ω … množina přirozených čísel v TM def.:

$$\omega := \bigcap \{ z : z \text{ je induktivní} \}$$

Def.: z je ind. : $\emptyset \in z \;\wedge$

$$\wedge\ (\forall n)\ n \in z \longrightarrow \underbrace{n \cup \{n\}}_{S(n)\ \text{následník } n} \in z$$

Axiom nekonečna: $\exists z : z$ je induktivní

Pozn.: ω je množina: nechť a je induktivní.

$$\omega = \bigcap \{ z : z \text{ je ind.} \} =$$

$$= \underbrace{\bigcap \{ \overbrace{z \in \underbrace{\mathcal{P}(a)}_{\text{množina}}}^{z \subseteq a} : z \text{ je induktivní} \}}_{\text{množina (ax. vydělení)}} \qquad \square$$

Věta (PI): Je-li $\varphi(n)$ fle JTM. Pokud $\varphi(\emptyset) \wedge (\forall n \in \omega)\ \varphi(n) \longrightarrow \varphi(S(n))$.

Potom $(\forall n \in \omega)\ \varphi(n)$.

Tedy důkazy M.I. jsou platné – založené na předch. větě. (Princip indukce).

OPERACE na ω:

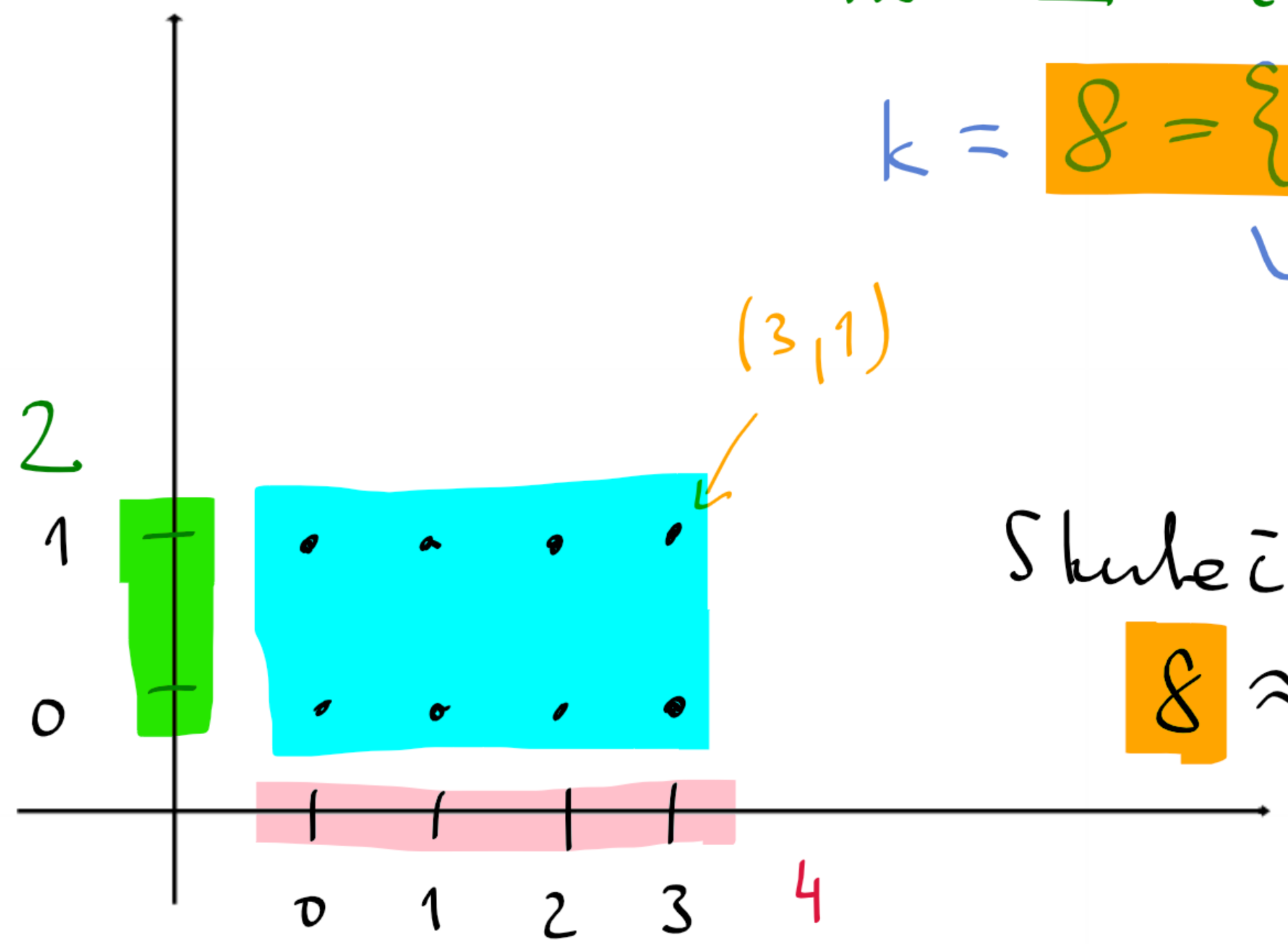
Násobení: Jsou-li $m, n \in \omega$ a $k \in \omega$, a platí $m \times n \approx k$, pak

$$k := m \cdot n.$$

$m = 4 = \{0,1,2,3\}$

$n = 2 = \{0,1\}$

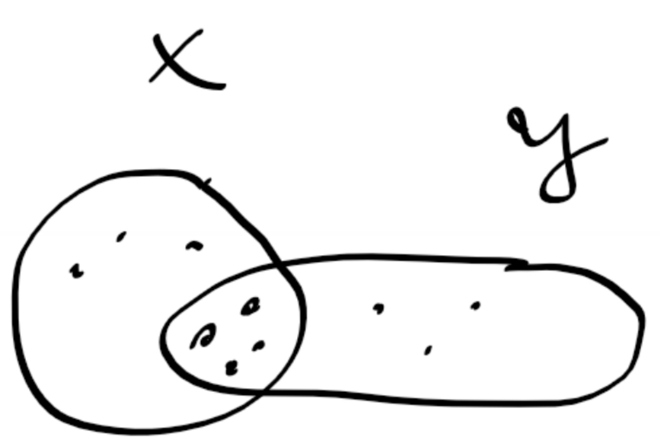
$k = \underbrace{8 = \{0,1,\dots,7\}}_{8\text{-prvková}}$



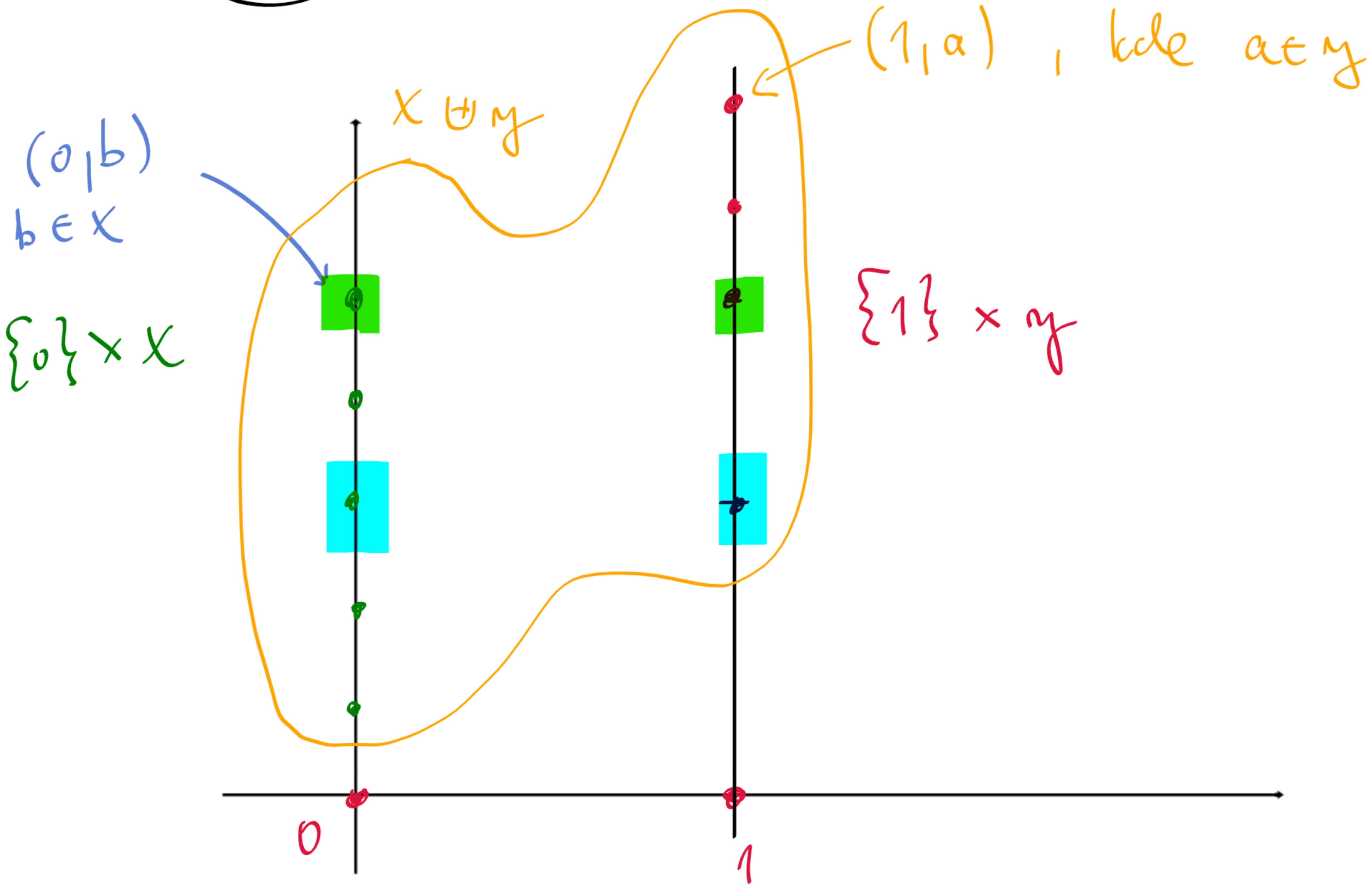
Skutečně $8 \approx 4 \times 2$

Součet na ω: Jsou-li x, y libovolné mn. definujeme (tzv. množinový součet x a y) jako

$$x \uplus y = \underbrace{(\{0\}\times x) \cup (\{1\}\times y)}_{\text{výsledek}}$$



(PIE)



Definice: Pro $m, n \in \omega$ a $k \in \omega$ def.

$k = m + n$, kdykoliv

$k \approx m \uplus n$.

Př.: $m = 5$, $n = 7$

$\Rightarrow$ mohutnost m je 5

mohutnost n je 7

Tedy mohutnost $m \uplus n$ je 12.

Číslo 12 má mohutnost 12 (protože $12 = \{0, 1, \dots, 11\}$).

Tedy $12 \approx m \uplus n$

$12 \approx 5 \uplus 7$

Tedy def. $12 := 5 + 7$.

Nyní by bylo potřeba dokázat:

- $+, \cdot$ jsou komutativní
- asociativní
- společně distributivní
- 0 je neutrální prvek pro $+$
  1 — " — $\cdot$

Důkazy: dlouhé použití indukce.

Další operace mocnění:

$$m^n = k \overset{\text{def.}}{\iff} k \approx {}^n m \,,$$

kde ${}^A B := \{ f \mid f : A \to B \text{ je zobrazení} \}$

Příklad: $n = 5$, $m = 2 \in \omega$

${}^5 2 \ \ldots \ {}^{\{0,\ldots,4\}}\{0,1\} \ \ldots$ těch $32 = 2^5$.

Definice: (uspořádání na ω)

- $m < n \overset{\text{def.}}{\iff} m \in n$
- $m \leq n \overset{\text{def.}}{\iff} m < n \ \vee \ m = n$

Příklad: $2, 4$.
Jest $4 = \{0,1,2,3\}$. Tedy $2 \in 4$.

Tedy podle definice: $2 < 4$.

Ve skutečnosti: 4 je seznamem právě všech prvků ω menších než 4.

$\forall n \in \omega : \ n = \{ k \in \omega : k < n \}$

Věta: $<$ je dobré uspořádání na ω.
(Tj. $(\forall A \subseteq \omega) : A \neq \emptyset \to$ ex. min. A.)
Každá nepr. mn. v ω obsahuje nejmenší prvek.

Další obory: $\mathbb{Z} = (\{0\} \times \omega) \cup (\{1\} \times (\omega \setminus \{0\}))$

$= \omega \uplus \omega \setminus \{0\}$.

nezáporná čísla   záporná čísla

„Chápeme"

$(0,5) \sim 5$ $(1,5) \sim -5$

Potřeba šikovně definovat operace.

Racionální čísla: $\mathbb{Q}$:

Lze uchopit pomocí zlomků (dvojice celých čísel: $\frac{\text{čitatel} \in \mathbb{Z}}{\text{jmenovatel} \in \mathbb{N}}$). Ale POZOR:

ZLOMKY $\neq$ RAC. ČÍSLA

Totiž: $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \dots$ reprezentují totéž rac. číslo ale jsou to různé zlomky.

$$\mathbb{Q} := \mathbb{Z} \times \mathbb{N} /_{\sim}$$

Tj. $\mathbb{Q}$ jsou třídy ekvivalence $\sim$ na $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$.

Ta je definována pro $(m,n),(k,l) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$:

$$(m,n) \sim (k,l) \overset{\text{def.}}{\iff} m \cdot l = n \cdot k.$$

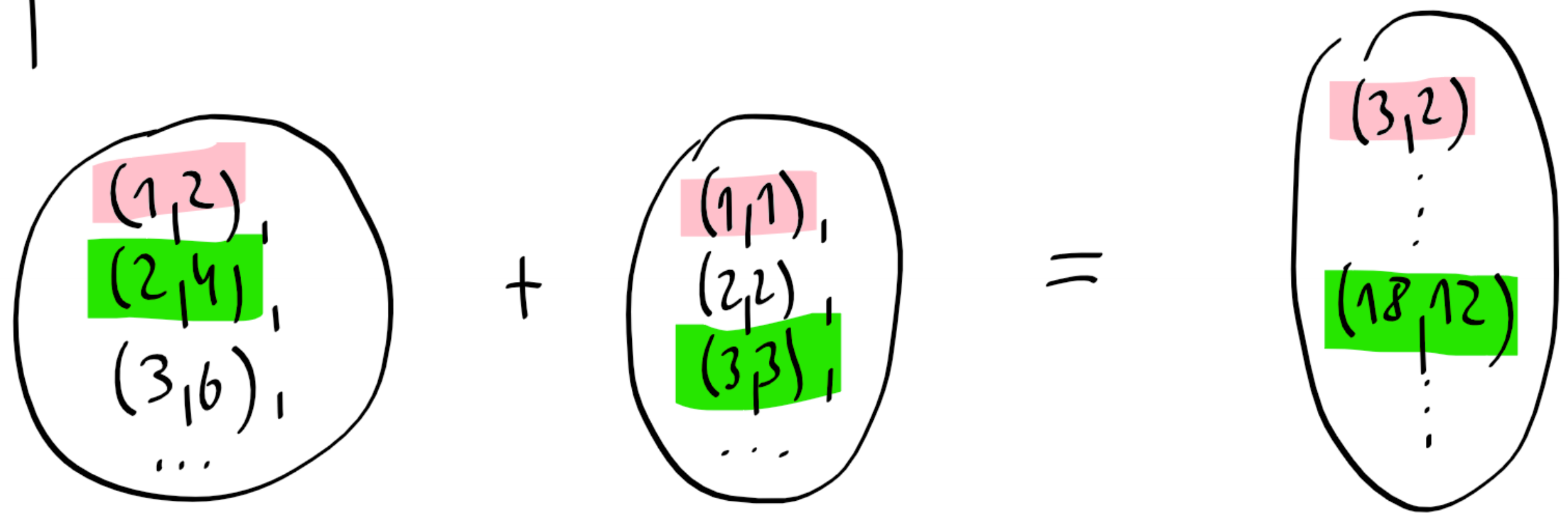
TAHÁK: $\frac{m}{n} = \frac{k}{l}$ $\underset{\text{aby bylo}}{\overset{\text{chceme}}{\iff}}$ $\boxed{m \cdot l = n \cdot k}$

máme def. (operace na $\mathbb{Z}$).

Tím pádem: $\in \mathbb{Q}$

$$\left[\tfrac{1}{2}\right]_{\sim} = [(1,2)]_{\sim} = \{(1,2),(2,4),(3,6),(4,8),(5,10),\dots\}$$

Operace na $\mathbb{Q}$:



$$(2,4)+(3,3) = \frac{2}{4}+\frac{3}{3} = \frac{6+12}{12} = \frac{18}{12} = (18,12)$$

Podobně pro násobení (jednodušší).

$$(m,n)+(k,l) = \frac{m}{n}+\frac{k}{l} = \frac{m\cdot l+kn}{n\cdot l} = \\ = (ml+kn,\ nl)$$

Je to KOREKTNÍ?

Spočetné a nespočetné množiny

Definice: • x je spočetná $\overset{\text{def}}{\iff}$ $x \approx \omega$.
(Tj. existuje bijekce x na ω.)

• x je nejvýše spočetná $\overset{\text{def}}{\iff}$
$\iff$ x je spočetná $\vee$ konečná

• x je nespočetná $\overset{\text{def}}{\iff}$ x není nejvýše spoč.

Věta: x je spočetná $\wedge$ $y \subseteq x$ $\rightarrow$
$\rightarrow$ y je nejvýše spočetná

„Spočetnost je nejmenší nekonečná mohutnost."

Dk pozn.: y je nekonečná, $y \subseteq x$
$x \approx \omega$, stačí najít bijekci y na ω.

Věta: (i) $\omega \times \omega$ je spočetná
(ii) A, B spočetné $\longrightarrow$ $A \cup B$ je spočetná,
$A \times B$ je spočetná.

(iii) $\mathbb{Q}$ je spočetná

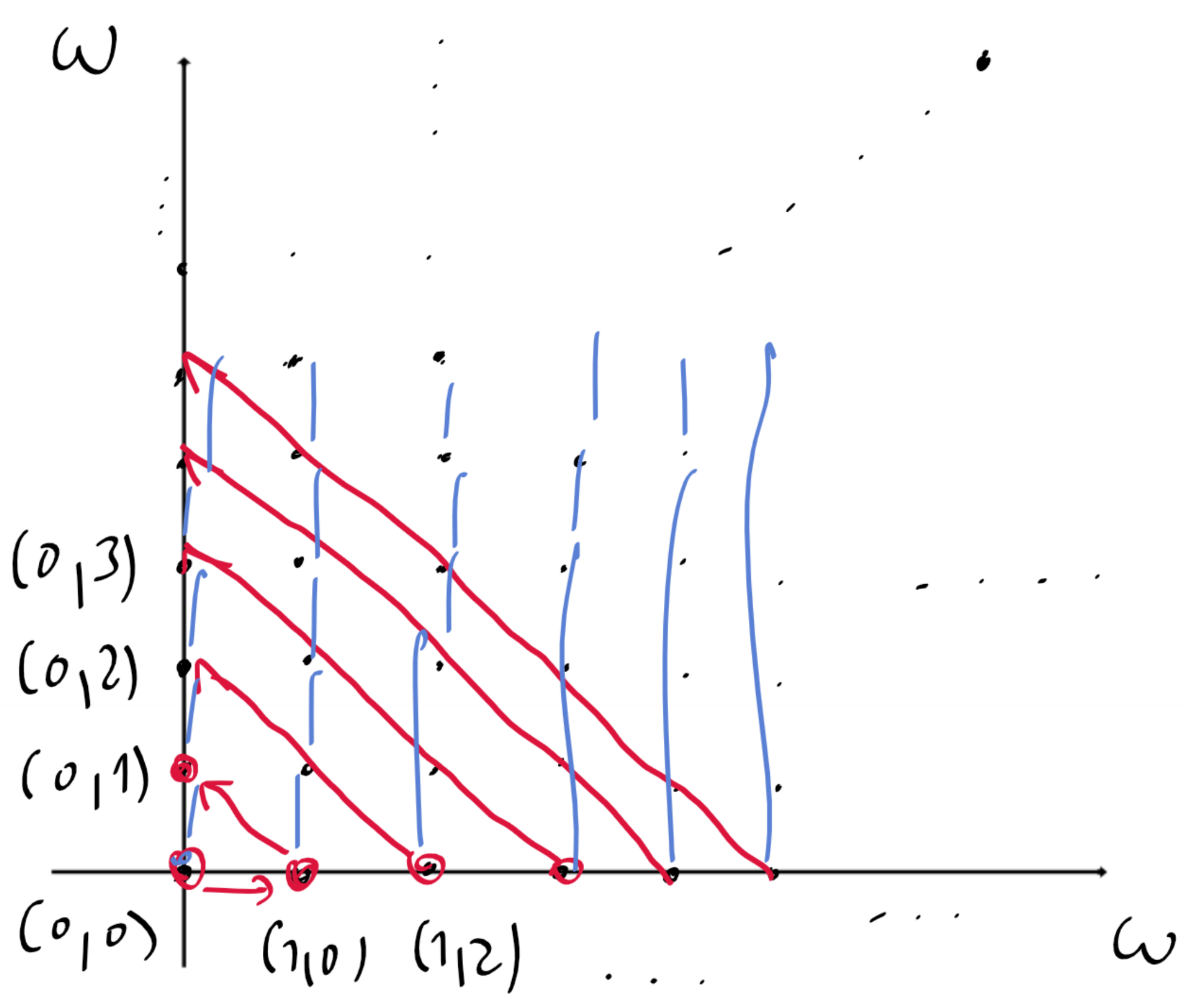
Dk: (i) 1. ZPŮSOB - C-B věta:
Chceme $\omega \times \omega \approx \omega$ (tj. $\omega \times \omega$ je spoč.)
Podle C-B stačí $\omega \times \omega \preccurlyeq \omega$ $\wedge$ $\omega \preccurlyeq \omega \times \omega$.

nejprve $\omega \preccurlyeq \omega \times \omega$:
Položme $g: \omega \to \omega \times \omega$
$n \longmapsto (n, 0)$ ... prosté.

naopak: $\omega \times \omega \preccurlyeq \omega$:
Položme $f: \omega \times \omega \to \omega$
$(k, l) \mapsto 2^k \cdot 3^l$ je prosté!

ZVA $\Longrightarrow$ f je prosté (jednoznačnost faktorizace)

2. ZPŮSOB:



Definujeme bijekci $\omega \xrightarrow{\text{na}} \omega \times \omega$ následovně: obrázkem. Očíslujeme v jasném pořadí všechny prvky $\omega \times \omega$ přir. čísly.

Věta: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ jsou spočetné.

Dk.: $\mathbb{Q} \approx \omega$ pomocí C-B.

$$\mathbb{Q} \overset{(1)}{\preccurlyeq} \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \overset{(2)}{\approx} \omega \times \omega \overset{(3)}{\approx} \omega$$

Tedy $\mathbb{Q} \preccurlyeq \omega$.

$\omega \preccurlyeq \mathbb{Q}$: $f : \omega \to \mathbb{Q}$, $n \mapsto [n]_\sim$ prosté

(1) $q \in \mathbb{Q} \mapsto \frac{k}{l} \in q = \left[\frac{k}{l}\right]_\sim$,

kde $\frac{k}{l}$ je v zákl. tvaru (přesněji $NSD(k,l) = 1$).

(2) Platí, protože $\mathbb{Z} \approx \omega$, $\mathbb{N} \approx \omega$ nebo podle předchozí V. máme $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \approx \omega \times \omega$.

Věta: $\mathbb{C} \approx \mathbb{R} \approx \mathcal{P}(\omega) \approx {}^{\omega}2$

Věta (Cantor) $(\forall x)\ x \prec \mathcal{P}(x)$

„Podmnožin je vždy více než prvků."

Důkaz: nejprve dokážu $x \preccurlyeq \mathcal{P}(x)$:

Stačí najít prosté $f: x \longrightarrow \mathcal{P}(x)$:

$$f: a \in x \longmapsto \{a\} \in \mathcal{P}(x)$$

To je triviálně prosté.

Zbývá dokázat: $x \not\approx \mathcal{P}(x)$:

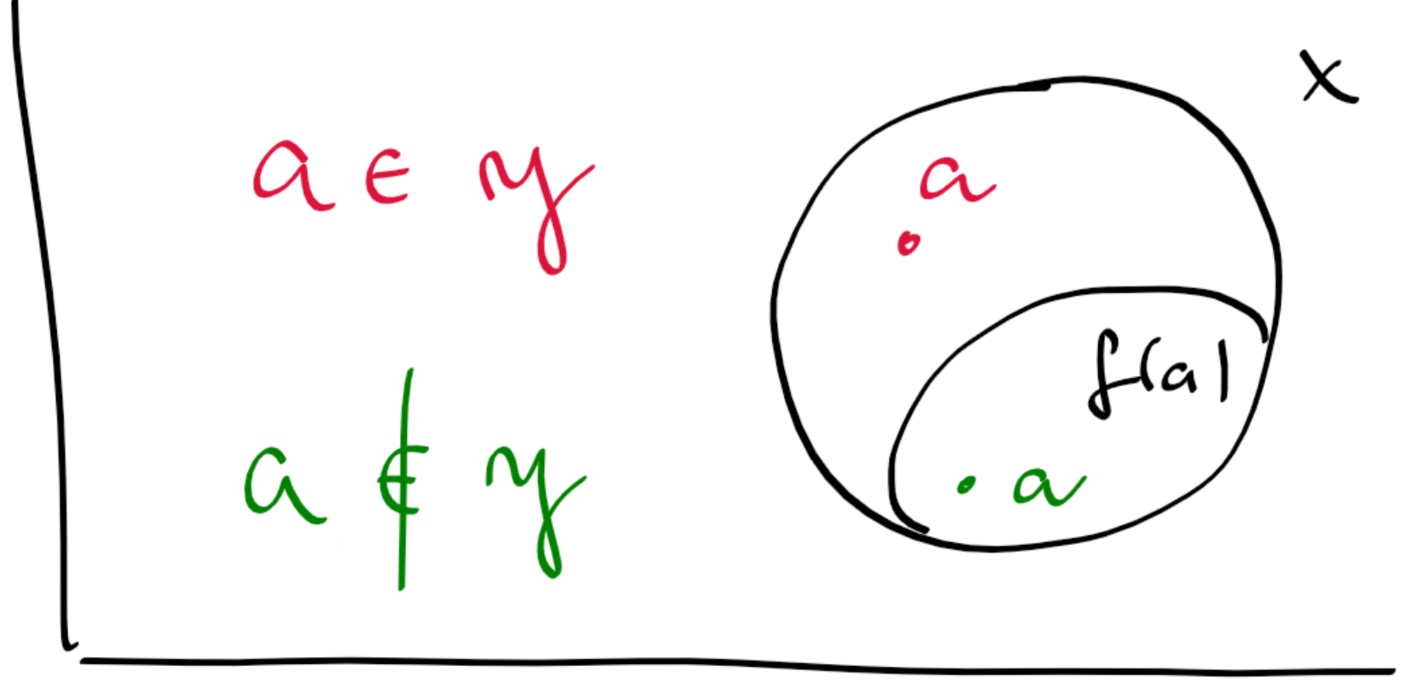
SPOREM: nechť $x \approx \mathcal{P}(x)$, tj. existuje bijekce $f: x \xrightarrow{na} \mathcal{P}(x)$. Definujeme

$$y := \{a \in x : \underbrace{a}_{\in x} \notin \underbrace{f(a)}_{\subseteq x}\}$$

Tedy $y \subseteq x$,

tj. $y \in \mathcal{P}(x)$.

Ale $\mathcal{P}(x) = \mathrm{Rng}\, f$.



Takže existuje $b = f^{-1}(y)$ (neboli $f(b) = y$).

Russell: Q: je $b \in f(b)$?

$$\left.\begin{array}{ll}\text{ANO-li:} & b \notin y = f(b) \ \lightning \\ \text{NE-li:} & b \in y = f(b) \ \lightning\end{array}\right\} \Rightarrow \lightning$$

$\boxtimes$