^{k} c_j\, \mathrm{e}^{\lambda_j x}\boldsymbol{v}_j\Big|_{x=0} = \sum_{j=1}^{k} c_j\, \boldsymbol{v}_j = \mathbf{0}\,.$$

S ohledem na nezávislost $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ dostáváme $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$ a tedy i nezávislost řešení $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_k$. □

Příklad 15.8.7. Pro rovnici

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \tag{15.49}$$

má rovnice $P(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda - 2 = 0$ kořeny $\lambda_{1,2} = -1$ a $\lambda_3 = 2$. Dvojnásobnému kořeni odpovídá soustava rovnic ekvivalentní s jedinou rovnicí pro složky vlastního vektoru

$$v^1 + v^2 + v^3 = 0\,,$$

takže lze volit *dva* lineárně nezávislé vlastní vektory odpovídající vlastnímu číslu -1, např. $\boldsymbol{v}_1 = (1, -1, 0)$ a $\boldsymbol{v}_2 = (0, 1, -1)$. Snadno zjistíme, že k vlastnímu číslu $\lambda_3 = 2$ lze zvolit vlastní vektor $\boldsymbol{v}_3 = (1, 1, 1)$ a nalézt tak obecné řešení rovnice (15.49) ve tvaru

$$\boldsymbol{y}(x) = c_1\, \mathrm{e}^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\, \mathrm{e}^{-x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3\, \mathrm{e}^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}\,.$$

Naproti tomu již u jednoduché rovnice

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}\,,$$

jejíž charakteristická rovnice $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ má dvojnásobný kořen $\lambda_{1,2} = 2$, existuje pouze *jediný* lineárně nezávislý vektor odpovídající tomuto kořeni a který má tvar $\boldsymbol{v} = (c, -c)$, $c \neq 0$. To signalizuje možné obtíže při výskytu vícenásobných vlastních čísel.

Povšimneme si, že problém nenastává v případě, kdy vlastní čísla λ_k, $k = 1, \ldots, n$, jsou navzájem různá. Platí totiž následující

Tvrzení 15.8.8. *Vlastní vektory* $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$, $1 \le k \le n$, *příslušné k* různým *vlastním číslům* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ *matice* $\boldsymbol{A}$ *jsou lineárně nezávislé.*

Důkaz. Budeme postupovat indukcí. Pro $k = 1$ je platnost tvrzení zřejmá z definice vlastního vektoru. Předpokládejme tedy, že tvrzení platí pro $(k-1)$ a odvoďme jeho platnost pro k. Jestliže pro $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ je

$$c_1\, \boldsymbol{v}_1 + c_2\, \boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_k\, \boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0}\,, \tag{15.50}$$

pak také platí

$$\boldsymbol{A}(\, c_1\, \boldsymbol{v}_1 + c_2\, \boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_k\, \boldsymbol{v}_k) = \boldsymbol{0}\,;$$

Protože jsou $\boldsymbol{v}_j$ vlastní vektory příslušné k vlastním číslům λ_j, $j = 1, \ldots, k$, plyne odtud

$$c_1\, \lambda_1\, \boldsymbol{v}_1 + c_2\, \lambda_2\, \boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_k\, \lambda_k\, \boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0}\,. \tag{15.51}$$

Vynásobíme rovnici (15.50) číslem λ_k a vzniklou rovnost odečteme od (15.51). Dostaneme tak vztah

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_k)\, \boldsymbol{v}_1 + c_2(\lambda_2 - \lambda_k)\, \boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)\, \boldsymbol{v}_{k-1} = \boldsymbol{0}\,.$$

Podle indukčního předpokladu jsou vektory $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{k-1}$ lineárně nezávislé; protože jsou vlastní čísla $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ navzájem vesměs různá, plyne z předcházející rovnosti $c_1 = c_2 = \cdots = c_{k-1} = 0$. Odtud dostáváme i $c_k = 0$ a tvrzení je dokázáno. □

Příklad 15.8.9. Navážeme na předcházející Příklad 15.8.5, ve kterém jsme nalezli tvar vlastních vektorů příslušných k jednotlivým vlastním číslům. Zvolme $c = d = e = 1$; pak vektor $\boldsymbol{v}_1 = (-1, 4, 1)$ přísluší k $\lambda_1 = 1$, vektor $\boldsymbol{v}_2 = (1, 2, 1)$ vlastnímu číslu $\lambda_2 = 3$ a $\boldsymbol{v}_3 = (-1, 1, 1)$ vlastnímu číslu $\lambda_3 = -2$.

Máme-li tedy řešit soustavu, zapsanou v maticovém tvaru

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}\,, \tag{15.52}$$

ve kterém matici na pravé straně rovnice jsme vyšetřovali v Příkladech 15.8.5 a 15.8.2, lze její obecné řešení zapsat ve tvaru

$$\boldsymbol{y}(x) = c_1\, \mathrm{e}^{x} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + c_1\, \mathrm{e}^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3\, \mathrm{e}^{-2x} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}\,. \tag{15.53}$$

K řešení počáteční úlohy není třeba další výklad, uvedeme proto jen jednoduchý ilustrativní příklad:

Příklad 15.8.10. Řešte rovnici s danou počáteční podmínkou

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}\,, \qquad \boldsymbol{y}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}. \tag{15.54}$$

Snadno zjistíme, že vlastnímu číslu $\lambda_1 = -1$ odpovídá např. vlastní vektor $\boldsymbol{v}_1 = (-2, 1)$ a vlastnímu číslu $\lambda_2 = 3$ odpovídá např. vlastní vektor $\boldsymbol{v}_2 = (2, 1)$. Dospějeme tak k rovnici

$$c_1\, \mathrm{e}^{-1\cdot 0} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\, \mathrm{e}^{3\cdot 0} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

jejímž řešením vzhledem k neznámým c_1, c_2 obdržíme hledané řešení počáteční úlohy

$$\boldsymbol{y}(x) = \mathrm{e}^{-x} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\,\mathrm{e}^{3x} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Situace je však poněkud složitější, jestliže má charakteristický polynom P obecně komplexní kořeny. Hledáme totiž řešení vyjádřené pomocí reálných funkcí. Jsou-li prvky matice $\boldsymbol{A}$ reálná čísla, má i P reálné koeficienty. Postupujeme pak analogicky jako v Poznámce 15.6.1. Kořeny P, které nejsou reálné, se vyskytují v párech a jsou komplexně sdružené. Nechť tedy jsou $\lambda = \beta + \mathrm{i}\gamma$ a $\overline{\lambda} = \beta - \mathrm{i}\gamma$ vlastní čísla matice s reálnými koeficienty $\boldsymbol{A}$. Protože pro vlastní vektor $\boldsymbol{v}$ příslušný k λ je $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$, dostáváme rovnosti [4])

$$\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{v}} = \overline{\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}} = \overline{\lambda\boldsymbol{v}} = \overline{\lambda}\,\overline{\boldsymbol{v}}\,,$$

takže $\overline{\boldsymbol{v}}$ je vlastní vektor příslušný k vlastnímu číslu $\overline{\lambda}$. Tyto vektory jsou podle Tvrzení 15.8.8 lineárně nezávislé. Označíme-li $\operatorname{Re}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1$, $\operatorname{Im}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_2$, má rovnice $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ nezávislá řešení

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_1(x) &= \mathrm{e}^{\beta x}(\cos\gamma x + \mathrm{i}\sin\gamma x)(\boldsymbol{v}_1 + \mathrm{i}\boldsymbol{v}_2)\,, \\ \boldsymbol{y}_2(x) &= \mathrm{e}^{\beta x}(\cos\gamma x - \mathrm{i}\sin\gamma x)(\boldsymbol{v}_1 - \mathrm{i}\boldsymbol{v}_2)\,, \end{aligned}$$

a tedy i nezávislá *reálná řešení* $(1/2)(\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2)$, $(1/2\mathrm{i})(\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_2)$, tj.

$$\mathrm{e}^{\beta x}(\boldsymbol{v}_1\cos\gamma x - \boldsymbol{v}_2\sin\gamma x)\,, \quad \mathrm{e}^{\beta x}(\boldsymbol{v}_1\sin\gamma x + \boldsymbol{v}_2\cos\gamma x)\,.$$

Tak můžeme nalézt ke každému páru komplexně sdružených (různých) vlastních čísel dvojici lineárně nezávislých reálných řešení; při výpočtu pak již stačí k jednomu z komplexně sdružených různých vlastních čísel najít vlastní vektor a ze získaného komplexního řešení vzít jeho reálnou a imaginární část.

Příklad 15.8.11. Určete obecné řešení rovnice

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}\,, \tag{15.55}$$

Snadno určíme charakteristickou rovnici $(1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 5) = 0$ a jejím řešením kořeny $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = 1 \pm 2\mathrm{i}$. Pro λ_1 snadno spočteme, že lze za příslušný vlastní vektor volit např. $\boldsymbol{v}_1 = (2, -2, 3)$. Pro $\lambda_2 = 1 + 2\mathrm{i}$ dostaneme

$$\begin{pmatrix} -2\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 3 & -2\mathrm{i} & -2 \\ 2 & 2 & -2\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = 0\,,$$

takže za vektor, příslušný k λ_2 lze volit $\boldsymbol{v}_2 = (0, 1, -\mathrm{i})$. Jemu odpovídá komplexní řešení

$$\boldsymbol{y}(x) = \mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{x}(\cos 2x + \mathrm{i}\sin 2x)\big((0,1,0) + \mathrm{i}(0,0,-1)\big)$$

[4]) Proužek zde značí u vektorů přechod ke komplexně sdruženým číslům „po složkách“.

a přechodem k jeho reálné a imaginární části dostaneme dvojici reálných řešení

$$\boldsymbol{y}_2(x) = \mathrm{e}^x \begin{pmatrix} 0 \\ \cos 2x \\ \sin 2x \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{y}_3(x) = \mathrm{e}^x \begin{pmatrix} 0 \\ \sin 2x \\ -\cos 2x \end{pmatrix}.$$

Nyní již snadno napíšeme obecné řešení rovnice (15.55):

$$\boldsymbol{y}(x) = \mathrm{e}^x \left[c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ \cos 2x \\ \sin 2x \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ \sin 2x \\ -\cos 2x \end{pmatrix} \right], \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{15.56}$$

kde c_1, c_2, c_3 jsou reálné konstanty (konstantní funkce).

Má-li matice $\boldsymbol{A}$ násobná vlastní čísla, je situace často ještě složitější: K jednomu takovému vlastnímu číslu se nám nemusí podařit popsaným postupem najít dostatečný počet lineárně nezávislých vlastních vektorů; viz Příklad 15.8.7. Následující postup je motivován řešením jednoduché rovnice $y' = ay$, kde $a \in \mathbb{R}$. Jejím řešením je každá funkce $y(x) = \mathrm{e}^{ax} c$ s $c \in \mathbb{R}$. Vedeni analogií můžeme se pokusit hledat řešení rovnice $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ ve tvaru $\boldsymbol{y}(x) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}\boldsymbol{v}$, kde $\boldsymbol{v}$ je libovolný prvek $\mathbb{R}^n$. K tomu však potřebujeme další pojmy.

Definice 15.8.12. Je-li $\boldsymbol{B}$ libovolná matice typu $n \times n$, kde $n \in \mathbb{N}$, definujeme

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{E} + \frac{1}{1!}\,\boldsymbol{B} + \frac{1}{2!}\,\boldsymbol{B}^2 + \frac{1}{3!}\,\boldsymbol{B}^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{B}^k}{k!}. \tag{15.57}$$

Předchozí definice vyžaduje komentář: nekonečný součet matic chápeme „po prvcích“, jde tedy o matici, jejímiž prvky jsou součty řad. Tyto řady konvergují, protože pro

$$\boldsymbol{B} = \big(b_{jk} \big)_{j,\,k=1,\dots,n}$$

a takové $M \in (0, \infty)$, že $|b_{jk}| \le M$ pro $j,\, k = 1, \dots, n$, jsou absolutní hodnoty prvků matice $\boldsymbol{B}^k$ odhadnuty pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$ shora číslem $n^{k-1} M^k$. Odtud plyne konvergence řady, která je prvkem matice $\mathrm{e}^{\boldsymbol{B}}$ srovnávacím kritériem; řada, se kterou srovnáváme, má tvar

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^{k-1} M^k}{k\,!},$$

a její konvergenci snadno ověříme např. podílovým kriteriem. Podle definice dostaneme

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x} = \boldsymbol{E} + \frac{x}{1!}\,\boldsymbol{A} + \frac{x^2}{2!}\,\boldsymbol{A}^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\,\boldsymbol{A}^k. \tag{15.58}$$

Povšimněme si, že pracujeme s maticí, jejíž prvky jsou funkce, které jsou součty mocninných řad. Odtud plyne legitimnost následujících úprav.

Derivováním (matice) $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}$ podle proměnné x dostaneme z (15.58)

$$\begin{aligned} \big(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}\big)' &= \boldsymbol{A} + 2\frac{x}{2!}\,\boldsymbol{A}^2 + 3\frac{x^2}{3!}\,\boldsymbol{A}^3 + 4\frac{x^3}{4!}\,\boldsymbol{A}^4 + \cdots = \\ &= \boldsymbol{A}\Big(\boldsymbol{E} + \frac{x}{1!}\,\boldsymbol{A} + \frac{x^2}{2!}\,\boldsymbol{A}^2 + \frac{x^3}{3!}\,\boldsymbol{A}^3 + \cdots\Big) = \boldsymbol{A}\,\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}. \end{aligned} \tag{15.59}$$

Odtud vidíme, že pro libovolný vektor $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ je $\boldsymbol{y}(x) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}\boldsymbol{v}$ řešením systému $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{y}$. Pro praktické využití tohoto poznatku je však nutné umět nějakým jednoduchým způsobem určit matici $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}$. Obecně je těžké matici $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}$ v konkretním případě určit, nicméně ve speciálních případech to možné je. Pro náš problém je důležité to, že vždy lze určit n lineárně nezávislých vektorů $\boldsymbol{v}$ tak, že řada (15.58) lze ve vyjádření $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}$ sečíst. Dále ukážeme, jak můžeme $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}$ exaktně určit, pokud známe n lineárně nezávislých řešení rovnice (15.46).

Pro matice, jejichž násobení je komutativní, tj. pro něž je $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$ [5]), snadno obdržíme (využíváme stejnoměrné konvergence mocninných řad pro záměnu pořadí sčítání)

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} \boldsymbol{A}^m \boldsymbol{B}^{k-m} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{k} \frac{\boldsymbol{A}^m \boldsymbol{B}^{k-m}}{m!\,(k-m)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{A}^k}{k!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{B}^m}{m!} = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}\mathrm{e}^{\boldsymbol{B}}\,,\end{aligned}$$

takže pro ně dostaneme

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}\,\mathrm{e}^{\boldsymbol{B}} = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}} = \mathrm{e}^{\boldsymbol{B}}\,\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}\,;$$

odtud vyplývá, že je $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}x} = \mathrm{e}^{\boldsymbol{0}} = \boldsymbol{E}$, a také rovnost

$$\left(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}\right)^{-1} = \mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}x}\,.$$

Tak např. vzorec (15.43) z Věty 15.7.7 pro konstantní matici $\boldsymbol{A}$ nabude přehlednějšího tvaru

$$\boldsymbol{y}(x) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(x-x_0)}\boldsymbol{y}^0 + \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(x-t)}\boldsymbol{b}(t)\,\mathrm{d}t\,. \tag{15.60}$$

Vzhledem k tomu, že již víme, že $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}$ je řešením rovnice $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$, lze určit $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}$ jako fundamentální matici $\boldsymbol{Y}(x)$ ze sloupcových vektorů řešení $\boldsymbol{y}_k(x)$, odpovídajících počátečním podmínkám (15.41). Z věty o jednoznačnosti vyplývá, že tak (poněkud pracně) dostaneme matici $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}$. K tomu se ještě vrátíme. Protože

$$e^{\boldsymbol{A}x}\boldsymbol{v} = \mathrm{e}^{(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})x}\,\mathrm{e}^{\lambda\boldsymbol{E}x}\boldsymbol{v}$$

a úpravou vyjádření $\mathrm{e}^{\lambda\boldsymbol{E}x}\boldsymbol{v}$ snadno obdržíme

$$\mathrm{e}^{\lambda\boldsymbol{E}x}\boldsymbol{v} = \Big(\boldsymbol{E} + \frac{\lambda x}{1!}\,\boldsymbol{E} + \frac{\lambda^2x^2}{2!}\,\boldsymbol{E} + \cdots\Big)\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{E}\Big(1 + \frac{\lambda x}{1!} + \frac{\lambda^2x^2}{2!} + \cdots\Big)\,\boldsymbol{v} = \mathrm{e}^{\lambda x}\boldsymbol{v}\,,$$

vyplývá odtud $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}\boldsymbol{v} = \mathrm{e}^{\lambda x}\mathrm{e}^{(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})x}\,\boldsymbol{v}$, z čehož s přihlédnutím k Definici 15.8.12 obdržíme

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}\boldsymbol{v} = \mathrm{e}^{\lambda x}\Big(\boldsymbol{E} + \frac{x}{1!}\,(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}) + \frac{x^2}{2!}\,(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})^2 + \cdots\Big)\,\boldsymbol{v}\,. \tag{15.61}$$

Povšimneme si, že při $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})^m\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ pro nějaké pevné $m \in \mathbb{N}$ a $v \in \mathbb{R}^n$ je pak i pro všechna $l \in \mathbb{N}_0$

$$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})^{m+l}\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})^l\big[\,(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})^m\boldsymbol{v}\,\big] = \boldsymbol{0}\,.$$

[5]) Připomínáme, že násobení matic obecně *není* komutativní.

Odtud však plyne, že při $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})^m\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$ pro nějaké $m\in\mathbb{N}$ je součet ve vyjádření (15.61) *konečný*, tj. že v rozvoji

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}\boldsymbol{v}=\mathrm{e}^{\lambda x}\Big(\boldsymbol{E}+\frac{x}{1!}\,(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})+\cdots+\frac{x^{m-1}}{(m-1)!}\,(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})^{m-1}\Big)\,\boldsymbol{v} \tag{15.62}$$

jsou členy, odpovídající mocninám $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})^k$ s $k\in\mathbb{N}$, $k\geq m$, rovny $\boldsymbol{0}$.

Není-li možné najít n nezávislých vlastních vektorů, je situace složitější. To nastává v případě, že násobnost některého vlastního čísla λ je větší, nežli je dimenze prostoru řešení rovnice $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$. Pak můžeme pracovat s tzv. *zobecněnými vlastními vektory*, kterými doplníme již nalezené nezávislé vlastní vektory na bázi (vlastní vektory považujeme zároveň i za zobecněné vlastní vektory).

Je-li λ vlastní číslo matice $\boldsymbol{A}$ násobnosti k, ke kterému je třeba doplnit další zobecněné vlastní vektory, budeme postupovat takto: nalezneme nejprve vlastní vektory $\boldsymbol{v}$, které jsou lineárně nezávislými řešeními rovnice

$$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}\,.$$

Není-li těchto vektorů již k, budeme hledat všechny lineárně nezávislé vektory $\boldsymbol{v}$, pro které platí $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})^2\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$, ale $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{0}$. Potom pro každý takový vektor je

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}\boldsymbol{v}=\mathrm{e}^{\lambda x}\mathrm{e}^{(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})x}\boldsymbol{v}=\mathrm{e}^{\lambda x}\Big(\boldsymbol{v}+\frac{x}{1!}(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{v}\Big)$$

dalším řešením rovnice (15.46). Analogicky pokračujeme dále. Z toho vyplývá tento algoritmus:

1. Nalezneme všechny vlastní čísla a vlastní vektory matice $\boldsymbol{A}$. Jestliže má $\boldsymbol{A}$ celkem n lineárně nezávislých vlastních vektorů, má rovnice $\boldsymbol{y}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ odpovídajících n lineárně nezávislých řešení tvaru $\mathrm{e}^{\lambda x}\boldsymbol{v}$. Všimněte si, že pak nekonečná řada pro $\mathrm{e}^{(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})x}\boldsymbol{v}$ s vlastním číslem λ a vlastním vektorem $\boldsymbol{v}$ obsahuje jediný nenulový člen.

2. Předpokládejme, že $\boldsymbol{A}$ má celkem r, $r<n$, lineárně nezávislých vlastních vektorů. Odtud dostaneme pouze r lineárně nezávislých řešení tvaru $\mathrm{e}^{\lambda x}\boldsymbol{v}$. Vyberme vlastní číslo λ, pro které je počet příslušných vlastních vektorů menší než jeho násobnost a najdeme všechny lineárně nezávislé zobecněné vlastní vektory $\boldsymbol{v}$ takové, že je $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})^2\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$, ale $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{0}$. Z nich dostaneme další řešení rovnice $\boldsymbol{y}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ tvaru
$$\mathrm{e}^{\lambda x}\Big(\boldsymbol{v}+\frac{x}{1!}(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{v}\Big)\,.$$
To postupně uděláme se všemi odpovídajícími vlastními čísly $\boldsymbol{A}$.

3. Nedostaneme-li tak již všech n potřebných řešení, hledáme dále pro příslušná λ všechny další lineárně nezávislé zobecněné vlastní vektory $\boldsymbol{v}$ takové, že sice je $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})^3\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$, avšak $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})^2\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{0}$. Pro každý takový vektor je
$$\mathrm{e}^{\lambda x}\Big(\boldsymbol{v}+\frac{x}{1!}(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{v}+\frac{x^2}{2!}(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})^2\boldsymbol{v}\Big)$$
dalším řešením rovnice $\boldsymbol{y}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$.

4. Analogicky postupujeme dále, dokud takto nezískáme očekávaných n lineárně nezávislých řešení $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$.

Následující „algebraické“ tvrzení, které nebudeme dokazovat, ukazuje, že právě popsaný algoritmus vede k nalezení n lineárně nezávislých řešení vyšetřované rovnice. Zároveň nám poskytuje i horní odhad počtu kroků, které tímto algoritmem musíme udělat, abychom dostali potřebných n lineárně nezávislých řešení vyšetřované rovnice.

Lemma 15.8.13. *Nechť charakteristický polynom P pro rovnici $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ má r navzájem různých kořenů $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ s násobnostmi $k_1, k_2, \dots, k_r$, takže*

$$P(\lambda) = c(\lambda - \lambda_1)^{k_1}(\lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{k_r}\,,$$

kde $c \neq 0$ je reálné číslo. Předpokládejme, že $\boldsymbol{A}$ má pro nějaké $j \in \{1, 2, \dots, r\}$ pouze $\ell_j < k_j$ lineárně nezávislých vlastních vektorů příslušných k λ_j. Potom má rovnice $(\boldsymbol{A} - \lambda_j \boldsymbol{E})^2 \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ alespoň $\ell_j + 1$ nezávislých řešení.

Obecněji, má-li rovnice $(\boldsymbol{A} - \lambda_j \boldsymbol{E})^m \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ celkem $m_j < k_j$ nezávislých řešení, pak má rovnice $(\boldsymbol{A} - \lambda_j \boldsymbol{E})^{m+1} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ alespoň $m_j + 1$ nezávislých řešení.

Z Lemmatu 15.8.13 plyne existence takového d_j, $d_j \leq k_j$, pro něž má rovnice $(\boldsymbol{A} - \lambda_j \boldsymbol{E})^{d_j} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ alespoň k_j lineárně nezávislých řešení (zobecněných vlastních vektorů). Tak lze ke každému vlastnímu číslu λ_j, $j = 1, 2, \dots, r$ nalézt k_j lineárně nezávislých řešení rovnice $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$. Všechna tato řešení mají tvar

$$\boldsymbol{y}(x) = \mathrm{e}^{\lambda_j x}\Big(\boldsymbol{v} + \frac{x}{1!}\,(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E})\boldsymbol{v} + \cdots + \frac{x^{d_j - 1}}{(d_j - 1)!}\,(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E})^{d_j - 1}\boldsymbol{v}\Big)\,.$$

Tímto způsobem lze ke k-násobnému vlastnímu číslu λ nalézt k lineárně nezávislých řešení. Dále lze ukázat, že všechna takto získaná $k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n$ řešení rovnice $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ jsou lineárně nezávislá.

Za zmínku stojí, že v případě *hermitovské* matice, tj. matice, pro kterou transponovaná matice k $\overline{\boldsymbol{A}}$ je rovna $\boldsymbol{A}$, jsou všechna vlastní čísla matice $\boldsymbol{A}$ reálná. Speciálně to platí pro reálné symetrické matice. Navíc násobnost každého vlastního čísla λ *je rovna* dimenzi prostoru řešení rovnice $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$, takže taková matice je jednoduchá.

Příklady 15.8.14. (1) Všimneme si jevu, který nám při řešení systémů působí obtíže. Jestliže řešíme systém $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ s maticí

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

má charakteristická rovnice této matice jediný trojnásobný nulový bod $\lambda = -1$. Soustava $(\boldsymbol{A} + 1\boldsymbol{E})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ má matici s hodností 1, a tedy dimenze prostoru řešení je 2 a je ostře menší než násobnost vlastního čísla $\lambda = -1$. Vlastní vektory $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vyhovují jediné rovnici $v_1 - v_2 + 2v_3 = 0$; snadno nalezneme dva nezávislé vlastní vektory $(1, 1, 0)$ a $(0, 2, 1)$. Čtenář může porovnat efektivitu jednotlivých postupů nalezení fundamentální matice.

(2) Na následujícím jednodušším příkladu ukážeme použití metody zobecněných vlastních vektorů a najdeme obecné řešení systému

$$\begin{aligned}(y^1)' &= 17y^1 + 9y^2\,,\\ (y^2)' &= -25y^1 - 13y^2\,.\end{aligned}$$

Charakteristická rovnice má tvar

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0\,.$$

Pro vlastní vektory dostaneme rovnici $(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$, tj. systém

$$\begin{aligned}15v^1 + 9v^2 &= 0\,,\\ -25v^1 - 15v^2 &= 0\,.\end{aligned}$$

Stačí tedy nalézt řešení jedné z rovnic (jsou lineárně závislé): dostaneme tak obecné řešení $\boldsymbol{v} = (v^1,\, v^2) = (-3c/5,\, c)$ a dosazením $c = 5$ dostaneme vlastní vektor $\boldsymbol{v} = (-3, 5)$. Nyní nalezneme zobecněný vlastní vektor $\boldsymbol{z} = (z^1, z^2)$ řešením soustavy

$$\begin{aligned}15z^1 + 9z^2 &= -3\,,\\ -25z^1 - 15z^2 &= 5\,.\end{aligned}$$

a dostaneme $(z^1, z^2) = (-(1 + 3d)/5, d)$, takže pro $d = 3$ dostaneme $\boldsymbol{z} = (-2, 3)$. Fundamentální systém obsahuje řešení

$$\boldsymbol{y}_1(x) = \mathrm{e}^{2x}\boldsymbol{v} = \mathrm{e}^{2x}\begin{pmatrix}-3\\ 5\end{pmatrix}\,, \quad \boldsymbol{y}_2(x) = \mathrm{e}^{2x}(x\boldsymbol{v} + \boldsymbol{z}) = \mathrm{e}^{2x}\begin{pmatrix}-3x - 2\\ 5x + 3\end{pmatrix}\,,$$

takže obecné řešení $\boldsymbol{y} = (y^1, y^2)$ rozepsané po složkách má tvar

$$\begin{aligned}y^1 &= -3\,c_1\mathrm{e}^{2x} - (3x + 2)\,c_2\mathrm{e}^{2x}\,,\\ y^2 &= 5\,c_1\mathrm{e}^{2x} + (5x + 3)\,c_2\mathrm{e}^{2x}\,.\end{aligned}$$

Příklad 15.8.15. (viz [3], str. 325) Řešte počáteční problém

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\boldsymbol{y}\,, \qquad \boldsymbol{y}(0) = \begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}\,. \tag{15.63}$$

Charakteristický polynom matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

je $P(\lambda) = (2 - \lambda)^3$, takže jediným vlastním číslem matice $\boldsymbol{A}$ násobnosti 3 je $\lambda_1 = 2$. Každý vlastní vektor $\boldsymbol{v} = (v^1, v^2, v^3)$ matice $\boldsymbol{A}$ příslušný k $\lambda_1 = 2$ vyhovuje rovnici

$$(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v^1\\ v^2\\ v^3\end{pmatrix} = \boldsymbol{0}\,.$$

Odtud vyplývá, že $v^2 = v^3 = 0$ a za v^1 lze volit libovolné nenulové číslo. Proto

$$\boldsymbol{y}_1(x) = \mathrm{e}^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

je jedním netriviálním řešením rovnice $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$. Matice $\boldsymbol{A}$ tak má jediný lineárně nezávislý vlastní vektor příslušný k $\lambda_1 = 2$. Hledejme proto řešení rovnice

$$(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})^2 \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Odtud dostáváme $v^3 = 0$, přičemž v^1 a v^2 lze volit libovolně. Vektor

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

vyhovuje rovnici $(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})^2 \boldsymbol{v} = 0$ a přitom $(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})\boldsymbol{v} \neq 0$. Proto

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y}_2(x) &= \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{2x} \mathrm{e}^{(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\
&= \mathrm{e}^{2x} \Big(\boldsymbol{E} + \frac{x}{1!}(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E}) \Big) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{2x} \left[\boldsymbol{E} + x \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\
&= \mathrm{e}^{2x} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \mathrm{e}^{2x} \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Tak jsme získali druhé řešení rovnice $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$, avšak rovnice $(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})^2 \boldsymbol{v} = 0$ má pouze dvě lineárně nezávislá řešení; budeme tedy postupovat podle výše uvedeného algoritmu dále. Budeme hledat všechna řešení rovnice

$$(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})^3 \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Každý vektor $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ je řešením nalezené rovnice. Jestliže zvolíme např. $\boldsymbol{v} = (0, 0, 1)$, je $(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})^2 \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$. Proto

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y}_3(x) &= \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{2x} \mathrm{e}^{(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})x} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \\
&= \mathrm{e}^{2x} \left(\boldsymbol{E} + \frac{x}{1!}(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E}) + \frac{x^2}{2!}(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})^2 \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \\
&= \mathrm{e}^{2x} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{x^2}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \mathrm{e}^{2x} \begin{pmatrix} 3x - \frac{1}{2}x^2 \\ -x \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

je třetí lineárně nezávislé řešení. Obecné řešení rovnice $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ je popsáno rovností

$$\boldsymbol{y}(x) = \mathrm{e}^{2x}\left[c_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}x\\1\\0\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}3x-\frac{1}{2}x^2\\-x\\1\end{pmatrix}\right],$$

kde $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$. Užitím počáteční podmínky určíme hodnoty c_1, c_2, c_3 dosazením do předcházející rovnice a obdržíme tak rovnici

$$\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix};$$

jejím řešením dostaneme $c_1 = 1$, $c_2 = 2$ a $c_3 = 1$. Řešení počáteční úlohy je tedy tvaru

$$\boldsymbol{y}(x) = \mathrm{e}^{2x}\begin{pmatrix}1+5x-\frac{1}{2}x^2\\2-x\\1\end{pmatrix}.$$

Je-li fundamentální matice pro rovnici $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ klíčem k řešení rovnice, dá se očekávat, že znalost řešení, případně fundamentální matice, kterou jsme zavedli v Definici 15.7.4, nám může pomoci k určení matice $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}$. K důkazu tvrzení o jejich souvislosti budeme potřebovat několik jednoduchých lemmat:

Lemma 15.8.16. *Matice $\boldsymbol{Y}$ je fundamentální maticí soustavy $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$, právě když je*

$$\boldsymbol{Y}'(x) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}(x) \quad a \quad \det\big(\boldsymbol{Y}(0)\big) \neq 0\,.$$

Důkaz. Nechť $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_n$ jsou sloupcové vektory matice $\boldsymbol{Y}$. Zřejmě je

$$\boldsymbol{Y}'(x) = \big(\boldsymbol{y}_1'(x), \boldsymbol{y}_2'(x), \ldots, \boldsymbol{y}_n'(x)\big)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

a také

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}(x) = \big(\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}_1(x), \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}_2(x), \ldots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}_n(x)\big)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{15.64}$$

Vidíme, že splnění n rovnic $\boldsymbol{y}_k'(x) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}_k(x)$, $x \in \mathbb{R}$ a $k = 1, 2, \ldots, n$, je ekvivalentní se splněním jediné „maticové“ rovnice $\boldsymbol{Y}'(x) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}(x)$. První část podmínky tedy zajišťuje, že sloupce matice $\boldsymbol{Y}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, jsou tvořeny řešeními rovnice. Druhá část zajišťuje jejich nezávislost: podle Důsledku 15.7.5 je podmínka $\det\big(\boldsymbol{Y}(0)\big) \neq 0$ ekvivalentní s podmínkou $\det\big(\boldsymbol{Y}(x)\big) \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$, a tedy i s nezávislostí sloupců matice $\boldsymbol{Y}$. □

Lemma 15.8.17. *Maticová funkce $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}$ je fundamentální maticí soustavy popsané rovnicí $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$.*

Důkaz. Tvrzení popisuje obsah rovnosti (15.59), kterou jsme již dokázali. □

Lemma 15.8.18. *Nechť $\boldsymbol{Y}$ a $\boldsymbol{Y}^*$ jsou fundamentální matice soustavy popsané rovnicí $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$. Potom existuje konstantní matice $\boldsymbol{C}$, pro kterou je*

$$\boldsymbol{Y}^*(x) = \boldsymbol{Y}(x)\,\boldsymbol{C}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Důkaz. Sloupce $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_n$ matice $\boldsymbol{Y}$ jsou nezávislá řešení rovnice $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$. Proto každé z řešení $\boldsymbol{y}_1^*, \boldsymbol{y}_2^*, \ldots, \boldsymbol{y}_n^*$ je lineární kombinací

$$\boldsymbol{y}_j^* = c_{j1}\boldsymbol{y}_1 + c_{j2}\boldsymbol{y}_2 + \cdots + c_{jn}\boldsymbol{y}_n\,, \quad j = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{15.65}$$

Nechť $\boldsymbol{C}$ je matice $(\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_n)$, kde

$$\boldsymbol{c}_j = \begin{pmatrix} c_{j1} \\ \vdots \\ c_{jn} \end{pmatrix};$$

pak n rovnic (15.65) je ekvivalentních maticové rovnici $\boldsymbol{Y}^*(x) = \boldsymbol{Y}(x)\,\boldsymbol{C}$, $x \in \mathbb{R}$, čímž je lemma dokázáno. □

Věta 15.8.19. *Nechť $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Y}(x)$ je fundamentální matice systému popsaného rovnicí $\boldsymbol{y}'(x) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Potom*

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x} = \boldsymbol{Y}(x)\boldsymbol{Y}^{-1}(0)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \tag{15.66}$$

tj. součin libovolné fundamentální matice $\boldsymbol{Y}$ rovnice $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ s maticí k ní inverzní vyčíslenou v bodě 0 dává vždy matici $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}$.

Důkaz. Označme $\boldsymbol{Y}$ fundamentální matici rovnice $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$. Potom existuje podle Lemmat 15.8.17 a 15.8.18 konstantní matice $\boldsymbol{C}$ tak, že je

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x} = \boldsymbol{Y}(x)\boldsymbol{C}\,.$$

Dosaďme do této rovnosti $x = 0$. Z $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{Y}(0)\,\boldsymbol{C}$ vyplývá, že $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{Y}^{-1}(0)$, což již dává dokazovanou rovnost. □

Další metody pro výpočet matice $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}$ nalezne čtenář např. v knize [8]. Ukážeme si aplikaci dokázaného tvrzení.

Příklad 15.8.20. Řešte diferenciální rovnici s počáteční podmínkou

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}\,, \quad \boldsymbol{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nejprve určíme charakteristickou rovnici soustavy:

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2(\lambda - 3) = 0\,.$$

Řešením rovnice

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}\,,$$

kterou snadno upravíme na ekvivalentní systém dvou nezávislých rovnic

$$\begin{aligned} -2v^1 + v^2 - v^3 &= 0 \\ 3v^2 + v^3 &= 0 \end{aligned}$$

určíme jeden (nezávislý) vlastní vektor $\boldsymbol{v} = (v^1, v^2, v^3)$ příslušný k vlastnímu číslu $\lambda = 3$: $\boldsymbol{v} = (2, 1, -3)$. Pro dvojnásobné vlastní číslo $\lambda = 2$ dostaneme rovnici

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

ze které získáme ekvivalentní systém rovnic

$$\begin{aligned} -v^1 + v^2 - v^3 &= 0 \\ -v^1 \qquad - v^3 &= 0 \end{aligned}$$

s jediným dalším lineárně nezávislým řešením $\boldsymbol{v} = (1, 0, -1)$. Musíme tedy sáhnout k hledání zobecněného vlastního řešení: budeme řešit rovnici

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

S touto rovnicí ekvivalentní soustava se redukuje na jedinou lineární rovnici

$$v^1 \qquad + v^3 = 0$$

s dalším lineárně nezávislým řešením $\boldsymbol{v} = (1, 1, -1)$. Přejdeme od nezávislých zobecněných vlastních vektorů k lineárně nezávislým řešením rovnice $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$. Dostáváme

$$\boldsymbol{y}_1 = \mathrm{e}^{3x} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{y}_2 = \mathrm{e}^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_3 &= \mathrm{e}^{2x} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \\ &= \mathrm{e}^{2x} \begin{pmatrix} 1-x & x & -x \\ -x & 1 & -x \\ 2x & -x & 1+2x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{2x} \begin{pmatrix} 1+x \\ 1 \\ -1-x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Fundamentální matice má tvar

$$\begin{pmatrix} 2\,\mathrm{e}^{3x} & \mathrm{e}^{2x} & (1+x)\,\mathrm{e}^{2x} \\ \mathrm{e}^{3x} & 0 & \mathrm{e}^{2x} \\ -3\,\mathrm{e}^{3x} & -\mathrm{e}^{2x} & -(1+x)\,\mathrm{e}^{2x} \end{pmatrix}.$$

Vypočteme její hodnotu v bodě 0 a k takto vzniklé matici spočteme matici inverzní:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dosadíme do vzorce (15.66), čímž dostaneme $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}$ v „uzavřeném tvaru“, tedy nikoli ve formě nekonečné řady:

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x} = \begin{pmatrix} -2\,\mathrm{e}^{3x} + (3+x)\,\mathrm{e}^{2x} & x\mathrm{e}^{2x} & -2\,\mathrm{e}^{3x} + (2+x)\,\mathrm{e}^{2x} \\ -\mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e}^{2x} & \mathrm{e}^{2x} & -\mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e}^{2x} \\ 3\,\mathrm{e}^{3x} - (3+x)\,\mathrm{e}^{2x} & -x\mathrm{e}^{2x} & 3\,\mathrm{e}^{3x} - (2+x)\,\mathrm{e}^{2x} \end{pmatrix}.$$

Toho můžeme využít k dořešení úlohy (srovnejte s prvním členem ve vzorci (15.60)): hledané řešení $\boldsymbol{y}$ vyhovující dané počáteční podmínce je popsáno rovností

$$\boldsymbol{y}(x) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\mathrm{e}^{2x} \\ \mathrm{e}^{2x} \\ -x\mathrm{e}^{2x} \end{pmatrix}.$$

K tomuto příkladu se ještě jednou vrátíme; pro srovnání ho spočteme jinou metodou.

Poznámka 15.8.21. Protože jsme převáděli řešení lineární rovnice n-tého řádu na řešení speciálního systému 1. řádu, lze tušit, že mezi oběma problémy je úzká souvislost. To lze využít i při výpočtu fundamentální matice $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}$. Výsledek uvedeme pro informaci bez důkazu:

Věta 15.8.22. *Nechť $\boldsymbol{A}$ je matice typu $n \times n$ a nechť*

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

je její charakteristická rovnice. Nechť y je řešení diferenciální rovnice

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}y' + a_n y = 0$$

splňující počáteční podmínky

$$y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-2)}(0) = 0, \quad y^{(n-1)}(0) = 1\,.$$

Potom platí

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x} = z_1(x)\boldsymbol{E} + z_2(x)\boldsymbol{A} + \dots + z_n(x)\boldsymbol{A}^{n-1}\,,$$

kde $z_k = z_k(x)$ obdržíme z řešení $y = y(x)$ transformací

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Stačí tedy umět řešit jen rovnice n-tého řádu a znát tuto větu. U systému rovnic je situace v případě násobných kořenů charakteristické rovnice často komplikovanější než u jediné rovnice vyššího řádu, kde je výsledek relativně jednoduchý.

Pro řešení rovnice $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ lze užít také *Jordanova kanonického tvaru* matice $\boldsymbol{A}$. To je *výhodné* vzhledem ke znalostem získaným eventuálně již dříve v rámci studia algebry. Jak bylo již zmíněno, tato partie je s množstvím příkladů zpracována v [2], omezíme se proto jen na základní popis metody, která je tam detailně popsána. Poznamenejme, že trochu odlišný tvar Jordanových buněk (s jedničkami „pod diagonálou“) není podstatný. Připomeňme, že dvě čtvercové matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ se nazývají *podobné*, existuje-li regulární matice $\boldsymbol{C}$ tak, že platí

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}\,.$$

Mezi všemi maticemi podobnými matici $\boldsymbol{A}$ hraje významnou roli její Jordanův kanonický tvar. Připomeňme, že čtvercová matice tvaru

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

se nazývá *Jordanova buňka*. Diagonální bloková matice, bloky na jejíž diagonále jsou Jordanovy buňky, se nazývá *Jordanova matice*. Je známo, že každá matice s reálnými prvky je podobná jisté Jordanově matici, avšak nad tělesem komplexních čísel. Tato Jordanova matice je určena až na pořadí Jordanových buněk na diagonále jednoznačně. Zkráceně říkáme, že každá taková matice má Jordanův kanonický tvar. Metoda nalezení Jordanova kanonického tvaru matice $\boldsymbol{A}$ a příslušné transformační matice $\boldsymbol{C}$ je součástí látky probírané v základním kursu lineární algebry.

Řešíme-li rovnici $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$, nalezneme Jordanův kanonický tvar $\boldsymbol{J}$ matice $\boldsymbol{A}$ spolu s maticí $\boldsymbol{C}$, pro kterou $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$, resp. $\boldsymbol{C}\boldsymbol{J}\boldsymbol{C}^{-1} = \boldsymbol{A}$. Položíme-li $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{y}$, je pak rovnost $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ ekvivalentní s rovností

$$\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{J}\boldsymbol{C}^{-1})\boldsymbol{y} = \boldsymbol{J}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{y}\,,$$

a tedy s rovností $\boldsymbol{z}' = \boldsymbol{J}\boldsymbol{z}$. Rovnice se tak rozpadne na menší systémy, které odpovídají jednotlivým Jordanovým buňkám. Tyto soustavy již snadno řešíme. Tak např. Jordanově buňce

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

odpovídá systém rovnic

$$\begin{aligned} z_1' &= \lambda z_1 + z_2\,, \\ z_2' &= \qquad \lambda z_2 + z_3\,, \\ z_3' &= \qquad\qquad \lambda z_3 + z_4\,, \\ z_4' &= \qquad\qquad\qquad \lambda z_4\,, \end{aligned}$$

jehož řešení je, jak se snadno přesvědčíme přímým výpočtem, tvaru (řešíme zde „odzadu“)

$$\begin{aligned} z_4 &= a\mathrm{e}^{\lambda x}\,, \\ z_3 &= (ax+b)\mathrm{e}^{\lambda x}\,, \\ z_2 &= \Big(\frac{ax^2}{2}+bx+c\Big)\,\mathrm{e}^{\lambda x}\,, \\ z_1 &= \Big(\frac{ax^3}{6}+\frac{bx^2}{2}+cx+d\Big)\,\mathrm{e}^{\lambda x}\,. \end{aligned}$$

Pro obecnou Jordanovu buňku si čtenář snadno řešení představí. Tak postupně nalezneme řešení, odpovídající všem Jordanovým buňkám a sestrojíme tak řešení $\boldsymbol{z}$. Tím ovšem řešení systému nekončí, musíme ještě provést „zpětnou transformaci“ a přejít tak od řešení systému $\boldsymbol{z}' = \boldsymbol{J}\boldsymbol{z}$ k řešení systému $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$. Protože $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{y}$, je $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{z}$.

Příklad 15.8.23. Vrátíme se nyní k úloze, kterou jsme řešili v Příkladu 15.8.20 a spočteme matici $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}$ jinak, pomocí převodu na Jordanův tvar. Připomeňme, že matice $\boldsymbol{A}$ byla dána ve tvaru

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

a že jsme určili její vlastní čísla $\lambda = 3$ s násobností 1 a $\lambda = 2$ s násobností 2; vlastnímu číslu 2 odpovídá jediný nezávislý vlastní vektor. Jordanův tvar $\boldsymbol{J}$ matice $\boldsymbol{A}$ pak je (pořadí buněk na diagonále si můžeme zvolit, avšak to ovlivní transformační matici $\boldsymbol{C}$, kterou musíme určit [6])

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\,.$$

Tento tvar jsme určili snadno též díky rozměru matice (viz [3]), potřebujeme však ještě transformační matici $\boldsymbol{C}$ a také i $\boldsymbol{C}^{-1}$. Z rovnice

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

určíme úpravami známými z algebry

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\,, \quad \boldsymbol{C}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\,.$$

Protože

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{J}x} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2x} & x\,\mathrm{e}^{2x} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{2x} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{3x} \end{pmatrix}$$

[6]) Pokud známe vlastní čísla matice, nelze z nich u rozměrnějších matic určit tvar matice $\boldsymbol{J}$. Proto je dobré transformační matici určovat souběžně s převodem na Jordanův tvar.

plyne odtud

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2x} & x\,\mathrm{e}^{2x} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{2x} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{3x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2\,\mathrm{e}^{3x} + (3+x)\,\mathrm{e}^{2x} & x\mathrm{e}^{2x} & -2\,\mathrm{e}^{3x} + (2+x)\,\mathrm{e}^{2x} \\ -\mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e}^{2x} & \mathrm{e}^{2x} & -\mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e}^{2x} \\ 3\,\mathrm{e}^{3x} - (3+x)\,\mathrm{e}^{2x} & -x\mathrm{e}^{2x} & 3\,\mathrm{e}^{3x} - (2+x)\,\mathrm{e}^{2x} \end{pmatrix}.$$

Čtenář si může jen stěží udělat obrázek o pracnosti jednotlivých uvedených postupů z několika málo příkladů, které jsme uvedli. Volba těchto postupů je vždy podmíněna tím, co řešitel úlohy lépe ovládá. Řadu řešených příkladů lze nalézt např. v [14].

Vyřešili jsme systém $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(x)$ pro speciální případ $\boldsymbol{b}(x) \equiv \boldsymbol{0}$ a máme k dispozici metodu variace konstant, pomocí níž můžeme řešit systém i v případě obecné vektorové funkce $\boldsymbol{b}$ spojité na intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Avšak tento postup může být velmi pracný; v případě lineární rovnice n-tého řádu jsme pro speciální tvar „pravé strany“ rovnice $\boldsymbol{b}(x)$ použili často méně pracnou metodu porovnávání koeficientů, která navíc „obcházela“ integraci. I zde je takový postup možný a je analogický, i když nepatrně složitější. Platí toto tvrzení: *Jestliže jsou složky vektoru $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}(x)$ polynomy stupně nejvýše r-tého a jestliže 0 je k-násobným kořenem charakteristické rovnice matice $\boldsymbol{A}$, pak existuje partikulární řešení systému*

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(x)\,, \tag{15.67}$$

jehož složky jsou polynomy stupně nejvýše $(r+k)$-tého. Poznamenejme, že $k = 0$, právě když determinant $\det(\boldsymbol{A})$ matice $\boldsymbol{A}$ není roven 0. Proti případu jedné lineární rovnice n-tého řádu se mohou ve složkách řešení vyskytovat s nenulovými koeficienty i mocniny stupně *menšího než k*. Rovněž není bez zajímavosti, že tvrzení platí i pro „komplexní případ“.

Nebudeme uvádět speciální tvar partikulárního řešení pro případ, že složky vektoru $\boldsymbol{b}$ obsahují polynomiální násobky goniometrických funkcí a zformulujeme výsledek jen pro „komplexní případ“: *Nechť v rovnici* (15.67) *je vektor $\boldsymbol{b}$ tvaru $\boldsymbol{b}(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}\boldsymbol{Q}_r(x)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, kde složky vektoru $\boldsymbol{Q}_r$ jsou* (*obecně komplexní*) *polynomy stupně nejvýše r-tého. Potom existuje řešení $\boldsymbol{y}$ systému* (15.67) *tvaru*

$$\boldsymbol{y}(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}\boldsymbol{R}_{r+k}(x)\,,$$

kde $\boldsymbol{R}_{r+k}$ je matice, jejímiž prvky jsou polynomy stupně nejvýše $(r+k)$-tého a kde k je násobnost čísla λ jakožto kořene charakteristického polynomu matice $\boldsymbol{A}$. Poznamenejme konečně na závěr této části, že i v tomto případě můžeme využít princip superpozice k rozkladu $\boldsymbol{b}$ na takové vektory, na které lze aplikovat předcházející tvrzení na každý zvlášť.

15.9 Autonomní systémy

V tomto odstavci se budeme krátce zabývat stabilitou řešení, avšak pouze pro tzv. autonomní systémy. Jsou to systémy tvaru (15.17), v nichž pravá strana nezávisí na proměnné x. I v případě, že je neumíme řešit, existují možnosti, jak se o chování jejich řešení alespoň ve speciálních případech některé věci dozvědět.

Budeme tedy studovat autonomní systém

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})\,. \tag{15.68}$$

Pro potřeby tohoto závěrečného odstavce dále předpokládáme, že všechna řešení, se kterými pracujeme, jsou spojitě rozšířena do bodu 0 a jsou to tedy funkce definované na neomezeném intervalu $[0, +\infty)$. Popišme otázky, které nás zajímají:

(A) Existuje konstantní řešení, které reprezentuje *rovnovážný stav* systému, tj. takové $\boldsymbol{y}^0 \in \mathbb{R}^n$, pro které je $\boldsymbol{y}(x) = \boldsymbol{y}^0$ pro všechna $x > 0$?

(B) Nechť $\boldsymbol{y}_1$ je řešením rovnice (15.68) a nechť $\boldsymbol{y}_2$ je takové řešení (15.68), pro které je v bodě 0 norma rozdílu $\|\boldsymbol{y}_1(0) - \boldsymbol{y}_2(0)\|$ „malá“. Bude $\boldsymbol{y}_2(x)$ také „blízko“ $\boldsymbol{y}_1(x)$ i pro všechna $x > 0$?

(C) Pokud řešení (15.68) existuje na nějakém intervalu $(0, +\infty)$, jak se chová pro $x \to +\infty$? Existuje např. nějaký rovnovážný stav $\boldsymbol{y}^0$ tak, že pro všechna řešení $\boldsymbol{y}$ systému (15.68) je $\lim_{x\to+\infty} \boldsymbol{y}(x) = \boldsymbol{y}^0$?

Otázka (A) není těžká. Má-li $\boldsymbol{y}(x) = \boldsymbol{y}^0$ být řešením systému (15.68), pak je $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{0}$, a tedy: $\boldsymbol{y}^0$ *je rovnovážným stavem systému* (15.68), *právě když je*

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}^0) = \boldsymbol{0}\,.$$

Otázka (B) je složitější. Vyžaduje především *přesnější popis* problému, který poskytuje následující definice:

Definice 15.9.1. Řekneme, že řešení $\boldsymbol{y}^*$ systému (15.68) je *stabilní*, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna řešení $\boldsymbol{y}$ systému (15.68) a všechna $x > 0$ platí

$$(\|\, \boldsymbol{y}(0) - \boldsymbol{y}^*(0)\,\| < \delta) \implies (\|\, \boldsymbol{y}(x) - \boldsymbol{y}^*(x)\,\| < \varepsilon)\,.$$

Řešení, které není stabilní, se nazývá *nestabilní*.

Pro autonomní systém

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \tag{15.69}$$

s konstantní maticí $\boldsymbol{A}$ lze dokázat následující výsledky (viz např. [12]):

Věta 15.9.2. (1) *Jsou-li reálné části všech vlastních čísel matice $\boldsymbol{A}$ záporné, je každé řešení autonomního systému $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ stabilní.*

(2) *Má-li alespoň jedno vlastní číslo matice $\boldsymbol{A}$ kladnou reálnou část, je každé řešení systému* (15.69) *nestabilní.*

(3) *Nechť mají všechna vlastní čísla matice $\boldsymbol{A}$ zápornou nebo nulovou reálnou část a nechť $\lambda_j = \mathrm{i}\gamma_j$, $j = 1, \dots, m$, jsou všechna vlastní čísla matice $\boldsymbol{A}$ s nulovou reálnou částí. Nechť vlastní čísla λ_j mají násobnost k_j, $j = 1, \dots, m$. Potom je každé řešení systému* (15.69) *stabilní, má-li matice $\boldsymbol{A}$ pro každé j celkem k_j lineárně nezávislých vlastních vektorů příslušných k λ_j.*

Podstatné je, že existují metody, jak jednoduše zjistit, že popsaná situace nastává, aniž je nutno hledat vlastní čísla matice $\boldsymbol{A}$; stačí pouze znát její charakteristický polynom. Např. tzv. *Hurwitzovo kritérium* umožňuje relativně jednoduše zjistit, zda všechny kořeny charakteristického polynomu mají *záporné* reálné části.

Také pro (C) uvedeme jednu potřebnou definici. Otázka (C) je pro řešení systému (15.68) složitější nežli pro systém (15.69), ale definici podáme i pro systém (15.68).

Definice 15.9.3. Budeme říkat, že řešení $\boldsymbol{y}^*$ systému (15.68) je *asymptoticky stabilní*, jestliže je stabilní, tj. ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna řešení $\boldsymbol{y}$ systému (15.68) a všechna $x > 0$ platí

$$(\| \boldsymbol{y}(0) - \boldsymbol{y}^*(0) \| < \delta) \implies (\| \boldsymbol{y}(x) - \boldsymbol{y}^*(x) \| < \varepsilon)$$

a zároveň je $\| \boldsymbol{y}(x) - \boldsymbol{y}^*(x) \| \to 0$ pro $x \to +\infty$.

Mají-li v případě systému (15.69) všechna vlastní čísla matice $\boldsymbol{A}$ zápornou reálnou část, „blíží se“ zřejmě všechna řešení k 0, tj. platí tvrzení (viz např. [12]):

Věta 15.9.4. *Řešení systému* (15.69) *je asymptoticky stabilní, právě když mají všechna vlastní čísla matice* $\boldsymbol{A}$ *zápornou reálnou část.*

Historické poznámky 15.9.5. V této kapitole jsme použili mnoha poznatků z algebry. K oblasti studia lineárních rovnic položil základy Gottfried Wilhelm Leibniz (1642 – 1727) pracemi z r. 1678 a r. 1693. Metoda řešení soustav rovnic o dvou, třech a čtyřech neznámých pochází z r. 1729 od Colina Maclaurina (1698 – 1746), byla však publikována po jeho smrti r. 1748. Švýcar Gabriel Cramer (1704 – 1752), po němž se dnes postup (*Cramerovo pravidlo*) nazývá, ho popsal r. 1750.

Významným algebraikem byl Alexander-Theophile Charles August Vandermonde (1735 – 1786). Pro práce z oblasti teorie řešitelnosti algebraických rovnic vyšších stupňů bývá označován jako předchůdce Nielse Henrika Abela (1802 – 1829). Nesporně je však tvůrcem *teorie determinantů*, ve které mu náleží řada výsledků.

Obyčejné diferenciální rovnice (ODE) tvoří významnou partii matematiky, která je vzhledem k četným aplikacím velmi důležitá. Velmi podnětné jsou v tomto směru učebnice [3] a [6]. U vět o existenci a jednoznačnosti jsme se o hlavních protagonistech vývoje již krátce zmínili. Neprobírali jsme typy rovnic, které lze bez větší námahy vyloženým aparátem řešit; viz např. [8]. Také jsme neuváděli složitější tvrzení o chování maximálních řešení.

Rovnice druhého řádu byly v souvislosti s fyzikálními problémy studovány již r. 1691. Studovali je Jacob Bernoulli (1655 – 1705) i Johann Bernoulli (1667 – 1748). Jedním z takových problémů byl popis kmitání strun. Zde Johann Bernoulli navázal na Brooka Taylora (1685 – 1731). Další výsledky v této problematice získali Euler r. 1728 a Daniel Bernoulli (1700 – 1782) r. 1733, kteří dospěli nejen k základní frekvenci kmitání struny, ale i k vyšším harmonickým. Daniel Bernoulli r. 1734 již úspěšně řešil rovnici řádu 4. R. 1739 informoval Euler Johanna Bernoulliho o řešení obecných lineárních rovnic s konstantními koeficienty. Poznamenejme, že o stáří poznatků z této oblasti svědčí např. to, že pojmy *charakteristický polynom* nebo *charakteristická rovnice* pocházejí patrně již od Eulera. Tato etapa vývoje ODE spočívající, zhruba řečeno, v hledání obecných metod integrace rovnic, trvala do r. 1775, pak došlo ve studiu této problematiky na dlouhou dobu k jistému útlumu.

V případě komplexních funkcí *komplexní proměnné* je řešení diferenciálních rovnic rovněž rozvinutou partií matematické analýzy; poznamenejme alespoň to, že řešení lze např. hledat ve tvaru mocninné řady. Těmito řadami se budeme ještě jednou zabývat v Kapitole 16.

Příklad, ukazující možnou nejednoznačnost řešení, jsme uvedli již v Kapitole 10. Tzv. Lipschitzovu podmínku zavedl poprvé Lipschitz r. 1864 při vyšetřování Fourierových řad. Poznamenejme konečně, že jedinečným zdrojem poznatků z oblasti historie ODE je kniha [6].

Poznamenejme ještě, že studium problémů, vedoucích na systémy diferenciálních rovnic, lze stopovat až k Isaacu Newtonovi (1642 – 1727). V tomto směru tvořil hlavní objekt studia pohyb vzájemného gravitačního působení dvou a více těles.

Otázek stability jsme se pouze dotkli, avšak i ony patří ke klasickým partiím teorie ODE. Jedním z těch, kteří významně přispěli ke studiu stability, byl ruský matematik Aleksandr Michajlovič Ljapunov (1857 – 1918). Zabýval se praktickým problémem existence rotujících elipsoidálních kapalných útvarů při malých změnách rychlosti rotace. Populárně lze ideu stability popsat takto: Rovnovážný stav systému (15.68) je stabilní, jestliže každé řešení, které je v čase $t = 0$ „blízko" rovnovážného stavu bude „blízko" i v libovolném budoucím okamžiku.

Literatura:

[1] Agnew, R. P.: *Differential equations*, McGraw-Hill, Inc., New York, 1960, (druhé vydání).

[2] Bečvář, J.: *Lineární algebra*, Matfyzpress, Praha, 2000.

[3] Braun, M.: *Differential equations and their applications. An introduction to applied mathematics*, Springer, New York, 1978, (druhé vydání).

[4] Brzezina, M.: *Jak na soustavy obyčejných diferenciálních rovnic ?*, Technická univerzita Liberec, Liberec, 2001.

[5] Černý, I.: *Matematická analýza, 3. část*, Technická univerzita Liberec, Liberec, 1996.

[6] Heuser, H.: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, B. G. Teubner, Stuttgart, 1995, (třetí vydání).

[7] Holický, P., Kalenda, O. F. K.: *Metody řešení vybraných úloh z matematické analýzy*, Matfyzpress, Praha, 2002.

[8] Kalas, J., Ráb, M.: *Obyčejné diferenciální rovnice*, Masarykova univerzita, Brno, 1995.

[9] Kolmogorov, A. N., Fomin, S. V.: *Základy teorie funkcí a funkcionální analýzy*, SNTL, Praha, 1975.

[10] Kuben, J.: *Obyčejné diferenciální rovnice*, Vojenská akademie Brno, Brno, 2000, (3. vydání).

[11] Kurzweil, J.: *Obyčejné diferenciální rovnice*, SNTL, Praha, 1978.

[12] Nagy, J.: *Stabilita řešení soustavy obyčejných diferenciálních rovnic*, SNTL, Praha, 1983.

[13] Pontrjagin, L. S.: *Obyknovjenyje diferencial'nyje uravněnija*, GIFML, Moskva, 1961.

[14] Samojlenko, A. M. a kol.: *Differencialnyje uravněnija – priměry i zadači*, Vysšaja škola, Moskva, 1989.

[15] Stěpanov, V. V.: *Kurs diferenciálních rovnic*, Přírodovědecké vydavatelství, Praha, 1952.

Kapitola 16

Mocninné řady podruhé . . .

V této kapitole se vracíme k mocninným řadám. Může být částečně chápána jako úvod do teorie funkcí komplexní proměnné: Budeme pracovat v $\mathbb{C}$ a to, co dokážeme, tvoří základ pro pozdější budování této teorie, neboť v ní jsou mocninné řady důležitým nepostradatelným nástrojem.

16.1 Úvod

Připomeňme, že jsme v Kapitole 8 ukázali, že mocninná řada o středu z_0 s koeficienty a_k, $k \in \mathbb{N}_0$, tj. řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \tag{16.1}$$

má v komplexní rovině $\mathbb{C}$ jednoduché konvergenční chování. Je-li R poloměr konvergence řady (16.1), označme

$$\mathcal{K}(z_0, R) = \{z\,;\, |z - z_0| < R\}\,, \quad \mathcal{C}(z_0, R) = \{z\,;\, |z - z_0| = R\}\,. \tag{16.2}$$

Je-li $R > 0$, řada (16.1) absolutně konverguje pro všechna $z \in \mathcal{K}(z_0, R)$ a diverguje pro všechna $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathcal{K}(z_0, R)}$. Množinu $\mathcal{K}(z_0, R)$ nazýváme *kruh konvergence* řady (16.1). V případě, že pro poloměr konvergence R platí $0 < R < \infty$, nazýváme množinu

$$\mathcal{C}(z_0, R) = \{z\,;\, |z - z_0| = R\}$$

konvergenční kružnicí řady (16.1). Pro body této kružnice *nelze* o konvergenci mocninné řady (16.1) obecně nic říci. Na rozdíl od $\mathcal{U}(z_0, r) := \mathcal{U}_r(z_0)$, $r > 0$ (viz Definice 8.2.2), symboly $\mathcal{K}(z_0, R)$ a $\mathcal{C}(z_0, R)$ budeme užívat jen ve spojení s poloměrem konvergence mocninné řady. Poznamenejme ještě, že každá mocninná řada konverguje ve svém středu z_0.

Pro tuto kapitolu uzavřeme *zjednodušující úmluvu.* Budeme vynechávat meze u sumačních znaků v případě, že se sčítá od 0 do $+\infty$; proměnná z probíhá vždy podmnožiny $\mathbb{C}$, kdežto označení pomocí x užíváme v případě, že tato proměnná probíhá podmnožiny

$\mathbb{R}$; to by mělo čtenáři usnadnit orientaci při čtení textu, žádnou jinou *magickou roli* to nemá.

V Definici 8.2.2 jsme zavedli limitu, spojitost a derivaci v komplexním oboru, a to analogicky jako v $\mathbb{R}$. Připomeneme pouze definici *derivace* $f'(z)$ *funkce* f *v bodě* z:

$$f'(z) := \lim_{w \to z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z},$$

kde w a z jsou z $\mathbb{C}$. Vyšší derivace f'', resp. $f^{(2)}, f^{(3)}, \dots$ definujeme opět rekurentně, tj. $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$, $n \in \mathbb{N}_0$, přičemž klademe $f^{(0)} = f$.

Poznámka 16.1.1. Vzhledem k tomu, že některé vlastnosti řady (16.1) závisejí pouze na koeficientech řady a její absolutní konvergence nebo divergence v bodě $z \in \mathbb{C}$ (mimo těch bodů, které leží na konvergenční kružnici) závisí pouze na vzdálenosti $|z - z_0|$ nebo rozdílu $z - z_0$, často se v dalším omezíme na řady o středu $z_0 = 0$. Věty budeme vyslovovat vždy pro řady v obecném tvaru (16.1), avšak dokazovat je budeme *pro případ* $z_0 = 0$, tj. pro řadu

$$\sum a_n z^n . \tag{16.3}$$

Tím se zápisy zkrátí a formálně trochu zjednoduší.

16.2 Základní vlastnosti

V této části na začátku zmíníme již probraná tvrzení z Kapitoly 8, ale podstatně je doplníme a prohloubíme. U již probraných tvrzení uvádíme stručný důkaz, často s využitím poznatků z kapitol obsažených v tomto dílu. Připomeňme nejprve tvrzení Lemmatu 8.3.4:

Lemma 16.2.1 (Abel 1826). *Nechť mocninná řada* (16.1) *konverguje v bodě* $\zeta \in \mathbb{C}$. *Potom* (16.1) *konverguje* absolutně *pro každé* $z \in \mathbb{C}$, *pro něž platí*

$$|\, z - z_0 \,| < |\, \zeta - z_0 \,| . \tag{16.4}$$

Důkaz. Pro $\zeta = z_0$ se řada zredukuje na jediný sčítanec, takže absolutně konverguje; tento samozřejmý fakt není obsahem tvrzení. Nechť je tedy $\zeta \neq z_0$ a $z \in \mathbb{C}$ vyhovuje odhadu (16.4). Pak existuje $0 \leq M < \infty$ tak, že pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$|a_n (z - z_0)^n| = |a_n (\zeta - z_0)^n| \cdot \left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right|^n \leq M \left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right|^n .$$

Existence M plyne z konvergence řady v (16.1) v bodě ζ, protože členy konvergentní řady tvoří omezenou posloupnost. Pro řadu (16.1) vyčíslenou v bodě z jsme tak našli konvergentní majorantu, kterou je geometrická řada. $\square$

Toto tvrzení je klíčem k definici poloměru konvergence mocninné řady a k základním vlastnostem konvergence řady v kruhu konvergence; Cauchy-Hadamardův vzorec pro poloměr konvergence mocninné řady, odvozený pomocí obecného tvaru Cauchyho odmocninového kriteria ve Větě 8.4.15, je jistou „kvalitou navíc“.

Lemma 16.2.2. *Řada* $\sum a_n(z-z_0)^n$ *konverguje ve svém kruhu konvergence absolutně a lokálně stejnoměrně.*

Důkaz. Připomeňme předchozí úmluvu, že se v důkazu automaticky omezujeme na případ (16.3). Případ $R = 0$ je triviální, nechť tedy je $R > 0$. Absolutní konvergence v $\mathcal{K}(0,R)$ je důsledkem Lemmatu 16.2.1 a definice poloměru konvergence (Definice 8.3.6). Je-li $0 \le |z| \le |z_1| < R$, pak lze (konvergentní) řadu $\sum |a_n z_1^n|$ použít ve Větě 14.3.5 jako majorantní řadu pro $\sum |a_n z^n|$, takže řada (16.3) konverguje na $\mathcal{U}(0,|z_1|)$ stejnoměrně podle Weierstrassova M-testu, a tedy lokálně stejnoměrně na $\mathcal{K}(0,R)$. □

Důsledek 16.2.3. *Součet řady* (16.1) *je spojitá funkce v jejím kruhu konvergence.*

Poznámka 16.2.4. Ve shodě s Úmluvou 4.1.3 o definičním oboru je – pokud není řečeno něco jiného – vztahem

$$f(z) = \sum a_n(z-z_0)^n \tag{16.5}$$

definována funkce $f : M \to \mathbb{C}$, kde $M \subset \mathbb{C}$ je *maximální množina*, na níž řada (16.1) konverguje. Zřejmě platí $\mathcal{K}(z_0,R) \subset M$, avšak M může navíc obsahovat i některé body konvergenční kružnice řady (16.1).

Lemma 16.2.5. *Má-li řada* (16.1) *poloměr konvergence* $R \in [\,0,\infty\,]$, *mají týž poloměr konvergence i řady*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1} \quad a \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1}\,. \tag{16.6}$$

Poznámka 16.2.6. Formálním derivováním nebo integrací řady (16.1) člen po členu vznikají tedy řady se stejným poloměrem konvergence jako má řada (16.1). Je tu ale rozdíl: zatímco pro $z_0 = 0$ bychom mohli s odvoláním na Větu 14.6.5 a rozklad na reálnou a imaginární část psát $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$, $x \in (-R,R)$, podobný vzorec pro f na $\mathcal{K}(z_0,R)$ budeme muset dokázat.

Důkaz Lemmatu 16.2.5. Tvrzení dostaneme snadno ze vzorce pro poloměr konvergence z Lemmatu 8.4.15 a z poznatku, že $\sqrt[n]{n} \to 1$ při $n \to +\infty$. □

Věta 16.2.7. *Má-li řada* (16.1) *poloměr konvergence* $R > 0$ *a je-li* f *její součet, pak pro funkce*

$$g(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}\,, \quad G(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1} \tag{16.7}$$

platí $g(z) = f'(z)$ *a* $G'(z) = f(z)$ *pro všechna* $z \in \mathcal{K}(z_0,R)$.

Důkaz. Tvrzení budeme dokazovat jen pro $z_0 = 0$. Pak pro libovolně zvolené $z \in \mathcal{K}(0,R)$, r, $|z| < r < R$, a $w \in \mathcal{K}(0,r)$, $w \ne z$, platí

$$\frac{f(w)-f(z)}{w-z} - g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{w^n - z^n}{w-z} - n z^{n-1} \right).$$

Výraz v závorce budeme odhadovat. Pro $n = 1$ je roven 0 a pro $n > 1$ výrazu, který snadno dostaneme užitím rozkladového vzorce:

$$\begin{aligned}&\big(w^{n-1} + zw^{n-2} + \cdots + z^{n-1}\big) - z^{n-1} - z^{n-1} - \cdots - z^{n-1} = \\ &= \big(w^{n-1} - z^{n-1}\big) + z\big(w^{n-2} - z^{n-2}\big) + \cdots + z^{n-2}\big(w - z\big)\,.\end{aligned}$$

Dalšími analogickými úpravami postupně dospějeme k výrazu

$$\begin{aligned}(w-z)(w^{n-2} + w^{n-3}z + \cdots + z^{n-2}) + (w-z)z(w^{n-3} + \cdots + z^{n-3}) + \cdots +\\ +(w-z)z^{n-3}(w+z) + (w-z)z^{n-2}\,.\end{aligned}$$

Po vytknutí $(w - z)$ se výraz dobře odhadne, neboť platí $|w| < r$, $|z| < r$, a součty exponentů mocnin o základech w a z dávají stále $(n - 2)$. Užijeme-li ještě vzorec pro součet aritmetické posloupnosti $1 + 2 + \cdots + (n - 1)$, dostaneme

$$\left|\frac{f(w) - f(z)}{w - z} - g(z)\right| \le |w - z| \sum_{n=2}^{\infty} |a_n|\, \frac{n(n-1)}{2}\, r^{n-2}\,. \tag{16.8}$$

Protože k řadě vpravo existuje majorantní řada $\sum (n^2/r^2)|a_n|r^n$, která s ohledem na to, že

$$\limsup_{n\to\infty} \big((n^2/r^2)|a_n|r^n\big)^{1/n} = r \limsup_{n\to\infty} (|a_n|)^{1/n} = r \cdot (1/R) < 1\,,$$

konverguje[1]), je limita výrazu v (16.8) vlevo pro $w \to z$ rovna 0. Platí tedy rovnost $f'(z) = g(z)$ pro všechna $z \in \mathcal{K}(z_0, R)$. Odtud plyne užitím již dokázané části tvrzení na f a G místo g a f i jeho zbytek. □

Důsledek 16.2.8. *Je-li $f(z) = \sum a_n(z - z_0)^n$ a řada vpravo má poloměr konvergence $R > 0$, pak má f v $\mathcal{K}(z_0, R)$ derivace všech řádů, lze je všechny vyjádřit mocninnými řadami a platí*

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)\, a_n (z - z_0)^{n-k}\,, \quad z \in \mathcal{K}(z_0, R)\,.$$

Důsledek 16.2.9. *Za stejných předpokladů jako v Důsledku 16.2.8 platí*

$$k!\, a_k = f^{(k)}(z_0), \quad k = 0, 1, 2, \ldots\,,$$

a koeficienty a_n jsou tedy ve vyjádření f v (16.5) jednoznačně určeny.

Poznámka 16.2.10. Typickým příkladem využití předcházející věty je jednoduché odvození vzorce pro rozvoj funkce arkustangens v mocninnou řadu o středu $z_0 = 0$, se kterým jsme se setkali již v prvním dílu tohoto textu v Příkladu 8.3.14. Pro $x \in (-1, 1)$ (a dokonce i pro $x \in \mathbb{C}$, $|x| < 1$) platí

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\,, \tag{16.9}$$

což jsme odvodili rozvinutím derivace arkustangenty v mocninnou řadu a integrací této řady „člen po členu“.

[1]) Užíváme konvence o nekonečnu z Lemmatu 8.4.15, tj. pro $R = +\infty$ klademe $r/R = 0$.

16.3 Taylorův rozvoj součtu mocninné řady

Lemma 16.3.1. *Nechť $\{a_{kl}\}$, $k, l \in \mathbb{N}_0$, je dvojná posloupnost komplexních čísel. Platí-li*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} |a_{kl}| < \infty\,, \quad \text{potom je} \quad \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{kl} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} a_{kl}\,.$$

Důkaz. Pro názornost si budeme představovat situaci „maticově“. Zvolme prostou posloupnost reálných čísel $\{x_n\}_0^\infty$, $x_n \to y$, $x_n \neq y$, a definujme posloupnost funkcí na metrickém prostoru $M := \{x_n;\, n \in \mathbb{N}_0\} \cup \{y\}$ s eukleidovskou metrikou jako „částečné součty po řádcích“: Hodnota f_k v bodě x_n je n-tým částečným součtem prvních členů v k-tém řádku, tj.

$$f_k(x_n) = \sum_{l=0}^{n} a_{kl}\,, \quad f_k(y) = \sum_{l=0}^{\infty} a_{kl}\,. \tag{16.10}$$

Položme $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$, $x \in M$. Protože platí

$$A_k := \sum_{l=0}^{\infty} |\, a_{kl}\,| \geq |f_k(x)|\,, \quad x \in M\,,$$

a $\sum A_k < \infty$, řada $\sum f_k$ konverguje podle Weierstrassovy Věty 14.3.5 stejnoměrně na M k funkci f. Dále platí $f_k(x_n) \to f_k(y)$ pro $n \to \infty$, takže f_k jsou spojité v y vzhledem k M. Podle Věty 14.6.2, aplikované na posloupnost částečných součtů řady $\sum f_k$, platí rovněž $f(x_n) \to f(y)$ pro $n \to \infty$. Podle definice z (16.10) a s ohledem na dokázanou stejnoměrnou konvergenci na M je

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} a_{kl} &= \sum_{k=0}^{\infty} f_k(y) = f(y) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x_n) = \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{n} a_{kl} = \lim_{n\to\infty} \sum_{l=0}^{n} \sum_{k=0}^{\infty} a_{kl} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{kl}\,;\end{aligned}$$

v předposlední rovnosti využíváme možnosti sčítat konvergentní řady „člen po členu“. Tím je tvrzení, kterému se někdy říká *velká věta o záměně*, dokázáno. □

Věta 16.3.2. *Nechť $f(z) = \sum a_n (z - z_0)^n$, řada vpravo má poloměr konvergence $R > 0$ a nechť $w_0 \in \mathcal{K}(z_0, R)$, $w_0 \neq z_0$. Potom pro všechna $z \in \mathbb{C}$, pro něž je*

$$|\, z - w_0\,| < R - |\, w_0 - z_0\,|\,, \tag{16.11}$$

platí

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(w_0)}{n!}\,(z - w_0)^n\,. \tag{16.12}$$

Důkaz. Důkaz stačí provést pro $z_0 = 0$. Připomeňme si Příklad 7.4.28 a vztah binomické věty a binomického rozvoje: pro $n \in \mathbb{N}$ jsou binomické koeficienty rovny nule pro $k > n$.

Pro všechna uvažovaná z platí

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\Big|a_n\binom{n}{k}w_0^{n-k}(z-w_0)^k\Big| = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}|a_n|\binom{n}{k}|w_0|^{n-k}|z-w_0|^k =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\cdot(|z-w_0|+|w_0|)^n < \infty\,.$$

Konvergence poslední řady je zaručena předpokladem (16.11). Použijeme Lemma 16.3.1 a dostaneme

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}a_n((z-w_0)+w_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty}a_n\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}w_0^{n-k}(z-w_0)^k\Big) =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}a_n w_0^{n-k}\Big)(z-w_0)^k\,;$$

poznamenejme, že jsme v součtech přidali a pak opět vypustili členy, které jsou vesměs rovny 0. Formule (16.12) plyne z Věty 16.2.7 o derivování, podle níž dostáváme

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)\ldots(n-k+1)\,a_n z^{n-k} = (k!)\cdot\sum_{n=k}^{\infty}a_n\binom{n}{k}z^{n-k}\,.$$

□

Poznámka 16.3.3. Věta říká, že řada (16.12) *musí* konvergovat alespoň pro ta z, která vyhovují (16.11); *může však konvergovat* i pro další z, která tuto podmínku nesplňují. Jinak řečeno, její poloměr konvergence může být větší než $R-|w_0-z_0|$. Toho se využívá k rozšiřování f metodou tzv. *analytického pokračování.* Za zdůraznění stojí fakt, že funkce f, určená jako součet řady (16.5), má v kruhu konvergence *derivace všech řádů*, je tedy z třídy $\mathcal{C}^{(\infty)}(\mathcal{K}(z_0,R))$. Dá se dokázat i to, že je-li $G\subset\mathbb{C}$ oblast a na ní je definována komplexní funkce f taková, že existuje $f'(z)$ pro všechna $z\in G$ [2]), pak rovněž platí $f\in\mathcal{C}^{(\infty)}(G)$. Přitom je funkce f v okolí každého bodu $w\in G$ rovna svému Taylorovu rozvoji v bodě w, což je mocninná řada o středu w a poloměru konvergence R, pro který platí $R\geq \operatorname{dist}(w,\complement G)$.

Pro operace, které s mocninnými řadami děláme, je důležitá následující *věta o jednoznačnosti.*

Věta 16.3.4. *Nechť $R>0$, řady $\sum a_n(z-z_0)^n$ a $\sum b_n(z-z_0)^n$ konvergují v kruhu $\mathcal{K}(z_0,R)$ a nechť M je množina všech $z\in\mathcal{K}(z_0,R)$ takových, pro něž platí*

$$\sum a_n(z-z_0)^n = \sum b_n(z-z_0)^n\,. \tag{16.13}$$

Je-li M' množina všech hromadných bodů M a $M'\cap\mathcal{K}(z_0,R)\neq\emptyset$, platí $a_n=b_n$ pro všechna $n\in\mathbb{N}_0$ a rovnost (16.13) *platí všude v $\mathcal{K}(z_0,R)$.*

---

[2]) Funkce s touto vlastností se nazývají *holomorfní funkce* v G.

Důkaz. Položme $c_n = a_n - b_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, a definujme

$$f(z) = \sum c_n (z - z_0)^n .$$

Potom zřejmě platí $f(z) = 0$ pro všechna $z \in M$. Množina M' je dále podle Tvrzení 12.4.37 uzavřená, takže $N = M' \cap \mathcal{K}(z_0, R)$ je podle Lemmatu 13.3.2 uzavřená v $\mathcal{K}(z_0, R)$; podle předpokladů je $N \neq \emptyset$ a ze spojitosti f plyne, že f se anuluje i na N. Dokážeme-li, že N je zároveň otevřená v $\mathcal{K}(z_0, R)$, pak vzhledem k souvislosti $\mathcal{K}(z_0, R)$ dostaneme $N = \mathcal{K}(z_0, R)$ a zároveň též $f(z) = 0$ na $\mathcal{K}(z_0, R)$. Pak však je i $f^{(k)}(z) = 0$ pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$ a $z \in \mathcal{K}(z_0, R)$. Odtud plyne $c_n = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$.

Zbývá proto dokázat otevřenost N. Podle předchozí věty platí

$$f(z) = \sum d_n (z - w_0)^n , \quad z \in \mathcal{K}(w_0, R - |w_0 - z_0|) , \tag{16.14}$$

kde w_0 je libovolně zvolený bod N; řada (16.14) konverguje pro všechna z, pro něž je $|z - w_0| < R - |w_0 - z_0|$ a pro táž z nastává (16.13). Pokud je $d_n = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$, je $f(z) = 0$ i v okolí w_0 a důkaz je hotov.

Dále postupujeme sporem. Předpokládejme, že existuje index $m \in \mathbb{N}_0$ tak, že $d_m \neq 0$ a označme k *nejmenší* index m s touto vlastností. Definujme $g(z) := \sum_{l=0}^{\infty} d_{k+l}(z - w_0)^l$. Pak však platí

$$f(z) = (z - w_0)^k \sum_{l=0}^{\infty} d_{k+l}(z - w_0)^l = (z - w_0)^k g(z) .$$

Řada, definující funkci g, konverguje alespoň pro všechna z, $|z - w_0| < R - |w_0 - z_0|$. Je však $(z - w_0) \neq 0$ všude kromě $z = w_0$ a také $g(w_0) = d_k \neq 0$; ze spojitosti funkce g plyne existence prstencového okolí $P(w_0)$ bodu w_0, na němž je $g(z) \neq 0$. Proto je i $f(z) \neq 0$ na $P(w_0)$, což je spor, neboť w_0 není izolovaný, ale *hromadný* bod množiny M. Spor ukazuje, že $d_n = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$, a proto se funkce f anuluje v okolí w_0, což jsme měli dokázat. □

Poznámka 16.3.5. Konverguje-li řada $\sum a_n(z - z_0)^n$ *absolutně* v bodě ζ, snadno nahlédneme pomocí M-testu, že pak je její součet f spojitá funkce na množině

$$\{z;\ |z - z_0| \leq |\zeta - z_0|\} ;$$

speciálně to platí i v případě, že bod ζ leží na konvergenční kružnici $\mathcal{C}(z_0, R)$. Ze stejnoměrné konvergence na množině $\{z;\ |z - z_0| \leq |\zeta - z_0|\}$ plyne spojitost součtu, a tedy

$$\lim_{z \to \zeta,\ z \in \mathcal{K}(z_0, R)} f(z) = \sum a_n(\zeta - z_0)^n = f(\zeta) .$$

Platí však tato rovnost za předpokladu, že $\zeta \in \mathcal{C}(z_0, R)$ a $\sum a_n(\zeta - z_0)^n$ pouze konverguje, avšak *nikoli absolutně*? Niels Henrik Abel (1802 – 1829) dokázal r. 1826, že odpověď na tuto otázku je kladná, pokud se „blížíme k ζ speciálním způsobem“. Konverguje-li totiž mocninná řada v bodě ζ ležícím na konvergenční kružnici $\mathcal{C}(z_0, R)$, je tato konvergence vzhledem k úsečce spojující ζ se středem kružnice z_0 stejnoměrná a součet řady (16.1) je vzhledem k této úsečce spojitý. Nyní se této problematice budeme věnovat.

16.4 Abelova věta a sčítatelnost

Důkaz následujícího důležitého tvrzení lze založit na Větě 14.7.2, my ho však provedeme nezávisle na této větě přímo.

Věta 16.4.1 (Abel 1826). *Nechť $\zeta \neq z_0$ a řada $\sum a_n(\zeta - z_0)^n$ konverguje. Označme*

$$f(z) := \sum a_n(z - z_0)^n .$$

Potom platí

$$\lim_{x\to 1-} f(z_0 + x(\zeta - z_0)) = f(\zeta) .$$

Důkaz plyne z následujícího lemmatu. Zvolíme-li v něm $b_n = a_n(\zeta - z_0)^n$, je zřejmé, že řada $\sum b_n$ konverguje, právě když konverguje $\sum a_n(\zeta - z_0)^n$ a

$$f(z_0 + x(\zeta - z_0)) = \sum a_n(x(\zeta - z_0))^n = \sum b_n x^n .$$

Stačí tedy předcházející tvrzení dokázat pro speciální případ.

Věta 16.4.2 (Abel 1826). *Nechť $\sum b_n$ konverguje. Položme*

$$f(x) = \sum b_n x^n , \quad x \in (-1, 1) .$$

Potom je $\lim_{x\to 1-} f(x) = \sum b_n$.

Důkaz. Položme $s_k = b_0 + b_1 + \cdots + b_k$, $k \in \mathbb{N}_0$, $s_{-1} = 0$. Potom (srovnej s Abelovou parciální sumací z Lemmatu 8.5.2)

$$\sum_{n=0}^{k} b_n x^n = \sum_{n=0}^{k} (s_n - s_{n-1})\, x^n = s_k x^k + (1 - x) \sum_{n=0}^{k-1} s_n x^n .$$

Pro každé x, $|x| < 1$, proveďme limitní přechod pro $k \to \infty$. Protože $|s_n|$ je konvergentní a tedy i omezená posloupnost, je

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} b_n x^n = (1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n , \quad x \in (-1, 1) . \tag{16.15}$$

Je-li $s = \lim_{n\to\infty} s_n = \sum b_n$ a $\varepsilon > 0$, pak lze nalézt $m \in \mathbb{N}$ tak, že je $|s - s_n| < \varepsilon/2$ pro všechna $n \geq m$. Ze znalostí o geometrické řadě dostáváme

$$(1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 , \quad x \in (-1, 1) .$$

Protože $\lim_{x\to 1_-} (1 - x) \sum_{n=0}^{m} |s_n - s| = 0$, existuje takové $\delta > 0$, že pro všechna x, $1 - \delta < x \leq 1$, dostaneme odhad

$$|f(x) - s| = \left| (1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} (s_n - s) x^n \right| \leq (1 - x) \sum_{n=0}^{m} |s_n - s| \cdot |x|^n + \varepsilon/2 < \varepsilon ,$$

ze kterého již vyplývá tvrzení. □

Příklad 16.4.3. V Poznámce 16.2.10 jsme pro arkustangentu připomněli tvar Maclaurinova rozvoje (16.9). Dosaďme do něj $x = 1$. Dostaneme Leibnizovu řadu (její konvergence je důsledkem Leibnizova kriteria pro řady se střídavými znaménky)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\,.$$

Ze spojitosti funkce arctg na $\mathbb{R}$ a z Abelovy věty dostaneme rovnosti

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\,. \tag{16.16}$$

O tomto velmi starém výsledku jsme se zmínili již v Kapitole 3 v Příkladu 3.3.2.

16.5 Cauchyho součin řad

Ve velmi přirozených situacích se setkáváme s problémem násobení řad. Tak např. v Příkladu 16.5.7 lze určit rozvoj funkcí $\cos^2$ a $\sin^2$ podle definice, ale pokud bychom uměli najít řadu pro součin sinu a kosinu, mohli bychom postupovat rychleji. Věnujme se tedy problému násobení řad.

Násobíme-li konečné součty, zřejmě je

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k\Big)\Big(\sum_{l=1}^{m} b_l\Big) = \sum_{l=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_k b_l = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} a_k b_l\,.$$

Zkoumáme-li analogickou situaci pro číselné řady, vynoří se před námi řada otázek. Již samotná definice *součinu řad* není jednoduchým problémem: pro *řady* by mělo patrně formálně platit cosi jako

$$\Big(\sum a_k\Big)\Big(\sum b_l\Big) = \sum_{[\,k,l\,]\in \mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0} a_k b_l \tag{16.17}$$

kde na pravé straně by se mělo nějak sčítat „přes všechny uspořádané dvojice $[\,k,l\,]$ čísel z $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ a, samozřejmě, přes žádnou dvakrát“. Pokud obě řady budou konvergentní a $\sum a_k = a$, $\sum b_l = b$, bylo by žádoucí, aby symbol vpravo byl interpretovatelný také jako řada o součtu rovném ab.

K cíli vede více cest: Problém definice součinu řad spočívá v „součtu přes spočetnou množinu“, tj. v definici symbolu

$$\sum_{\alpha\in A} a_\alpha \tag{16.18}$$

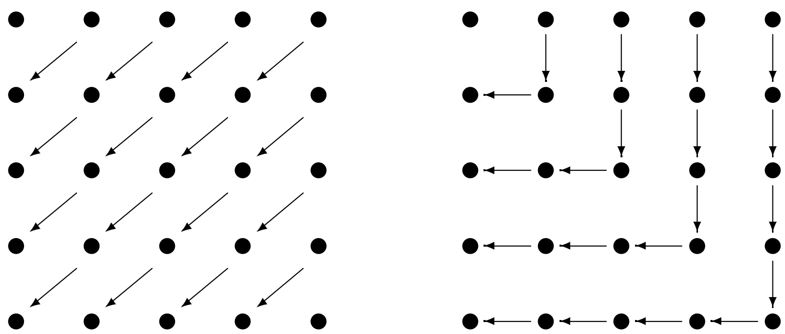
pro spočetnou, ne nutně uspořádanou, množinu A. My se spokojíme s cestou, která je nejstarší.

Ta vede přes práci s *přirozeným* uspořádáním dvojic v symbolu na pravé straně (16.17) do posloupnosti tak, aby vznikla „obyčejná řada“.

Budeme pracovat s pojmem tzv. *Cauchyho součinu řad.* Jeho motivace souvisí s mocninnými řadami. Pokud budeme zacházet s mocninnými řadami jako s polynomy „nekonečně velkého stupně“, pak

$$\begin{aligned}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots) =\\ = \big((a_0b_0) + (a_0b_1 + a_1b_0)\,x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)\,x^2 + \cdots\big)\,.\end{aligned}$$

Tato představa vede přirozeným způsobem k následující definici (odpovídá předcházející rovnosti pro $x = 1$).



Obr. 16. 1.

Definice 16.5.1. Pro řady $\sum a_k$ a $\sum b_l$ je jejich *Cauchyho součinem* řada $\sum c_n$, kde

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0b_n + a_1b_{n-1} + a_2b_{n-2} + \cdots + a_nb_0\,.$$

Poznámka 16.5.2. Představíme-li si součiny $a_k\,b_l$, $k, l = 0, 1, \ldots$, uspořádané v „nekonečné matici“, odpovídají členy Cauchyho součinu součtům „na diagonálách“ čtvercových submatic typu $n \times n$. Tomu odpovídá jedno z přirozených uspořádání dvojic $[\,k, l\,]$ do posloupnosti, popsané zobrazením $u : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, kde

$$\{u(n)\} = \{\,[0,0],\ [0,1],\ [1,0],\ [0,2],\ [1,1],\ [2,0],\ \ldots\,\}\,,\qquad n \in \mathbb{N}_0\,,$$

Jiné takové uspořádání („po čtvercích“) popisuje zobrazení $v : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, kde

$$\{v(n)\} = \{\,[0,0],\ [0,1],\ [1,1],\ [1,0],\ [0,2],\ [1,2],\ [2,2],\ [2,1],\ [2,0],\ \ldots\,\}\,,\qquad n \in \mathbb{N}_0\,.$$

Obě tato uspořádání schematicky znázorňuje Obr. 1; levé schéma znázorňuje uspořádání „po diagonálách“, pravé „po čtvercích“. Pomohou nám snadno chápat odhady v následujícím tvrzení.

Tvrzení 16.5.3. *Cauchyho součin absolutně konvergentních řad je absolutně konvergentní řada.*

Důkaz. Stačí dokázat, že Cauchyho součin konvergentních řad $\sum a_k$, $\sum b_l$ s nezápornými členy konverguje. Budeme tedy odhadovat částečné součty Cauchyho součinu shora. Označíme-li po řadě jejich částečné součty s_n, t_n a jejich součty s, t, platí pro všechny částečné součty Cauchyho součinu $\sum c_k$ těchto řad odhad

$$\sum_{k=0}^{n} c_k = \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{k} a_l\, b_{k-l} \le \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n} a_k\, b_l = s_n t_n \le st\,,$$

z něhož již tvrzení vyplývá. □

Věta 16.5.4. *Nechť řady $\sum a_k$, $\sum b_l$ konvergují absolutně. Potom pro jejich* součty *platí*

$$\sum c_n = \Big(\sum a_k\Big)\Big(\sum b_l\Big)\,;$$

zde $\sum c_n$ značí součet řady, která je Cauchyho součinem řad $\sum a_k$, $\sum b_l$.

Důkaz. Pokud konvergují obě řady absolutně, konvergují absolutně i řady, vzniklé uspořádáním členů $a_k\, b_l$, která odpovídají zobrazením u, v z Poznámky 16.5.2. Jedna z druhé vzniká přerovnáním, mají tedy podle Věty 3.4.6 stejné součty. Jestliže postupně označíme $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $t_n = \sum_{l=0}^{n} b_l$, pak pro hodnoty konečného součtu $s_m\, t_m$ platí zřejmě podle tvrzení o posloupnostech

$$\sum c_k = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{m} a_k b_l = \lim_{m\to\infty} s_m\, t_m = s\, t\,,$$

z čehož plyne zbytek tvrzení. □

Příklad 16.5.5. Použijeme-li vzorec (7.26) z Kapitoly 7, snadno dostaneme pomocí násobení řad rozvoj

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n\,, \qquad x \in (-1,1)\,; \tag{16.19}$$

snáze ho ovšem odvodíme derivováním rozvoje funkce $(1-x)^{-1}$. V obou případech máme zaručeno, že poloměr konvergence vzniklé řady je alespoň 1. Podobně dostaneme např. pro funkci $f(x) = (x^2 - 3x + 2)^{-1}$ pro $x \in (-1,1)$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x/2} = 2^{-1}(1 + x + x^2 + \cdots)(1 + x/2 + (x/2)^2 + \cdots) = \\ &= 2^{-1}\left(\frac{2^0}{2^0}\,x^0 + \frac{2^0+2^1}{2^1}\,x^1 + \frac{2^0+2^1+2^2}{2^2}\,x^2 + \cdots\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2^{n+1}-1)}{2^{n+1}}\,x^n\,. \end{aligned}$$

Příklad 16.5.6. Poněkud složitější využití věty o násobení řad vede k jinému důkazu tvrzení o binomickém rozvoji (Příklad 7.4.28). Podejme stručný návod důkazu: označme

$$f_\alpha(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \qquad \alpha \in \mathbb{R}\,.$$

Potom pro všechna x, $|x| < 1$, podle Věty 16.5.4 platí

$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\beta}{k}x^k=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\binom{\alpha}{0}\binom{\beta}{n}+\binom{\alpha}{1}\binom{\beta}{n-1}+\cdots+\binom{\alpha}{n}\binom{\beta}{0}\right\}x^n\,.$$

Dále lze poměrně elementárně dokázat vzorec

$$\binom{\alpha}{0}\binom{\beta}{n}+\binom{\alpha}{1}\binom{\beta}{n-1}+\cdots+\binom{\alpha}{n}\binom{\beta}{0}=\binom{\alpha+\beta}{n}.$$

Odtud dostaneme pro pevně zvolené $x \in (-1, 1)$ rovnost

$$f_\alpha(x)\cdot f_\beta(x)=f_{\alpha+\beta}(x)\,.$$

Stejně jako při vyšetřování exponenciální funkce pomocí funkcionálních rovnic dostaneme $f_\alpha(x) = (f_1(x))^\alpha$, a tedy $f_\alpha(x) = (1 + x)^\alpha$. Tímto poněkud stručně popsaným postupem se lze vyhnout poměrně namáhavé práci se zbytkem, kterou jsme museli absolvovat v Příkladu 7.4.28. Viz též [7], str. 209.

Příklad 16.5.7. Vrátíme se ještě k otázce platnosti některých vzorců pro goniometrické funkce v *komplexním* oboru a k využití Věty 16.3.4 o jednoznačnosti. Dokážeme, že pro všechna $z \in \mathbb{C}$ platí vzorec

$$\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z\,.$$

Funkce cos a sin jsou vyjádřeny v $\mathbb{C}$ mocninnými řadami o středu 0, které konvergují absolutně na $\mathbb{C}$. Protože řady pro $\cos^2 z$ a $\sin^2 z$ o středu 0 také konvergují absolutně pro všechna $z \in \mathbb{C}$, jsou v předcházející rovnosti na obou stranách funkce, vyjádřené všude v $\mathbb{C}$ mocninnou řadou. Z reálné analýzy víme, že vzorec platí pro všechna $z \in \mathbb{C}$ tvaru $[\,x, 0\,]$, $x \in \mathbb{R}$, a množina všech těchto bodů má v $\mathbb{C}$ nekonečně mnoho *hromadných* bodů (žádný bod z $[\,x, 0\,]$ není izolovaný). Rovnost platí pro všechna $z \in \mathbb{C}$.

Pro konvergentní řady, pokud nekonvergují absolutně, se situace dramaticky mění. Jak se ukazuje, Cauchyho součin konvergentních řad *nemusí být konvergentní řada*.

Příklad 16.5.8. Položme

$$a_k = b_k = (-1)^k\frac{1}{\sqrt{k+1}}\,,\quad k \in \mathbb{N}_0\,.$$

Potom pro členy c_n Cauchyho součinu snadno dostaneme

$$|\,c_n\,| = \left|(-1)^n\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}\sqrt{n-k+1}}\right| \geq \frac{n+1}{\sqrt{n+1}\sqrt{n+1}} = 1\,,$$

takže není splněna nutná podmínka pro konvergenci $c_n \to 0$ a řada $\sum c_n$ diverguje.

Ukazuje se, že v této situaci existuje způsob, *jak pracovat i s divergentními řadami.* Již v Kapitole 2 jsme v Lemmatu 2.4.22 dokázali pro konvergentní posloupnost $\{x_k\}$ reálných čísel implikaci

$$(x_k \to x) \Rightarrow \left(y_k := \frac{x_0 + x_1 + \cdots + x_k}{k+1} \to x\right).$$

Ta je základem jednoduché a účinné sčítací metody: z posloupnosti částečných součtů $\{s_n\}$ řady $\sum a_k$ vytvoříme posloupnost postupných průměrů členů a pak nalezneme její limitu. Tato limita může existovat i v případě, že součet řady není definován.

16.6 Sčítací metody

V této části se seznámíme se dvěma základními sčítacími metodami, nebudeme však tuto obsáhlou partii hlouběji rozvíjet. Jedna z metod úzce souvisí s mocninnými řadami, druhá přinesla historicky první významnější výsledek, související s násobením řad. Obě metody jsou regulární: To znamená, že pro konvergentní řady dávají „normální“ součet řady. Jsou přitom jednoduché, užitečné a lze jimi „sečíst“ i některé divergentní řady.

Definice 16.6.1 (Cesàrova sčítací metoda). Pro řadu $\sum a_k$ komplexních čísel položme $s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$, $n \in \mathbb{N}_0$, a definujme

$$(\mathcal{C})\text{-}\sum a_k = \lim_{n\to\infty} \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1}, \tag{16.20}$$

pokud existuje (v $\mathbb{C}$) limita na pravé straně rovnosti. Její hodnotu nazýváme *cesàrovský součet* (též $(\mathcal{C})$-součet) řady $\sum a_k$.

Příklad 16.6.2 (důležitý). Připomeňme znovu Lemma 2.4.22, které v právě zavedené terminologii říká: *Konverguje-li řada $\sum a_n$ k součtu s, je její cesàrovský součet rovněž s.* Vidíme tedy, že popsaná sčítací metoda je regulární. Doporučujeme čtenáři, aby si zmíněné lemma znovu připomněl a aby si též přečetl Historické poznámky 2.4.24 a 3.4.9.

Pro divergentní řadu $\sum(-1)^k$ platí $s_n = (1 + (-1)^k)/2$ a dále je

$$y_{2n} = \frac{s_0 + \cdots + s_{2n}}{2n+1} = \frac{n+1}{2n+1}, \quad y_{2n+1} = \frac{s_0 + \cdots + s_{2n+1}}{2n+2} = \frac{n+1}{2n+2}, \quad n \in \mathbb{N}_0;$$

jedním vzorcem můžeme y_n popsat takto:

$$y_n = \frac{(n+1) + (1 + (-1)^n)/2}{2(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{(1 + (-1)^n)}{4(n+1)}.$$

Protože pro $n \to +\infty$ je $y_n \to 1/2$, platí $(\mathcal{C})\text{-}\sum(-1)^k = 1/2$.

Nyní ukážeme, jak nám Cesàrova sčítací metoda může pomoci při práci se součinem řad.

Lemma 16.6.3. *Nechť $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ jsou konvergentní posloupnosti. Označme jejich limity $x := \lim_{n\to\infty} x_n$, $y := \lim_{n\to\infty} y_n$. Potom pro*

$$v_n = \frac{x_0 y_n + x_1 y_{n-1} + \cdots + x_n y_0}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

je $\lim_{n\to\infty} v_n = xy$.

Důkaz. Označme $z_n = x_n - x$. Potom $z_n \to 0$. Dále je zřejmé, že existuje $K \in \mathbb{R}$ tak, že $|y_n| \le K$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Protože pro $n \to \infty$ je

$$\left| \frac{z_0 y_n + z_1 y_{n-1} + \cdots + z_n y_0}{n+1} \right| \le K \, \frac{|z_0| + \cdots + |z_n|}{n+1} \to 0,$$

dostáváme s dalším přihlédnutím k Lemmatu 2.4.22 (pozor, nyní pracujeme s jiným indexováním!)

$$v_n = x \, \frac{y_0 + y_1 + \cdots + y_n}{n+1} + \frac{z_0 y_n + z_1 y_{n-1} + \cdots + z_n y_0}{n+1} \longrightarrow xy,$$

čímž je tvrzení dokázáno. $\square$

Věta 16.6.4 (Cesàro 1890). *Nechť* $\sum a_k = a$ *a* $\sum b_k = b$ *jsou konvergentní řady a nechť* $\sum c_n$ *je jejich Cauchyho součin. Potom platí*

$$(\mathcal{C})\text{-}\sum c_n = ab\,.$$

Poznámka 16.6.5 (důležitá). Předcházející věta říká jinými slovy to, že Cauchyho součin dvou *konvergentních řad* je vždy sčítatelný Cesàrovou metodou aritmetických průměrů (prvního řádu) ke „správné" hodnotě. Zároveň odtud plyne, že pokud $\sum c_n$ navíc konverguje, pak konverguje k očekávané „správné" hodnotě ab.

Důkaz Věty 16.6.4. Při úpravách budeme postupovat podobně jako jsme postupovali při důkazu Lemmatu 16.6.3; budeme užívat i analogické značení. Označme $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $t_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$. Položme

$$\sum_{l=0}^{k} c_l = v_k = s_0 b_k + s_1 b_{k-1} + \cdots + s_k b_0\,,$$

z čehož úpravou snadno obdržíme

$$v_0 + v_1 + \cdots + v_n = s_0 t_n + s_1 t_{n-1} + \cdots + s_n t_0\,. \tag{16.21}$$

Nyní dělíme výrazy na obou stranách rovnosti (16.21) číslem $(n+1)$ a uvážíme, že pro posloupnosti částečných součtů platí podle Lemmatu 16.6.3

$$(s_n \to a,\ t_n \to b) \quad\Longrightarrow\quad \left(\frac{v_0 + v_1 + \cdots + v_n}{n+1} \to ab\right),$$

čímž je věta o cesàrovské sčítatelnosti Cauchyho součinu dokázána. □

Poznámka 16.6.6. Uvážíme-li případ řady $\sum (-1)^n x^n$, pak platí

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = \sum (-1)^n x^n\,, \quad x \in (-1,1)\,,$$

a limita $\lim_{x\to 1-} f(x)$ existuje (a je rovna $1/2$). To nás spolu s Větou 16.4.2 vede k definici *Abelovy sčítací metody.*

Definice 16.6.7 (Abelova sčítací metoda). Nechť řada $\sum a_n x^n$ s komplexními koeficienty konverguje v intervalu $(-1,1)$ a pro její součet $f(x)$ existuje $\lim_{x\to 1-} f(x)$ v $\mathbb{C}$. Potom definujeme

$$(\mathcal{A})\text{-}\sum a_n := \lim_{x\to 1-} f(x)\,.$$

Takto definované číslo se nazývá *abelovský součet* (též $(\mathcal{A})$-součet) řady $\sum a_n$.

Poznámka 16.6.8. Z Věty 16.4.2 vyplývá, že pokud $\sum a_n$ konverguje, je její součet shodný s jejím abelovským součtem, takže Abelova sčítací metoda je regulární. Abelovský součet je však přiřazen opět i některým *divergentním* řadám, Poznámka 16.6.6 ukazuje, že $(\mathcal{A})\text{-}\sum(-1)^n = 1/2$.

Někdy sčítáme číselné řady takto: dokážeme, že $\sum a_n$ je konvergentní a určíme její cesàrovský nebo abelovský součet s; pak samozřejmě i pro „obyčejný" součet platí $\sum a_n = s$.

Tak např. protože řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}/n = \sum(-1)^n/(n+1)$ podle Leibnizova kritéria konverguje,

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots = \sum \frac{(-1)^n}{n+1}\,x^n$$

a $\lim_{x\to 1-}\log(1+x) = \log 2$, dostáváme jiným způsobem než v Kapitole 7 v (7.25) součet alternující řady pro $\log 2$.

Již jsme ukázali užitečnost Cesàrovy sčítací metody pro sčítání Cauchyho součinu dvou konvergentních, ale ne absolutně konvergentních řad (viz Věta 16.6.4). Také Abelova metoda dává obdobný výsledek, který nyní dokážeme.

Věta 16.6.9 (Abel 1826). *Nechť $\sum a_n = a$, $\sum b_n = b$ jsou konvergentní řady (obecně s komplexními členy) a nechť řada $\sum c_n$ je jejich Cauchyho součin. Potom platí*

$$(\mathcal{A})\text{-}\sum c_n = ab\,.$$

Důkaz. Vzhledem k tomu, že obě řady konvergují, mají mocninné řady $\sum a_n x^n$, $\sum b_n x^n$ poloměr konvergence alespoň 1, a pro $x \in (0,1)$ lze definovat funkce

$$f(x) := \sum a_n x^n\,, \qquad g(x) := \sum b_n x^n\,.$$

Obě řady konvergují pro tato x absolutně a pro $h(x) := f(x)g(x)$ dostáváme

$$h(x) = \sum c_n x^n\,,$$

kde řada vpravo má za koeficienty členy Cauchyho součinu obou řad. Podle Abelovy věty (Věta 16.4.2) platí pro $x \to 1-$

$$f(x) \to a\,, \quad g(x) \to b\,, \quad \text{a tedy} \quad h(x) \to ab\,.$$

Je tedy $(\mathcal{A})\text{-}\sum c_n = ab$. □

Poznámka 16.6.10. Konverguje-li řada $\sum c_n$, je nalezený abelovský součet roven vzhledem k regularitě metody „obyčejnému" součtu řady $\sum c_n$. Čtenář by si měl uvědomit, že by dokonce stačilo, aby obě řady byly pouze abelovsky konvergentní. Není vyloučeno, že tento fakt posloužil jako inspirace k dalším výsledkům o divergentních řadách (viz Historická poznámka 16.6.13). Platí tedy dokonce pro řady $\sum a_n$ a $\sum b_n$ a jejich Cauchyho součin $\sum c_n$

$$\Big((\mathcal{A})\text{-}\sum a_n\Big)\Big((\mathcal{A})\text{-}\sum b_n\Big) = (\mathcal{A})\text{-}\sum c_n\,,$$

jakmile jsou řady vlevo abelovsky sčítatelné.

Máme-li k dispozici dvě sčítací metody, je přirozené se ptát, zda poskytují shodné výsledky, nebo zda je některá z nich „silnější". Ukažme si to na příkladu Cesàrovy a Abelovy sčítací metody.

Věta 16.6.11 (Frobenius). *Nechť $(\mathcal{C})\text{-}\sum a_k = s^*$. Potom také $(\mathcal{A})\sum a_k = s^*$.*

Důkaz. Při důkazu Abelovy Věty 16.4.2 jsme odvodili rovnost (16.15); ta pro částečné součty $\sum_{k=0}^{n} a_k = s_n$ dává po přepsání

$$\sum a_k\, x^k = (1-x) \sum s_k\, x^k\,. \tag{16.22}$$

(Nyní můžeme nabídnout i alternativní postup odvození pomocí násobení řad: Je

$$\frac{1}{1-x} \sum a_k\, x^k = \Big(\sum x^k\Big)\Big(\sum a_k\, x^k\Big) = \sum s_k\, x^k\,,$$

což dává (16.22) pro $x \in (-1,1)$, neboť pro všechna x z tohoto intervalu konvergují obě násobené řady absolutně.) Označíme-li dále

$$\sigma_n = \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1}\,,$$

dostaneme násobením řad a jednoduchou úpravou podobně

$$\frac{1}{(1-x)^2} \sum a_k\, x^k = \frac{1}{1-x} \sum s_k\, x^k = \sum (k+1)\, \sigma_k\, x^k\,,$$

a tedy pro $x \in (-1,1)$

$$\sum a_k\, x^k = (1-x)^2 \sum (k+1)\, \sigma_k\, x^k\,. \tag{16.23}$$

Pro $a_k = 1$, $k \in \mathbb{N}_0$, dostáváme rovnost $1 = (1-x)^2 \sum (k+1)\, x^k$, $x \in (-1,1)$; jejím vynásobením číslem s^* a odečtením od (16.23) obdržíme

$$\sum a_k\, x^k - s^* = (1-x)^2 \sum (k+1)\, (\sigma_k - s^*)\, x^k\,, \quad x \in (-1,1)\,.$$

Nyní již sledujeme postup, který jsme užili při důkazu Abelovy Věty 16.4.2: Protože platí $|\,\sigma_k - s^*\,| \to 0$, existuje pro každé $\varepsilon > 0$ takové $m \in \mathbb{N}$, že pro všechna $x \in (0,1)$ je

$$(1-x)^2 \sum_{k=m}^{\infty} (k+1)\, |\,\sigma_k - s^*\,|\, x^k \le \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Dále je $\lim_{x\to 1-} (1-x)^2 \sum_{k=0}^{m} (k+1)\, |\,\sigma_k - s^*\,|\, x^k = 0$, lze tedy nalézt $\delta > 0$ tak, že pro všechna $x \in (1-\delta, 1)$ platí odhad

$$\Big|\sum a_k\, x^k - s^*\Big| \le (1-x)^2 \sum_{k=0}^{m} (k+1)\, |\,\sigma_k - s^*\,|\, |\,x\,|^k + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\,,$$

což již dává dokazované tvrzení. □

Poznámka 16.6.12. Každou cesàrovsky sčítatelnou řadu (obecně ne nutně konvergentní!) lze abelovsky sečíst ke stejnému součtu. Bez důkazu uvedeme, že Abelova sčítací metoda je *silnější* v následujícím smyslu: Existují řady, které jsou abelovsky sčítatelné, avšak nikoli cesàrovsky sčítatelné; viz např. [10].

Poznámky 16.6.13 (ke sčítacím metodám). Podívejme se *na sčítací metody* v širších souvislostech. V předcházejících kapitolách jsme se pokusili naznačit, že cesta k pojmu konvergence řady byla velmi složitá. O jednom aspektu jsme se však dosud nezmínili: divergentní řady se ukázaly v některých případech užitečné. Dokonce i Louis Augustin Cauchy (1789 – 1857) napsal: *Musel jsem vyjít z předpokladů* zdánlivě trochu tvrdých, *např. že divergentní řady nemají součet.* Abel napsal r. 1826 nejen základní práci o konvergenci binomické řady, ale v dopise z Francie 16. 1. 1826 svému učiteli Berndtovi Michaelovi Holmböeovi (1795 – 1850) i těchto několik (často citovaných) řádek: *Divergentní řady jsou ďábelským výmyslem a je ostudné zakládat na nich jakýkoli důkaz. Pomocí nich lze odvodit jakýkoli potřebný závěr, proto vedly k tolika klamným výsledkům a paradoxům. Stal jsem se k tomu všemu abnormálně pozorným, protože s výjimkou geometrické řady neexistuje v celé matematice snad jiná řada, jejíž součet by byl určen korektně. Jinak řečeno, v matematice mají nejdůležitější věci ty nejhorší základy. Je pravda, že výsledky jsou většinou správné, to je na tom nejdivnější.*

Zatím jsme se setkali prakticky s jedinou divergentní řadou $\sum(-1)^{n+1}$ a zmínili se o tom, jak s ní matematici zacházeli. Tak např. Luigi Guido Grandi (1671 – 1742) dosazením do rovnosti

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots \tag{16.24}$$

za $x = -1$ přisoudil této řadě „součet“ $1/2$. Euler rozeznával konvergentní a divergentní řady, užíval však v pestré směsici oboje. Tak např. odvodil rovnosti

$$1/4 = 1 - 2 + 3 - 4 + \cdots\,, \qquad -1 = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots\,, \tag{16.25}$$

přičemž postupoval stejně jako Grandi. První rovnost dostal z (16.19) dosazením $x = -1$, druhou z (16.24) dosazením $x = 2$. Euler si uvědomoval, že „nešikovné zacházení“ s řadami vede k rozporům, byl však přesvědčen, že příčina neleží v řadách samotných, nýbrž v nedokonalosti metod sčítání. Jeho představy doložíme opět citátem: (…) *každá řada musí mít určitou hodnotu. Abychom se vyrovnali se všemi při tom vznikajícími obtížemi, neměla by se tato hodnota nazývat součet. K tomuto označení se váže jeho chápání jakožto výsledku skutečného sčítání, což není možné u divergentních řad.* Eulerovým ideálem bylo přiřadit každé řadě jakýsi *zobecněný součet* a zdánlivě „absurdní“ rovnosti (16.25) jsou důsledkem jeho přesvědčení, že *součet každé řady je hodnotou toho konečného výrazu, jehož rozvinutím příslušná řada vzniká* (1745). Toto je tzv. *Eulerův princip.* Analytické pokračování lze interpretovat jako jistou realizaci tohoto principu.

Zacházení s divergentními řadami a „podivně správné výsledky“ si přiblížíme ukázkou: V rovnosti (16.24) položme $x = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \cos t + \mathrm{i}\sin t$, $t \in (0, 2\pi)$. Jednoduchou úpravou z této schematicky rozepsané rovnosti

$$\frac{1}{1-(\cos t + \mathrm{i}\sin t)} = (\cos t + \mathrm{i}\sin t)^0 + (\cos t + \mathrm{i}\sin t)^1 + (\cos t + \mathrm{i}\sin t)^2 + \cdots$$

dostaneme (užíváme Moivreovu větu)

$$\frac{1-\cos t}{2-2\cos t} + \mathrm{i}\,\frac{\sin t}{2-2\cos t} = \sum \cos kt + \mathrm{i}\sum \sin kt$$

a porovnáním reálných částí výrazů na obou stranách rovnosti dostaneme pro $t \in (0, 2\pi)$ „rovnost“ (první řada na pravé straně rovnosti diverguje dokonce pro všechna $t \in \mathbb{R}$!)

$$1/2 = -\cos t - \cos 2t - \cos 3t - \cdots\,.$$

V rovnosti provedeme záměnou $t - \pi$ za t, čímž obdržíme

$$1/2 = \cos t - \cos 2t + \cos 3t - \cdots$$

pro $t \in (-\pi, \pi)$. Integrací odtud dostaneme (integrační konstanta je rovna 0, neboť dosazením $t = 0$ dostáváme rovnost)

$$t/2 = \frac{\sin t}{1} - \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3} - \cdots$$

a další integrací pak

$$\frac{t^2}{4} = \frac{-\cos t}{1^2} - \frac{-\cos 2t}{2^2} + \frac{-\cos 3t}{3^2} - \cdots + C\,, \tag{16.26}$$

kde je nutno určit integrační konstantu C. Všimněte si, že vpravo v (16.26) je již řada, která je dokonce *stejnoměrně konvergentní* na intervalu $[-\pi, \pi]$, ač jsme vyšli od *divergentní* řady. Z předchozí rovnosti dopočteme C např. dosazením $t = 0$ a tak dostaneme

$$\frac{t^2}{4} = \frac{1 - \cos t}{1^2} - \frac{1 - \cos 2t}{2^2} + \frac{1 - \cos 3t}{3^2} - \cdots\,. \tag{16.27}$$

Zde je za C dosazována konvergentní řada o nám neznámém součtu, nicméně po dosazení $t = 0$ se obě strany rovnice (16.27) anulují. Euler nyní dosadil $t = \pi$ a tak odvodil *správný výsledek*

$$\sum (2k+1)^{-2} = \pi^2/8\,.$$

Pokud odůvodníte níže naznačené operace (není to těžké!), snadno jeho správnost ověříte nezávisle na užití divergentních řad:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} - \frac{1}{6^2} - \cdots =$$
$$= \Bigl(1 - \frac{1}{4}\Bigr) \cdot \Bigl(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots\Bigr) = \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}\,.$$

Předposlední rovnost vyplývá z Příkladu A.2, který je uveden v Apendixu; tam je (vcelku elementárně) určena hodnota součtu řady $\sum k^{-2}$.

Podezření Nicolase Bernoulliho (1687 – 1759) z r. 1743, že by táž *číselná řada* mohla vzniknout z podstatně odlišných výrazů, posilovalo nedůvěru k Eulerovu principu, Euler však takové podezření odmítal. Později se však našel i příklad

$$\frac{1 - x^m}{1 - x^n} = \frac{1 + x + \cdots + x^{m-1}}{1 + x + \cdots + x^{n-1}} = 1 - x^m + x^n - x^{n+m} + x^{2n} - \cdots\,,$$

který „dává“ podle Eulerova principu dosazením $x = 1$ do druhé rovnosti hodnotu pro $\sum (-1)^k$ každé z čísel m/n (to vysvětlil později Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813)). Obecně lze však říci, že existují sčítací metody, které do jisté míry Eulerovu myšlenku naplňují: lze jimi „sečíst“ mocninnou řadu i v bodech, kde diverguje. To však vyžaduje hlubší znalost teorie funkcí komplexní proměnné a přesahuje značně rámec tohoto textu. Důležitým momentem je fakt, že Euler pracoval s *mocninnými* řadami a ne s libovolnými funkčními řadami, pro které by analogický princip neměl naději na exaktní vyjádření: jednoduché příklady ukazují, že analogické tvrzení neplatí.

Nový zájem o divergentní řady nevznikl okamžitě s uveřejněním Abelovy práce. Trvalo to až do r. 1880, kdy se podařilo GEORGU FROBENIOVI (1849 – 1917) ukázat, že Abelova věta platí i v modifikované podobě, nahradíme-li „obyčejný“ součet řady cesàrovským zobecněným součtem. Jeho výsledek dále zobecnil o dva roky později OTTO HÖLDER (1859 – 1937), který studoval *další iterované průměry* posloupností částečných součtů řad a definoval pomocí nich sčítací metody $(\mathcal{H}, k)$. Poněkud strohý popis ozřejmíme na příkladě (je vhodné si ho podrobně promyslit): Částečné součty první z řad v (16.25) zřejmě divergují; tvoří posloupnost

$$\{1, -1, +2, -2, \dots\}.$$

Jejich aritmetické průměry tvoří posloupnost

$$\{1, 0, 2/3, 0, \dots\},$$

která opět diverguje, a proto $(\mathcal{H}, 1)$-součet uvažované řady neexistuje. Utvoříme další průměry, tj. průměry členů předchozí posloupnosti, čímž dostaneme posloupnost

$$\{1, 1/2, 5/9, 5/12, \dots\},$$

která konverguje k $1/4$, tedy k „Eulerovu výsledku“. Zároveň vidíme, že $(\mathcal{H}, 2)$-metoda dvakrát opakovaných průměrů je „silnější“ než $(\mathcal{H}, 1)$-metoda. Později zavedl Cesàro metody $(\mathcal{C}, 1)$, $(\mathcal{C}, 2)$, …, o kterých KONRAD KNOPP (1882 – 1957) r. 1907 a WALTER SCHNEE (1885 – 1958) r. 1909 dokázali, že jsou ekvivalentní s Hölderovými metodami, tj. že platí $(\mathcal{C}, 1) = (\mathcal{H}, 1)$, $(\mathcal{C}, 2) \approx (\mathcal{H}, 2)$, $(\mathcal{C}, 3) \approx (\mathcal{H}, 3)$,…. To znamená, že metody $(\mathcal{C}, k)$ a $(\mathcal{H}, k)$ splývají pro $k = 1$ a pro $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$ jsou rozdílné, ale sčítají tytéž řady ke stejným zobecněným součtům.

Cesàro dokázal nejen variantu Tvrzení 16.6.9 pro $(\mathcal{C}, k)$-součty (pro všechny tři uvažované řady s vlastními $(\mathcal{C}, k)$-součty), ale obecněji ukázal, že je-li řada $\sum a_n$ sčítatelná $(\mathcal{C}, k)$-metodou a řada $\sum b_n$ podobně $(\mathcal{C}, l)$-metodou ke konečným součtům a, b, pak je jejich Cauchyho součin sčítatelný $(\mathcal{C}, k + l + 1)$-metodou k hodnotě ab.

Definitivně prolomil panující nedůvěru ke sčítacím metodám r. 1903 LEOPOLD FEJÉR (1880 – 1959), který dokázal, že *Fourierova řada* každé spojité 2π-periodické funkce je sčítatelná $(\mathcal{C}, 1)$-metodou k této funkci všude, i když může v mnoha bodech divergovat. Poznamenejme, že sčítacích metod je mnoho a jsou „různě silné“. Hölderův výsledek např. říká, že platí implikace

$$\Big((\mathcal{H}, k)\text{-}\sum a_n = s^* \Big) \Longrightarrow \Big((\mathcal{A})\text{-}\sum a_n = s^* \Big)$$

pro každé $k \in \mathbb{N}$, tedy Abelova metoda je „silná“. V monografii [17] je v přehledné tabulce uvedeno 99 sčítacích metod.

Historické poznámky 16.6.14. Doplňme ještě poznámkami látku této kapitoly. Kruh konvergence byl znám v podstatě již Cauchymu včetně metody výpočtu jeho poloměru, avšak důkaz vzorečku nebyl korektní a prodělal další vývoj. Proto se vzorec spojuje s letopočtem 1892 a jménem Hadamard. Jeho použití pro důkaz věty o derivování a integraci mocninné řady člen po členu není nezbytně nutné, představuje však jeho elegantní využití.

Abelův výsledek o spojitosti vzhledem k úsečce spojující bod na konvergenční kružnici se středem kruhu konvergence zlepšil později r. 1875 OTTO STOLZ (1842 – 1905).

Ten dokázal, že tvrzení Věty 16.4.1 platí pro limitu nejen vzhledem k úsečce $\overline{z_0\zeta}$, ale i k oblasti, která vznikne jako nejmenší konvexní množina (konvexní obal) obsahující $\mathcal{U}(z_0, r)$ s $0 < r < |\,\zeta - z_0\,|$ a $\{\zeta\}$. Abelova sčítací metoda získala jméno právě díky jeho větě o spojitosti vzhledem k úsečce, neboť ji lze interpretovat také jako tvrzení o regularitě této metody. Dříve ji však použil např. Simeon Denis Poisson (1781 – 1840) pro sčítání Fourierových řad. Dokonce lze vystopovat její kořeny k Leonhardu Eulerovi (1707 – 1783) a ještě dále ke Gottfriedu Wilhelmu Leibnizovi (1646 – 1716).

Rozvoj součtu f mocninné řady s kruhem konvergence $\mathcal{K}(x_0, R)$, $0 < R \le +\infty$, v Taylorovu řadu o jiném středu je také dlouho znám. Uvedená Věta 16.3.2 zaručuje minimální velikost poloměru konvergence rozvoje, ta však může být obecně větší. Je proto možné, že existuje mocninná řada se středem $\zeta \in \mathcal{C}(z_0, R)$ tak, že její součet f_1 splývá s f na $\mathcal{K}(z_0, R)$. Na tom je založena myšlenka *analytického pokračování*, které sehrálo zásadní roli v teorii funkcí komplexní proměnné. Dá se ukázat, že alespoň jeden bod konvergenční kružnice tuto vlastnost nemá. Další studium mocninných řad vede směrem k teorii funkcí komplexní proměnné.

Větu o jednoznačnosti ve slabší formě, tj. pro případ, že M je interval v $\mathbb{R}$, dokázal již r. 1827 Abel. Ve formě, ve které jsme ji uvedli, ji patrně první dokázal Carl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815 – 1897). Má zásadní význam, neboť např. ukazuje, že rozšíření elementárních funkcí z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{C}$ není „náhodné“, ale jediné, pokud požadujeme jeho diferencovatelnost (v oblasti ležící v $\mathbb{C}$). K tomu je však ještě zapotřebí trochu hlouběji rozvinout teorii funkcí komplexní proměnné.

Učebnic teorie funkcí komplexní proměnné (ve starší literatuře někdy jen „teorie funkcí“, což je vliv německého užívání termínu „Funktionentheorie“) existuje obrovské množství. Tento text s mnoha historickými komentáři je stylem blízký textům [12] a [13], do kterých se začtou rádi i specialisté z oblasti teorie funkcí komplexní proměnné, neboť kromě hezkého výkladu poskytují i množství informací o vývoji této disciplíny. Mým záměrem bylo poskytnout čtenáři v tomto směru dostatečně solidní základy tak, aby nepociťoval u nás tradiční ostrou hranici mezi reálnou a komplexní analýzou.

Literatura:

[1] Borwein, J., Bailey, D., Girgensohn, R.: *Experimentation in mathematics; Computational path to discovery*, A. K. Peters, Natick, MA, 2004.

[2] Bressoud, D.: *A radical approach to real analysis*, The Mathematical Association of America, Washington, 1994.

[3] Černý, I.: *Analýza v komplexním oboru*, Academia, Praha, 1983.

[4] Edwards, C. H.: *The historical development of the calculus*, Springer, New York, 1979.

[5] Hewitt, E., Stromberg, K.: *Real and abstract analysis*, Springer, Berlin, 1969.

[6] Jarník, V.: *Diferenciální počet I*, Academia, Nakladatelství ČSAV, 1963. (5. vydání).

[7] Hardy, G. H.: *Divergent series*, Claredon Press, Oxford, 1949.

[8] Klambauer, G.: *Aspects of Calculus*, Springer, Berlin, 1986.

[9] Klein, F.: *Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus*, Springer, Berlin, 1908.

[10] Knopp, K.: *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*, Springer, Berlin, 1924.

[11] Petr, K.: *Počet differenciální* (*část analytická*), Jednota československých mathematiků a fysiků, Praha, 1923.

[12] Remmert, R.: *Theory of complex functions*, Springer, New York, 1991.

[13] Remmert, R.: *Classical topics in complex function theory*, Springer, New York, 1998.

[14] Rudin W.: *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill Comp., New York, 1976, (3. vydání).

[15] Rudin, W.: *Analýza v reálném a komplexním oboru*, Academia, Praha, 2003.

[16] Walter, W.: *Analysis I*, Springer, Berlin, 1992. (3. přepracované vydání).

[17] Zeller, K., Beckman, W.: *Theorie der Limitierungsverfahren*, Springer, Berlin, 1970.

Dodatky

V této části je několik různorodých informací, které doplňují předcházející text a lze je po rozpracování použít k referátům na seminářích. Týkají se převážně různých aspektů zacházení s řadami a také nekonečných součinů, které jsou použity v partiích o funkci gama a o rozkladu funkce $\pi^{-1}\sin\pi x$ v nekonečný součin.

A Sečtení speciální řady

V Příkladu 11.4.3 jsme dokázali, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ konverguje pro všechna $s > 1$. Její součet je natolik důležitý, že *definujeme*

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}, \quad s \in (1, \infty)\,.$$

Funkce ζ se nazývá *Riemannova zeta-funkce.* Pro $s = 2$ známe i odhad její hodnoty: Platí $1 < \zeta(2) < 2$, k němuž dospějeme pomocí odhadu $n^{-2} < 1/(n(n-1))$, $n \geq 2$. Existuje mnoho způsobů, jak hodnotu $\zeta(2)$ spočítat [3]). Jeden vcelku velmi jednoduchý si ukážeme, nejdříve však potřebujeme následující lemma.

Lemma A.1. *Pro všechna $m \in \mathbb{N}$ platí rovnost*

$$\sum_{k=1}^{m} \operatorname{cotg}^2 \frac{\pi k}{2m+1} = \binom{2m+1}{3} : \binom{2m+1}{1} = \frac{m(2m-1)}{3}\,. \tag{A.1}$$

Důkaz. Pomocí Eulerových vzorců a binomické věty dostaneme pro $0 < \varphi < \pi/2$ rovnost

$$\cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi = (\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)^n = \big(\sin\varphi \cdot (\operatorname{cotg}\varphi + \mathrm{i})\big)^n =$$
$$= (\sin^n\varphi)\,(\operatorname{cotg}\varphi + \mathrm{i})^n = (\sin^n\varphi)\,\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{i}^k \operatorname{cotg}^{n-k}\varphi\,.$$

Porovnáním reálné a imaginární části dostaneme

$$\sin n\,\varphi = (\sin^n\varphi)\left[\,\binom{n}{1}\operatorname{cotg}^{n-1}\varphi - \binom{n}{3}\operatorname{cotg}^{n-3}\varphi + \cdots\right],$$

[3]) Jeden jsme popsali v prvním dílu tohoto textu v úvodní kapitole; pokud jste ji nečetli, zkuste se k ní nyní vrátit, popisuje první Eulerův přístup k této problematice, který byl předmětem kritiky jeho současníků.

kde vpravo v závorce je jistý *polynom* v proměnné $\operatorname{cotg} \varphi$ a jeho poslední člen závisí na paritě n. Proveďme ještě substituci a pišme $2m+1$ místo n; obdržíme tak vyjádření pro $\sin(2m+1)\varphi$ tvaru

$$\begin{aligned}&(\sin^{2m+1} \varphi) \left[\binom{2m+1}{1} \operatorname{cotg}^{2m} \varphi - \binom{2m+1}{3} \operatorname{cotg}^{2(m-1)} \varphi + \cdots + 1 \right] = \\ &= (\sin^{2m+1} \varphi)\ P_m(\operatorname{cotg}^2 \varphi)\,,\end{aligned}$$

kde P_m značí polynom stupně m „v $\operatorname{cotg}^2 \varphi$“, který je v poslední rovnosti v $[\dots]$. Protože je $\sin \varphi \neq 0$ pro $0 < \varphi < \pi/2$, plyne odtud, že

$$P_m(\operatorname{cotg}^2 \varphi) = 0\,, \qquad \text{právě když} \qquad (2m+1)\varphi = k\pi$$

pro nějaké celé číslo k. Polynom P_m se proto anuluje v m různých bodech

$$x_k = \operatorname{cotg}^2 \frac{\pi k}{2m+1}\,, \qquad k = 1, 2, \dots, m\,.$$

To jsou zároveň *všechny* nulové body P_m. Použijeme-li základní tvrzení o vztahu kořenů a koeficientů algebraických rovnic známá z algebry, dostaneme snadno vztah (A.1). □

Tvrzení A.2. *Je*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}\,. \tag{A.2}$$

Historická poznámka A.3. O nalezení součtu řady (A.2) požádal Leibnize roku 1673 Henry Oldenburg (1618 – 1677); ten sice uměl dokázat její konvergenci, nikoli však určit její součet. Součet jako první určil až Leonhard Euler (1707 – 1783), který se k tomuto problému během svého života několikrát vrátil. V literatuře bývá často tato úloha označována jako *Basilejský problém.*

Důkaz Tvrzení A.2. Snadno odvodíme nerovnost

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x\,, \quad x \in (0, \pi/2)\,. \tag{A.3}$$

I když je to „vidět z obrázku“, je nutno nerovnost *dokázat*, např. vyšetřením průběhu rozdílů funkcí, které v nerovnosti vystupují. Odtud vyplývá pro uvažovaná x přechodem k převráceným hodnotám, umocněním a jednoduchou úpravou (užijeme přitom rovnost $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$)

$$\operatorname{cotg}^2 x < \frac{1}{x^2} < 1 + \operatorname{cotg}^2 x\,. \tag{A.4}$$

Položme $x = k\pi/(2m+1)$ pro $k, m \in \mathbb{N}$, $1 \le k \le m$, a sečtěme členy v obdržených nerovnostech vzhledem ke sčítacímu indexu k. Dostaneme tak nerovnosti

$$\sum_{k=1}^{m} \operatorname{cotg}^2 \frac{k\pi}{2m+1} < \frac{(2m+1)^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} < m + \sum_{k=1}^{m} \operatorname{cotg}^2 \frac{k\pi}{2m+1}\,.$$

Pomocí Lemmatu A.1 dostaneme odtud

$$\frac{m(2m-1)}{3} < \frac{(2m+1)^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} < \frac{m(2m+2)}{3}\,,$$

resp. po jednoduché úpravě

$$1 < \frac{3(2m+1)^2}{m(2m-1)} \cdot \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} < \frac{2m+2}{2m-1}\,.$$

Podle Věty 4.3.12 plyne odtud přechodem k limitě pro $m \to \infty$ rovnost (A.2). Tento důkaz byl popsán v [22]. □

Že je stále co objevovat dokazuje fakt, že např. jiný podobný jednoduchý důkaz Tvrzení A.2 byl nedávno publikován v článku [11] (viz též hezký článek [16]). Princip naznačíme: Z (A.3) dostaneme přechodem k převráceným hodnotám pro druhé mocniny nerovnosti

$$\frac{1}{\sin^2 x} > \frac{1}{x^2} > \frac{1}{\sin^2 x} - 1\,, \quad x \in (0, \pi/2)\,. \tag{A.5}$$

Pro $x \in (0, \pi)$ dostaneme z identity

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin^2 x} &= \frac{1}{4\sin^2(x/2)\cos^2(x/2)} = \\ &= \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{\sin^2(x/2)} + \frac{1}{\cos^2(x/2)}\Big) = \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{\sin^2(x/2)} + \frac{1}{\sin^2((\pi+x)/2)}\Big) \end{aligned}$$

postupně pro $x = \pi/2$

$$\begin{aligned} 1 = \frac{1}{\sin^2(\pi/2)} &= \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{\sin^2(\pi/4)} + \frac{1}{\sin^2(3\pi/4)}\Big) = \\ &= \frac{1}{16}\Big(\frac{1}{\sin^2(\pi/8)} + \frac{1}{\sin^2(3\pi/8)} + \frac{1}{\sin^2(5\pi/8)} + \frac{1}{\sin^2(7\pi/8)}\Big) = \\ &= \cdots = \\ &= \frac{2}{4^n} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \Big(\sin^2 \frac{(2k-1)\pi}{2^{n+1}}\Big)^{-1}\,. \end{aligned} \tag{A.6}$$

Ze vzorce (A.5) dosazením $x = 2^{-(n+1)}(2k-1)\pi$ pro $k = 1, 2, \dots, 2^{n-1}$ plynou nerovnosti

$$\Big(\sin^2 \frac{(2k-1)\pi}{2^{n-1}}\Big)^{-1} > \frac{2^{2n+2}}{(2k-1)^2\pi^2} > \Big(\sin^2 \frac{(2k-1)\pi}{2^{n-1}}\Big)^{-1} - 1\,,$$

které sečteme. Dostaneme tak nerovnosti

$$\sum_{k=1}^{2^{n-1}} \Big(\sin^2 \frac{(2k-1)\pi}{2^{n-1}}\Big)^{-1} > \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{2^{2n+2}}{(2k-1)^2\pi^2} > \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \Big(\sin^2 \frac{(2k-1)\pi}{2^{n-1}}\Big)^{-1} - 2^{n-1}.$$

Po vynásobení faktorem $2/4^n$ a nahrazení dvou součtů pomocí (A.6) dostaneme

$$1 > \frac{2}{4^n} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{4 \cdot 4^n}{(2k-1)^2\pi^2} > 1 - 2^{n-1}\frac{2}{4^n} = 1 - \frac{1}{2^n}\,.$$

Jestliže v této složené nerovnosti provedeme limitní přechod pro $n \to \infty$, obdržíme po úpravě

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\,.$$

Eulerův výsledek odtud dostaneme z rovnosti

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\,.$$

B Ještě k π

Již před Archimedem (287 – 212 před n. l.) bylo známo, že obsah kruhu je přímo úměrný čtverci jeho poloměru nebo že délka kružnice je úměrná jeho průměru; teprve však Archimedes úspěšně a na tehdejší dobu překvapivě přesně hodnotu π numericky spočítal. Vývoj metod výpočtu π se nezastavil s příchodem počítačů a spíše opak je pravdou.

Jedním z nejpřekvapivějších objevů souvisejících s π v posledních několika desetiletích bylo nalezení postupu k *výpočtu individuálních číslic* rozvoje π; viz [3]. Algoritmus, myšlenka apod. se často označují BBP podle autorů, jimiž jsou David Bailey, Peter Borwein a Simon Plouffe; výsledek je ze srpna r. 1995. Je založen na vzorci

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n}\left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6}\right). \tag{B.1}$$

Tento vzorec umožňuje snadno získat číslici na n-tém místě rozvoje π v *šestnáctkové* soustavě, a to *bez počítání číslic předcházejících.* Zde je ještě jednodušší vzoreček tohoto typu, který je převzat z článku [1]:

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n}\left(\frac{2}{4n+1} + \frac{2}{4n+2} + \frac{1}{4n+3}\right)\,.$$

Tam lze nalézt postup, jak takový vzorec pomocí programu *Mathematica* verifikovat. Všimněme si trochu blíže charakteru podobných vzorců. Vzorcům

$$\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\frac{1}{n}\,, \quad \log 2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{9^n}\frac{2/3}{2n+1}\,, \quad \log\frac{9}{10} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n}\frac{1}{n}\,. \tag{B.2}$$

říkáme *jednočlenné*, neboť koeficienty rozvojů obsahují vždy převrácenou hodnotu lineárního výrazu („v n“). První řada v (B.2) se dostane dosazením $x = 1/2$ do Taylorova rozvoje funkce $\log(1-x)$ o středu 0 a je to „dvojkový rozvoj“. Druhá řada je „devítkový rozvoj“ a vznikne dosazením $x = 1/3$ do Taylorova rozvoje funkce $\log((1+x)/(1-x))$ o středu 0. Třetí vzorec v (B.2) dostaneme z Taylorova rozvoje funkce $\log(1+x)$ o středu 0 dosazením $x = -1/10$.

BBP vzorec (B.1) je v popsaném smyslu čtyřčlenný a jde „o šestnáctkový rozvoj“. Ukažme si, jak ho lze dokázat; viz např. [21]. Pro $k = 1, \ldots, 8$ platí rovnosti

$$\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x^{k-1}}{1-x^8}\,\mathrm{d}x = \int_0^{1/\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} x^{k-1+8n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2^{k/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n(8n+k)}\,,$$

takže výraz v (B.1) vpravo lze upravit na tvar

$$\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{4\sqrt{2} - 8x^3 - 4\sqrt{2}x^4 - 8x^5}{1 - x^8}\,\mathrm{d}x \ .$$

Provedeme-li lineární substituci $y = \sqrt{2}\,x$ a rozložíme-li výsledek na parciální zlomky, dostaneme

$$\int_0^1 \frac{16y - 16}{y^4 - 2y^3 + 4y - 4}\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{4y}{y^2 - 2}\,\mathrm{d}y - \int_0^1 \frac{4y - 8}{y^2 - 2y + 2}\,\mathrm{d}y = \pi \ .$$

Další informace o moderních metodách výpočtu π nalezne čtenář v přehledném článku [21]; tam je také popsáno, jak se vzorec (B.1) dá použít k výpočtu individuálních číslic rozvoje π.

C Machinův vzorec

Leibnizova řada (16.16) pro $\pi/4$ se pro výpočet π příliš nehodí. Chyba $|s_n - s|$ částečného součtu $s_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k a_k$ řady se střídavými znaménky o součtu s je odhadnuta hodnotou $|a_{n+1}|$. Odtud plyne, že např. tisící částečný součet Leibnizovy řady umožňuje získat π s odhadnutou přesností na *méně* než 3 desetinná místa.

Ukažme si drobný trik, který umožňuje výpočet π efektivnějším způsobem. V Kapitole 6 jsme odvodili vzorec (6.24), tj.

$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} \,,$$

kde x, y a $x+y$ předpokládáme v intervalu $(-\pi/2, \pi/2)$. Zřejmě lze nalézt y, $0 < y < \pi/4$ tak, že je $\operatorname{tg} y = \frac{1}{5}$. Podle vzorce, který jsme právě připomněli, dostaneme

$$\operatorname{tg} 2y = \frac{2 \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg}^2 y} = \frac{2/5}{1 - 1/25} = \frac{5}{12} \,,$$

a také

$$\operatorname{tg} 4y = \frac{2 \operatorname{tg} 2y}{1 - \operatorname{tg}^2(2y)} = \frac{5/6}{1 - 25/144} = \frac{120}{119} \,.$$

Zřejmě je $\operatorname{tg} 4y \doteq 1$ a tedy $4y \doteq \pi/4$. Dále je

$$\operatorname{tg}\left(4y - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg} 4y - 1}{1 + \operatorname{tg} 4y} = \frac{1}{119} \cdot \frac{119}{239} = \frac{1}{239} \,.$$

Odtud dostáváme $4y - \pi/4 = \operatorname{arctg}(1/239)$ a tedy

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239} \,, \tag{C.1}$$

což je vzorec, který se pro výpočet π hodí nepoměrně lépe (zde řady pro arctg konvergují „velmi rychle“). Pochází od Johna Machina (1680 – 1751) [4]) a byl ve své době opravdu významnou pomůckou pro určování π s velkou přesností. R. 1706 pomocí tohoto vzorce

[4]) Někteří autoři uvádějí jako rok úmrtí letopočet 1752.

Machin spočetl jako první π na 100 desetinných míst. Viz též [13]. Snadno zjistíme, že nahradíme-li arkustangenty v (C.1) prvními čtyřmi členy jejich Taylorova rozvoje v bodě 0 a dosadíme čísla 1/5 a 1/239, dostaneme po vynásobení číslem 4 hodnotu 3,141591772, která se od π liší až na šestém desetinném místě.

I Machinův vzorec (C.1) ztratil již svůj význam. Uvedli jsme ho převážně z historických důvodů. Poznamenejme však, že např. Karel Petr (1868 – 1950) uvádí ve své učebnici [11] z r. 1923 na str. 283 kromě formule (C.1) ještě další dva vzorce

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= \ 8\operatorname{arctg}\frac{1}{10} - 4\operatorname{arctg}\frac{1}{515} - \operatorname{arctg}\frac{1}{239}\,, \\ \frac{\pi}{4} &= 12\operatorname{arctg}\frac{1}{18} - 8\operatorname{arctg}\frac{1}{57} - 5\operatorname{arctg}\frac{1}{239}\,. \end{aligned}$$

Poslední formule náleží Carlu Friedrichu Gaussovi (1777 – 1855). Více o využití funkce arctg k výpočtu π lze nalézt např. v [12].

D O jedné zvláštnosti

V této části si ukážeme alespoň informativně, že kromě pomalé konvergence je zde ještě další důvod, proč se Leibnizova řada k výpočtu hodnot aproximací čísla π opravdu nehodí.

Je známo, že pro $x \in [-1, 1]$ je

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}\,\frac{x^{2n+1}}{(1+x^2)^{n+1}}\,. \tag{D.1}$$

Vyjádření první řadou v (D.1) znal již James Gregory (1638 – 1675) r. 1671; dokazuje se téměř v každém elementárním kurzu analýzy. Po dosazení $x = 1$ dostaneme vyjádření $\pi/4$ ve formě součtu alternující číselné řady, nazývané po Gottfriedu W. Leibnizovi (1646 – 1716); ten ho totiž popsal r. 1684, bylo však nalezeno o více než 100 let dříve v Indii:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\,.$$

Jak jsme se již zmínili, tato řada se *zásadně nehodí* k praktickému výpočtu hodnoty π s větší přesností. Jako příklad uveďme rovnost

$$4 \sum_{n=0}^{4999999} (-1)^n \frac{1}{2n+1} =$$

$$\begin{aligned} &= 3,141592\underline{4}\ 5358979323846\underline{4}\ 6433832795 0\underline{278}\ 4197169399\underline{3873}\ 0582097494\underline{1822}\ 30\ldots \\ &\doteq 3,1415926\ 53589793238462\ 64338327950288\ 41971693993751\ 05820974944592\ 30\ldots \\ &\qquad\quad 2 \qquad\qquad\qquad -2 \qquad\qquad\qquad 10 \qquad\qquad\qquad -122 \qquad\qquad\qquad 2770 \end{aligned}$$

která ukazuje, že při sečtení pěti milionů členů řady je již na 7. desetinném místě chyba. Nesprávné číslice rozvoje jsou na druhém řádku podtrženy, ve třetím uvádíme skutečný rozvoj π. Ve čtvrtém je názorné schéma rozdílů. Výsledek vypadá trochu záhadně, ze 65 uvedených desetinných míst nesouhlasí pouze 11 podtržených číslic. To lze vysvětlit pomocí tzv. Eulerových čísel; viz [4]. Závěr je zřejmý: kromě pomalé konvergence je zde nějaký další hlubší důvod, proč se toto vyjádření čísla π pomocí Gregoryho řady k výpočtu nehodí.

Druhou řadu ve vyjádření arkustangenty v (D.1), konvergující pro malé hodnoty $|x|$ velmi rychle, objevil LEONHARD EULER (1707 – 1783) r. 1755. První známá *jemnější metoda* výpočtu π byla založena na užití funkce arkustangens a užívala výše popsaný Machinův vzorec.

E Dělení mocninných řad

Při práci s mocninnými řadami lze užívat i další operace. Vcelku přirozená jsou tvrzení o sčítání a násobení mocninných řad, která nebudeme ani vyslovovat. Trochu zajímavější je tvrzení o dělení mocninných řad; to však pouze vyslovíme, ale dokazovat je nebudeme.

Věta E.1. *Nechť f a g jsou součty mocninných řad o středu 0, které tyto funkce definují v $\mathcal{U}(0,R)$, $R>0$. Potom v případě, že $g(0)\neq 0$, existuje takové $r>0$, že funkci f/g lze rozvinout v řadu o středu 0 konvergentní pro všechna $z\in\mathbb{C}$, $|z|<r$, a příslušný rozvoj lze získat „dělením řad“. Pro maximální r s touto vlastností lze odvodit rovnost: $r=\inf\{|z|;\,|z|<R,\,g(z)=0\}$, pokud g nabývá hodnoty 0 v $\mathcal{U}(0,R)$, nebo $r=R$ v případě, že $g(z)\neq 0$ pro všechna $z\in\mathbb{C}$, $|z|<R$.*

Příklad E.2. Ukažme si na příkladu funkce tg, jak se takové dělení provádí. Standardně definujeme $\operatorname{tg} z=\sin z/\cos z$ pro všechna $z\in\mathbb{C}\setminus\{z;\,\cos z=0\}$, tj. všude kromě nulových bodů funkce cos. Pomocí dělení dostáváme

$$\begin{array}{l}
\quad(\,z-z^3/3!+z^5/5!-\cdots):\ (1-z^2/2!+z^4/4!-\cdots)=\ z+\dfrac{z^3}{3}+\dots\,.\\
\underline{\pm\, z\mp z^3/2!\pm z^5/4!\mp\cdots}\\
\qquad\quad z^3/3\ -z^5/30+\cdots\\
\qquad\underline{\pm\, z^3/3\ \mp\ z^5/6\ \pm\quad}\\
\qquad\qquad 2z^5/15
\end{array}$$

Postup je analogický jako dělení polynomu polynomem, dělíme však „odzadu“, tj. od nejnižších mocnin. Je $z\cdot 1=z$, $(-z^2/2!)\cdot z=-z^3/2!$, …, což píšeme do druhého řádku. Pak zaměníme znaménka (horní za dolní), sloučíme s prvním řádkem a analogicky postupujeme dále. Tak se odvodí rozvoj

$$\operatorname{tg} z=z+\frac{z^3}{3}+\frac{2z^5}{15}+\frac{17z^7}{315}+\frac{62z^9}{2835}+\dots\,, \tag{E.1}$$

který konverguje pro $z\in\mathbb{C}$, $|z|<\pi/2$, tedy až „k nejbližšímu nulovému bodu funkce cos od počátku“. Legitimitu tohoto dělení nebudeme dokazovat, poznamenejme však, že pro $b_0\neq 0$ lze jednoduše určit koeficienty „podílové řady“ $\sum a_n z^n$ ze vztahu

$$\sum a_n z^n=\Big(\sum c_n z^n\Big):\Big(\sum b_n z^n\Big)$$

metodou porovnání koeficientů, založenou na Větě 16.3.4. Řešíme tak rovnice

$$\begin{aligned} a_0 b_0 &= c_0 \,, \\ a_0 b_1 + a_1 b_0 &= c_1 \,, \\ a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 &= c_2 \,, \ldots \end{aligned}$$

vzhledem k neznámým $a_0, a_1, a_2, \ldots$. Z prvé rovnice vypočteme a_0 a dosadíme do druhé, vypočteme a_1 a a_0, a_1 dosadíme do třetí, atd. Všimněme si ještě souvislostí s elementární matematikou.

F Bernoulliho čísla

I když se na první pohled zdá, že koeficienty rozvoje funkce tg v (E.1) stěží podléhají nějaké zákonitosti, není to pravda. Jejich struktura je složitější a souvisí s tzv. *Bernoulliho čísly* B_m, $m \in \mathbb{N}$, která hrají roli také např. při hledání vzorců pro $S_n(p) = \sum_{k=1}^{n} k^p$, a v mnoha jiných situacích v analýze.

Označíme-li pro $p \in \mathbb{N}$

$$S(n,p) := \sum_{k=1}^{n} k^p \,,$$

platí následující vzorce (vede k nim i jiná cesta, my však chceme mít před očima jeden z výsledků, ke kterým spějeme a který Bernoulli odvodil)

$$\begin{aligned}
S(n,1) &= \frac{1}{2}\,n^2 + \frac{1}{2}n \,, \\
S(n,2) &= \frac{1}{3}\,n^3 + \frac{1}{2}\,n^2 + \frac{1}{6}\,n \,, \\
S(n,3) &= \frac{1}{4}\,n^4 + \frac{1}{2}\,n^3 + \frac{1}{4}\,n^2 \,, \\
S(n,4) &= \frac{1}{5}\,n^5 + \frac{1}{2}\,n^4 + \frac{1}{3}\,n^3 - \frac{1}{30}\,n \,, \\
S(n,5) &= \frac{1}{6}\,n^6 + \frac{1}{2}\,n^5 + \frac{5}{12}\,n^4 - \frac{1}{12}\,n^2 \,, \\
S(n,6) &= \frac{1}{7}\,n^7 + \frac{1}{2}\,n^6 + \frac{1}{2}\,n^5 - \frac{1}{6}\,n^3 + \frac{1}{42}\,n \,, \\
S(n,7) &= \frac{1}{8}\,n^8 + \frac{1}{2}\,n^7 + \frac{7}{12}\,n^6 - \frac{7}{24}\,n^4 + \frac{1}{12}n^2 \,, \\
S(n,8) &= \frac{1}{9}\,n^9 + \frac{1}{2}\,n^8 + \frac{2}{3}\,n^7 - \frac{7}{15}\,n^5 + \frac{2}{9}\,n^3 - \frac{1}{30}\,n \,, \\
S(n,9) &= \frac{1}{10}\,n^{10} + \frac{1}{2}\,n^9 + \frac{3}{4}\,n^8 - \frac{7}{10}\,n^6 + \frac{1}{2}\,n^4 - \frac{3}{20}\,n^2 \,, \\
S(n,10) &= \frac{1}{11}\,n^{11} + \frac{1}{2}\,n^{10} + \frac{5}{6}\,n^9 - \frac{1}{1}\,n^7 + \frac{1}{1}\,n^5 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{5}{66}\,n \,, \ \ldots \,.
\end{aligned}$$

Tyto vzorečky můžeme dokázat sice indukcí, ovšem pokud známe jejich tvar. Povšimněme si blíže některých obecných zákonitostí v tabulce. Snadno nahlédneme, že má rekurentní charakter: V obecném případě odvozování vzorce pro $S(n,p)$ dostaneme po

úpravě rovnost, obsahující *pouze tento neznámý součet*, ostatní součty s menšími p jsme určili v předcházejících krocích. Existuje také vazba mezi koeficienty v jednotlivých řádcích: jejich součet je vždy roven 1. Koeficienty u lineárních členů (poslední členy v sudých řádcích) jsou čísla B_{2k}, $k = 1, 2, \ldots$.
Jacob Bernoulli hledal takové polynomy $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots$, pro které platí pro všechna přirozená čísla n, p

$$S(n-1,1) = \int_0^n \mathcal{B}_1(x)\,\mathrm{d}x\,,\ S(n-1,2) = \int_0^n \mathcal{B}_2(x)\,\mathrm{d}x\,,\ \ldots,\ S(n-1,p) = \int_0^n \mathcal{B}_p(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Pro tyto polynomy, kterým dnes říkáme *Bernoulliho polynomy*, platí

$$\int_n^{n+1} \mathcal{B}_p(x)\,\mathrm{d}x = n^p\,. \tag{F.1}$$

To nám umožňuje určit $\mathcal{B}_p$. Pro každé $p \in \mathbb{N}$ existuje totiž jediný polynom stupně p s koeficientem 1 u nejvyšší mocniny takový, že (F.1) platí *pro všechny hodnoty $n \in \mathbb{R}$, nejen pro $n \in \mathbb{N}$*. Ukažme si to, tak jako v [2], prostřednictvím příkladu: nechť

$$\mathcal{B}_3(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0\,.$$

Ukážeme, jak určit koeficienty a_2, a_1, a_0 dosazením $\mathcal{B}_3$ do (F.1). Tak dostaneme

$$\begin{aligned} n^3 &= \int_n^{n+1} (x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0)\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{4}(n+1)^4 + \frac{a_2}{3}(n+1)^3 + \frac{a_1}{2}(n+1)^2 + a_0(n+1) - \frac{1}{4}n^4 - \frac{a_2}{3}n^3 - \frac{a_1}{2}n^2 - a_0n = \\ &= n^3 + \left(\frac{3}{2} + a_2\right)n^2 + (1 + a_2 + a_1)n + \left(\frac{1}{4} + \frac{a_2}{3} + \frac{a_1}{2} + a_0\right). \end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů nyní dostaneme

$$\mathcal{B}_3(x) = x^3 - \frac{3x^2}{2} + \frac{x}{2}\,.$$

Integrací dostaneme vzorec

$$S(n-1,3) = \int_0^n \left(x^3 - \frac{3x^2}{2} + \frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x = \frac{n^4}{4} - \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}\,.$$

Analogicky lze určit další $\mathcal{B}_p$; tak např. je

$$\mathcal{B}_1(x) = x - \frac{1}{2}\ \left[= \left(\frac{(x-1)\,x}{2}\right)'\right],\quad \mathcal{B}_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}\ \left[= \left(\frac{(x-1)\,x\,(2x-1)}{6}\right)'\right],$$

přičemž zlomky, které se v hranatých závorkách derivují, mají pro čtenáře patrně povědomý tvar [5]). Toto je však obecně pracný způsob, pátrejme proto po dalších souvislostech. Derivováním (F.1) podle proměnné n a dosazením k za n dostaneme

$$\mathcal{B}_p(k+1) - \mathcal{B}_p(k) = p\,k^{p-1}\,. \tag{F.2}$$

[5]) Jsou to totiž části vzorců, které se indukcí dokazují zpravidla již na střední škole (ovšem s $x = n + 1$) a žáci se je často musí učit nazpaměť.

Položme v rovnosti (F.2) postupně $k = 1, 2, \ldots, n-1$ a takto vzniklé rovnosti sečtěme, čímž dostaneme

$$p\left(0^{p-1} + 1^{p-1} + \cdots + (n-1)^{p-1}\right) =$$
$$= \big(\mathcal{B}_p(1) - \mathcal{B}_p(0)\big) + \big(\mathcal{B}_p(2) - \mathcal{B}_p(1)\big) + \cdots + \big(\mathcal{B}_p(n) - \mathcal{B}_p(n-1)\big) = \mathcal{B}_p(n) - \mathcal{B}_p(0)\,.$$

Platí tedy

$$\mathcal{B}_p(n) - \mathcal{B}_p(0) = p\left(1^{p-1} + 2^{p-1} + \cdots + (n-1)^{p-1}\right) = p\int_0^n \mathcal{B}_{p-1}(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{F.3}$$

Tak jsme odvodili rekurentní formuli pro Bernoulliho polynomy

$$\mathcal{B}_p(x) = p\int_0^x \mathcal{B}_{p-1}(t)\,\mathrm{d}t\, + \mathcal{B}_p(0)\,. \tag{F.4}$$

Budeme-li vědět, že $\mathcal{B}_4(0) = -1/30$, snadno obdržíme

$$\mathcal{B}_4(x) = 4\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{4}\right) - \frac{1}{30} = x^4 - 2x^3 + x^2 - 1/30\,, \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{F.5}$$

Obecněji, budeme-li znát absolutní členy $B_p := \mathcal{B}_p(0)$ Bernoulliho polynomů, budeme moci snadněji sestrojit postupně $\mathcal{B}_p$. Tyto absolutní členy jsou již zmíněná *Bernoulliho čísla*. Uvědomíme-li si, že je $\mathcal{B}_1(x) = x + B_1$, lze spočíst pomocí (F.4) postupně

$$\mathcal{B}_2(x) = 2\int_0^x (t + B_1)\,\mathrm{d}t\, + B_2 = x^2 + 2B_1x + B_2\,,$$
$$\mathcal{B}_3(x) = 3\int_0^x (t^2 + 2B_1t + B_2)\,\mathrm{d}t\, + B_3 = x^3 + 3B_1x^2 + 3B_2x + B_3\,,$$
$$\mathcal{B}_4(x) = 4\int_0^x (t^3 + 3B_1t^2 + 3B_2t + B_3)\,\mathrm{d}t\, + B_4 = x^4 + 4B_1x^3 + 6B_2x^2 + 4B_3x + B_4\,.$$

Nyní již snadno napíšeme obecné vyjádření (je $\mathcal{B}_0 := 1$)

$$\mathcal{B}_p(x) = x^p + \binom{p}{1}B_1x^{p-1} + \binom{p}{2}B_2x^{p-2} + \cdots + \binom{p}{p-1}B_{p-1}x + B_p\,. \tag{F.6}$$

Zbývá ukázat, jak nalézt rekurentní vzorec pro výpočet Bernoulliho čísel. Položme v (F.2) $p+1$ místo p a $k = 0$; tak dostaneme

$$\mathcal{B}_{p+1}(1) - \mathcal{B}_{p+1}(0) = \mathcal{B}_{p+1}(1) - B_{p+1} = 0 = (p+1)0^p\,,$$

neboli po úpravě pomocí (F.6)

$$0 = \left(\binom{p+1}{0}B_0 + \binom{p+1}{1}B_1 + \cdots + \binom{p+1}{p}B_p + \binom{p+1}{p+1}B_{p+1}\right) - B_{p+1}\,.$$

Poslední dva členy se v předcházející rovnosti zruší. Odtud lze vyjádřit B_p a dospět tak k rekurentnímu vzorci (F.7), tj.

$$B_p = -\frac{1}{p+1}\sum_{k=0}^{p-1}\binom{p+1}{k}B_k\,. \tag{F.7}$$

Nyní ještě vyjádříme součty $S(n,p)$; dosadíme proto do (F.3) $p+1$ za p a $n+1$ za n a upravíme do tvaru

$$\sum_{k=1}^{n} k^p = \frac{1}{p+1}\left(\mathcal{B}_{p+1}(n+1) - B_{p+1}\right).$$

Všimněte si faktu, že pravá strana má rozumný smysl i tehdy, dosadíme-li za n reálné číslo, a že je to *polynom*, tj. funkce relativně jednoduchá.

Tento vzorec je v podstatě *Moivrova formule* pro Bernoulliho čísla; je však třeba mít na paměti, že terminologie i u samotných Bernoulliho čísel kolísá. Často se definují jako absolutní hodnoty námi zavedených Bernoulliho čísel, eventuálně se nulové členy v jejich posloupnosti vynechávají. Proto v [11] nalezneme např. $B_1 = 1/6$, $B_2 = 1/30$, $B_3 = 1/42$, $B_4 = 1/30$, $B_5 = 5/66$, atd., což *nesouhlasí* s označením, které jsme zavedli; srovnej s hodnotami uvedenými dále.

Bernoulli sice nedokázal obecnou součtovou formuli korektně, nicméně dospěl ke vzorcům, které jsme prezentovali. Již jsme se zmínili o tom, kde se Bernoulliho čísla objevují. Platí např. ve vhodném (ev. prstencovém) okolí bodu 0

$$\operatorname{tg} x = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{B_{2k}}{(2k)!}\,4^k(4^k-1)x^{2k-1}\,, \qquad \operatorname{cotg} x = \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{B_{2k}}{2k!}\,4^k x^{2k}\,.$$

Vyskytují se i v rozvojích pro hyperbolický tangens a kotangens a také v Eulerově vzorci pro součty převrácených hodnot sudých mocnin přirozených čísel [6]); použijeme-li k zápisu ζ-funkci, platí:

$$\zeta(2p) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2p}} = \frac{(-1)^{p+1}B_{2p}(2\pi)^{2p}}{2(2p)!}\,, \qquad p = 1, 2, \dots\,.$$

Platí též například

$$\frac{z}{\mathrm{e}^z - 1} = 1 - \frac{1}{2}\,z + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{2k}}{(2k)!}\,z^{2k}\,,$$

jsou to tedy mj. skoro koeficienty Maclaurinova rozvoje funkce $z/(\mathrm{e}^z - 1)$. Tak se často Bernoulliho čísla v dnešní době *definují.* Připomeňme, že Bernoulliho čísla s lichými indexy kromě B_1 jsou vesměs rovna 0. Rekurentní formule (F.7) nám umožní poměrně snadno spočítat $B_1 = -1/2$, $B_2 = 1/6$, $B_4 = -1/30$, $B_6 = 1/42$, $B_8 = -1/30$, $B_{10} = 5/66$, $B_{12} = -691/2730$, $B_{14} = 7/6$, $B_{16} = -3617/510$, $B_{18} = 43867/798$, $B_{20} = -174611/330$, atd.

G Sčitatelnost

Seznámili jsme se s některými sčítacími metodami. V této části popíšeme velmi „silnou“ sčítací metodu, kterou poprvé popsal Émile Borel (1871 – 1956).

Borel tuto metodu publikoval r. 1895. Jsou-li s_n částečné součty řady $\sum a_k$ a řada $\sum (x^n/n!)\, s_n$ konverguje všude v $\mathbb{R}$, definujeme

$$F(x) = \Big(\sum \frac{x^n}{n!}\,s_n\Big) : \Big(\sum \frac{x^n}{n!}\Big) = \mathrm{e}^{-x}\sum \frac{x^n}{n!}\,s_n\,.$$

[6]) Zatímco pro převrácené hodnoty sudých mocnin lze dokázat uvedený velmi uspokojivý výsledek, např. o součtu řady $\sum k^{-3}$ víme jen to, že je to číslo iracionální.

Pokud existuje $\lim_{x\to+\infty} F(x)$, nazveme ji *borelovským součtem* ($(\mathcal{B})$-součtem) řady $\sum a_k$. Tak např. pro řadu $\sum(-1)^n$ snadno obdržíme

$$\sum \frac{x^n}{n!}\, s_n = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\,,$$

takže dostáváme opět jako v předchozích případech

$$(\mathcal{B})\text{-}\sum(-1)^n = \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\,.$$

Obecněji, pro řadu $\sum z^k$ je pro $z \neq 1$

$$s_n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}\,, \quad F(x) = \frac{1}{1-z} - \frac{z}{1-z}\,\mathrm{e}^{(z-1)\,x}\,,$$

takže $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1/(1-z)$, jakmile je $\operatorname{Re} z < 1$. Geometrická řada $\sum z^k$ je tedy Borelovou sčítací metodou sčitatelná k $(\mathcal{B})$-součtu $(1-z)^{-1}$ v polorovině $\{\, z \in \mathbb{C}\,;\ \operatorname{Re} z < 1 \,\}$.

Regularita Borelovy sčítací metody se dokazuje podobně jako regularita Abelovy sčítací metody. Proto jen schematicky napíšeme odhad pro $x > 0$

$$\Big| \Big(\mathrm{e}^{-x} \sum \frac{x^n}{n!}\, s_n\Big) - s \Big| \le \mathrm{e}^{-x} \sum |\, s_n - s \,|\, \frac{x^n}{n!} \le \mathrm{e}^{-x} \sum_{n=0}^{m} |\, s_n - s \,|\, \frac{x^n}{n!} + \frac{\varepsilon}{2}$$

a připomeneme, že první člen pro $x \to +\infty$ má limitu rovnou 0. Poznamenejme, že pomocí Cesàrovy metody je geometrická řada sčitatelná ke svému obvyklému součtu pouze na množině $\{\, z \in \mathbb{C}\,;\ |z| \le 1,\ z \neq 1 \,\}$.

H Nekonečné součiny

Nekonečné součiny mají řadu vlastností analogických vlastnostem (nekonečných) řad. Jsou nepostradatelným nástrojem v teorii funkcí komplexní proměnné. Všimneme si pouze jejich základních vlastností, které potřebujeme v dalších dvou Dodatcích.

Definice H.1. Je-li $\{z_k\}$ posloupnost komplexních čísel, položme pro $1 \le m < n$, $m, n \in \mathbb{N}$,

$$\boldsymbol{p}^{\,n}_{m}(z_k) := z_m z_{m+1} \cdots z_n = \prod_{k=m}^{n} z_k\,. \tag{H.1}$$

Tento součin nazýváme částečným součinem nekonečného součinu $\prod_{k=1}^{\infty} z_k$. Podobně ještě označíme

$$\boldsymbol{p}^{\,n}(z_k) = z_1 \cdots z_n = \prod_{k=1}^{n} z_k\,.$$

Říkáme, že *nekonečný součin* $\prod_{k=1}^{\infty} z_k$ *konverguje*, jestliže existuje $m \in \mathbb{N}$, pro něž je limita

$$\boldsymbol{p}_{\,m}(z_k) := \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{p}_{\,m,n}(z_k)$$

různá od 0. Číslo $s := \boldsymbol{p}^{\,m-1}(z_k) \cdot \boldsymbol{p}_{\,m}(z_k)$ se pak nazývá hodnota nekonečného součinu $\boldsymbol{p}(z_k) := \prod_{k=1}^{\infty} z_k$. Jestliže součin nekonverguje, nazývá se divergentní.

Poznámka H.2. Symboly $\boldsymbol{p}_m^n(z_k), \ldots, \boldsymbol{p}(z_k)$ nám umožňují alternativně lepší grafickou úpravu hladkého textu a také stručnější zápis dalších úvah. Analogicky jako u řad budeme $\boldsymbol{p}(z_k)$ užívat jak pro součin, tak případně i pro jeho hodnotu. Na první pohled trochu složitá definice nekonečného součinu má za následek jeho „dobré“ vlastnosti. Čtenář snadno nahlédne, že konvergence nekonečného součinu nezávisí na jakémkoli konečném počtu činitelů a že je nekonečný součin roven nule, právě když je alespoň jeden z jeho činitelů roven 0.

Příklady H.3. 1. Položíme-li $z_1 = 0$, $z_k = 1$ pro $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, je

$$\boldsymbol{p}_2(z_k) = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{p}_2^n(z_k) = 1\,,$$

součin konverguje a jeho hodnota $\boldsymbol{p}(z_k) = \prod_{k=1}^{\infty} z_k$ je 0.

2. Položíme-li $z_1 = 0$, $z_k = k$ pro $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, je $\boldsymbol{p}_2(z_k) = \infty$, a nekonečný součin $\boldsymbol{p}(z_k)$ diverguje.

3. Pro $z_k = 1 - 1/k$, $k \in \mathbb{N}$, je

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{p}_2^n(z_k) = \lim_{n\to\infty} \Big(1-\frac{1}{2}\Big)\cdots\Big(1-\frac{1}{n}\Big) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdots\frac{n-1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0\,,$$

a nekonečný součin $\boldsymbol{p}(z_k)$ diverguje.

4. Podobně pro $z_k = 1 + 1/k$, $k \in \mathbb{N}$, je

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{p}^n(z_k) = \lim_{n\to\infty} \Big(1+\frac{1}{1}\Big)\cdots\Big(1+\frac{1}{n}\Big) = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty\,,$$

a nekonečný součin $\boldsymbol{p}(z_k)$ opět diverguje.

5. Pro $z_k = 1 - 1/(k+1)^2$, $k \in \mathbb{N}$, je

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{p}^n(z_k) = \lim_{n\to\infty} \Big(1-\frac{1}{2^2}\Big)\cdots\Big(1-\frac{1}{n^2}\Big) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\Big(1+\frac{1}{n}\Big) = \frac{1}{2}\,,$$

a nekonečný součin $\boldsymbol{p}(z_k)$ konverguje k hodnotě $1/2$.

6. V Historických poznámkách na konci Dodatků zmíněný Vietův součin je tvaru

$$\prod_{k=1}^{\infty} \cos\frac{\pi}{2^k} = \frac{2}{\pi}\,.$$

Poznámka H.4. Čtenář snadno nahlédne, že pro konvergentní nekonečný součin $\boldsymbol{p}(z_k)$ je $z_k \to 1$. Proto je často výhodné psát nekonečné součiny ve tvaru

$$\boldsymbol{p}(1+a_k) := \prod_{k=1}^{\infty}(1+a_k)\,. \tag{H.2}$$

Pro konvergentní součiny je v tomto kontextu $a_k \to 0$ stejně jako pro řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$: Je-li $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{p}_m^n(1+a_k) = a \neq 0$, snadno obdržíme při $m < n$ výpočtem

$$\lim_{n\to\infty}(1+a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\boldsymbol{p}_m^n(1+a_k)}{\boldsymbol{p}_m^{n-1}(1+a_k)} = \frac{a}{a} = 1\,,$$

což dává $a_k \to 0$.

Lemma H.5. *Nekonečný součin $\boldsymbol{p}(z_k)$ konverguje, právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $m \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna přirozená n, $n > m$, je*

$$\left| \boldsymbol{p}_m^n(z_k) - 1 \right| < \varepsilon . \tag{H.3}$$

Důkaz. Jestliže konverguje nekonečný součin $\boldsymbol{p}(z_k)$, existuje $t \in \mathbb{N}$ tak, že platí $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{p}_t^n(z_k) = a \neq 0$. Toto t lze navíc volit tak, že pro nějaké $r > 0$ a pro všechna $n > t$ je $|\, \boldsymbol{p}_t^n(z_k) \,| > r > 0$. Zvolíme-li nyní $\varepsilon > 0$, existuje $m > t$, pro které je

$$\left| \boldsymbol{p}_t^{m-1+n}(z_k) - \boldsymbol{p}_t^{m-1}(z_k) \right| < \varepsilon r$$

jakmile je $n > m$. Nyní dělme předcházející nerovnost číslem $|\boldsymbol{p}_t^{m-1}(z_k)|$; protože je $r/|\boldsymbol{p}_t^{m-1}(z_k)| < 1$, dostaneme odtud

$$|\boldsymbol{p}_m^n(z_k) - 1| < \varepsilon ,$$

takže podmínka (H.3) je pro konvergenci nutná.

Nyní ukážeme, že podmínka (H.3) je též pro konvergenci součinu postačující. Nalezneme pomocí (H.3) k číslu $\varepsilon = 1/2$ takové $m \in \mathbb{N}$, že pro všechna $n > m$ je $|\boldsymbol{p}_m^n(z_k) - 1| < 1/2$, z čehož plyne

$$\frac{1}{2} < |\boldsymbol{p}_m^n(z_k)| < \frac{3}{2} . \tag{H.4}$$

Odtud vyplývá, že pro všechna $k > m$ je $z_k \neq 0$, a pokud posloupnost $\{\boldsymbol{p}_m^n(z_k)\}_{n=1}^\infty$ konverguje, bude $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{p}_m^n(z_k) \neq 0$. Nyní k $\varepsilon > 0$ existuje $s \in \mathbb{N}$, $s > m$, tak, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n > s$, je

$$|\boldsymbol{p}_m^n(z_k) - 1| = \left| \frac{\boldsymbol{p}_m^n(z_k)}{\boldsymbol{p}_m^{s-1}(z_k)} - 1 \right| < \frac{\varepsilon}{2} ,$$

a tedy s ohledem na (H.4)

$$|\boldsymbol{p}_m^n - \boldsymbol{p}_m^{s-1}| < |\boldsymbol{p}_m^{s-1}| \cdot \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon .$$

Proto existuje $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{p}_m^n(z_k) \neq 0$ a nekonečný součin $\boldsymbol{p}(z_k)$ konverguje. ☐

Lemma H.6. *Pro $a_k \geq 0$ konverguje nekonečný součin* (H.2)*, právě když konverguje řada $\sum_{k=1}^\infty a_k$.*

Důkaz. Protože je $1 + x \leq \mathrm{e}^x$, snadno obdržíme pro nezáporná a_k nerovnosti

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq (1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \leq \exp(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) . \tag{H.5}$$

Výrazy v nerovnostech tvoří v závislosti na $n \in \mathbb{N}$ monotónní posloupnosti, z čehož již snadno vyplývá dokazované tvrzení. ☐

S ohledem na předcházející tvrzení je výhodné zavést analogicky jako u řad absolutní konvergenci nekonečných součinů:

Definice H.7. Říkáme, že nekonečný součin komplexních čísel (H.2) *konverguje absolutně*, jestliže konverguje nekonečný součin

$$\boldsymbol{p}\,(1 + |\,a_k\,|) = \prod_{k=1}^{\infty} \bigl(1 + |\,a_k\,|\bigr)\,. \tag{H.6}$$

Je-li nekonečný součin $\boldsymbol{p}\,(1 + a_k)$ konvergentní, avšak nekonverguje absolutně, říkáme, že je *neabsolutně konvergentní.*

Věta H.8. *Absolutně konvergentní nekonečný součin $\boldsymbol{p}\,(1 + a_k)$ je konvergentní a hodnota tohoto nekonečného součinu je stejná jako hodnota nekonečného součinu*

$$\boldsymbol{p}\,(1 + a_{\varphi(k)})\,, \tag{H.7}$$

který z něj vznikne přerovnáním φ posloupnosti $\{a_k\}$. Je-li pak $\{\psi(k)\}$, $k \in \mathbb{N}$, rostoucí posloupnost přirozených čísel, konverguje též nekonečný součin

$$\boldsymbol{p}\,(1 + a_{\psi(k)})\,. \tag{H.8}$$

Důkaz. Budeme postupně odhadovat: Je

$$\begin{aligned}\bigl|p_m^n(1 + a_k) - 1\bigr| &= |(1 + a_m)\cdots(1 + a_n) - 1| = \\ &= |a_m + \cdots + a_n + a_m a_{m+1} + \cdots + a_m \cdots a_n| \le \\ &\le |a_m| + \cdots + |a_n| + |a_m||a_{m+1}| + \cdots + |a_m|\cdots|a_n| \le \\ &\le (1 + |a_m|)\cdots(1 + |a_n|) - 1 = \boldsymbol{p}_m^n(1 + |a_k|) - 1\,,\end{aligned}$$

takže podle Lemmatu H.5 vyplývá odtud konvergence součinu $\boldsymbol{p}\,(1{+}a_k)$. Podle Lemmatu H.6 konverguje řada $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$, takže konverguje i přerovnaná řada $\sum_{k=1}^{\infty} |\,a_{\varphi(k)}|$, a podle Lemmatu H.6, i „přerovnaný součin“ $\boldsymbol{p}\,(1 + |a_{\varphi(k)}|)$. Proto podle první části tohoto důkazu konverguje i nekonečný součin (H.7) a také i nekonečný součin (H.8).

Předpokládejme, že žádný člen nekonečného součinu (H.2), a tedy ani nekonečného součinu (H.7), není roven 0. Snadno nahlédneme, že v podílu

$$\frac{\boldsymbol{p}^{\,n}(1 + a_k)}{\boldsymbol{p}^{\,n}(1 + a_{\varphi(k)})}$$

dostáváme po zkrácení výraz

$$\frac{(1 - a_{r_1})(1 - a_{r_2})\cdots(1 - a_{r_t})}{(1 - a_{s_1})(1 - a_{s_2})\cdots(1 - a_{s_t})}$$

s $r_1 < r_2 < \cdots < r_t$ a $s_1 < s_2 < \cdots < s_l$. Pro $l \to \infty$ dávají čitatel i jmenovatel konvergentní nekonečné součiny, jejichž podíl je 1 a nekonečné součiny (H.2) a (H.7) mají stejnou hodnotu. V případě, že se vyskytne v nekonečném součinu (H.2) nulový činitel, jsou oba vyšetřované součiny rovny 0 a opět pro jejich hodnoty platí rovnost. □

Z Lemmatu H.6 a Věty H.8 dostáváme toto tvrzení:

Důsledek H.9. *Nekonečný součin $\boldsymbol{p}\,(1 + a_k)$ je absolutně konvergentní, právě když absolutně konverguje řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.*

Pokud řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje, ale ne absolutně, lze někdy použít následující tvrzení (v našem případě jen pro případ reálných a_k, neboť o komplexním logaritmu nic nevíme):

Věta H.10. *Nekonečný součin $\boldsymbol{p}(1+a_k)$ s $a_k \in \mathbb{R}$ konverguje, právě když existuje $m \in \mathbb{N}$ tak, že konverguje řada $\sum_{k=m}^{\infty} \log(1+a_k)$.*

Důkaz. Konverguje-li nekonečný součin, pak $a_k \to 0$ a existuje $m \in \mathbb{N}$ tak, že $|\, a_k| < 1$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$, $k \geq m$. Částečný součin $\boldsymbol{p}_m^n(1+a_k)$ obsahuje pouze kladné činitele a $\{\boldsymbol{p}_{\,m,n}(1+a_k)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje, právě když konverguje řada $\sum_{k=m}^{\infty} \log(1+a_k)$, což dává tvrzení věty. $\square$

Poznámka H.11. Tvrzení analogické Důsledku H.9 pro *neabsolutně konvergentní* nekonečné součiny neplatí. Čtenář si již snadno samostatně promyslí schematicky naznačený příklad nekonečného součinu (srv. s Příkladem H.3 (3))

$$\Big(1+\frac{1}{\sqrt{1}}\Big)\Big(1-\frac{1}{\sqrt{1}}\Big)\Big(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)\Big(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)\Big(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\Big)\Big(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\Big)\cdots,$$

který diverguje, i když nekonečná řada

$$\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots$$

konverguje.

Uvedli jsme na ukázku jednodušší věty o nekonečných součinech čísel, avšak zdaleka nikoli ucelenou teorii nekonečných součinů. Ta je podstatně zajímavější tehdy, začneme-li pracovat s nekonečnými součiny *komplexních funkcí komplexní proměnné.* Pro nekonečné součiny funkcí uvedeme jen na ukázku některá tvrzení v kontextu reálných funkcí reálné proměnné.

Je-li $I \subset \mathbb{R}$ interval a funkce f_k jsou vesměs definovány na I, budeme pracovat s nekonečnými součiny tvaru

$$f(x) := \boldsymbol{p}\,\big(f_k(x)\big) = \prod_{k=1}^{\infty}\Big(1+g_k(x)\Big), \quad x \in I\,.$$

Budeme říkat, že tento nekonečný součin *konverguje bodově* (krátce jen *konverguje*) k funkci f na I, je-li konvergentní pro každé $x \in I$. Podstatně důležitější je pro nás *stejnoměrná konvergence* nekonečného součinu.

Definice H.12. Budeme říkat, že nekonečný součin $\boldsymbol{p}(1+g_k(x))$ *konverguje stejnoměrně* na I, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje číslo $m \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n > m$, a všechna $x \in I$ je

$$\Big|\ \boldsymbol{p}_m^n\big(1+g_k(x)\big)-1\,\Big| < \varepsilon\,.$$

Jestliže ke každému bodu $x \in I$ existuje okolí $\mathcal{U}(x)$ v I tak, že nekonečný součin konverguje stejnoměrně na $\mathcal{U}(x)$, pak říkáme, že $\boldsymbol{p}\,\big(1+g_k(x)\big)$ konverguje *lokálně stejnoměrně* na I.

Pro nekonečné součiny je velmi důležitá tzv. *normální konvergence*, která v sobě spojuje výhody absolutní a lokálně stejnoměrné konvergence; důležitost této kombinace nahlédneme snadno z povahy konvergence mocninných řad v kruhu konvergence.

Definice H.13. Říkáme, že řada funkcí $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ *konverguje normálně* na intervalu $I \subset \mathbb{R}$, jestliže řada $\sum_{k=1}^{\infty} |\, f_k \,|$ konverguje lokálně stejnoměrně na I. Analogicky říkáme, že nekonečný součin $\boldsymbol{p}\,\big(1+g_k(x)\big)$ konverguje normálně na I, jestliže $\sum_{k=1}^{\infty} |\, g_k \,|$ konverguje normálně na I. Srv. [17] a [23].

Věta H.14. *Nechť g_k jsou funkce spojité na intervalu $I \subset \mathbb{R}$ a nechť nekonečný součin $\boldsymbol{p}\,\big(1+g_k(x)\big)$ konverguje normálně na intervalu I k funkci h. Potom je i funkce h spojitá na I.*

Důkaz. Zvolme otevřený interval $J \subset I$, na kterém řada $\sum_{k=1}^{\infty} |\, g_k \,|$ konverguje stejnoměrně. Zvolme nyní $m \in \mathbb{N}$ tak, aby

$$|\, g_m(x) \,| + |\, g_{m+1}(x) \,| + \cdots + |\, g_{m+k}(x) \,| < 1 \tag{H.9}$$

pro všechna $x \in J$ a všechna $k \in \mathbb{N}$. Položme $h_m(x) := \boldsymbol{p}_{m+1}(1+g_k(x))$ a dále $q^n(x) := \boldsymbol{p}_{m+1}^{n}(1+g_k(x))$. Budeme postupně upravovat, čímž dostaneme

$$\begin{aligned} h_m &= q^{m+1} + (q^{m+2} - q^{m+1}) + \cdots + (q^n - q^{n-1}) + \cdots = q^{m+1} + \sum_{k=m}^{\infty} \big(q^{k+2} - q^{k+1}\big) = \\ &= q^{m+1} + q^{m+1} g_{m+2} + \cdots + q^{n-1} g_n + \cdots = q^{m+1} + \sum_{k=m}^{\infty} q^{m+k} g_{m+k+1}\,, \end{aligned}$$

takže h_m je součtem řady; tato řada konverguje na J stejnoměrně. To dokážeme pomocí Tvrzení 14.3.10. Pomocí (H.5) snadno dostaneme s přihlédnutím k (H.9) odhad na J: pro všechna $n > m$ je

$$|\, q^n \,| \le \boldsymbol{p}_{m+1}^{n}\,\big(1+|f_k|\big) \le \exp\Big(\sum_{k=m+1}^{\infty} |f_k|\Big) < \mathrm{e} < 3$$

a řada $\sum_{k=m+1}^{\infty} |\, g_k \,|$ konverguje stejnoměrně na J. Funkce h_m je tedy součtem stejnoměrně konvergentní řady spojitých funkcí a je tedy spojitá na J. Součin konečně mnoha „počátečních“ spojitých faktorů nemůže tuto spojitost změnit, tj. funkce

$$h(x) = \big(1+g_1(x)\big)\big(1+g_2(x)\big)\cdots\big(1+g_m(x)\big)\cdot h_m(x)\,, \quad x \in J\,,$$

je spojitá na J; odtud již plyne tvrzení věty. $\square$

Pro práci s nekonečnými součiny se hodí řada dalších tvrzení, která jsou analogická tvrzením o řadách funkcí, je však netriviální je dokázat: jejich důkazy vyžadují trochu jinou techniku, nejde vždy jen o pouhý „přenos“. Ukážeme dále, jak lze nekonečné součiny využít.

I Eulerův součin pro sinus

K řešení tzv. Basilejského problému, se kterým jsme se seznámili v Dodatku A, použil Leonhard Euler (1707 – 1783) vyjádření funkce sin nekonečným součinem: představoval si sin jako „polynom nekonečného stupně“ a vyjádřil ho součinem (nekonečně mnoha) kořenových činitelů.

Dospěl tak ke vzorci

$$\frac{\sin \pi x}{\pi} = x \prod_{k=1}^{\infty} \Bigl(1 - \frac{x^2}{k^2}\Bigr). \tag{I.1}$$

Tento vzorec se zpravidla dokazuje relativně pokročilými metodami teorie funkcí komplexní proměnné (platí totiž dokonce pro každé $x \in \mathbb{C}$), my ho však dokážeme vcelku elementárně pro všechna $x \in \mathbb{R}$ jen na základě získaných poznatků o nekonečných součinech.

Poznámka I.1. Snadno nahlédneme, že funkce na levé straně rovnosti (I.1) je lichá, nekonečně diferencovatelná 2-periodická funkce, jejíž množina všech nulových bodů je rovna množině $\mathbb{Z}$ a že pro tuto funkci platí vzorce, v nichž vystupuje funkce cos, která však je jen „posunutým sinem“. Jsou to důvody, které by činily rovnost v (I.1) zřejmější?

Nulové body funkce f, definované hodnotou nekonečného součinu na pravé straně rovnosti (I.1), tvoří rovněž množinu $\mathbb{Z}$; rozepsáním na lineární faktory snadno nahlédneme, že

$$f(-x) = \lim_{n\to\infty} (-x) \prod_{k=1}^{n} \Bigl(1 + \frac{(-x)^2}{k^2}\Bigr) = -x \prod_{k=1}^{\infty} \Bigl(1 - \frac{x^2}{k^2}\Bigr) = -f(x)\,,$$

takže f je také lichá funkce. Pokud f rozepíšeme „po dvou činitelích“ ve tvaru

$$f(x) = x \prod_{k=1}^{\infty} \Bigl(1 - \frac{x^2}{(2k-1)^2}\Bigr)\Bigl(1 - \frac{x^2}{(2k)^2}\Bigr)\,,$$

dosadíme $2x$ za x a upravíme, dostaneme

$$\begin{aligned} f(2x) &= 2x \prod_{k=1}^{\infty} \Bigl(1 - \frac{4x^2}{4k^2-4k+1}\Bigr)\Bigl(1 - \frac{4x^2}{4k^2}\Bigr) = \\ &= 2x \prod_{k=1}^{\infty} \Bigl(1 - \frac{x^2}{k^2}\Bigr) \prod_{k=1}^{\infty} \Bigl(1 - \frac{x^2}{\bigl(k - (\frac{1}{2})^2\bigr)}\Bigr) \end{aligned} \tag{I.2}$$

Tento vzorec nápadně připomíná vzorec pro dvojnásobný úhel, což je další indicie, podporující hypotézu, že v (I.1) platí rovnost. Tudy vede cesta k důkazu, popsaném v [9], který je však poněkud nepřirozený: využívá tzv. Herglotzův trik, se kterým se čtenář může seznámit např. v textu [27], nebo v monografii [24]. Náš další postup je založen na článku [8], který popisuje elementární důkaz, založený na Eulerově základní myšlence.

Připomeňme, že jsme exponenciálu na $\mathbb{C}$ *definovali* jako součet mocninné řady

$$\exp z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\,, \quad z \in \mathbb{C}\,,$$

a že víme, že pro *reálná* z je též

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \exp z\,. \tag{I.3}$$

Ukážeme nejprve, že vzorec (I.3) platí pro všechna $z \in \mathbb{C}$. K tomu dokážeme jednoduché obecnější tvrzení:

Tvrzení I.2. *Nechť $g_k(n)$, $k, n \in \mathbb{N}$, tvoří posloupnost komplexních funkcí definovaných na $\mathbb{N}$ a nechť pro každé $k \in \mathbb{N}$ je $\lim_{n\to\infty} g_k(n) = A_k \in \mathbb{C}$. Jestliže pro všechna $k, n \in \mathbb{N}$ je $|\, g_k(n)\,| \le M_k < \infty$ a $\sum_{k=1}^{\infty} M_k < \infty$, potom*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty} g_k(n) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k\,. \tag{I.4}$$

Důkaz. Podle vět o limitách zřejmě pro všechna $k \in \mathbb{N}$ je $|\,A_k\,| \le M_k$, takže všechny řady v Tvrzení I.2 konvergují v $\mathbb{C}$ absolutně. Zvolme nyní libovolně $\varepsilon > 0$ a pak $r \in \mathbb{N}$ tak, že $\sum_{k=r+1}^{\infty} M_k < \varepsilon$. Dále zvolme $s \in \mathbb{N}$, $n > s$, tak, že $|g_k(n) - A_k| < \varepsilon/m$ pro všechna $k = 1, 2, \ldots, m$ a $n > s$. Potom pro $n > s$ je

$$\Big|\sum_{k=1}^{\infty} g_k(n) - \sum_{k=1}^{\infty} A_k\Big| \le \sum_{k=1}^{m}|g_k(n) - A_k| + \sum_{k=m+1}^{\infty}|g_k(n)| + \sum_{k=m+1}^{\infty}|A_k| \le m\frac{\varepsilon}{m} + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon,$$

z čehož již vyplývá dokazované tvrzení. □

Důsledek I.3. *Pro všechna $z \in \mathbb{C}$ platí* (I.3).

Důkaz. Zvolme libovolně $z \in \mathbb{C}$ a definujme $g_k(1) = 1 + z$,

$$g_k(n) = \binom{n}{k}\frac{z^k}{k!}\,, \quad 1 < k \le n\,, \qquad g_k(n) = 0\,, \quad 1 \le n < k\,,$$

pro všechna $k, n \in \mathbb{N}$. Potom

$$A_k = \lim_{n\to\infty} g_k(n) = \frac{z^k}{k!}\,, \quad k > 1\,,$$

a $A_1 = 1 + z$, takže je $g_k(1) \le 1 + |z| = M_1$, $|g_k(n)| \le |z|^k/k! = M_k$, $k > 1$, a $\sum_{k=1}^{\infty} A_k = \exp(|z|) < \infty$. Protože je

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_k(n) = 1 + z + \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{z}{n}\right)^k = \left(1+\frac{z}{n}\right)^n,$$

dostáváme odtud pomocí Tvrzení I.2 dokazovaný vzorec (I.3). □

Nyní pro všechna komplexní čísla z položme

$$s_n(z) = \frac{1}{2}\Big[\left(1+\frac{z}{n}\right)^n - \left(1-\frac{z}{n}\right)^n\Big]. \tag{I.5}$$

Zřejmě tedy je $\lim_{n\to\infty} s_n(z) = \sinh z$. Rozložíme polynom s_n na součin kořenových činitelů, vyjádření upravíme a pak provedeme limitní přechod pro $n \to \infty$. Snadno nahlédneme, že $s_n(z) = 0$, právě když je

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right) = \omega\left(1 - \frac{z}{n}\right),$$

přičemž musí být $\omega^n = 1$. Odtud úpravou dostaneme $(1+\omega)\, z/n = \omega - 1$, a tedy

$$z = n\,\frac{\omega - 1}{\omega + 1}\,.$$

Číslo ω musí být tvaru $\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, takže

$$\frac{\omega - 1}{\omega + 1} = \frac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\theta} - 1}{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\theta} + 1} = \frac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\theta/2} - \mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\theta/2}}{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\theta/2} + \mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\theta/2}} = \frac{2\mathrm{i}\sin\theta/2}{2\cos\theta/2} = \mathrm{i}\,\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2}\,. \tag{I.6}$$

Předpokládejme nyní, že n je liché číslo, které zapíšeme ve tvaru $n = 2m+1$, takže $\theta = 2k\pi/(2m+1)$, kde k je celé číslo a $-m \le k \le m$. Z (I.5) vidíme, že

$$s_n(z) = \frac{1}{2}\Big[\Big(1 + n\frac{z}{n} + \cdots\Big) - \Big(1 - n\frac{z}{n} + \cdots\Big)\Big] = z + \cdots\,,$$

kde vynechané členy vpravo jsou vesměs stupně vyššího než 1. Kořeny tohoto polynomu pro $n = 2m+1$ jsou tedy čísla tvaru $z_k = (2m+1)\,\mathrm{i}\,\mathrm{tg}\,\big(k\pi/(2m+1)\big)$, $-m \le k \le m$. Všimneme si, že každého kořenového činitele $z - z_k$ lze upravit na tvar

$$(z - z_k) = -z_k\Big(1 - \frac{z}{z_k}\Big)\,,$$

z čehož plyne pro polynom s_{2m+1} s celkem $(2m+1)$ kořeny, že je tvaru

$$\begin{aligned} s_{2m+1}(z) &= Az\prod_{k=-m,\,k\neq 0}^{m}\Big(1 - \frac{z}{(2m+1)\mathrm{i}\,\mathrm{tg}\,\big(k\pi/(2m+1)\big)}\Big) = \\ &= Az\prod_{k=1}^{m}\Big(1 + \frac{z^2}{(2m+1)^2\ \mathrm{tg}^2\,\big(k\pi/(2m+1)\big)}\Big)\,, \end{aligned} \tag{I.7}$$

kde A je nenulová konstanta. Jelikož ta je však zároveň rovna koeficientu u z ve vyjádření s_{2m+1}, což je 1, dostáváme tak

$$s_{2m+1}(z) = z\prod_{k=1}^{m}\Big(1 + \frac{z^2}{(2m+1)^2\ \mathrm{tg}^2\,\big(k\pi/(2m+1)\big)}\Big)\,, \tag{I.8}$$

což již nápadně připomíná dokazovaný vzorec. Čeká nás překonání poslední překážky: je třeba korektně zdůvodnit limitní přechod pro $m \to \infty$, který nás dovede k cíli. Podle vět o limitě složené funkce a vztahu k limitě posloupnosti dostáváme

$$\lim_{m\to\infty}(2m+1)\,\mathrm{tg}\,\Big(\frac{k\pi}{2m+1}\Big) = \lim_{m\to\infty}\frac{\mathrm{tg}\,\big(k\pi/(2m+1)\big)}{k\pi/(2m+1)}\,k\pi = k\pi\,,$$

takže *formální* úpravou dostaneme s přihlédnutím k Důsledku I.3, podle něhož platí $\lim_{n\to\infty}(1+z/n)^n = \mathrm{e}^z$, následující rovnost

$$\sinh z = z\prod_{k=1}^{\infty}\Bigl(1+\frac{z^2}{k^2\pi^2}\Bigr)\,. \tag{I.9}$$

Nejprve budeme dokazovat korektnost limitního přechodu pro $z\in\mathbb{R}$ a k snazšímu rozlišení pišme x místo z. Předpokládejme dále, že $x>0$. Je-li $r\in\mathbb{N}$ a $m>r$, je

$$x\prod_{k=1}^{r}\Bigl(1+\frac{x^2}{(2m+1)^2\ \mathrm{tg}^2\bigl(k\pi/(2m+1)\bigr)}\Bigr)\le s_{2m+1}(x)\,.$$

Limitním přechodem pro $m\to\infty$ odtud dostaneme

$$x\prod_{k=1}^{r}\Bigl(1+\frac{x^2}{k^2\pi^2}\Bigr)\le\sinh x\,.$$

Dále pro $0\le\theta<\pi/2$ platí $\mathrm{tg}\,\theta>\theta$, z čehož navíc dostáváme

$$s_{2r+1}(x)\le x\prod_{k=1}^{r}\Bigl(1+\frac{x^2}{k^2\pi^2}\Bigr)\le\sinh x\,.$$

Jestliže nyní provedeme limitní přechod pro $r\to\infty$, dostaneme rovnost

$$\lim_{r\to\infty}x\prod_{k=1}^{r}\Bigl(1+\frac{x^2}{k^2\pi^2}\Bigr)=x\prod_{k=1}^{\infty}\Bigl(1+\frac{x^2}{k^2\pi^2}\Bigr)=\sinh x\,,\quad x\ge 0\,. \tag{I.10}$$

Uvažujme libovolné $z\in\mathbb{C}$ a nechť $m>r\ge 1$. Budeme odhadovat: je

$$\begin{aligned}
&\Bigl|\,s_{2m+1}(z)-z\prod_{k=1}^{r}\Bigl(1+\frac{z^2}{(2m+1)^2\ \mathrm{tg}^2\bigl(k\pi/(2m+1)\bigr)}\Bigr)\Bigr|=\\
&=\Bigl|\,z\prod_{k=1}^{r}\Bigl(1+\frac{z^2}{(2m+1)^2\ \mathrm{tg}^2\bigl(k\pi/(2m+1)\bigr)}\Bigr)\Bigr|\times\\
&\qquad\times\Bigl|\prod_{k=r+1}^{m}\Bigl(1+\frac{z^2}{(2m+1)^2\ \mathrm{tg}^2\bigl(k\pi/(2m+1)\bigr)}\Bigr)-1\Bigr|\le\\
&\le|\,z\,|\Bigl[\prod_{k=1}^{r}\Bigl(1+\frac{|\,z\,|^2}{(2m+1)^2\ \mathrm{tg}^2\bigl(k\pi/(2m+1)\bigr)}\Bigr)\Bigr]\times\\
&\qquad\times\Bigl[\prod_{k=r+1}^{m}\Bigl(1+\frac{|\,z\,|^2}{(2m+1)^2\ \mathrm{tg}^2\bigl(k\pi/(2m+1)\bigr)}\Bigr)-1\Bigr]=\\
&=s_{2m+1}(|\,z\,|)-|\,z\,|\Bigl[\prod_{k=1}^{r}\Bigl(1+\frac{|\,z\,|^2}{(2m+1)^2\ \mathrm{tg}^2\bigl(k\pi/(2m+1)\bigr)}\Bigr)\Bigr]\,.
\end{aligned}$$

Nyní provedeme limitní přechod pro $m\to\infty$ a obdržíme tak

$$\Bigl|\sinh(z)-z\prod_{k=1}^{r}\Bigl(1+\frac{z^2}{k^2\pi^2}\Bigr)\Bigr|\le\sinh\bigl(|\,z\,|\bigr)-|\,z\,|\prod_{k=1}^{r}\Bigl(1+\frac{|\,z\,|^2}{k^2\pi^2}\Bigr)\,,$$

přičemž výraz na pravé straně nerovnosti pro $r \to \infty$ konverguje k 0. Odtud vyplývá rovnost (I.9). Protože je $\sin(z) = -\mathrm{i}\sinh(\mathrm{i}z)$, dostaneme odtud Eulerův vzorec

$$\sin z = z \prod_{k=1}^{\infty} \Bigl(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\Bigr)\,, \quad z \in \mathbb{C}\,. \tag{I.11}$$

Poznámky I.4. Položíme-li ve vzorci (I.11) $z = 1/2$, dostaneme nám již známý Wallisův vzorec z r. 1655

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{2k-1}\,\frac{2k}{2k+1} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdots$$

Volba $z = 1$ a $z = \mathrm{i}$ dá méně zajímavé vztahy

$$\prod_{k=2}^{\infty} \Bigl(1 - \frac{1}{k^2}\Bigr) = \frac{1}{2}\,, \qquad \prod_{k=1}^{\infty} \Bigl(1 = \frac{1}{k^2}\Bigr) = \frac{\mathrm{e}^{\pi} - \mathrm{e}^{-\pi}}{2\pi}\,.$$

Uvážíme-li identitu $(1/2)\sin 2z = \cos\pi z \sin\pi z$, dostaneme po úpravách rovnost

$$\pi z \prod_{k=1}^{\infty} \Bigl(1 - \Bigl(\frac{2z}{k}\Bigr)^2\Bigr) = \pi z \prod_{k=1}^{\infty} \Bigl(1 - \Bigl(\frac{2z}{2k}\Bigr)^2\Bigr) \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \Bigl(1 - \Bigl(\frac{2z}{2k+1}\Bigr)^2\Bigr)\,, \quad z \in \mathbb{C}\,,$$

která nám dá vyjádření

$$\cos z = \prod_{k=1}^{\infty} \Bigl(1 - \Bigl(\frac{2z}{2k+1}\Bigr)^2\Bigr)\,, \quad z \in \mathbb{C}\,.$$

(Pozor, formálně triviální výpočet je třeba zdůvodnit, což skrývá ještě kus práce!) Vzorec (I.11) je rovněž klíčem k výpočtu některých hodnot Riemannovy ζ-funkce: v letech 1734-35 by mohl Euler pomocí něj určit všechny hodnoty $\zeta(2k)$, $k \in \mathbb{N}$. K tomuto výsledku Euler později skutečně dospěl.

J Funkce gama

V této části čtenář nalezne základní informace o funkci gama. Nebývá zvykem se jí zabývat v základním kurzu matematické analýzy, i když jsou v něm prakticky všechny k tomu potřebné nástroje i některé příležitosti k jejímu využití. V této části se čtenář textu setká s využitím nekonečných součinů.

Historická poznámka J.1. Začneme citátem: *Aside from the so-called „elementary functions“ (...), the special function that occures most frequently in analysis is undoubtedly the Gamma function.* (*Kromě tzv. „elementárních funkcí“ (...), nejčastěji se v analýze vyskytující speciální funkce je funkce gama.*) (Viz [26], str. 460.)

Funkce Γ se typicky vyskytuje při řešení *složitých* problémů a proto se vždy těšila zájmu předních matematiků. Vyšetřování funkce Γ je věnována v učebnicové literatuře velká pozornost; viz např. [26], [15], [28] apod.

Definice J.2. Definujeme

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}\,\mathrm{d}x\,, \quad x \in (0,\infty)\,. \tag{J.1}$$

Definice J.3. Funkce f definovaná na intervalu $I \subset \mathbb{R}$ se nazývá logaritmicky konvexní, je-li složená funkce $\log \circ f$ konvexní na I.

Je zřejmé, že logaritmicky konvexní funkce jsou kladné, jinak nemá Definice J.3 smysl. Součin konečně mnoha logaritmicky konvexních funkcí je zřejmě logaritmicky konvexní funkce. Zajímavé vlastnosti logaritmicky konvexních funkcí jsou např. předmětem Cvičení 10 na str. 204 v [26].

Věta J.4. *Funkce Γ má následující vlastnosti:*

(a) *vyhovuje funkcionální rovnici*

$$f(x+1) = x\,f(x)\,, \quad x \in (0,\infty)\,, \tag{J.2}$$

(b) *platí* $\quad \Gamma(1) = 1\,,$

(c) *funkce Γ je na intervalu $(0,\infty)$ logaritmicky konvexní.*

Důkaz. Pomocí metody per partes pro Newtonův integrál dostaneme

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\, t^{x}\,\mathrm{d}t \;= \\ &= \left[-\,\mathrm{e}^{-t}\, t^{x}\right]_{t=0}^{\infty} + x\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}\,\mathrm{d}t \;= x\,\Gamma(x)\,, \quad x \in (0,\infty)\,,\end{aligned}$$

a proto platí (J.1), resp. podmínka (i). Ještě snáze spočteme $\Gamma(1) = 1$, z čehož plyne podmínka (ii). Pro důkaz poslední vlastnosti potřebujeme Hölderovu nerovnost v integrálním tvaru (viz standardní učebnice pokročilejší analýzy, např. [15]). Zvolme $p \in \mathbb{R}$, $p > 1$ a $q \in \mathbb{R}$ tak, aby platilo $(1/p) + (1/q) = 1$. Podle Hölderovy nerovnosti platí pro všechna $x, y \in (0,\infty)$

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right) &= \int_0^\infty t^{(x/p)+(y/q)-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \;= \int_0^\infty \left(t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\right)^{1/p}\left(t^{y-1}\mathrm{e}^{-t}\right)^{1/q}\mathrm{d}t \;\le \\ &\le \left(\int_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\right)^{1/p}\cdot\left(\int_0^\infty t^{y-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\right)^{1/q} = \\ &= (\Gamma(x))^{1/p}\,(\Gamma(y))^{1/q}\;.\end{aligned}$$

Po logaritmování odvozené nerovnosti dostaneme jednoduchou úpravou

$$(\log\Gamma)\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right) \le \frac{1}{p}\,(\log\Gamma)\,(x) + \frac{1}{q}\,(\log\Gamma)\,(y)\,,$$

což dává logaritmickou konvexitu funkce Γ. $\square$

Z funkcionální rovnice (J.2) jednoduše plyne rovnost

$$f(x+2) = (x+1)xf(x)\,,$$

ze které snadno indukcí odvodíme rovnost

$$f(x+n) = (x+n-1)(x+n-2)\dots(x+1)\,xf(x)\,, \tag{J.3}$$

která platí pro všechna $x \in (0,\infty)$ a všechna $n \in \mathbb{N}$. Zde si povšimneme faktu, že řešení rovnice (J.2) mají jednu vlastnost společnou s periodickými funkcemi: znalost funkce f např. na intervalu $(0,1\,]$ nám umožňuje určit pomocí (J.3) hodnoty funkce f na intervalu $(1,2\,]$ a obecněji na všech intervalech tvaru $(n,n+1\,]$, $n \in \mathbb{N}$. Ze vzorce (J.3) dostaneme vzorec

$$f(x) = \frac{1}{x(x+1)\dots(x+n-1)}f(x+n)\,. \tag{J.4}$$

Ten nám ukazuje i možnost „postupu zpět". Shrneme-li tyto poznatky, vidíme, že hodnoty v každém intervalu tvaru $(n,n+1\,]$, kde $n=0,1,2,\dots$, určují f na celé kladné poloose $(0,\infty)$. Vzorec (J.4) můžeme použít i k rozšíření funkce Γ na $\mathbb{R}\setminus\{-1,-2,-3,\dots\}$ při zachování podmínek (a), (b). To je zajímavé s ohledem na fakt, že integrál v (J.1) konverguje pro všechna $x \in (0,\infty)$, avšak pro $x \in (-\infty,0\,]$ diverguje.

Jedním z našich cílů je podat definici funkce Γ na co největší podmnožině $\mathbb{C}$, nezávislou na pojmu integrálu, a to pomocí modifikace Gaussova vzorce. Poznamenejme ještě, že jednoznačnost řešení funkcionální rovnice (J.2) spolu s podmínkou z (b) nezaručí sebevětší předpokládaná hladkost hledaného řešení. Klíčovou vlastností vedoucí k jednoznačnosti je logaritmická konvexita. Platí totiž následující věta:

Věta J.5 (Bohr, Mollerup 1922). *Existuje právě jedna funkce f definovaná na intervalu $(0,\infty)$, která vyhovuje funkcionální rovnici* (J.2)*, podmínce $f(1)=1$ a je logaritmicky konvexní na intervalu $(0,\infty)$.*

Poznámka J.6. Uvedenou větu dokázali r. 1922 dánští matematici Harald Bohr (1887 – 1925) [7]) a Johannes Mollerup (1872 – 1937); protože se Emilu Artinovi (1898 – 1962) podařilo důkaz opravdu *podstatným způsobem* zjednodušit, bývá Věta J.5 někdy spojována se jmény Bohr, Mollerup a Artin. Je též potřebným klíčem ke „královské" cestě k zavedení funkce Γ pomocí méně náročné alternativní definice.

Podle Věty J.4 funkce f s uvedenými vlastnostmi existuje: je to např. funkce Γ. Jednoznačnost plyne z následující věty:

Věta J.7. *Nechť je f libovolná funkce, která vyhovuje podmínkám* (a), (b) a (c) *z Věty J.5. Potom pro každé $x \in (0,\infty)$ existuje v $\mathbb{R}$ limita*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

a její hodnota je $f(x)$.

[7]) H. Bohr byl bratr Nielse Bohra (1888 – 1962), známého dánského fyzika (autor známého model atomu); Harald studoval v r. 1909 u Edmunda Landaua (1877 – 1938).

Důkaz. Položme $h = \log * f$, kde f je libovolná funkce vyhovující podmínkám (a) - (c). Z rovnice (J.2) plyne rovnost

$$h(x+1) = h(x) + \log x\,, \quad x \in (0, \infty)\,. \tag{J.5}$$

Z podmínky (b) dostaneme $h(1) = 0$ a odtud spolu s rovností (J.5) dostaneme

$$h(n+1) = \log(n!)\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Odtud plyne, že pro libovolnou f, a tedy i h jsou hodnoty $h(n)$ v bodech $n \in \mathbb{N}$ určeny jednoznačně. Stačí se tedy zabývat hodnotami v bodech $x \in (0, \infty) \setminus \mathbb{N}$.

Z podmínky (c) plyne, že funkce h je konvexní. Zvolme $x \in (0, \infty) \setminus \mathbb{N}$. Uvažujme nyní pro body $n, x, n+1, n+2$ nerovnosti (plynou ze „sečnových podmínek“ pro konvexitu h)

$$\frac{h(n+1) - h(n)}{(n+1) - n} \le \frac{h(n+x+1) - h(n+1)}{(n+x+1) - (n+1)} \le \frac{h(n+2) - h(n+1)}{(n+2) - (n+1)}\,,$$

z nichž dostaneme úpravou po zjednodušení nerovnosti

$$x \log n \le h(x+n+1) - h(n+1) \le x \log(n+1)\,,$$

nebo-li

$$\log n \le \frac{\log f(x+n+1) - \log f(n+1)}{x} \le \log(n+1)\,.$$

Odtud po úpravě a „odlogaritmování“ dostáváme

$$\log(n^x n!) \le \log f(x+n+1) \le \log((n+1)^x n!)\,.$$

S ohledem na (J.3) platí

$$n^x n! \le x(x+1)\ldots(x+n) f(x) \le (n+1)^x n!\,, \quad \text{resp.}$$

$$1 \le f(x) \cdot \left(\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}\right)^{-1} \le \left(\frac{n+1}{n}\right)^x, \tag{J.6}$$

z čehož již plyne limitním přechodem platnost dokazované věty. □

Jako vedlejší produkt jsme obdrželi vyjádření funkce Γ ve formě nekonečného součinu:

Důsledek J.8. *Pro každé $x \in (0, \infty)$ je*

$$\Gamma(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}\,. \tag{J.7}$$

Vraťme se ještě k vyjádření (J.7). Tento vzorec umožňuje po vhodné úpravě pohodlně rozšířit funkci Γ do komplexního oboru. Připomeňme, že existuje

$$\lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n\right) = \gamma\,.$$

Číslo γ je tzv. Eulerova konstanta [8]) a je $\gamma = 0.5772156649\ldots$ Snadno nahlédneme, že je

$$\frac{1}{n+1} < \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \log\frac{n+1}{n} < \frac{1}{n}$$

a tedy pro všechna $n \geq 2$ a

$$x_n := \Big(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} - \log n\Big), \qquad y_n := \Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n\Big)$$

platí vztahy $x_n < x_{n+1}$, $y_{n+1} < y_n$, $x_n + 1/n = y_n$, tedy limity $\lim_{n\to\infty} x_n$ a $\lim_{n\to\infty} y_n$ obě existují a jsou si rovny. Poznamenejme, že pokud si představíme x_n geometricky jako rozdíl obsahu obrazce odpovídajícího speciálnímu hornímu Riemannovu součtu s celočíselnými body dělení intervalu $\langle 1, n\rangle$ a Riemannova integrálu pro funkci $1/x$ přes interval $\langle 1, n\rangle$ (načrtněte si obrázek), jsou monotonie posloupnosti x_n, její konvergence a konečně také i fakt, že $1/2 < \gamma < 1$, zřejmé.

Vzorci (26) lze dát i jiný tvar:

$$\begin{aligned}
\Gamma(x) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x}\,\frac{n!\,\mathrm{e}^{x(\log n)}\cdot \mathrm{e}^{x/1}\cdot \mathrm{e}^{x/2}\cdots \mathrm{e}^{x/n}\mathrm{e}^{-x/1}\cdot \mathrm{e}^{-x/2}\cdots \mathrm{e}^{-x/n}}{(1+(x/1))\,(1+(x/2))\cdots(1+(x/n))\cdot n!} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{e}^{x(\log n - \frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \cdots - \frac{1}{n})} \prod_{n=1}^{n} \frac{\mathrm{e}^{(x/n)}}{1+(x/n)}\,, \qquad x \in (0,\infty)\,.
\end{aligned}$$

Tak dostáváme pro $x \in (0,\infty)$ ještě vzoreček

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{e}^{-\gamma x}\cdot \prod_{n=1}^{n} \frac{\mathrm{e}^{x/n}}{1+(x/n)}\,,$$

neboli při užití standardního označení pro nekonečný součin

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\,\mathrm{e}^{-\gamma x}\cdot \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{x/n}}{1+(x/n)}\,, \qquad x \in (0,\infty)\,.$$

Poznámka J.9. Poznamenejme, že nekonečný součin v poslední rovnosti vpravo konverguje dokonce pro každé $x \in \mathbb{C}\setminus\{-1,-2,\ldots\}$ k *holomorfní funkci*, která je holomorfním rozšířením funkce Γ z kladné reálné poloosy na $\mathbb{C}\setminus\{-1,-2,\ldots\}$. Jestliže takto funkci Γ definujeme všude v $\mathbb{C}\setminus\{-1,-2,\ldots\}$, platí pro všechna z z této množiny

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z\mathrm{e}^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1+\frac{z}{n}\Big)\,\mathrm{e}^{-z/n}\,,$$

[8]) Někdy se užívá označení Euler-Mascheroniho konstanta. Euler ji určil asi r. 1834 s přesností na 15 desetinných míst, Lorenzo Mascheroni (1750 – 1800) na 32 míst, z toho však bylo pouze 19 míst správně. Je zajímavé, že se ani v dnešní době patrně neví, zda je γ racionální nebo iracionální číslo.

přičemž vpravo stojící nekonečný součin určuje funkci holomorfní dokonce v celé komplexní rovině $\mathbb{C}$. Proto je často výhodné pracovat místo s funkcí Γ s její převrácenou hodnotou, kterou lze dodefinováním hodnotou 0 holomorfně rozšířit na $\mathbb{C}$.

Materiál k procvičování znalostí o funkci Γ je četný; řadu pěkných příkladů najdeme ve Cvičení 6, str. 394 v [26]. Kniha [26] obsahuje i značně kondenzovaný výklad o funkci Γ, a to na str. 460 – 473. Snadno dostupným pramenem je [15].

K Stirlingův vzorec

Výsledek, o kterém se zmíníme v této části, předcházel objevu funkce Γ. Je spojován se jménem JAMESE STIRLINGA (1692 – 1770) a my ho odvodíme za pomoci znalostí o funkci Γ. Opět budeme muset využít některých poznatků z teorie integrálu. Ve druhé části popíšeme cestu, která je podobná Stirlingovu přístupu [9]).

Z vlastností funkce Γ plyne

$$n\,! = \Gamma(n+1) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^n \,\mathrm{d}t \,.$$

V integrálu vpravo provedeme substituci $t = n + s\sqrt{2n}$, takže $\mathrm{d}t = \sqrt{2n}\,\mathrm{d}s$ a pak ho upravíme – dostaneme tak postupně

$$\begin{aligned} n\,! &= \int_{-\sqrt{n/2}}^\infty (n+s\sqrt{2n})^n \mathrm{e}^{-(n+s\sqrt{2n})}\sqrt{2n}\,\mathrm{d}s = \\ &= \sqrt{2n}n^n\mathrm{e}^{-n}\int_{-\sqrt{n/2}}^\infty \big(1+s\sqrt{2/n}\big)^n \mathrm{e}^{-s\sqrt{2n}}\,\mathrm{d}s = \\ &= \sqrt{2n}n^n\mathrm{e}^{-n}\int_{-\sqrt{n/2}}^\infty \exp\big[-s\sqrt{2n}+n\,\log(1+s\sqrt{2/n})\big]\,\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{K.1}$$

Zřejmě je

$$\begin{aligned} -s\sqrt{2n}+n\,\log(1+s\sqrt{2/n}) &= \frac{s^2}{s^2}\,\frac{2}{2/n}\,\frac{-s\sqrt{2n}+n\,\log(1+s\sqrt{2/n})}{n} = \\ -s^2\big(s\sqrt{2n}-\log(1+s\sqrt{2/n})\big)\Big(\frac{2}{s^2\cdot 2/n}\Big) &= -s^2\Phi\big(s\sqrt{2/n}\big)\big)\,, \end{aligned}$$

kde $\Phi(t) = 2(t-\log(1+t))/t^2$. Proto z (K.1) vyplývá při zavedeném označení

$$\frac{n\,!}{\sqrt{2n}n^n\mathrm{e}^{-n}} = \int_{-\sqrt{n/2}}^\infty \exp\big[-s^2\Phi\big(s\sqrt{2/n}\big)\big]\,\mathrm{d}s\,. \tag{K.2}$$

Odtud dostaneme limitním přechodem pro $n \to \infty$

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\frac{n\,!}{\sqrt{2n}n^n\mathrm{e}^{-n}} &= \lim_{n\to\infty}\int_{-\sqrt{n/2}}^\infty \exp\big[-s^2\Phi\big(s\sqrt{2/n}\big)\big]\,\mathrm{d}s = \\ &= \int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}\,, \end{aligned} \tag{K.3}$$

[9]) Moderně pojatou tuto partii (na vyšší úrovni a tedy i obtížněji přístupnou) nalezne čtenář v [5]; v dodatku k této partii lze v [5] nalézt zajímavé historické poznámky.

což po úpravě dává Stirlingův vzorec v obvyklém tvaru

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\,!}{\sqrt{2\pi n}\,(n/\mathrm{e})^n} = 1\,, \quad \text{resp.} \quad n\,! \sim \frac{n\,!}{\sqrt{2\pi n}\,(n/\mathrm{e})^n}\,. \tag{K.4}$$

Tento důkaz se zdá být jednoduchý, vzorec pro výpočet Laplaceova integrálu bývá znám z teorie míry a také věty pro limitní přechody bývají známé, přesto bychom chtěli důkaz „méně závislý" na jiných pramenech. Proto poznamenáváme jen potřebný odkaz např. na [25], kde se dokazuje obdobně

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\Gamma(x+1)}{(x/\mathrm{e})^x\sqrt{2\pi x}} = 1\,.$$

Důkaz Stirlingova vzorce. Jiný vcelku elementární důkaz, který budeme v následující části prezentovat, pochází od Williama Fellera (1906 – 1970); viz [9]. Problém spočívá v nalezení odhadu pro $\log(n!) = \log 1 + \log 2 + \cdots + \log n$. Je vcelku přirozené interpretovat součet jako integrál po částech konstantní funkce L, nabývající hodnoty $\log k$ na intervalu o jednotkové délce $(k-1/2, k+1/2)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, a to přes interval $I_n = (1/2, n+1/2)$. Tak jsme přirozeným způsobem vedeni k odhadu integrálu rozdílu $L(t) - \log t$, $t \in I_n$.

Z technických důvodů budeme integrovat zvlášť přes dílčí intervaly délky 1/2, na kterých rozdíl $L(t) - \log t$ nemění znaménko (náčrtek usnadní pochopení dalšího postupu, některá fakta „je vidět").

Pro každé $k = 1, 2, \ldots, n$ je na intervalu $(k-1/2, k)$ zřejmě $\log t \le L(t)$, zatímco na intervalu $(k, k+1/2)$ je $L(t) \le \log(t)$. Pro hodnotu integrálů dostáváme pomocí substituce $k - u = t$ postupně

$$\begin{aligned} a_k := \int_{k-1/2}^{k} (L(t) - \log(t))\,\mathrm{d}t &= \int_{k-1/2}^{k} \big(\log k - \log t\big)\,\mathrm{d}t = \\ = \int_{1/2}^{0} -\big(\log k - \log(k-u)\big)\,\mathrm{d}u &= \int_0^{1/2} \log \frac{\mathrm{d}u}{1-u/k}\,, \end{aligned}$$

a podobně pomocí substituce $k + u = t$

$$\begin{aligned} b_k := \int_{k}^{k+1/2} (\log(t) - L(t))\,\mathrm{d}t &= \int_{k}^{k+1/2} \big(\log t - \log k\big)\,\mathrm{d}t = \\ = \int_0^{1/2} \big(\log(u+k) - \log k\big)\,\mathrm{d}u &= \int_0^{1/2} \log\Big(1 + \frac{u}{k}\Big)\,\mathrm{d}u\,. \end{aligned}$$

Oba integrály pro $k \to \infty$ konvergují k 0 a pro všechna $t \in (0, 1/2)$ je zřejmě

$$\frac{1}{1-u/k} > 1 + \frac{u}{k} > \frac{1}{1-u/k+1}\,,$$

z čehož vyplývá podle Leibnizova kritéria konvergence následující řady se střídavými znaménky

$$a_1 - b_1 + a_2 - b_2 + \cdots + a_k - b_k + \cdots\,.$$

Označíme-li její součet S a označíme dále I tu primitivní funkci k logaritmu, která má v bodě 0 limitu 0, tj.

$$I(x) := \int_0^x \log t\ \mathrm{d}t = x\,\log x - x\,,$$

dostaneme pro částečný součet vztah

$$
\begin{aligned}
a_1 - b_1 + a_2 - b_2 + \cdots + a_n &= \log(n!) - \tfrac{1}{2}\log(n) - I(n) + I(\tfrac{1}{2}) = \\
&= \log(n!) - \tfrac{1}{2}\log n - n\log n + n + I(\tfrac{1}{2})\,. \qquad \text{(K.5)}
\end{aligned}
$$

Odtud dostáváme limitním přechodem

$$\lim_{n\to\infty} \big(\log(n!) - (n + \tfrac{1}{2})\log n + n\big) = S - I(\tfrac{1}{2})\,. \qquad \text{(K.6)}$$

Toto již je Stirlingův vzorec až na „maličkost“, totiž že na místě faktoru $\sqrt{2\pi}$ se nalézá číslo e^C, kde

$$C := \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - b_k) - I\Big(\frac{1}{2}\Big)\,. \qquad \text{(K.7)}$$

Protože snadno nahlédneme, že

$$a_k - b_k = -\int_0^{1/2} \log\Big(1 - \frac{t^2}{k^2}\Big)\,\mathrm{d}t\,,$$

je tedy

$$C = -\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{1/2} \log\Big(1 - \frac{t^2}{k^2}\Big)\,\mathrm{d}t - \int_0^{1/2} \log t\,\mathrm{d}t\,.$$

Protože nekonečný součin vyjadřující funkci $t^{-1}\sin\pi t$ konverguje na intervalu $(0, 1/2)$ stejnoměrně, můžeme zaměnit sumu a integrál, čímž obdržíme

$$C = -\int_0^{1/2} \log\frac{\sin\pi t}{\pi}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\log\pi - \int_0^{1/2}\log\sin\pi t\,\mathrm{d}t\,.$$

Poslední integrál, resp. jeho varianty, se často počítají, proto jen prozradíme výsledek: jeho hodnota I je $-\frac{1}{2}\log 2$, což dá hodnotu C. Je

$$C = \frac{1}{2}\log\pi + \frac{1}{2}\log 2\,;$$

odtud pak dostaneme konstantu ve Stirlingově vzorci: $\mathrm{e}^C = \sqrt{2\pi}$. Viz ještě následující příklad. □

Příklad K.1. Zřejmě je, což potvrzuje eventuální naši názornou představu,

$$I := \int_0^{1/2} \log\sin\pi t\,\mathrm{d}t = \int_0^{1/2} \log\sin\big(\tfrac{1}{2} - t\big)\pi\,\mathrm{d}t = \int_0^{1/2} \log\cos\pi t\,\mathrm{d}t\,. \qquad \text{(K.8)}$$

Proto také dostáváme

$$
\begin{aligned}
2I &= \int_0^{1/2} \big(\log\sin\pi t + \log\cos\pi t\big)\,\mathrm{d}t = \int_0^{1/2} \log\frac{\sin 2\pi t}{2}\,\mathrm{d}t = \\
&= -\frac{1}{2}\log 2 + \int_0^{1/2}\log\sin 2\pi t\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\log\sin\pi u\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}\log 2 + I\,,
\end{aligned}
$$

kde poslední rovnosti dostaneme pomocí substituce $2t = u$ a zvážení, že transformovaný integrál spolu s faktorem $1/2$ dá opět I. Dostaneme tak pro předcházející důkaz hodnotu $C = (1/2)\log 2\pi$.

Poznámka K.2. Vzorec (K.4) je asymptotický a neříká nic o možné chybě. Není obtížné odvodit vztah

$$n\,! = \sqrt{2\pi n}\,(n/\mathrm{e})^n \,\exp\Big(\frac{1}{12n}+\frac{\theta}{120n^2}\Big)\,,\quad |\theta_n|<1\,; \tag{K.9}$$

viz ([28]), odkud je též převzat následující numerický příklad (pracujeme s dekadickým logaritmem!): Pomocí (K.9) dostaneme $\log_{10}(10\,000\,!) = 35659{,}4542745$, takže $10\,000\,!$ má celkem 35 660 číslic. Relativní chyba vzorce závisí na n. Položíme-li např. pro $n=10$ v (K.9) postupně $\theta_n = -1, 0, 1$, dostaneme

$$3\,628\,505 < 10\,! < 3629114$$

přičemž je $10! = 3\,628\,800$. Je pochopitelné, že neuvádíme již zmíněné číslo $10\,000\,!$, pro zajímavost však uvedeme číslo

$$\begin{aligned}1\,000\,! = 93\,326\,215\,443\,944\,152\,681\,699\,238\,856\,266\,700\,490\,715\,968\,264\,381\,621\,468\\ 592\,963\,895\,217\,599\,993\,229\,915\,608\,941\,463\,976\,156\,518\,286\,253\,697\\ 920\,827\,223\,758\,251\,185\,210\,916\,864\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,,\end{aligned}$$

které má „pouhých“ 158 číslic.

Historické poznámky k Dodatkům

(A) V této části jsou popsány dva elementární přístupy k sečtení řady, určující hodnotu $\zeta(2)$ Riemannovy ζ-funkce. Původní Eulerova metoda byla založena na představě, že lze tvrzení o kořenech polynomů aplikovat i na (nekonečně mnoho) všech nulových bodů funkce sin ležících v $\mathbb{R}$. Tuto metodu kritizoval Johann Bernoulli (1667 – 1748) a vytýkal jí, že je založena na představě, že funkce sin (v komplexní rovině) nemá žádné jiné nulové body. To podnítilo Eulera k dalšímu výzkumu, kterým dospěl až k objevu tzv. *Eulerových vzorců*, popisujících vztah (komplexní) exponenciály a goniometrických funkcí.

(B) Je velmi zajímavé, kolik dalších výzkumů vyvolalo Archimedovo úsilí o určení číselné hodnoty čísla π v posledních cca 40 letech. V této části popisovaný BPP vzorec vzbudil senzaci, i když jeho význam pro praktické určení hodnoty π je zanedbatelný. Není totiž „efektivnější“, nežli výpočet, při němž počítáme i všechny předcházející čísla rozvoje (přesnější formulace přesahuje rámec tohoto textu). Je zajímavé si uvědomit, že všechny potřebné nástroje k důkazu vzorce jsou *velmi* staré. Více se lze dočíst ve zmíněném článku [21] a mnoho dalších informací lze nalézt i na Internetu.

(C) Jedním z nejdéle používaných postupů k získání čísla π s velkou přesností bylo užití Machinova vzorce. Užíval se od svého vzniku r. 1706 po několik století. V zásadě lze říci, že i ostatní podobné vzorce Machinova typu mají jednu společnou vlastnost: počet platných desetinných míst roste *lineárně* v závislosti na *počtu operací*, které je třeba provést. Přesto však volba vhodného vzorce tohoto typu výpočet velmi usnadní. Kupodivu teprve v poslední době se podařilo najít algoritmy nesrovnatelně „rychlejší“, které v každém kroku zdvojnásobují, ztrojnásobují, . . . , počet platných cifer již nalezeného rozvoje, nikoli však bez vzrůstu složitosti. Mnoho odkazů na zdroje informací o těchto algoritmech lze nalézt opět v článku [21].

(D) Zde je ukázáno, že nevhodnost užití Leibnizovy řady k výpočtu části rozvoje čísla π má ještě další důvody. Metodám výpočtu π byla v poslední době věnována zvýšená pozornost; je zajímavé, jak se problematika existující v matematice mnoho staletí může stát opět velmi aktuální. S rostoucím počtem nových metod a algoritmů se rozvíjely i metody jejich srovnávání, teoretické zázemí pro výpočetní složitost apod. Je zajímavé, že metody výpočtu čísla π jsou užitečné i při testování nových počítačů.

(E) V tomto Dodatku uvedená věta doplňuje informace o operacích s mocninnými řadami. Důkaz neuvádíme, organicky zapadá lépe do látky teorie funkcí komplexní proměnné. Věta ilustruje, jak lze získat rozvoje, které souvisejí s látkou uvedenou v následujícím Dodatku. Typickými příklady použití jsou odvození několika prvních členů rozvojů funkcí tg a cotg.

(F) Bernoulliho čísla se poprvé objevují v knize *Ars conjectandi*, kterou napsal Jacob Bernoulli (1654 – 1705). Autor se odvolává na úvahy řady svých předchůdců, např. na Johna Wallise (1616 – 1703), byl to však právě Bernoulli, od jehož práce se odvíjí další vývoj v tomto směru. Práce je pravděpodobně vůbec první knihou, která spadá do *teorie pravděpodobnosti*. Vydal ji až r. 1713, osm let po Jacobově smrti, jeho synovec Nicolas Bernoulli (1687 – 1759). Kromě výkladu základů kombinatoriky kniha obsahuje řešení problému nalezení konečných součtů p-tých mocnin prvních n přirozených čísel. Dotkli jsme se ho již v Příkladu 1.3.31.

(G) Tento Dodatek seznamuje čtenáře s velmi silnou sčítací metodou, realizující alespoň částečně Eulerovy představy o možnosti „sčítat" mocninné řady mimo obor jejich konvergence. Dokumentuje tak zvýšený zájem o sčítací metody po zveřejnění Cesàrových výsledků o násobení řad ještě před Fejérovými výsledky. Sluší se ještě poznamenat, že užívání divergentních řad vlivem Louise Augustina Cauchyho (1789 – 1857) nezmizelo: Divergentní řady byly nadále užívány např. v astronomických výpočtech, ale prakticky vymizely na čas z matematiky.

(H) První známé užití nekonečného součinu se objevilo v práci z r. 1579, kterou napsal Françoise Vieta (1540 – 1603). Vieta odvodil vzorec

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots = \prod_{k=1}^{\infty} \cos\frac{\pi}{2^k}\,.$$

Již dříve jsme se v Kapitole 11 seznámili s nekonečným součinem vyjadřujícím $\pi/2$, který objevil r. 1655 John Wallis (1616 – 1703). Prvým, kdo se nekonečnými součiny zabýval systematicky, byl Euler, avšak první systematická teorie konvergence nekonečných součinů je až z r. 1889 a jejím autorem je Alfred Pringsheim (1850 - 1941). Euler přesto dosáhl pomocí nekonečných součinů významných výsledků, např. dostal tak větu o „pětiúhelníkových číslech" (pentagonal numbers). Také Ferdinand Gotthold Max Eisenstein (1823 – 1852) v práci z r. 1847 systematicky studoval nekonečné součiny, dokonce i neabsolutně konvergentní, avšak v části popisující např. derivování řad funkcí apod. se vyskytují nepřesnosti; to byl patrně hlavní důvod toho, že Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815 – 1907) nikde Eisensteinovy výsledky necituje.

(I) Euler sice pracoval hojně jak s řadami, tak i s nekonečnými součiny, ale otázkami jejich konvergence se nezabýval. Funkce popsané nekonečnými součiny chápal jako přirozená zobecnění polynomů a některé vlastnosti polynomů na tyto funkce přenášel. Nekonečný součin pro funkci sin (a také cos) odvodil v práci z let 1734-35.

(J) První přesné zavedení „budoucí Γ-funkce" nacházíme u Eulera. Ten se seznámil s formulací problému interpolace prostřednictvím CHRISTIANA GOLDBACHA (1690 – 1764). V letech 1729 – 30 dospěl k řešení [10]) dvojím způsobem: nejprve popsal rozšíření ve formě nekonečného součinu a pak nalezl integrální vyjádření takto definované funkce.

Problém rozšíření faktoriálů z $\mathbb{N}$ na $\mathbb{R}$ má samozřejmě nekonečně mnoho řešení, Eulera však geniální intuice dovedla k řešení, které se ukázalo později jako velmi významné. Obtížnost řešení přibližuje fakt, že Γ-funkce je „transcendentnější" než běžné elementární transcendentní funkce [11]). Euler dospěl nejprve k nekonečnému součinu

$$\left[\left(\frac{2}{1}\right)^n \frac{1}{n+1}\right]\cdot\left[\left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{2}{n+2}\right]\cdot\left[\left(\frac{4}{3}\right)^n \frac{3}{n+3}\right]\cdots = \prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k+1}{k}\right)^n \frac{k}{k+n} = n\,!\,. \quad \text{(K.1)}$$

Jestliže budeme v prvním výrazu (nekonečněkrát) krátit, dospějeme opravdu k $n!$, v té době se však otázky legitimity podobné úpravy pomíjely. Odsud lze dospět k vyjádření pomocí vzorce, který odvodil CARL FRIEDRICH GAUSS (1777 – 1855)

$$n! = \lim_{m\to\infty} \frac{m!(m+1)^n}{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}\ .$$

Zde se však Euler nezastavil. Snadnou manipulací z (K.1) dostal pro $n = 1/2$ formuli, kterou objevil r. 1655 JOHN WALLIS (1616 – 1703)

$$\frac{\pi}{2} = \left(\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\right)\left(\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\right)\left(\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\right)\cdots\ .$$

Ta souvisí s *integrálem* vyjadřujícím obsah jednotkového půlkruhu, což inspirovalo Eulera k hledání integrálního vyjádření. Dospěl tak ke vzorci

$$n! = \int_0^1 (-\log x)^n \,\mathrm{d}x\ = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t} t^n \,\mathrm{d}t\ .$$

Integrál v předcházejícím vztahu vpravo má smysl i pro $n \in (-1,\infty)$. Později se stabilizovalo vyjádření

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t\ , \quad x \in (0,\infty)\,.$$

Jeho autorem, včetně označení „gama-funkce" symbolem Γ a názvu Eulerův integrál druhého druhu, je ADRIEN MARIE LEGENDRE (1752 – 1833). Euler sám použil toto vyjádření v pozdější své práci z r. 1781 (otištěna 1794).

[10]) Toto řešení popsal v dopisech Goldbachovi z 13. 10. 1729 a z 8. 1. 1730; bylo však publikováno v r. 1738.

[11]) Transcendenci funkce Γ dokázal již Euler. R. 1887 OTTO L. HÖLDER (1859 – 1937) dokázal, že funkce Γ není dokonce ani řešením žádné algebraické diferenciální rovnice.

(K) Zkoumání podobného typu jako ta, která jsme popsali v Dodatku F, dovedla Eulera až ke vzorci, který se dnes obvykle nazývá *Euler-Maclaurinův vzorec.* Pomineme podrobnosti a napíšeme ho ve tvaru

$$\sum_{k=0}^{n} f(k) = \int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\,[\,f(n) - f(0)\,] + \frac{B_2}{2\,!}\,[\,f'(n) - f'(0)\,] + \\ + \frac{B_4}{4\,!}\,[\,f'''(n) - f'''0)\,] + \cdots + \frac{B_{2k}}{(2k)\,!}\,[\,f^{(2k-1)}(n) - f^{(2k-1)}(0)\,] + R_k\,,$$

kde $f \in \mathcal{C}^{(2k+1)}([\,0, n\,])$, tj. f je $(2k+1)$-krát spojitě diferencovatelná funkce. Avšak ani Stirling, který použil podobnou úvahu pro konkrétní úlohu, a ani Euler, neuváděli zbytek R_k a pracovali s *řadou*, která však je ve všech praktických příkladech divergentní. Maclaurinův přístup byl z dnešního hlediska modernější. Pro zbytek platí

$$R_k = \frac{1}{(2k+1)\,!}\int_0^n f^{(2k+1)}(x)\,\mathcal{B}_{2k+1}(x)\,\mathrm{d}x \ \ ,$$

kde $\mathcal{B}_k$ jsou výše definované Bernoulliovy polynomy (ani zde není terminologie zcela stabilní, někdy bývají definovány Bernoulliovy polynomy jako součiny $(k!)\,\mathcal{B}_k$). Euler i Maclaurin dospěli k obecnému vyjádření patrně nezávisle, Maclaurin je publikoval v r. 1742. V Eulerových pracích se s ním setkáváme na více místech; Euler k němu dospěl za svého prvního petrohradského pobytu.

Stirlingův vzorec je ve skutečnosti výsledkem dlouhé spolupráce dvou matematiků s podobným osudem. Stirling a Abraham de Moivre (1667 – 1754) nedosáhli nikdy pozic na významných univerzitách, oba z politických důvodů. Zatímco Moivre s rodiči emigroval z Francie do Anglie po vydání *Nantského ediktu* (1685) a všichni byli bráni v Anglii jako cizinci, Stirling byl vyloučen z Oxfordu r. 1716, když jako jakobita odmítl přísahat věrnost králi. Zásluhou Stirlinga bylo určení hodnoty faktoru $\sqrt{2\pi}$. K tradičnímu nepřesnému označení „Stirlingova formule“ (vzorec) přispěl Moivre tím, že když nalezený vztah r.1737 publikoval a označil Stirlinga jako autora hodnoty příslušného faktoru, udělal to z jazykového hlediska nepřesně: Vyjádření bylo možno chápat tak, že autorem celého vztahu je Stirling. Podrobněji se čtenář o historii tohoto objevu může dočíst v [6]. Řadu různých důkazů Stirlingova vzorce lze nalézt v bakalářské práci [20].

Slovo na závěr :

Rád bych poděkoval těm čtenářům, kteří text dočetli až k těmto řádkům. I když byl plný různých historických komentářů a poznámek, přiznávám, že jsem po celou dobu studií dějepis nenáviděl. Odlišil bych ho však rád od dějin jako takových, které mne vždy lákaly. Časem přibyl zájem o to, jak se některé věci v matematice vyvíjely. Považuji za důležité to *alespoň částečně znát*, i když v matematice je to těžší než v jiných vědách. Historické poznámky měly ve čtenáři alespoň částečně vzbudit zvědavost a chuť nezavírat matematickou knížku, která takové poznámky obsahuje. Někdy jen odlehčují text, jindy upozorňují na zvláštní okliky, jimiž se vývoj ubíral, a občas jdou až na kořen věci. Měly by v případě tohoto textu pokud možno vzbudit u čtenáře i úctu k dlouhému vývoji matematiky a do jisté míry i hrdost: *Matematika je součástí historie lidstva od samého jeho počátku.*

Literatura:

[1] Adamchik, V., Wagon, S.: *A simple formula for π*, Amer. Math. Monthly **104** (1997), str. 852 – 855.

[2] Artin, E.: *Einführung in die Theorie der Gammafunktion*, Teubner, Leipzig – Berlin, 1931.

[3] Bailey, D. H., Borwein, P. B., Plouffe, S.: *On the rapid computation of various polylogarithmic constants*, Math. Comp. **66** (1997), str. 903 – 913.

[4] Borwein, J., Bailey, D., Girgensohn, R.: *Experimentation in mathematics; Computational path to discovery*, A. K. Peters, Natick, MA, 2004.

[5] Bourbaki, N.: *Funkcii dějstvitělnogo peremenogo*, Nauka, Moskva, 1965, (ruský překlad francouzského díla „Fonctions d'une variable réelle" (Éléments de Mathématique, Livre IV)).

[6] Bressoud, D.: *A radical approach to real analysis*, The Mathenatical Association of America, Washington, 1994.

[7] Davis, P. J.: *Leonhard Euler's integral: A historical profile ofthe Gamma function*, Amer. Math. Monthly **66** (1959), str. 849 – 868.

[8] Eberlein, W. F.: *On Euler's infinite product for the sine*, J. Math. Anal. Appl. **58** (1977), str. 147 – 151.

[9] Feller, W.: *A direct proof of Stirling's formula*, Amer. Math. Monthly **74** (1967), str. 1223 – 1225.

[10] Gaskill, H. S., Narayanaswami, P.P.: *Elements of Real Analysis*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, N.J., 1998.

[11] Hofbauer, J.: *A simple proof of $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} = \pi^2/6$ and related identities*, Amer. Math. Monthly **109** (2002), str. 196 – 200.

[12] Hwang, Ch.-L.: *Some observations on the method of arctangens for the calculation of π*, The Mathematical Gazette **88** (2004), str. 270 – 278.

[13] Jarník, V.: *Diferenciální počet I*, Academia, Praha, 1963, (5. vydání).

[14] Jarník, V.: *Integrální počet I*, Academia, Praha, 1963, (4. vydání).

[15] Jarník, V.: *Integrální počet II*, Academia, Praha, 1984, (4. vydání).

[16] Komornik, V.: *Some simple proofs on series and sequences,* Ulmer Seminare 2003 (Functional analysis und Differential Gleichungen), Heft 8 (2003), str. 242 – 247.

[17] Knopp, K.: *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*, Springer, Berlin, 1924.

[18] Krantz, S. G.: *Real analysis and foundations*, Chapman, London, 2005.

[19] Leja, F.: *Teoria funkcji analitycznych*, Państwowe wydawnictwo naukowe, Warszawa, 1957.

[20] Malý, L.: *Stirlingova formule*, Bakalářská práce MFF UK, Praha, 2006.

[21] Netuka, I., Veselý, J.: *Nedávné výsledky o čísle* π, Pokroky MFA **43** (1998), str. 217 – 236.

[22] Papadimitriou, I.: *A simple proof of the formula* $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} = \pi^2/6$, Amer. Math. Monthly **80** (1973), str. 424 – 425.

[23] Remmert, R.: *Theory of complex functions*, Springer, New York, 1991,

[24] Remmert, R.: *Classical topics in complex function theory*, Springer, New York, 1998,

[25] Rudin W.: *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill Comp., New York, 1976.

[26] Stromberg, K. R.: *An introduction to classical real analysis*, Wadsworth, Inc., Belmont, 1981.

[27] Veselý, J.: *Komplexní analýza pro učitele*, Karolinum, Praha, 2000.

[28] Walter, W.: *Analysis 1*, Springer, Berlin, 1992. (3. vydání).

Věcný rejstřík

Jmenný rejstřík