JIŘÍ VESELÝ

KOMPLEXNÍ ANALÝZA PRO UČITELE

Tento text vystavený na internetu se od vydání z r. 2000 v detailech liší. Jsou v něm opraveny chyby, na které jsem byl kolegy upozorněn, nebo jsem je odhalil sám. I když jsem se snažil o to, abych v maximální míře zachoval zlomy jako v tištěné verzi, ne vždy to bylo možné. Rejstříky jsem proto předělal. Text je elementární a je pro základní přednášku v podstatě téměř minimální.

Poslední aktualizace této verze : 10. 2. 2013.

PRAHA 2000

Matematický ústav Univerzity Karlovy
Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze

Vedoucí ústavu: Doc. RNDr. Jarolím Bureš, CSc.

Tento text vznikl za částečné podpory grantu Univerzity Karlovy GAUK 165/1999 a grantu MSM 113200007 Ministerstva školství České republiky.

ISBN 80–246–0202–4

Obsah

Předmluva

„Le plus court chemin entre deux énoncés réels passe par le complexe.“ JACQUES HADAMARD (1865 –1963)

Nejprve stručný návod, jak s textem pracovat. Je určen jako pomůcka k zvládnutí základů analýzy v komplexním oboru především posluchačům studia učitelství matematiky, může však být užitečnou pomůckou i při studiu matematiky na jiném zaměření. Podstatnou část textu bez rozšiřujících doplňků tvoří látka, probíraná na Univerzitě Karlově na Matematicko-fyzikální fakultě v pátém semestru (rozsah 2/0, v nabídce je i výběrový seminář). Text může být zajímavý i pro přednášející, kteří rádi obohacují výklad historickými poznámkami, nebo pro středoškolské učitele, hledající určitý nadhled nad látkou, kterou učí.

Pro první čtení (a pro zájemce o zvládnutí problematiky s minimální námahou) jsou určeny první kapitoly bez částí označených symbolem $\heartsuit$. Obsahují základní látku, umožňující relativně rychlý postup k tzv. reziduové větě. Kapitolu 8 a následující, a podobně i text v částech označených symbolem $\heartsuit$, je třeba chápat jako jistou „nadstavbu“ nad tímto minimálním programem. Zahrnuje jiné pohledy na minimální látku, rozšiřuje ji, obsahuje alternativní postupy, stručně popisuje jiné možné důkazy apod.

Úvod má motivační charakter a kromě krátkého popisu vývoje disciplíny se snaží čtenáři přiblížit i to, co mu její studium přinese. Nepostradatelné dřívější poznatky jsou krátce připomenuty v Kapitole 1. S podstatnou částí potřebných znalostí se setkají studenti dříve, před absolvováním přednášky věnované komplexní analýze. Předpokládá se též předběžná znalost vlastností *mocninných řad v komplexním oboru*; k případnému zopakování je určena Kapitola 2. Zmíněný minimalizovaný program je jádrem Kapitol 3 – 7. Jeden z možných modelů užití textu spočívá v následném návratu k partiím označeným $\heartsuit$ či v pokračování ve studiu (některé z) následujících kapitol.

Velmi často odkazujeme čtenáře na učebnici *Matematická analýza pro učitele*, Matfyzpress, Praha 1997 (2. opravené vydání vyjde v r. 2001), na kterou tento text volně navazuje; odkazy jsou značeny [$\mathbb{V}$]. Jelikož však jde téměř vždy o základní poznatky z analýzy, je k dispozici mnoho dalších textů, které lze použít.

Důležité pojmy, zejména nově zaváděné, jsou graficky vyznačeny pomocí **polotučného písma**, zatímco *kurziva* je užita pro zvýrazňování věcí, které by neměly čtenáři uniknout či z jiných důvodů stojí za pozornost; *v kurzivním textu nebo ve skloněném písmu má* antikva *analogickou funkci.* ***Polotučná kurziva*** je užita k vyznačení pojmů, které připomínáme a jejichž znalost se předpokládá; je užita jen v Kapitole 1.

Historické poznámky jsou psány v každé kapitole nezávisle na předchozím textu. Tak jako doplňující informace a ilustrativní příklady jsou psány petitem. Za každou kapitolou je uvedena literatura, zejména knihy a články, na něž jsou v textu odkazy. Věřím, že tyto údaje budou užitečné při vysokoškolské výuce analýzy i pro vyučující neučitelských specializací.

Při užití textu je věcí přednášejícího, zda zařadí celou látku z Kapitol 3 – 7, nebo jen nejnutnější poznatky, která z uvedených tvrzení sdělí jen informativně, případně přenechá studentům k úvaze, zda se o nich budou chtít samostatně dozvědět něco nad rámec přednášky. Oba extrémní případy (nezařadit do přednášky nic či naopak vše) by byly škodlivé.

U všech důležitých vět jsem se snažil určit autora i dobu, z níž věta pochází. Hvězdička u údaje, např. **(Cauchy, Goursat 1883*)** varuje čtenáře před ukvapenými závěry: je nutno si přečíst na jiném místě textu další komentář; vodítkem je jmenný rejstřík. Nezkoumal jsem originální prameny, neboť v cizojazyčné literatuře jsou knihy s historickými komentáři velmi oblíbené a tak jsem měl odkud čerpat; zejména o analýze v komplexním oboru existuje několik vynikajících monografií věnovaných i historickým aspektům disciplíny.

Text obsahuje řadu příkladů, avšak žádná cvičení; jsem přesvědčen, že počet příkladů, které je třeba samostatně vyřešit, je silně individuální, a že dobrou sbírku příkladů má mít student stále k dispozici. V budoucnu by měla být k dispozici sbírka *řešených* příkladů pro nácvik početní techniky.

Text vznikl z přednášek, které jsem konal v letech 1999/2000 a 1997/8. Mnoha podněty, opravami a vylepšeními mi velice pomohli oba recenzenti prof. RNDr. Ilja Černý, DrSc. a doc. RNDr. Zdeněk Vlášek, CSc.; bez jejich pomoci by tato knížka nevznikla. Téměř všechny použité obrázky připravil doc. RNDr. Miroslav Dont, CSc. V prvotní podobě část tohoto textu přepsala studentka Helena Kačerová. Zejména jim patří můj dík. Za některé dodatečné opravy před tiskem vděčím studentům, zejména Tomáši Perglerovi. Dlužno říci, že za chyby, které v textu zůstaly, jsem odpovědný výhradně já; uvítám komentář, upozornění na chybějící partie i chyby včetně přepisů, na e-mailové adrese `jvesely@karlin.mff.cuni.cz`.

(...)

Praha, červen 2000
Jiří Veselý

Úvod

Tak jako Vojtěch Jarník (1897 – 1970) před více než 50 lety v „D1“ **prosím čtenáře, aby si nejprve přečetl předmluvu. Je tam návod, jak knihu používat.**

Trocha historie

Pojem *komplexního čísla* prošel velmi dlouhým vývojem, který započal zhruba v polovině 16. století. R. 1545 vydal Gieronimo Cardano (1501 – 1576) knihu *Ars Magna de Regulis Algebraicis*. Ta byla jedním ze série příspěvků italské školy k řešení rovnice třetího stupně [1]). Připomeňme, že po Cardanovi jsou pojmenovány vzorce, pomocí nichž se vyjadřují kořeny rovnice třetího stupně; jejich skutečným objevitelem byl patrně Niccolo Fontana (1499 – 1557).

Cardano v *Ars Magna* řešil úlohu rozložit číslo 10 na součet dvou sčítanců, jejichž součin je roven 40. Pro rovnici $x(10-x)=40$ nalezl kořeny ve tvaru $x_1 = 5+\sqrt{-15}$, $x_2 = 5-\sqrt{-15}$ a pro jejich součin obdržel

$$(5+\sqrt{-15})(5-\sqrt{-15}) = 25-(-15) = 40\,.$$

Výsledek označil jako „elegantní, avšak bez užitku“. Cardano spolu s dalšími italskými matematiky rozšířil tehdejší znalosti o řešení algebraických rovnic a přispěl též k objevu komplexních čísel. Jiným významným matematikem, svázaným s touto problematikou byl Scipione dal Ferro (1465 – 1526).

Vývoj však postupoval velmi pomalu. René Descartes (1596 – 1650) odmítal existenci komplexních kořenů polynomu; od něj pochází trochu nešťastný termín „imaginární“. Také objevitelé infinitezimálního počtu nepřikládali komplexním číslům větší význam: zatímco Isaac Newton (1642 – 1727) je nepokládal za důležitá, Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) s nimi sice pracoval, ale nechápal jejich podstatu. Za zmínku stojí, že jak Leibniz, tak zejména Newton pracovali s mocninnými řadami, avšak jejich konvergenci nevyšetřovali.

Popišme podstatu problémů, řešených v té době. Když např. Johann Bernoulli (1667 – 1748) diskutoval s Leibnizem, tvrdil, že logaritmy záporných

[1]) Obsáhlý výklad nalezne čtenář u Cantora ve druhém dílu [6] v kapitole 64.

čísel neexistují a argumentoval přibližně takto: Jelikož logaritmy čísel z intervalu $[1,\infty)$ vyčerpají nezáporná reálná čísla a logaritmy čísel z intervalu $(0,1)$ vyčerpají všechna záporná reálná čísla, na logaritmy záporných čísel proto již „žádné hodnoty nezbývají“. Leibniz mu oponoval a argumentoval zhruba takto: jelikož $(-x)^2 = x^2$, je $2\log(-x) = 2\log(x)$ a tedy $\log(-x) = \log(x)$. Proto je např. $\log(-1) = \log(1) = 0$.

O těchto problémech Johann Bernoulli korespondoval s Leonhardem Eulerem (1707 – 1783) v letech 1727–31. Eulerovy znalosti o komplexních číslech postupně rostly a vyvrcholily v odhalení vztahu mezi exponenciálou, logaritmem a goniometrickými funkcemi v komplexním oboru. Avšak již dříve Roger Cotes (1682 – 1716) publikoval r. 1714 tvrzení o komplexních číslech, které lze zapsat ve srozumitelnější podobě ve tvaru

$$\sqrt{-1}\,\varphi = \log_{\mathrm{e}}(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)\,. \tag{1}$$

U Eulera tedy šlo o završení dlouhodobého vývoje. V dopise z r. 1740 sdělil Euler Johannovi Bernoullimu, že funkce

$$y = 2\cos x \qquad \text{a} \qquad y = \mathrm{e}^{\sqrt{-1}x} + \mathrm{e}^{-\sqrt{-1}x}$$

jsou řešeními téže diferenciální rovnice a pro obě platí $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$, tedy si musí být rovny. Toto pozorování zveřejnil r. 1743 ve formě vzorců

$$\cos t = (\mathrm{e}^{\sqrt{-1}t} + \mathrm{e}^{-\sqrt{-1}t})/2\,, \qquad \sin t = (\mathrm{e}^{\sqrt{-1}t} - \mathrm{e}^{-\sqrt{-1}t})/(2\sqrt{-1})\,.$$

O něco později, r. 1748, dospěl rovněž ke vztahu (1). Od Eulera také pochází označení imaginární jednotky symbolem i, to však je až z r. 1777.

Bylo by přehnaným optimismem se domnívat, že v polovině 18. stol. bylo zacházení s komplexními čísly „dobře zažitou“ záležitostí. Euler v jedné ze svých prací např. píše:

$$\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-4} = \sqrt{4} = 2\,, \quad \text{neboť} \quad \sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \sqrt{ab}\,,$$

ačkoli $\sqrt{-1}\sqrt{-4} = i\cdot 2i = -2$. Přesto se komplexní čísla často používala, např. při integraci racionálních funkcí; výpočty však byly mnohdy jen formální. Uveďme ilustrativní příklad: Z rovnosti $(t+i)(t-i) = t^2+1$ byl formální integrací pomocí rozkladu na parciální zlomky odvozován vzorec

$$\begin{aligned}\operatorname{arctg} x &= \int_0^x \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{2i}\Big(\int_0^x \frac{dt}{t-i} - \int_0^x \frac{dt}{t+i}\Big) = \\ &= \frac{1}{2i}\log\frac{i-x}{i+x} = \frac{1}{2i}\log\frac{1+ix}{1-ix} = \frac{i}{2}\log\frac{i+x}{i-x}\,,\end{aligned} \tag{2}$$

o kterém jsme se zmínili v [$\mathbb{V}$] na str. 426. Použití těchto úvah však často provázely pochybnosti. Jestliže totiž použijeme (2) a dosadíme $x = 1$, dostaneme

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{1}{2i}\log\frac{i-1}{i+1} = \frac{1}{4i}\log\Big(\frac{i-1}{i+1}\Big)^2 = \frac{1}{4i}\log(-1) = \frac{1}{8i}\log(-1)^2 = 0\,.$$

Tento paradox vysvětlil teprve Euler periodicitou komplexní exponenciály [2]).

Zásadní zlom ve vztahu matematiků ke komplexním číslům přišel až na přelomu století, kdy Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855) uveřejnil r. 1799 svůj první důkaz tzv. *základní věty algebry.* Jím byla pozice komplexních čísel v matematice značně posílena. Tuto větu dokážeme v Kapitole 5.

Nežli opustíme „algebraické hledisko", připomeneme, že cesta ke geometrickým představám o komplexních číslech byla sice kratší, ale rovněž ne bez problémů. Euler byl k této interpretaci velice blízko, ale patrně ji nepovažoval za významnou. Stejně jako on, tak i Cotes, Abraham de Moivre (1667 – 1754) a další používali rovinu ke znázorňování komplexních čísel, avšak příslušné ztotožnění nebylo provedeno a nebyl explicitně popsán geometrický smysl operací s komplexními čísly. První práce o tom publikovali r. 1797 Caspar Wessel (1745 – 1818) a o něco později r. 1806 Jean-Robert Argand (1768 – 1822); Argand zavedl dodnes užívaný termín **modul**, resp. modulus pro absolutní hodnotu. Obě práce vznikly patrně nezávisle a nevzbudily žádnou pozornost, první se setkala se zájmem teprve při publikaci francouzského překladu po 100 letech od svého vzniku, tj. r. 1897.

U Gausse nacházíme geometrickou interpretaci komplexních čísel nejprve v korespondenci (1811); záhy však Gauss disponoval uceleným obrazem o souvislostech. Explicitně je popsal v práci z r. 1831. Při této příležitosti napsal, že *geometrická interpretace komplexních čísel vrhá na jejich metafyzické chápání nové světlo.* Užívání termínu *Gaussova rovina* je tedy adekvátní historickému vývoji. R. 1837 zavedl William Rowan Hamilton (1805 – 1865) komplexní čísla jako uspořádané dvojice reálných čísel. Poznamenejme, že objevená „názornost" byla jedním ze stimulů dalšího vývoje vedoucího k vytvoření teorie *komplexních funkcí komplexní proměnné*, tedy té části matematiky, jejímiž základy se dále budeme zabývat.

Základy teorie funkcí komplexní proměnné byly položeny v devatenáctém století. Za největší přínos vděčíme třem velmi významným matematikům; jsou jimi Louis Augustin Cauchy (1789 – 1857), Bernhard Riemann (1826 – 1866) a Carl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815 – 1897). Popíšeme stručně rozdíly v jejich přístupu k tzv. *holomorfním funkcím*, tj. komplexním funkcím komplexní proměnné, které mají v každém bodě derivaci.

Cauchy se převážně věnoval integraci, primitivním funkcím a s tím svázanému problému nezávislosti křivkového integrálu na integrační cestě (křivce). Pracoval s funkcemi, které měly *spojitou* derivaci. Pro všechny takové funkce měl k dispozici integrální reprezentaci. Na jeho výsledky navázal a „zúplnil je" Joseph Liouville (1809 – 1882).

Riemannův přístup byl geometrický. Funkce zprostředkovávaly zobrazení oblastí v komplexní rovině, resp. na obecnějších (Riemannových) plochách. Stavěl často na fyzikálně motivované intuici a jeho úvahy byly založeny na později kritizovaném užití tzv. Dirichletova principu pro harmonické funkce, zaručujícího existenci řešení jisté extremální úlohy. Obohatil teorii krásnými a významnými

[2]) Srovnej s výkladem v Kapitole 4.

výsledky. Snaha postavit tyto poznatky na solidní matematický základ stimulovala řadu dalších objevů.

Weierstrassův přístup vycházel z poznatků o mocninných řadách a o jejich pokračovatelnosti. Pracoval s funkcemi, které bylo možno lokálně vyjádřit jako součty mocninných řad; navázal tak do jisté míry na JOSEPHA LOUISE LAGRANGE (1736 – 1813), který zakládal své představy na rozvinutelnosti (všech spojitých) funkcí v mocninné řady.

Již v devatenáctém století se tyto přístupy mísily; byly rychle odhalovány vzájemné souvislosti, a tak zavedené pojmy často postupně splývaly. Dnešní přístup využívá obvykle všech výhod, které vzájemné souvislosti poskytují a tak zpravidla mizí původní terminologie: *holomorfní*, *analytické* a v jistém (velmi speciálním) smyslu *integrovatelné* funkce splývají. My tyto funkce budeme nazývat holomorfní; tvoří základ teorie, kterou se dále budeme zabývat. Poznamenejme, že řada pojmů či jejich vlastností splývá s odpovídajícími analogiemi v reálném oboru. To svádí někdy k ukvapeným závěrům. Budeme se proto snažit čtenáře na rozdíly vždy explicitně upozorňovat.

Kam směřujeme

Teorie funkcí komplexní proměnné patří rozhodně mezi *klasické* partie matematiky; prvá část úvodu to alespoň částečně dokumentuje. Stejně přirozené jako seznámení s historií by mělo být i poznání přínosu této teorie jak v obecné rovině, tak i specificky pro budoucí středoškolské učitele matematiky.

Chceme čtenáři nabídnout kromě hlubšího pochopení role komplexních čísel a vztahů mezi elementárními funkcemi exp, log, sin, cos apod. také podrobnější studium jejich vlastností. Je zde však mnoho dalších hlubokých výsledků a souvislostí s jinými partiemi matematiky, které čtenáři stihneme pouze částečně přiblížit. Hned na počátku se pokusíme čtenáři s malým množstvím předchozích znalostí ukázat užitečnost studia funkcí komplexní proměnné a tak alespoň částečně ilustrovat klasický Hadamardův výrok, který jsme použili na str. vii jako úvodní motto.

Základním nástrojem pro práci s komplexními funkcemi komplexní proměnné je teorie mocninných řad, se kterou by měl být čtenář již alespoň částečně seznámen. Proto s ukázkou právě u mocninných řad začneme, nebudeme však každou úvahu podrobně odůvodňovat. Je-li dána posloupnost komplexních čísel $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$, lze jí přiřadit mocninnou řadu s koeficienty a_k o součtu f, tj.

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \,, \tag{3}$$

a položit si otázku, zda spolu souvisí posloupnost $\{a_k\}$ a funkce f. Obecně může řada (3) konvergovat jen pro $z = 0$, avšak často definuje jistou funkci v nějakém kruhu $U(0,r) = \{z;\ |z| < r\}$ s $r > 0$. V takovém případě budeme funkci f nazývat **vytvořující funkce** posloupnosti $\{a_k\}$ [3]).

Již v [$\mathbb{V}$] jsme se záhy setkali s příkladem, k němuž se nyní vrátíme a osvětlíme ho podrobněji. Začneme dosti obecně: nechť n je přirozené číslo a $\{a_k\}$ je popsána jednoduchým **rekurentním vztahem** (též **rekurencí** nebo **rekurentně**)

$$a_k = c_1 a_{k-1} + \cdots + c_n a_{k-n}\,, \quad k \geq n\,, \tag{4}$$

kde $c_1, \dots c_n$ je pevně zvolená n-tice (reálných nebo komplexních) čísel. Předepíšeme-li ještě hodnoty prvních n členů $a_0, \dots, a_{n-1}$, je jimi a rekurencí (4) posloupnost $\{a_k\}$ jednoznačně určena.

Budeme-li členy a_k hledat ve tvaru z^k, $k = 0, 1, \dots$, $z \neq 0$, budou členy posloupnosti $\{a_k\}$ splňovat rekurenci (4), právě když bude platit

$$z^k = c_1 z^{k-1} + \cdots + c_n z^{k-n}$$

pro všechna $k \geq n$, tedy bude-li z vyhovovat algebraické rovnici

$$z^n - c_1 z^{n-1} - \cdots - c_{n-1} z - c_n = 0\,. \tag{5}$$

Na levé straně (5) je tzv. **charakteristický polynom**. Je-li λ kořenem tohoto polynomu, pak $\{a_k\} = \{\lambda^k\}$ je posloupnost vyhovující rekurenci (4). Má-li charakteristický polynom n různých kořenů $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, lze dokonce snadno popsat *každou* posloupnost $\{a_k\}$ vyhovující rekurenci (4). Speciálně tak popíšeme posloupnost, která je (jednoznačně) určena hodnotami $a_0, \dots, a_{n-1}$. Tohoto aparátu lze využít k řešení mnoha zajímavých úloh, jejichž historii lze stopovat až k Eulerovi. Uveďme nejprve slíbený příklad; srv. [22]. Pro rekurenci

$$a_k = a_{k-1} + a_{k-2}\,, \quad k \geq 2\,, \tag{6}$$

které vyhovuje např. i posloupnost Fibonacciho čísel $\{F_k\} = \{0, 1, 1, 2, 3, 5, \dots\}$, je charakteristický polynom tvaru $z^2 - z - 1$. Dospěli jsme tak k rovnici

$$z^2 - z - 1 = 0 \tag{7}$$

s kořeny $\lambda_{1,2} = (1 \pm \sqrt{5})/2$. V tomto případě je poměrně jednoduché i určení vytvořující funkce pro Fibonacciho posloupnost $\{F_k\}$; odpovídají jí počáteční hodnoty $a_0 = 0$ a $a_1 = 1$, takže podle (3) platí rovnost

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k z^k\,.$$

Výraz $f(z) - zf(z) - z^2 f(z)$ upravíme pomocí vztahu (6) pro Fibonacciho čísla a dostaneme z. Dospějeme tak k vyjádření

$$f(z) = \frac{z}{1 - z - z^2}\,.$$

[3]) Někdy se za vytvořující (též generující) funkci posloupnosti $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ pokládá *formální* mocninná řada (3), aniž se zkoumá její konvergence.

Jeden z kořenů rovnice (7) je $\lambda_1 = (1 + \sqrt{5})/2$; tato hodnota se nazývá **zlatý řez**. Druhým je pak číslo $\lambda_2 = (1 - \sqrt{5})/2$, pro které platí $\lambda_2 = -1/\lambda_1$. Rozložme $1 - z - z^2 = (1 - \lambda_1 z)(1 - \lambda_2 z)$. Pomocí rozkladu na parciální zlomky dostaneme

$$\frac{z}{1 - z - z^2} = \frac{A}{1 - \lambda_1 z} + \frac{B}{1 - \lambda_2 z},$$

kde $A = 1/(\lambda_1 - \lambda_2) = 1/\sqrt{5} = -B$. Proto platí

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1}{1 - \lambda_1 z} - \frac{1}{1 - \lambda_2 z}\Big) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^k - \lambda_2^k}{\sqrt{5}} z^k,$$

pro všechna $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1/\lambda_1$. Z jednoznačnosti rozvoje f v mocninnou řadu plyne odtud jiným způsobem **Binetův vzorec** z $[\mathbb{V}]$, str. 59:

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^k - \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^k\Big).$$

Stejným aparátem lze řešit otázku, kolika způsoby lze vyjádřit přirozené číslo $n \geq 4$ ve tvaru součtu čísel $1, 2, 3$ a 4; zde součet sčítanců v jiném pořadí považujeme za jiné vyjádření. Označíme-li B_k počet způsobů vyjádření čísla k, je (netriviální zdůvodnění první rovnosti vynecháváme)

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} B_k z^k = \sum_{m=0}^{\infty} (z + z^2 + z^3 + z^4)^m = \frac{1}{1 - z - z^2 - z^3 - z^4},$$

a pro výpočet čísel B_k lze užít rekurenci

$$a_k = a_{k-1} + a_{k-2} + a_{k-3} + a_{k-4}.$$

Zajímavé úlohy tohoto typu lze najít např. v [18]. Euler tímto aparátem řešil úlohy podstatně složitější a studoval tak vlastnosti posloupnosti $\{p(n)\}$, kde $p(n)$ je počet všech možných rozkladů čísla $n \in \mathbb{N}_0$ na sčítance; zde jsou dva rozklady považovány za stejné, pokud se liší pouze pořadím sčítanců. Vytvořující funkce dnes patří k důležitým nástrojům kombinatoriky a teorie pravděpodobnosti. S elementárním využitím se čtenář může seznámit v [5], náročnější aplikace nalezne např. v [1].

V reálné analýze je např. úloha spočítat integrál

$$\int_0^{10\pi} \frac{dx}{2 + \cos x} \tag{8}$$

řazena k těm „méně příjemným“, neboť se používá pracné substituce $\operatorname{tg}(x/2) = t$, pro $x \in (-\pi, \pi)$. Je-li obecněji F racionální funkce v sin a cos, lze ji pomocí tzv. **Eulerových vzorců** (viz $[\mathbb{V}]$, str. 306 a také Kapitola 4 tohoto textu)

$$\cos x = \frac{\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}}{2i} \tag{9}$$

převést na tvar $f(e^{ix})$, kde f je racionální funkce, a tak integrál (8) a integrály analogické počítat jako křivkový integrál

$$\int_0^{10\pi} F(\cos x, \sin x)\, dx = \frac{1}{i} \int_\varphi \frac{f(z)}{z}\, dz$$

přes (pětkrát proběhnutou) „jednotkovou kružnici“ φ. Avšak to je jen jeden z několika typů integrálů, které se naučíme počítat pomocí tzv. *reziduové věty.*

Funkce sin se definuje v komplexní rovině pomocí exponenciály jako v (9), a to pro všechna $x \in \mathbb{C}$. Není složité ukázat, že sin má v komplexní rovině stejnou množinu všech nulových bodů jako v $\mathbb{R}$. Odtud plyne, že množinou všech nulových bodů funkce $\sin \pi z$ je množina $\mathbb{Z}$ všech celých čísel a $\sin \pi z$ je „polynomem nekonečného stupně“

$$\sin \pi z = \pi z - \frac{(\pi z)^3}{3!} + \frac{(\pi z)^5}{5!} + \cdots \tag{10}$$

s nekonečně mnoha „kořenovými činiteli“ $(1 - z/k)$ s $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ a činitelem z. Tyto „historizující úvahy“ lze zpřesnit; skutečně se dá dokázat, že

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{k=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{z^2}{k^2}\Big), \tag{11}$$

přičemž vzorci lze dát přesný smysl. Toto vyjádření obdržel již Euler; úvahami, odpovídajícími tehdejšímu stupni přesnosti, o analogii s vlastnostmi koeficientů polynomů (porovnejte ve vzorcích (10) a (11) koeficienty u mocniny z^3), dospěl k vyjádření součtu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}\,;$$

srv. [$\mathbb{V}$], str. 307. Čtenář se dozví více o funkcích podobného typu, stejně jako o analogiích rozkladu na parciální zlomky, se kterým se setkal již dříve. Pomocí metod funkcí komplexní proměnné lze mj. sčítat další poměrně komplikované řady, řešit úlohy z oblasti rovinného proudění apod.; viz ještě následující Poznámky.

Historické poznámky : Zmínili jsme se krátce o „prehistorii“ teorie funkcí komplexní proměnné. Ta se postupně rodila z prací Eulera, Lagrange, Pierre-Simona Laplace (1749 – 1827), Simeona Denise Poissona (1781 – 1840) a mnoha dalších, avšak hlavní zásluhy na konstituování této matematické disciplíny mají bezesporu Cauchy, Riemann a Weierstrass.

I když první ze zvolených ukázek užití metody vytvořujících funkcí je spojena se jménem Moivrovým, na jejím uvedení do matematiky ve formě obecněji použitelného nástroje má hlavní zásluhu Laplace. Ten rozpracoval *metodu* vytvořujících funkcí a povýšil ji na jeden ze základních prostředků teorie pravděpodobnosti. Přispěl k tomu zejména přednáškami na *l'École Normale Supérieure* konanými od r. 1795. Druhé vydání jeho knihy [13] z r. 1814 obsahuje jako předmluvu text těchto přednášek. První kapitola knihy [13] obsahuje poměrně propracovaný výklad metody vytvořujících funkcí. Výslovně poznamenáváme, že jde o podstatně více než o teorii mocninných řad. Přístupný výklad a příklady aplikací této metody jsou uvedeny v článku [22]; formálním mocninným řadám důležitým z hlediska aplikací (tyto řady mohou být divergentní) je věnována velká pozornost v [10].

Ač hlavní zásluhu na vytvoření teorie elementárních funkcí v komplexním oboru má patrně Euler, teprve Cauchy jí dodal r. 1821 v [8] dostatečnou přesnost. Ten také propracoval v sérii prací teorii křivkového integrálu v komplexním oboru a umožnil tak počítat integrály z reálných funkcí „přechodem do komplexního oboru“. I v tomto případě lze nalézt řadu výsledků, které tomu předcházely, avšak nejdůležitější pro rozvoj teorie jsou nesporně Cauchyho práce z období 1823 – 1833.

U Gausse a Eulera nacházíme vyjádření některých funkcí nekonečným součinem, samy nekonečné součiny čísel jsou však značně starší. Vyjádření π pomocí nekonečného součinu objevil již François Viète (1540 – 1603):

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdot \dots .$$

Poznamenejme, že šlo o první analytický popis π. Tento „proces“, který poměrně rychle konverguje, nacházíme ve Viètově práci z r. 1593, jeho konvergence však byla dokázána teprve r. 1891.

V dnešní době je známa řada vzorců tohoto typu. Uveďme např. vzorec, pocházející od Johna Wallise (1616 – 1703), se kterým se čtenář patrně již setkal v reálné analýze:

$$\pi = 2 \cdot \frac{2.2.4.4.6.6\dots}{1.3.3.5.5.7\dots} ;$$

viz [$\mathbb{V}$], str. 272. Ve vzorci se nevyskytují „iracionality“ jako ve vyjádření, které nalezl Viète. Euler na úvahách o nekonečných součinech založil i metodu výpočtu součtů řad $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2n}$, $n \in \mathbb{N}$, a pro malá $n \in \mathbb{N}$ tyto řady s poměrně velkou přesností sečetl. Celé funkce typu (11), kterými se budeme zabývat v Kapitole 8, považoval za polynomy a také s nimi tak zacházel. Cauchy se rozkladům celých funkcí na součiny věnoval v práci z r. 1829: zde uvedl, že takový rozklad je možný např. pro polynomy, nebo pro funkce sin a cos, ne však obecně.

Zvolené ukázky použití teorie funkcí komplexní proměnné jsou vybrány tak, aby byly dle možnosti přístupné začátečníkům; zdaleka nedokumentují oblast možných aplikací této teorie. V tomto směru odkazujeme čtenáře na třídílnou monografii [10].

Je vhodné se krátce zmínit o prvních učebnicích teorie funkcí komplexní proměnné. Zde je těžké rozlišit: V době jejího zrodu vycházely monografie, které obsahovaly mnoho původních dílčích výsledků (např. práce Lagrange, Eulera, Cauchyho, Laplace apod.), a také knihy, věnované jen speciálním partiím. I ty měly na rozvoj teorie funkcí komplexní proměnné veliký vliv. Takové dílo o eliptických funkcích napsal r. 1829 Carl Gustav Jakob Jacobi (1804 – 1851). Veliký význam měly přednášky, které konal Joseph Liouville (1809 – 1882) r.1847. Poznámky z nich publikoval Carl Wilhelm Borchardt (1817 – 1880) až r. 1880. Pod vlivem Liouvillových přednášek však vznikla kniha [3] z r. 1875, která má blízko k monografii. Tuto knihu a také text [7] z r. 1868, který napsal Felice Casorati (1835 – 1890) a který obsahuje dokonce více než 140 stran *o historii* teorie funkcí komplexní proměnné, lze zařadit k prvním učebnicím. Jinou práci, která obsahovala mnoho podnětných myšlenek (jde o soubor článků, předmluvu napsal Gauss), vydal r. 1847 Ferdinand Gotthold Max Eisenstein (1823 – 1852). Na konci minulého století již existovala celá řada obsáhlých prací z teorie funkcí komplexní proměnné. Za zmínku snad stojí text [14] z pera českého autora, který však vyšel v němčině.

Na rozdíl od teorie reálných funkcí reálné proměnné lze v literatuře poměrně snadno nalézt mnoho materiálu o historii teorie funkcí komplexní proměnné. Čtenáře s hlubším zájmem o historii odkazujeme zejména na krásnou dvojdílnou knihu [19], [20]; mnoho historických komentářů obsahuje též [4] a samozřejmě [17]. Z obecných knih věnovaných historii matematiky lze doporučit jako četbu [12], podrobnější informace lze nalézt např. v [2], [11], [15], [23]. V otázce priorit nebylo u některých tvrzení jednoduché rozhodnout, vše však bylo v případě rozporů konfrontováno s dalšími prameny. Otázka autorství by však neměla být pro čtenáře podstatná, větší důležitost má doba vzniku pro orientaci ve vývoji teorie, a případně i cesta, která k objevu vedla. V prvních sedmi kapitolách jsem se snažil vyhýbat „trikovým“, namnoze elegantnějším postupům a dával přednost těm, které považuji za přirozené, ať již z hlediska historického vývoje nebo zařazení do elementárního textu.

V této učebnici nejsou, na rozdíl od [$\mathbb{V}$], ukázky ze starších českých učebnic komplexní analýzy. Existuje mnoho textů, zejména učebnic a monografií z pera Ilji Černého (např. [9], další jsou uvedeny za jednotlivými kapitolami), nebo starší překlady ruských učebnic. Literatura k této kapitole obsahuje podstatně více položek než u jiných kapitol, avšak to pramení z jejího obsahu.

Literatura:

[1] Andrews, G. E.: *The theory of partitions*, Addison-Wesley, London, 1976.

[2] Bottazzini, U.: *The higher calculus: a history of real and complex analysis from Euler to Weierstrass*, Springer, New York, 1986.

[3] Briot, C., Bouquet, J.: *Théorie des fonctions doublement périodiques et, en particulier, des fonctions elliptiques*, Paris, 1859.

[4] Burckel, R. B.: *An introduction to classical complex analysis, Vol. 1*, Birkhäuser, Basel, 1979.

[5] Calda, E.: *Kombinatorika pro učitelské studium*, Matfyzpress, Praha, 1996, (učební text pro MFF UK).

[6] Cantor, M.: *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik I – IV*, B. G. Teubner, Leipzig, 1880, 1882, 1898, 1908.

[7] Casorati, F.: *Teorica delle funzioni di variabili complesse*, Pavia, 1868.

[8] Cauchy, L. A.: *Course d'analyse de l'Ecole Royale Polytechnique, I^{re} partie, Analyse algébrique,* Paris 1821, obsaženo v: *Oeuvres*, **(2)**, **3**, Paris, 1897, str. 1 – 331.

[9] Černý, I.: *Analýza v komplexním oboru*, Academia, Praha, 1983.

[10] Henrici, P.: *Applied and computational complex analysis I – III*, John Wiley & Sons, New York, 1973, 1977, 1986, (druhé vydání prvního dílu monografie vyšlo r. 1988).

[11] Klein, F.: *Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus*, Springer, Berlin, 1908.

[12] Kline, M.: *Mathematical Thoughts from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, New York, 1972.

[13] de Laplace, P. S.: *Théorie Analytique des Probabilites*, Paris, 1812, 1814, 1820.

[14] Láska, W.: *Einführung in die Funktionentheorie*, Stuttgart, 1894.

[15] Markushevich, A. I.: *Analytic function theory*, obsaženo v : *Mathematics of the 19th century; Geometry, Analytic function theory*, (Kolmogorov, A. N., Yuskevich, A. P., ed.): Birkhäuser, Basel, 1996, (překlad z ruského originálu: *Matěmatika XIX věka: geometrija, těorija analitičeskich funkcij*, Nauka, Moskva, 1981).

[16] Novák, B.: *Funkce komplexní proměnné pro učitelské studium MFF UK*, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1980.

[17] Osgood, W. F.: *Allgemeine Theorie der analytischen Funktionen a) einer und b) mehrerer komplexen Größen*, obsaženo v : *Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften,* Band II., 2. Teil, 1. Heft, B. G. Teubner, Leipzig, 1899 – 1916, (obsahuje další příspěvky s touto tematikou).

[18] Pólya, G., Szegö, G.: *Problems and theorems in analysis I.*, Springer, Berlin, 1978.

[19] Remmert, R.: *Theory of complex functions*, Springer, New York, 1991, (překlad druhého vydání *Funktionenlehre I.* z r. 1989; první vydání je z r. 1984 (Springer), poslední z r. 1995 (Springer)).

[20] Remmert, R.: *Classical topics in complex function theory*, Springer, New York, 1998, (překlad druhého vydání *Funktionenlehre II.* z r. 1997; první vydání je z r. 1991 (Springer)).

[21] Riemann, B.: *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen*, doktorská dizertační práce, Göttingen, 1851. (Riemann, B.: Werke, Berlin, 1890).

[22] Trojovský, P., Veselý, J.: *Vytvořující funkce*, Pokroky MFA **45** (2000), str. 7 – 35.

[23] Smithies, F.: *Cauchy and the creation of complex function theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[24] Veselý, J.: *Matematická analýza pro učitele*, Matfyzpress, Praha, 1997, 2001, (učební text pro MFF UK).

Kapitola 1

Základní znalosti

Tato kapitola obsahuje základní poznatky, které budeme v dalším považovat za známé. Je mezi nimi patrně jen málo věci, s nimiž se čtenář dosud nesetkal; kapitolu si lze tedy jen „prohlédnout“, aby se čtenář seznámil s terminologií apod. Pokud bude potřeba něco si připomenout, stačí sáhnout k nějakému elementárnímu textu, např. [$\mathbb{V}$]. Ty pojmy, které nedefinujeme, ale pouze připomínáme, jsou graficky vyznačeny ***kurzivou***, pro pojmy definované v textu užíváme zvýraznění **antikvou**. To usnadní čtenáři rychlejší seznámení se všemi potřebnými pojmy. Protože mnoho věcí *pouze opakujeme*, budeme postupovat méně formálně než v dalších kapitolách textu.

1.1 Zavedení komplexních čísel

Připomeňme nejprve některá označení. Symbolem $\mathbb{N}$ budeme značit množinu všech ***přirozených čísel***, tj. $\{1, 2, \ldots\}$. Dále klademe $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Množinu všech ***celých*** čísel budeme značit $\mathbb{Z}$, všech ***racionálních*** čísel $\mathbb{Q}$ a všech ***reálných*** čísel $\mathbb{R}$; pro množinu všech kladných reálných čísel budeme používat symbol $\mathbb{R}_+$.

Symbolem $\mathbb{R}^m$ budeme značit m-rozměrný eukleidovský prostor, tj. prostor všech uspořádaných m-tic reálných čísel, přičemž pro stručnost píšeme $\mathbb{R}$ místo $\mathbb{R}^1$. Z algebraického hlediska je $\mathbb{R}$ komutativní těleso, které je uspořádané a má tzv. Archimedovu vlastnost, tj. pro každé $\varepsilon > 0$ a každé $K > 0$ existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že $n\varepsilon > K$. Je však navíc oproti $\mathbb{Q}$ ***úplné***. Prostor $\mathbb{R}^m$ chápeme nejen jako ***lineární prostor*** nad $\mathbb{R}$, ale v případě potřeby rovněž jako m***-rozměrný normovaný lineární prostor***. Pro každý bod $x = [x_1, \ldots, x_m] \in \mathbb{R}^m$ definujeme (eukleidovskou) normu

$$\|x\| := (|x_1|^2 + \cdots + |x_m|^2)^{1/2} \ ;$$

metrika generovaná touto normou nám umožňuje chápat $\mathbb{R}^m$ rovněž jako ***metrický prostor***. Připomínáme, že tento prostor je ***úplný*** a má řadu dalších vlastností; tyto vlastnosti pokládáme za známé, čtenáře odkazujeme na [$\mathbb{V}$], Kapitoly 12 a 13. Speciálně jsou prostory $\mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$, ***separabilní***, ***lokálně kompaktní***, ***souvislé*** a také ***lokálně souvislé***. Platí toto jednoduché ***kritérium kompaktnosti***: *Množina $M \subset \mathbb{R}^m$ je kompaktní, právě když je omezená a uzavřená*; viz [$\mathbb{V}$], Příklad 14.4.22. Protože konvergence v $\mathbb{R}^m$ je „konvergence po souřadnicích“, je spojitost zobrazení do $\mathbb{R}^m$ „spojitostí po složkách“. To nám opět usnadňuje situaci a umožňuje přenést řadu tvrzení, které známe z reálné analýzy, na případy, jimiž se budeme zabývat.

Znalost oboru komplexních čísel $\mathbb{C}$ je nezbytným předpokladem studia komplexních funkcí komplexní proměnné. Je to „v podstatě“ prostor $\mathbb{R}^2$, v němž je *navíc* definováno násobení a do něhož je vnořen i prostor $\mathbb{R}$. Proto jsme se nejprve zabývali vlastnostmi prostorů $\mathbb{R}^m$ pro obecné m.

Komplexní čísla jsou uspořádané dvojice reálných čísel, tedy prvky $\mathbb{R}^2$. Je-li $z = [\,x, y\,] \in \mathbb{C}$, pak číslo x nazýváme **reálná část** čísla z a číslo y **imaginární část** čísla z. Čísla x a y nazýváme též **složky** čísla z. Píšeme

$$x = \operatorname{Re} z\,, \quad y = \operatorname{Im} z\,.$$

Komplexní číslo $[\,0, 1\,]$ značíme krátce i; je tedy třeba zapomenout historickou „nedefinici“ i pomocí $\sqrt{-1}$. Komplexní čísla geometricky znázorňujeme pomocí bodů v rovině: číslu $[\,x, y\,]$ odpovídá bod roviny o souřadnicích x, y. Proto pro $\mathbb{C}$ užíváme též názvu **komplexní rovina** nebo **rovina komplexních čísel** nebo **Gaussova rovina**. Pro komplexní čísla připomeneme definici operace ***sčítání***, které se definuje jako v $\mathbb{R}^2$, a nově definujeme **násobení**: Jsou-li $z_1 = [\,x_1, y_1\,]$, $z_2 = [\,x_2, y_2\,]$ komplexní čísla, klademe

$$z_1 + z_2 := [\,x_1 + x_2,\, y_1 + y_2\,]\,, \quad z_1 z_2 := [\,x_1 x_2 - y_1 y_2,\, x_1 y_2 + x_2 y_1\,]\,.$$

Pro dvojice s nulovou imaginární částí korespondují tyto operace s těmi operacemi, které již známe z $\mathbb{R}$:

$$[\,x_1, 0\,] + [\,x_2, 0\,] = [\,x_1 + x_2, 0\,]\,, \quad [\,x_1, 0\,] \cdot [\,x_2, 0\,] = [\,x_1 x_2, 0\,]\,.$$

To umožňuje ztotožnit dvojici $[\,x, 0\,]$ s číslem $x \in \mathbb{R}$; po tomto ztotožnění je $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. V definici násobení komplexních čísel je tak zahrnuto i násobení vektoru z $\mathbb{R}^2$ skalárem z $\mathbb{R}$. Komplexní čísla tvoří s oběma operacemi **komutativní těleso** [1]). Prvkem opačným k číslu $z = [\,x, y\,] \in \mathbb{C}$ je číslo $-z = [\,-x, -y\,] \in \mathbb{C}$ a prvkem inverzním k číslu $z = [\,x, y\,] \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ (kde píšeme 0 místo $[\,0, 0\,]$), je zřejmě číslo

$$\frac{1}{z} = \left[\,\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}\,\right] \in \mathbb{C}\,.$$

Rozepsáním do složek čtenář může ověřit, že rovnice $zw = 1$ s neznámou $w \in \mathbb{C}$ má právě jedno řešení, a to $w = 1/z$. Mnoho pojmů, které budeme dále používat, se zavede analogicky jako v $\mathbb{R}$, tedy např. induktivně zavedeme **celočíselné**

[1]) V zahraniční literatuře se užívají ekvivalenty termínu pole, u nás se přidržujeme tradiční terminologie ovlivněné v tomto případě němčinou.

mocniny s nezáporným exponentem

$$z^0 = 1\,,\ z^1 = z\,,\ z^2 = z\cdot z\,,\ \dots\,,\ z^{n+1} = z\cdot z^n\,, \tag{1.1}$$

a dále pro všechna $z \neq 0$ **celočíselné mocniny se záporným exponentem** $z^{-n} = 1/z^n$, $n \in \mathbb{N}$. Povšimněte si, že je $1^2 = (-1)^2 = 1$. Podobně je

$$i^2 = i \cdot i = [\,0,1\,] \cdot [\,0,1\,] = [\,-1,0\,] = -1\,, \quad (-i)^2 = -1\,.$$

Je-li $[\,x,y\,] \in \mathbb{C}$, pak

$$x + i\,y = [\,x,0\,] + [\,0,1\,] \cdot [\,y,0\,] = [\,x,0\,] + [\,0,y\,] = [\,x,y\,]\,,$$

takže komplexní čísla lze zapisovat i ve tvaru, který čtenář jistě zná již ze střední školy. Z rovnosti $z = x + iy$ obecně neplyne, že $x, y \in \mathbb{R}$, tj. že $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$; kdykoli však dále použijeme zápis komplexního čísla ve tvaru $x + iy$, pak *předpokládáme*, že již platí $x, y \in \mathbb{R}$.

Je-li $z = x + iy$, nazýváme číslo $\overline{z} := x - iy$ číslem **komplexně sdruženým k číslu** z. Snadno lze ověřit, že pro všechna $z, w \in \mathbb{C}$ platí rovnosti:

$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}\,, \quad \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}\,, \quad \overline{\overline{z}} = z\,, \quad z^{-1} = \overline{z}/(z\overline{z})\,.$$

Poznamenejme, že číslo $z\overline{z} = x^2 + y^2$ je vždy nezáporné.

Pro každé číslo $z = x + iy \in \mathbb{C}$ definujeme jeho **absolutní hodnotu** $|z|$ vztahem

$$|z| := \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

Poznamenejme, že funkce $f : z \mapsto |z|$, $z \in \mathbb{C}$ je jednoduchým a důležitým příkladem reálné funkce komplexní proměnné.

Jestliže komplexní čísla interpretujeme jako body roviny, pak je $|z|$ vzdálenost bodu $z = [\,x,y\,]$ od počátku (eukleidovská norma vektoru (x,y)). Analogicky jako v reálném oboru definujeme funkci signum; klademe $\operatorname{sgn} z := z/|z|$ pro $z \neq 0$, $\operatorname{sgn} 0 := 0$. Definice $|z|$ a $\operatorname{sgn} z$ jsou rozšířením definic z oboru $\mathbb{R}$ na $\mathbb{C}$.

Velmi důležitý je fakt, že pro absolutní hodnotu platí i v $\mathbb{C}$ **trojúhelníková nerovnost**. Pro každá dvě čísla $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ je

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|\ ;$$

viz [$\mathbb{V}$], Lemma 11.4.4. Tam lze též na str. 294 nalézt stručné zavedení komplexních čísel.

V $\mathbb{C}$ *nezavádíme* relaci $<$ či $\leq$ jako v $\mathbb{R}$. Komplexní čísla lze uspořádat např. lexikograficky apod., ale ne tak, aby se všechny vlastnosti relace „$<$“ či relace „$\leq$“ z $\mathbb{R}$ přenesly do $\mathbb{C}$. Stačí uvážit, že $i \neq 0$ a že z každé z obou nerovností $i > 0$ a $i < 0$ by plynulo $i^2 = -1 > 0$, což vede ke sporu. V $\mathbb{C}$ lze tedy porovnávat pomocí relací $<$, $\leq$, $>$ a $\geq$ pouze *reálná* čísla; napíšeme-li tedy pro dvě komplexní čísla např. nerovnost $z_1 < z_2$, je v tom implicitně zahrnut předpoklad, že $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$. Poznamenejme ještě, že pro $z = x + iy \in \mathbb{C}$ platí nerovnosti

$$0 \leq |x| \leq |z|\,, \quad 0 \leq |y| \leq |z|\,, \quad 0 \leq |z| \leq |x| + |y|\,. \tag{1.2}$$

Je-li $z \neq 0$, $z = x + iy$, existuje jednoznačně určené $t \in (\,-\pi, \pi\,]$ tak, že

$$x = |z| \cos t\,, \quad y = |z| \sin t\,, \quad \text{tj. } z = |z|(\cos t + i \sin t)\,.$$

Pokud pracujeme se všemi $t \in \mathbb{R}$, je korespondence $z \mapsto t$ jednoznačná modulo 2π. Při $z_1 z_2 \neq 0$, $z_1 = |z_1|(\cos t_1 + i \sin t_1)$, $z_2 = |z_2|(\cos t_2 + i \sin t_2)$, pak je

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|(\cos(t_1 + t_2) + i \sin(t_1 + t_2))\,.$$

Číslo $|z|$ se z historických důvodů nazývá někdy **modul** z a číslo t **argument** z. K tomuto vyjádření komplexních čísel v tzv. **goniometrickému tvaru** se ještě podrobněji vrátíme později.

Poznámka 1.1.1. Rovnice $x^2 + 1 = 0$ nemá v $\mathbb{R}$ žádné řešení, avšak táž rovnice má v $\mathbb{C}$ dvě řešení, i a $-i$. Platí dokonce více: v $\mathbb{C}$ má alespoň jedno řešení *každá algebraická rovnice alespoň prvního stupně*. Toto dokážeme v Kapitole 5. Avšak tato dobrá vlastnost $\mathbb{C}$ přináší i negativní vlastnosti: Uspořádání z $\mathbb{R}$ na $\mathbb{C}$ nelze rozšířit bez ztráty jeho základních vlastností. Čtenáře však může napadnout, proč nepostupujeme obecněji a nedefinujeme analogickou strukturu, tj. komutativní těleso $\mathbb{R}^m$ i pro $m > 2$. Zajímavou odpověď dává *Frobeniova věta*: taková podobná struktura existuje ještě pro $m = 4$ a $m = 8$. V prvním případě pro její prvky, které se nazývají ***kvaterniony***, není příslušné násobení komutativní; ve druhém případě, tj. pro $m = 8$, není příslušné násobení dokonce ani asociativní. Pro ostatní $m \in \mathbb{N}$ již ani takové struktury neexistují. Viz např. [2].

1.2 Topologické a metrické vlastnosti prostoru $\mathbb{C}$

Z teorie normovaných lineárních prostorů je známo, že na množině všech dvojic reálných čísel můžeme definovat normu či metriku mnoha způsoby. Definujme **vzdálenost** $\rho(z_1, z_2)$ dvou komplexních čísel $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ vzorcem

$$\rho(z_1, z_2) := |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}\,. \tag{1.3}$$

Snadno nahlédneme, že $\mathbb{C}$ s touto metrikou a eukleidovský prostor $\mathbb{R}^2$ jsou ***izometricky izomorfní*** a jsou to ***úplné prostory***. Budeme to využívat: Stačí proto některé věci pouze připomenout. Zároveň můžeme definovat již zmíněné „ztotožnění“ $\mathbb{R}$ s množinou $\{z \in \mathbb{C}\,;\, z = [\,x, 0\,],\, x \in \mathbb{R}\}$: Zobrazení, které přiřazuje prvku $[\,x, 0\,]$ množiny $\{[\,x, 0\,]; x \in \mathbb{R}\}$ reálné číslo x, je izometrické, izomorfní a „zachovává“ i násobení, tj. prvku $[\,x, 0\,] \cdot [\,y, 0\,]$ přiřazuje součin xy. Pro další výklad zavedeme nejprve některá označení.

Označení 1.2.1. Pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ označme

$$U_\varepsilon(z) = \{w \in \mathbb{C}\,;\, |w-z| < \varepsilon\},\ \ P_\varepsilon(z) = \{w \in \mathbb{C}\,;\, 0 < |w-z| < \varepsilon\} = U_\varepsilon(z) \setminus \{z\}\,.$$

Často budeme psát $U(z,\varepsilon)$ místo $U_\varepsilon(z)$ a také $P(z,\varepsilon)$ místo $P_\varepsilon(z)$. Není-li poloměr ε podstatný, budeme někdy stručněji psát pouze $U(z)$ a $P(z)$. Množinu $U_\varepsilon(z)$ nazýváme **ε-okolí bodu** z a množinu $P_\varepsilon(z)$ **prstencové ε-okolí bodu** z, přičemž slovo „epsilonové“ při stručnějším vyjádření vynecháváme.

Limita posloupnosti v $\mathbb{C}$ se definuje analogicky jako v $\mathbb{R}$, resp. v $\mathbb{R}^m$. Symbol $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ pro $z_n,\, z \in \mathbb{C}$ znamená

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k \in \mathbb{N})(\forall n \geq k)(z_n \in U_\varepsilon(z))\,. \tag{1.4}$$

Tak jako v reálném oboru říkáme, že posloupnost $\{z_n\}$ ***konverguje*** k z; často píšeme $z_n \to z$. Protože je $\mathbb{C}$ úplný prostor, platí: $z_n \to z$, právě když posloupnost splňuje ***Bolzano-Cauchyho podmínku***

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k \in \mathbb{N})(\forall m,\, n \geq k)(|z_m - z_n| < \varepsilon)\,.$$

Protože má absolutní hodnota v $\mathbb{R}$ i v $\mathbb{C}$ analogické vlastnosti, platí v $\mathbb{C}$ řada čtenáři již známých vět o limitách posloupností; nebudeme je uvádět, neboť by to bylo nudné opakování něčeho, co musíme jako základ pro další výklad předpokládat. V případě $z_n \in \mathbb{R}$ předpokládáme, že čtenář zná definice $\lim_{n\to\infty} z_n = \pm\infty$ a také základní tvrzení o nevlastních limitách posloupností v $\mathbb{R}$.

Také součet s řady $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ komplexních čísel a_k definujeme analogicky jako v $\mathbb{R}$: Pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ definujeme n***-tý částečný součet*** rovností $s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$, a pokud existuje v $\mathbb{C}$ limita posloupnosti $\{s_n\}$, položíme

$$s := \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,.$$

Toto číslo s se nazývá ***součet řady***; symbol $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ se užívá i pro součet s. Je výhodné se domluvit o vynechávání sčítacích mezí vždy v případě, že sčítáme *od indexu* 0 *do* ∞. To znamená, že budeme psát

$$\sum a_k := \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,.$$

Jestliže $\sum |a_k| < \infty$, říkáme jako v $\mathbb{R}$, že řada $\sum a_k$ ***konverguje absolutně***. Pokud řada $\sum a_k$ konverguje a $\sum |a_k| = +\infty$, potom říkáme, že řada $\sum a_k$ ***konverguje neabsolutně***. Připomeneme, že platí např. toto jednoduché tvrzení:

$$\sum |a_k| < \infty \ \Rightarrow\ \sum a_k \ \text{ konverguje}\,,$$

tj. že *každá absolutně konvergentní řada konverguje.* To vyplývá z odhadu pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$, pomocí trojúhelníkové nerovnosti

$$|s_m - s_n| = |a_{n+1} + \cdots + a_m| \le |a_{n+1}| + \cdots + |a_m|\,,$$

který pomocí Bolzano-Cauchyho podmínky dává konvergenci $\sum a_k$. Pro řady v $\mathbb{C}$ nebudeme formulovat a dokazovat ***kritéria konvergence*** a tvrzení analogická tvrzením pro řady v $\mathbb{R}$. Jak později uvidíme, budou pro nás podstatná zejména tvrzení o ***absolutní konvergenci***; srv. [$\mathbb{V}$], Kapitola 11.

V $\mathbb{C}$ jsme dosud nezavedli žádné nevlastní body, takže $\sum (k+1)^{-1} = +\infty$ je zápis v $\mathbb{R}$, v rovině komplexních čísel $\mathbb{C}$ postrádá smysl. Nyní se této otázce budeme věnovat podrobněji.

Systém $\mathcal{O}(P)$ všech otevřených množin v metrickém prostoru (P, ρ) tvoří jeho **topologii**. Tento systém obsahuje prázdnou množinu $\emptyset$, celý prostor P, spolu s každým podsystémem množin i jejich sjednocení a s každým *konečným* podsystémem množin i jejich průnik. **Topologický prostor** je dvojice, skládající se z neprázdné množiny P a ze systému jejích podmnožin τ, který má stejné vlastnosti jako systém všech otevřených množin v metrickém prostoru. Obsahuje tedy $\emptyset$, P a je uzavřený vzhledem ke sjednocení libovolných podsystémů a průniku konečných podsystémů. V topologickém prostoru se prvky τ nazývají **otevřené množiny**, a tak je pojem otevřené množiny přímo součástí definice (P, τ). Další pojmy se definují analogicky jako v metrických prostorech: **uzavřené množiny** jsou doplňky otevřených množin, **kompaktní množiny** v (P, τ) jsou ty, z jejichž *každého* pokrytí otevřenými množinami lze vybrat *konečné* pokrytí, apod.

Je-li $x \in U$, $U \in \tau$, říkáme, že U je **okolím bodu** x. Volbou vhodného systému okolí σ_x bodů $x \in P$ lze popsat topologii τ: Platí $G \in \tau$, jestliže pro každý bod $x \in G$ existuje okolí $U \in \sigma_x$ tak, že $U \subset G$. Systém σ_x musí mít některé vlastnosti analogické vlastnostem systému všech okolí bodu x v metrickém prostoru, např. je-li $U, V \in \sigma_x$, je také $U \cap V \in \sigma_x$. Tím máme k dispozici všechny potřebné pojmy k zavedení „komplexního nekonečna“.

Rozšíření $\mathbb{C}$ o (nevlastní) bod ∞ je vlastně **kompaktifikací** roviny $\mathbb{C}$, tedy vnořením $\mathbb{C}$ do topologického prostoru, který je kompaktní. Položme nejprve $\mathbb{S} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Pro každý bod $z \in \mathbb{C}$ definujeme okolí $U(z)$ pomocí úmluvy z Označení 1.2.1 a pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ položíme

$$U_\varepsilon(\infty) := \{\infty\} \cup \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| > 1/\varepsilon\} \ = \mathbb{S} \setminus \overline{U(0, 1/\varepsilon)}\,, \quad P_\varepsilon(\infty) = U_\varepsilon(\infty) \setminus \{\infty\}\,;$$

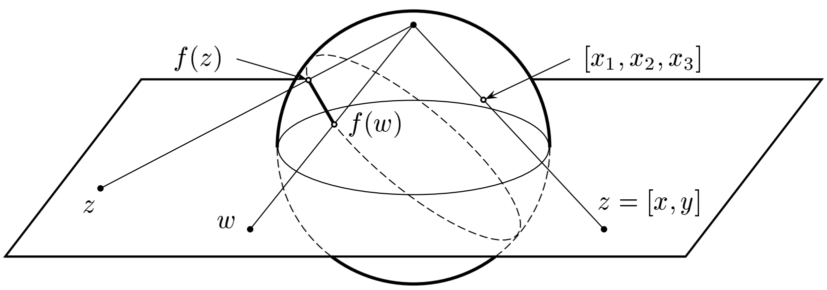
tyto množiny budeme též značit $U(\infty, \varepsilon)$, $P(\infty, \varepsilon)$. V $\mathbb{S}$ určují právě zavedená okolí topologii, přičemž množiny otevřené v $\mathbb{C}$ jsou otevřené i v $\mathbb{S}$. Přitom $\mathbb{S}$ je kompaktní prostor; lze to snadno dokázat: Je-li $\{G_\alpha;\, \alpha \in A\}$ otevřené pokrytí $\mathbb{S}$, existuje $\alpha_0 \in A$ tak, že $\infty \in G_{\alpha_0}$; dále existuje $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ takové, že $\overline{U(\infty, \varepsilon)} \subset G_{\alpha_0}$. Pak je množina $K := \mathbb{S} \setminus G_{\alpha_0}$ uzavřená a omezená v $\mathbb{C}$, resp. $\mathbb{R}^2$ (leží totiž v $S \setminus U(0, 1/\varepsilon)$), a je tedy kompaktní; je pokryta systémem $\{G_\alpha;\, \alpha \in (A \setminus \{\alpha_0\})\}$, z něhož lze vybrat konečné pokrytí $\{G_{\alpha_j};\, j = 1, \ldots, k\}$. Pak $\{G_{\alpha_j};\, j = 0, 1, \ldots, k\}$ je konečné pokrytí $\mathbb{S}$.

Poznámka 1.2.2. Čtenář, obeznámený se základy topologie snadno shledá, že analogickou konstrukci lze provést nejen v $\mathbb{R}^2$ či $\mathbb{R}^m$, ale obecněji v každém lokálně kompaktním topologickém prostoru X. Potřebná okolí „ideálního" bodu ∞ definujeme jako doplňky kompaktních podmnožin prostoru X v $X^* := X \cup \{\infty\}$. Výsledkem je tzv. ***Aleksandrovova*** (***jednobodová***) ***kompaktifikace*** X^* prostoru X, v níž je původní prostor hustým podprostorem vzniklé kompaktifikace; viz též [7].

Ze vztahu (1.4) popisujícího definici limity pomocí okolí je zřejmé, co znamená $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$, a že je to totéž, co lze popsat vztahem $\lim_{n\to\infty} |z_n| = +\infty$, resp. vztahem $\lim_{n\to\infty} |z_n|^{-1} = 0$.

Snadno též nahlédneme, že lze z každé posloupnosti $\{z_n\}$ bodů z $\mathbb{S}$ vybrat posloupnost, která má limitu v $\mathbb{S}$. Z každé omezené posloupností to lze provést „po složkách" pomocí Weierstrassovy věty; viz [$\mathbb{V}$], Větu 2.4.4. Pokud $\{z_n\}$ není omezená, lze vybrat $\{z_{n_k}\}$ tak, že $z_{n_k} \in U_{1/k}(\infty)$. Z toho je patrné, že $\lim_{k\to\infty} z_{n_k} = \infty$. Odtud plyne, že $\mathbb{S}$ je ***sekvenciálně kompaktní***. Není to příliš překvapující, neboť v následující Poznámce 1.2.3 ukážeme, že na $\mathbb{S}$ lze definovat metriku, která generuje právě zavedenou topologii a v metrickém prostoru sekvenciální kompaktnost a kompaktnost splývají; viz [$\mathbb{V}$], Větu 13.4.21. Poznamenáváme, že pokud nemůže dojít k nedorozumění, budeme předpokládat, že čtenář podle kontextu rozliší mezi „komplexním" ∞ a reálným $+\infty$, u něhož budeme zpravidla vynechávat znaménko '+'. Nebudeme však užívat slovní spojení typu „$\{z_k\}$ konverguje k ∞", ačkoli by to bylo z hlediska prostoru $\mathbb{S}$ možné, termín „konverguje" si ponecháme pouze pro případ, kdy hodnota limity leží v $\mathbb{C}$.

Poznámka 1.2.3. Topologický přístup je mnohem jednodušší než metrický, založený na tzv. stereografické projekci, při níž vzdálenost bodů z $\mathbb{C}$ definujeme pomocí vzdálenosti bodů na jednotkové sféře.



Obr. 1.1: Schéma stereografické projekce

Popišme to analyticky: Pišme body z $\mathbb{R}^3$ ve tvaru $[\,x_1, x_2, x_3\,]$ a buď S_3 „jednotková sféra" v $\mathbb{R}^3$, tj. množina všech bodů v $\mathbb{R}^3$ splňujících rovnici $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$. Najděme průsečík sféry S_3 s přímkou, procházející body $[\,x, y, 0\,]$, $[\,0, 0, 1\,]$; jak snadno zjistíme, má souřadnice

$$x_1 = \frac{2x}{x^2+y^2+1}\,, \quad x_2 = \frac{2y}{x^2+y^2+1}\,, \quad x_3 = \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\,.$$

Pomocí těchto vztahů je určeno zobrazení $f : \mathbb{C} \to S_3$. Zřejmě je $x_3 \in [-1,1)$ a f je zobrazení *na* $S_3 \setminus \{[0,0,1]\}$. Nyní Gaussovu rovinu $\mathbb{C}$ doplníme o bod ∞ a definujeme $f(\infty) = [0,0,1]$. Pro z, w v kompaktifikované rovině $\mathbb{S}$ položíme vzdálenost $\varrho^*(z,w)$ v $\mathbb{S}$ rovnou vzdálenosti obrazů $f(z)$ a $f(w)$ v $\mathbb{R}^3$. Pak je ϱ^* metrika na $\mathbb{S}$. Množinově tedy je $\mathbb{S} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, současně však chápeme $\mathbb{S}$ i jako metrický nebo topologický prostor. Snadno nahlédneme, že pro $z, w \in \mathbb{C}$ platí jednoduché vzorce

$$\varrho^*(z,w) = \frac{2|z-w|}{\sqrt{(1+|z|^2)(1+|w|^2)}}, \quad \varrho^*(z,\infty) = \frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}}\,.$$

Opět odtud vidíme, že $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$, právě když $\lim_{n\to\infty} |z_n| = \infty$; podstatnější je však zjištění, že topologie, kterou jsme zavedli v $\mathbb{S}$, je metrizovatelná.

Někdy bývá S_3 nazývána **Riemannova sféra**. Zobrazení $f^{-1} : S_3 \to \mathbb{S}$ se nazývá **stereografická projekce**. Dá se dokázat, že přímkám v $\mathbb{S}$ (tj. přímkám v $\mathbb{C}$, k nimž byl přidán bod ∞), odpovídají na sféře S_3 v zobrazení f kružnice procházející „pólem“ $[0,0,1]$ a že obráceně při stereografické projekci každé kružnici na S_3 odpovídá v $\mathbb{S}$ kružnice nebo přímka spolu s bodem ∞. Čtenář si to může i lehce představit: kružnice na S_3 procházející „pólem“ $[0,0,1]$ určuje rovinu, která protne $\mathbb{C}$ v přímce apod. Viz dále výklad v Kapitole 10. Jak se dále ukáže, pro bod ∞ lze zavést řadu operací a pojmů tak, že se stane „rovnoprávným bodem“ $\mathbb{S}$; toto pojetí je z konce 19. stol.

Pracujeme-li v $\mathbb{S}$, chápeme $\mathbb{S}$ jako topologický prostor; ač je jeho topologie metrizovatelná pomocí metriky ρ^*, nebudeme $\mathbb{S}$ považovat za metrický prostor. Naopak $\mathbb{C} \subset \mathbb{S}$ považujeme *vždy* za metrický prostor s metrikou ρ určenou pomocí (1.3). To znamená, že metrické pojmy, které nejsou topologické, tj. např. omezenost množiny či funkce, vzdálenost množin, stejnoměrná spojitost, jsou vždy chápány vzhledem k metrice ρ. Omezená množina M v $\mathbb{S}$ je ve smyslu této úmluvy taková podmnožina $\mathbb{C}$, pro kterou existuje $r \in \mathbb{R}$ tak, že $M \subset U(0,r)$. Žádná množina obsahující bod ∞ není omezená (tedy ani jednobodová množina $\{\infty\}$).

Připomeňme dále, že podle definice ***souvislá množina*** v (P,ρ) není sjednocením žádných dvou neprázdných disjunktních podmnožin P otevřených v P; viz $[\mathbb{V}]$, str. 360. Definice ukazuje, že tento pojem lze bez nesnází přenést do libovolného topologického prostoru.

Jak $\mathbb{S}$, tak i Gaussova rovina $\mathbb{C}$ a $\mathbb{P} := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ jsou souvislé prostory. To znamená, že jedinými podmnožinami, které jsou v nich současně otevřené a uzavřené, jsou celý prostor a prázdná množina. Otevřené souvislé množiny v $\mathbb{C}$ a v $\mathbb{S}$ se nazývají ***oblasti***. Maximální souvislé podmnožiny množiny $M \subset (P,\varrho)$ se nazývají ***komponenty*** množiny M. Předpokládáme, že čtenář zná kromě vyjmenovaných pojmů i základní tvrzení o souvislosti. Předpokládáme např., že je obeznámen s tvrzením: *Je-li G oblast v $\mathbb{R}^m$ nebo v $\mathbb{C}$, lze každé její dva body spojit lomenou čarou v G*, a že zná i základní důkazový princip, založený na tom, že *je-li $G \subset \mathbb{R}^m$ oblast a je-li $H \subset G$ neprázdná množina zároveň otevřená i uzavřená v G, je $H = G$.* Důležitými příklady souvislých množin v $\mathbb{R}^m$ jsou množiny ***hvězdovité*** a množiny ***konvexní***; viz [$\mathbb{V}$], str. 362. Připomínáme, že v hvězdovité množině $M \subset \mathbb{R}^m$ existuje takový bod x, pro který každá úsečka, která spojuje x s jiným bodem z M, leží celá v M. V konvexní množině M lze v tomto případě za x volit kterýkoli bod z M.

Není obtížné dokázat, že komponentami *otevřené množiny* G v $\mathbb{R}^m$ nebo v $\mathbb{C}$ nebo $\mathbb{S}$ jsou oblasti a že těchto komponent je jen spočetně mnoho. Pro $G = \emptyset$ je tvrzení triviální; je-li $G \neq \emptyset$, lze v každé komponentě množiny G zvolit bod $z = x + iy$ s $x \in \mathbb{Q}$, $y \in \mathbb{Q}$, čímž dostáváme prosté zobrazení množiny všech komponent množiny G do spočetné množiny.

Oblast $G \subset \mathbb{S}$, jejíž doplněk $\mathbb{S} \setminus G$ je souvislý, se nazývá **jednoduše souvislá**; oblast $G \subset \mathbb{S}$, jejíž doplněk má právě dvě komponenty, je **dvojnásobně souvislá**. Obecněji říkáme, že oblast $G \subset \mathbb{S}$ je **n-násobně souvislá** pro $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, pokud má $\mathbb{S} \setminus G$ právě n komponent.

Poznámka 1.2.4. Pokud bychom nezavedli kompaktifikaci $\mathbb{S}$, byla by definice jednoduše souvislé nebo n-násobně souvislé oblasti složitější: Oblast $G \subset \mathbb{C}$ je n-násobně souvislá, pokud $\mathbb{C} \setminus G$ má právě $(n-1)$ *omezených* komponent [2]).

Pro naše potřeby je nejdůležitější definice jednoduše souvislé oblasti a dvojnásobně souvislé oblasti. Snadno nahlédneme, že $\mathbb{S}$, $\mathbb{C}$ a $U(z_0, \varepsilon)$ jsou jednoduše souvislé oblasti, zatímco $\mathbb{P}$, $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ a $P(z_0, \varepsilon)$, $z_0 \in \mathbb{C}$, jsou dvojnásobně souvislé oblasti.

1.3 Základní komplexní funkce

Nyní uvedeme další definice, ve kterých vystupuje „nevlastní bod“ ∞. Zde nejde jen o pouhé připomenutí. Budou pro čtenáře patrně nové a jsou *odlišné* od těch, které zná čtenář z reálné analýzy; nejprve rozšíříme definici aritmetických operací z $\mathbb{C}$ na $\mathbb{S}$.

Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{S}$. Pak definujeme $z_1 + \dots + z_n = \infty$, je-li *právě jeden* ze sčítanců $z_1, \dots, z_n$ roven ∞. V případě, že alespoň dva ze sčítanců jsou rovny ∞, říkáme, že **součet** $z_1 + \dots + z_n$ **nemá smysl**. Speciálně není definován výraz $\infty + \infty$.

Podobně klademe $z_1 \dots z_n = \infty$, jestliže *alespoň jeden* z činitelů $z_1, \dots, z_n$ je roven ∞ a *žádný není roven* 0; je-li mezi činiteli jak 0, tak i ∞, **součin** $z_1 \dots z_n$ **nemá smysl**. Speciálně je $(-1)(\infty) = -(\infty) = \infty$, avšak výrazy $0 \cdot \infty$ a $\infty \cdot 0$ nejsou definovány [3]). Úmluvy o dělení se mohou zdát začátečníkovi podivné. Klademe totiž $z/\infty = 0$ pro všechna $z \in \mathbb{C}$ a $z/0 = \infty$ pro všechna $z \in \mathbb{S} \setminus \{0\}$;

[2]) Zhruba řečeno, jistým způsobem počítáme „díry“ v G: je-li těchto „děr“ právě $(n-1)$, je $G \subset \mathbb{C}$ n-násobně souvislá.

[3]) Čtenář by si měl uvědomit, že odlišnost úmluv o aritmetických operacích s ∞ proti reálnému oboru souvisí s tím, že pracujeme s *jediným* nevlastním bodem.

o podílech $0/0$ a ∞/∞ opět říkáme, že nemají smysl. V tomto duchu rovněž definujeme pro všechna $n \in \mathbb{N}$

$$\infty^n = 0^{-n} = \infty\,, \quad \infty^{-n} = 0^n = 0\,,$$

a konečně také $0^0 = \infty^0 = 1$; to se nám hodí při práci s mocninnými řadami: do $\sum z^k$ lze pak dosadit $z = 0$ a do $\sum z^{-k}$ i $z = \infty$. Z algebraického hlediska není tedy $\mathbb{S}$ s takto zavedenými operacemi „hezkou" strukturou, avšak užité definice se ukáží velmi užitečné.

Při práci v komplexním oboru je vhodné přiřazovat ∞ k číslům z $\mathbb{R}$ a nazývat prvky z $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *reálnými* a prvky z $\mathbb{S}$ *komplexními* čísly. V duchu této úmluvy definujeme $x < \infty$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a také

$$\operatorname{Re}\infty = \infty\,, \quad \operatorname{Im}\infty = 0\,, \quad \overline{\infty} = \infty\,, \quad |\infty| = \infty\,.$$

Poznámka 1.3.1. Ač se může zdát na první pohled nelogické zařazovat ∞ mezi reálná čísla a přitom nedefinovat $\infty+\infty$, je to užitečné. Je však třeba vždy *velmi přesně* vymezit kontext, ve kterém pracujeme; nelze tedy argumentovat tak, že jelikož jsou reálná čísla „vnořena" do komplexních čísel a v reálné analýze je $+\infty + (+\infty) = +\infty$, plyne odtud $\infty + \infty = \infty$ i v $\mathbb{S}$.

Abychom mohli zformulovat základní tvrzení o limitách, ve kterých hrají zavedené definice podstatnou roli, musíme definovat též základní pojmy, se kterými budeme dále pracovat.

Komplexní funkce komplexní proměnné jsou zobrazení z $\mathbb{S}$ do $\mathbb{S}$. Jestliže je obor hodnot komplexní funkce f podmnožinou $\mathbb{C}$, říkáme, že je funkce f je **konečná**. Stejnou úmluvu užíváme i pro zobrazení z $\mathbb{C}$ nebo z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{S}$. Budeme převážně pracovat s konečnými funkcemi a tak, *pokud tomu tak nebude, výslovně na to upozorníme.*

Protože již víme, co znamená $z_k \to z_0$, není složité definovat limitu a spojitost funkce. Uděláme to přímo pro funkce, nebudeme tedy užívat analogu Heineho definice limity. Definice limity komplexní funkce komplexní proměnné pomocí okolí je formálně stejná jako ta, kterou již známe: $\lim_{z\to z_0} f(z) = A$ znamená, že

$$(\forall U(A,\varepsilon))(\exists P(z_0))(\forall z \in P(z_0))(f(z) \in U(A,\varepsilon))\,. \tag{1.5}$$

Čtenář si jistě dokáže představit, že stejná definice „funguje" pro komplexní funkce na obecném metrickém nebo dokonce topologickém prostoru, stačí jen vymezit význam symbolů pro okolí. V metrickém prostoru lze pracovat i s parametrem δ, který určuje prstencové okolí $P(z_0)$. Připomeňme si ještě poznatek, že $\lim_{k\to\infty} z_k = \infty$, právě když $\lim_{k\to\infty} |z_k| = \infty$; v reálné analýze taková ekvivalence platila jen v případě $z_k \to 0$. Jak se ukáže, jsou věty o limitách v komplexním oboru vlastně *jednodušší.*

Tvrzení 1.3.2. *Nechť P je metrický (topologický) prostor a nechť $M \subset P$ a w je hromadný bod M. Nechť f, g jsou zobrazení M do $\mathbb{S}$. Potom platí ty z rovností*

$$
\begin{aligned}
&(1) \qquad \lim_{z\to w} |f(z)| = |\lim_{z\to w} f(z)|\,,\\
&(2) \qquad \lim_{z\to w} (f(z) \pm g(z)) = \lim_{z\to w} f(z) \pm \lim_{z\to w} g(z)\,,\\
&(3) \qquad \lim_{z\to w} (f(z)g(z)) = \lim_{z\to w} f(z) \cdot \lim_{z\to w} g(z)\,,\\
&(4) \qquad \lim_{z\to w} (f(z) : g(z)) = \lim_{z\to w} f(z) : \lim_{z\to w} g(z)\,,
\end{aligned}
$$

pro něž má příslušná pravá strana rovnosti smysl. Speciálně definujeme-li pro $\{z_n\}$, $z_n \to w$, posloupnosti $a_n := f(z_n)$, $b_n := g(z_n)$, $n \in \mathbb{N}$, dostaneme postupně pro posloupnosti bodů z $\mathbb{S}$ např.

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = |\lim_{n\to\infty} a_n|\,,\ \lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n\,,\ldots$$

a eventuálně další analogická tvrzení.

Tvrzení je sice jen zčásti nové, přesto ho však budeme dokazovat. Protože má absolutní hodnota v $\mathbb{S}$ analogické vlastnosti jako v $\mathbb{R}$ a definice limity (1.5) je formálně stejná jako ta, kterou již známe, dokážeme podrobněji jen ty části tvrzení, které jsou nové.

Důkaz Tvrzení 1.3.2. Část (1) dokážeme i pro případ $A \in \mathbb{C}$, který pro nás není nový. Jako v „reálném případě“ je základem odhad $||f(z)| - |A|| \le |f(z) - A|$, vyplývající z trojúhelníkové nerovnosti; podrobněji, platí-li (budeme pracovat v bodě $w = z_0$ pro přiblížení k tradičnímu označení)

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+)(\exists P(z_0))(\forall z \in P(z_0))(|f(z) - A| < \varepsilon)\,,$$

plyne z uvedeného odhadu

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+)(\exists P(z_0))(\forall z \in P(z_0))(||f(z)| - |A|| < \varepsilon)\,.$$

Jestliže $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$, znamená to

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+)(\exists P(z_0))(\forall z \in P(z_0))(|f(z)| > 1/\varepsilon)\,,$$

a protože je $||f(z)|| = |f(z)|$, znamená tato podmínka, že $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = \infty$.

V (2) předpokládáme, že součet (příp. rozdíl) $\lim_{z\to w} f(z) \pm \lim_{z\to w} g(z)$ má smysl, tj. alespoň jedna z limit je konečná. V případě, kdy jsou *obě* limity konečné, se rovnost dokáže tak, jako v základním kurzu analýzy, proto to již nebudeme uvádět. Nechť je tedy např. $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$ a $\lim_{z\to z_0} g(z) =: B \in \mathbb{C}$. Protože pak $\infty + B = \infty$, máme podle definice dokázat

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+)(\exists P(z_0))(\forall z \in P(z_0))(|f(z) \pm g(z)| > 1/\varepsilon)\,.$$

Z podmínky $\lim_{z\to z_0} g(z) = B \in \mathbb{C}$ plyne, že v nějakém okolí $P_1(z_0)$ platí pro všechna z odhad $|g(z)| < |B| + 1$. Je-li $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ dáno, zvolme $P(z_0) \subset P_1(z_0)$ tak, aby v $P(z_0)$ platilo $|f(z)| > 1/\varepsilon + |B| + 1$. Pak také platí

$$|f(z) \pm g(z)| \geq ||f(z)| - |g(z)|| > 1/\varepsilon + |B| + 1 - (|B| + 1) = 1/\varepsilon\,,$$

což dává dokazovaný případ tvrzení. Zbytek úvahy se redukuje na záměnu rolí funkcí f a g, které vystupují v tvrzení symetricky.

Při důkazu (3) se budeme bez újmy na obecnosti zabývat opět pouze případem, kdy alespoň jedna z limit na pravé straně rovnosti je rovna ∞. Nechť $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$. Protože pravá strana rovnosti (3) má smysl, nutně platí $\lim_{z\to z_0} g(z) =: B \neq 0$. Zvolme $P_1(z_0)$ tak, aby pro všechna $z \in P_1(z_0)$ platilo $|g(z)| > |B|/2$. Nyní zvolíme k $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ takové $P(z_0) \subset P_1(z_0)$, aby všude v $P(z_0)$ platilo $|f(z)| > 2/|B|\,\varepsilon$. Potom však $|f(z)g(z)| > (2/|B|\,\varepsilon)(|B|/2) = 1/\varepsilon$ pro všechna tato z, a tedy skutečně $\lim_{z\to z_0} f(z)g(z) = \infty \cdot B = \infty$.

Pro (4) stačí zabývat případem $f \equiv 1$, tedy případem převrácené hodnoty funkce g. Nebudeme vyšetřovat případ $\lim_{z\to z_0} g(z) \in \mathbb{P}$, který je opět triviální. Jestliže je $\lim_{z\to z_0} g(z) = 0$, potom

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+)(\exists P(z_0))(\forall z \in P(z_0))(|g(z)| < \varepsilon)$$

platí právě když

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+)(\exists P(z_0))(\forall z \in P(z_0))(|1/g(z)| > 1/\varepsilon)\,.$$

Podobně v případě $\lim_{z\to z_0} g(z) = \infty$

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+)(\exists P(z_0))(\forall z \in P(z_0))(|g(z)| > 1/\varepsilon)$$

platí právě když

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+)(\exists P(z_0))(\forall z \in P(z_0))(|1/g(z)| < \varepsilon)\,.$$

Odtud a z (3) plyne (4). Protože tvrzení o posloupnostech obdržíme z předchozího jako speciální případ, je tím důkaz dokončen. □

Poznamenejme, že z předchozího Tvrzení 1.3.2 dostaneme snadno tvrzení o spojitosti komplexních funkcí vzhledem k množině. Funkce ***je spojitá v bodě*** $z_0 \in M$ ***vzhledem k*** M, jestliže $\lim_{z\to z_0,\, z\in M} f(z) = f(z_0)$. Pokud bude přitom $f(z_0) = \infty$, budeme mluvit vždy explicitně o **spojitosti v rozšířeném smyslu.**

Pro výpočty limit jsou někdy užitečné vzájemné vztahy mezi limitami, ve kterých vystupuje bod ∞, a jinými limitami. Snadno lze nahlédnout, že platí:

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to\infty} f(z) = A\,, &\quad \text{právě když} \quad \lim_{z\to 0} f(1/z) = A\,,\\
\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty\,, &\quad \text{právě když} \quad \lim_{z\to z_0} (1/f(z)) = 0\,,\\
\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty\,, &\quad \text{právě když} \quad \lim_{z\to 0} (f(1/z))^{-1} = 0\,;
\end{aligned}$$

připomínáme, že funkce $z \mapsto 1/z$ zobrazí $P(0,r)$ na $P(\infty,r) = \mathbb{C} \setminus \overline{U(0,1/r)}$.

Řada výsledků o komplexních funkcích vyplývá z poznatků o reálných funkcích rozkladem komplexní funkce na složky. Analogicky jako v (1.2) dostaneme obdobné odhady pro komplexní funkce, tj. jestliže je $f = f_1 + if_2$, kde f_1, f_2 jsou reálné funkce, platí opět [4])

$$f_1 \le |f_1| \le |f|\,, \quad f_2 \le |f_2| \le |f| \quad \text{a také} \quad |f| \le |f_1| + |f_2|\,. \tag{1.6}$$

Je užitečné uvědomit si též vztahy $f_1 = (f + \overline{f})/2$, $f_2 = (f - \overline{f})/2i$. Jelikož předpokládáme, že je čtenář obeznámen s teorií reálných funkcí reálné proměnné, lze snadno získat základní znalosti o *komplexních funkcích reálné proměnné* rozkladem na složky. Analogicky pracujeme s (vlastní) derivací, takže tyto pojmy lze pro komplexní funkce *reálné proměnné* (podobně jako u zobrazení intervalů do $\mathbb{R}^n$) považovat za známé. Je-li např. $f = f_1 + if_2$ funkce definovaná na intervalu $[\,a,b\,]$, pak $f \in \mathcal{C}^{(1)}([\,a,b\,])$ znamená, že složky f_1, f_2 mají spojité derivace na *uzavřeném intervalu* $[\,a,b\,]$; v krajních bodech a, b pracujeme s jednostrannými derivacemi. Snadno se dokáží vzorce pro derivování komplexních funkcí reálné proměnné:

$$\begin{aligned} (f \pm g)' &= f' \pm g'\,, \quad (fg)' = f'g + fg'\,, \\ (f/g)' &= \frac{f'g - fg'}{g^2}\,, \quad (f \circ g)' = (f' \circ g)\,g'\,; \end{aligned} \tag{1.7}$$

u podílu předpokládáme navíc, že g je všude v uvažovaném oboru nenulová. Čtenář by si měl tyto „přenosy poznatků“ samostatně promyslet. S komplexními funkcemi reálné proměnné se budeme setkávat v souvislosti s křivkami v $\mathbb{C}$ a s křivkovým integrálem. Opět předpokládáme, že čtenář jeho základní vlastnosti zná, proto je níže pouze připomeneme. Některé méně běžné vlastnosti jsou však v dalším textu vyloženy.

Příklady 1.3.3. 1. V (1.1) jsme zavedli mocniny. **Polynomy** v $\mathbb{C}$ jsou lineární kombinace mocnin z^k, $k \in \mathbb{N}_0$, s koeficienty z $\mathbb{C}$, tj. funkce tvaru

$$P(z) := a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0\,, \qquad z \in \mathbb{C}\,.$$

Připomínáme, že při $a_n \ne 0$ je P polynom **n-tého stupně**. Pokud jsou všechny **koeficienty** $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ polynomu P rovny 0, je $P \equiv 0$ a P *nemá stupeň*, zatímco každá *nenulová konstantní funkce* je polynomem stupně 0. Jestliže pro polynom P a čísla $z_0 \in \mathbb{C}$, $p \in \mathbb{N}$, platí identita $P(z) = (z - z_0)^p P_1(z)$, kde P_1 je polynom, pro který $P_1(z_0) \ne 0$, budeme z_0 nazývat **p-násobný kořen** polynomu P.

[4]) V dalším, tak jako u úmluvy o komplexních číslech, zápis $f = f_1 + if_2$ automaticky znamená, že $f_1 = \operatorname{Re} f$ a $f_2 = \operatorname{Im} f$, tj. f_1 je reálná a f_2 imaginární složka f.

Jedním z našich cílů bude mj. *dokázat* základní větu algebry; viz Větu 5.7.8 v Kapitole 5. Ta říká, že každý polynom stupně alespoň jedna má alespoň jeden kořen; jejím důsledkem je pak fakt, že polynom n-tého stupně má pro $n \geq 1$ právě n kořenů, je-li každý z nich počítán tolikrát, kolik činí jeho násobnost. Poznamenejme, že polynomy jsou spojité funkce.

2. Je-li $R(z) = P(z)/Q(z)$ podílem dvou polynomů, přičemž $Q \not\equiv 0$, nazýváme funkci R **racionální funkce**. Jejím definičním oborem je $\mathbb{C} \setminus \{w;\ Q(w) = 0\}$ a R je na něm spojitá. Speciálně $z^{-k} = 1/z^k$, $k \in \mathbb{N}$, jsou funkce definované v $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Zatím nebudeme definovat další funkce a připomeneme několik základních pojmů a vlastností funkcí. Jejich definice jsou analogií definic známých z teorie reálných funkcí.

Poznámka 1.3.4. Snadno nahlédneme, že je-li P polynom, pak $\lim_{z\to\infty} P(z)$ vždy existuje: je-li P konstantní, lze P hodnotou této konstanty *spojitě* rozšířit na $\mathbb{S}$. Je-li P polynom stupně alespoň prvního, $P(z) = a_0 z^n + \cdots + a_n$, $a_0 \neq 0$, je

$$\lim_{z\to\infty} P(z) = \lim_{z\to\infty} z^n(a_0 + a_1/z + \cdots + a_n/z^n) = \infty$$

a P lze rozšířit spojitě (v rozšířeném smyslu) na $\mathbb{S}$ tím, že položíme $P(\infty) = \infty$. Někdy je vhodné pohlížet na polynomy jako na funkce spojité na $\mathbb{S}$.

Obdobná je situace s racionálními funkcemi. Analogicky lze tedy opět každou racionální funkci R rozšířit jednoznačně na spojité zobrazení $\mathbb{S}$ do $\mathbb{S}$. Za určitých okolností je to velmi výhodné (srovnejte např. s Kapitolou 10). Pokud označíme např. $m_{-k}(z) = z^{-k}$, $k \in \mathbb{N}$, je speciálně $m_{-k}(0) = \infty$ a $m_{-k}(\infty) = 0$. Jak již však bylo řečeno, pokud tuto úmluvu použijeme, *výslovně na to upozorníme.*

Poznámka 1.3.5. Zavedení dalších elementárních funkcí je složitější, budeme se mu věnovat v Kapitole 4. Poznamenejme, že i zavedení mocnin s obecnějším exponentem (a to i pro exponenty tvaru $1/n$, $n \in \mathbb{N}$) není v $\mathbb{C}$ tak jednoduché jako v $\mathbb{R}$. Protože tato poznámka má jen informativní charakter, použijeme nedokázané tvrzení, známé ze střední školy pod jménem *Moivrova formule*; srv. (4.27). Snadno nahlédneme, že jednoduchá rovnice s neznámou z

$$z^n = w \tag{1.8}$$

má pro $w = 0$ a pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ jediné řešení $z = 0$; to plyne z toho, že při $z \neq 0$ je $|z^n| = |z|^n > 0$. V obecnějším případě vyjádříme z i w v goniometrickém tvaru $z = r(\cos t + i \sin t)$, $w = \varrho(\cos\theta + i\sin\theta)$ a z rovnosti $z^n = r^n(\cos nt + i \sin nt)$ porovnáním absolutních hodnot dostaneme $r^n = \varrho$ a též $nt = \theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, neboť druhá rovnost $nt = \theta$ platí modulo 2π. Tak dospějeme k vyjádření všech řešení

$$z_k = \sqrt[n]{\varrho} \cdot (\cos((\theta + 2k\pi)/n) + i \sin((\theta + 2k\pi)/n))$$

s $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Pak každé z těchto n čísel lze považovat za „n-tou odmocninu z w“. Řešíme-li paralelně s touto úlohou rovnici $z^n = 1$, pak její „základní“ řešení $z = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$ má významné postavení, neboť postupným násobením čísla $\sqrt[n]{\varrho}(\cos(\theta/n) + i \sin(\theta/n))$ tímto speciálním číslem dostaneme všechna řešení rovnice (1.8). Podrobnější vyšetření této problematiky provedeme v Kapitole 4. Viz též např. [5].

Poznámka 1.3.6. Jak již bylo řečeno, některé poznatky o komplexních funkcích lze získat pomocí rozkladu na reálnou a imaginární část. Je však vhodné si uvědomit, že v případě limit funkcí pro $f = f_1 + if_2$ z $\lim_{z\to w} f(z) = \infty$ *neplyne* jako v „konečném případě“ mechanickým rozkladem na reálnou a imaginární část $\lim_{z\to w} f_1(z) = \infty$ a zároveň $\lim_{z\to w} f_2(z) = 0$. Při zacházení s ∞ je nutno být vždy opatrný. Ačkoli např. $\lim_{x\to 0} 1/x$ neexistuje, pokud ji chápeme jako limitu funkce *reálné proměnné*, protože jednostranné limity jsou různé, je $\lim_{z\to 0} 1/z = 1/0 = \infty$, pokud pracujeme v $\mathbb{S}$.

1.4 Derivování

Podstatně odlišná je situace s derivováním, na tomto místě však připomeneme pouze definici a její důsledky; definice je jednoduchá a po formální stránce stejná jako v $\mathbb{R}$. Odlišnosti, se kterými se dále setkáme, neleží v oblasti kalkulu, ale v „teoretických“ důsledcích definice; budeme se jimi podrobněji zabývat v následující Kapitole 2.

Pro funkci f definovanou v nějakém okolí $U(z_0)$ bodu $z_0 \in \mathbb{C}$ definujeme derivaci $f'(z_0)$ funkce f v bodě z_0 jedním z (ekvivalentních) vztahů

$$f'(z_0) := \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, \quad \text{nebo} \quad f'(z_0) := \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h},$$

je-li limita vpravo konečná. Díky formálně stejné definici jako v $\mathbb{R}$ platí (a obdobně se i dokáží) tvrzení o derivování součtu, rozdílu, součinu, podílu a složené funkce, a podobně platí i vzorce (1.7), tentokrát však pro funkce komplexní proměnné. Důkaz tvrzení o derivování složené funkce provedeme detailně v Kapitole 2. Vyšší derivace f'', resp. $f^{(2)}$, $f^{(3)}$, ... definujeme tak jako v $\mathbb{R}$ rekurentně, tj. pomocí vztahu $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$, $n \in \mathbb{N}$. Pokud existuje $f'(z_0)$, říkáme, že funkce f **je diferencovatelná v bodě** z_0.

Tvrzení následujícího lemmatu je vcelku zřejmé, ale přesto je velmi užitečné. Bylo by možné vystačit s menším počtem v něm uvedených ekvivalentních podmínek, avšak užití vhodně vybrané podmínky umožňuje často snazší a průhlednější důkaz některých tvrzení. S podmínkou uvedenou v (3) se čtenář mohl již setkat při vyšetřování funkcí více proměnných.

Lemma 1.4.1. *Nechť funkce f je definována v jistém okolí $U(z_0)$ bodu $z_0 \in \mathbb{C}$. Potom jsou ekvivalentní tyto tři výroky:*

(1) *Existuje derivace*

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\,; \tag{1.9}$$

(2) *existuje $A \in \mathbb{C}$, pro něž je*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0) - Ah}{h} = 0\,, \tag{1.10}$$

tj. pro každé $\varepsilon > 0$ existuje okolí $U(0) \subset \mathbb{C}$ tak, že pro všechna $h \in U(0)$ je

$$|f(z_0 + h) - f(z_0) - Ah| \leq \varepsilon |h| \; ; \tag{1.11}$$

(3) (*Carathéodoryho podmínka*) *existuje funkce ϑ definovaná v nějakém okolí $U(z_0)$, spojitá v bodě z_0 taková, že pro všechna $z \in U(z_0)$ je*

$$f(z) - f(z_0) = \vartheta(z)(z - z_0) \,. \tag{1.12}$$

Je-li splněna kterákoli z uvedených podmínek, platí rovnosti $f'(z_0) = A = \vartheta(z_0)$.

Důkaz. Platí-li (1.9), platí též (1.10) a naopak: stačí položit $h := z - z_0$, $A = f'(z_0)$ a provést jednoduchou úpravu. Podmínka (1.11) je jen ekvivalentním přepisem (1.10) podle definice limity. Porovnáním s (1.9) vidíme, že spojitost ϑ z (1.12) v bodě z_0 dává (1.9) a $\vartheta(z_0) = f'(z_0)$. Jednoduchou úpravou z (1.9) plyne, že

$$f(z) - f(z_0) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}(z - z_0) \,,$$

takže za $\vartheta(z)$ lze volit podíl $(f(z) - f(z_0))/(z - z_0)$ pro $z \neq z_0$ spojitě rozšířený do bodu z_0 hodnotou $\vartheta(z_0) = f'(z_0)$. Tím je důkaz ekvivalence dokončen. □

Poznámka 1.4.2 (důležitá). Podmínka s nerovností (1.11) z Lemmatu 1.4.1 se často zapisuje ve tvaru [5])

$$f(z_0 + h) - f(z) = f'(z_0)h + o(h) \,.$$

Tento zápis je vyjádřením faktu, že pro funkci $g(h) := f(z_0 + h) - f(z_0) - f'(z_0)h$ platí $g(h)/h \to 0$ pro $h \to 0$. Zápis pomocí (1.11) vyžaduje užití absolutních hodnot. Konkrétní tvar funkce g v mnoha případech nepotřebujeme; v „reálné“ analýze se toto vyjádření často užívá při práci s Taylorovými polynomy, při počítání limit apod.

Historická poznámka 1.4.3. Ekvivalenci z Lemmatu 1.4.1 budeme dále často užívat. Podmínku (3) publikoval CONSTANTIN CARATHÉODORY (1883 – 1950) v [3] a její analogie je *velmi užitečná* při vyšetřování funkcí více reálných proměnných; viz např. [1]. Plyne z ní mj. okamžitě to, co čtenář ví o vlastní derivaci reálné funkce, že totiž *nutnou podmínkou* pro existenci derivace $f'(z_0)$ je *spojitost* f v bodě w.

Dále se budeme postupně seznamovat s teorií, ve které hraje diferencovatelnost funkcí centrální roli. Zavedeme speciální terminologii.

Definice 1.4.4. Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina. Říkáme, že **funkce f je holomorfní v** G, jestliže existuje $f'(z)$ pro všechna $z \in G$.

[5]) Připomínáme čtenáři symboly $O(\cdot)$ a $o(\cdot)$ z Definice 7.4.21 v [$\mathbb{V}$].

Příklad 1.4.5. Existence derivace mocniny $m_n(z) := z \to z^n$, $n \in \mathbb{N}_0$, všude v $\mathbb{C}$ vyplývá jednoduše z Lemmatu 1.4.1, a to takto: Je-li $n = 0$, je tvrzení triviální. Pro $n \geq 1$ a pro libovolně zvolené $z_0 \in \mathbb{C}$ je

$$z^n - z_0^n = \vartheta(z)(z - z_0)\,,$$

kde $\vartheta(z) = z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + \cdots + z_0^{n-1}$, a to pro všechna $z \in \mathbb{C}$. Ze spojitosti polynomů a z Carathéodoryho podmínky (3) z Lemmatu 1.4.1 vyplývá, že funkce m_n je diferencovatelná v bodě z_0 a je tedy holomorfní v $\mathbb{C}$; protože platí rovnost $\vartheta(z_0) = nz_0^{n-1}$, je $m_n'(z) = (z^n)' = nz^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Snadno též nahlédneme, že odtud vyplývá pomocí vět o derivování součtu a součinu, že polynomy jsou funkce holomorfní v $\mathbb{C}$. Podobně racionální funkce $R(z) = P(z)/Q(z)$, kde P, Q jsou polynomy, $Q \not\equiv 0$, je holomorfní v $\mathbb{C} \setminus K$, kde K je (konečná) množina nulových bodů Q.

U holomorfních funkcí užíváme pro izolované nulové body v $\mathbb{C}$ analogickou terminologii jako u polynomů: je-li $w \in \mathbb{C}$ a existuje-li okolí $U(w)$ tak, že $f(z) = 0$ v $U(w)$ právě tehdy, když je $z = w$, říkáme, že w je **izolovaný nulový bod** funkce f. Je-li $p \in \mathbb{N}$ a $f(z) = (z - w)^p g(z)$, g je holomorfní v nějakém okolí $U(w)$ a $g(w) \neq 0$, je číslo p **násobnost nulového bodu** w funkce f. U holomorfních funkcí budeme užívat termín *nulový bod*, u polynomů budeme dávat přednost tradičnímu termínu *kořen*.

1.5 Křivky v $\mathbb{C}$

Jedním z nejdůležitějších pojmů bude pro nás v dalším *pojem křivky.* V této kapitole připomeneme terminologii a několik jednoduchých pojmů a zavedeme některé úmluvy. Intuitivně je patrně čtenáři nejbližší pohlížet na křivku v $\mathbb{C}$ jako na *podmnožinu* $\mathbb{C}$. Tak například pro $z_0 \in \mathbb{C}$ a $r \in \mathbb{R}_+$ se množina

$$K(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z - z_0| = r\}$$

nazývá obvykle ***kružnice*** o středu z_0 a poloměru r. Pro $z = x + iy$ platí však rovněž

$$K(z_0, r) = \{[\,x, y\,] \in \mathbb{C}\,;\, x = x_0 + r\cos t,\ y = y_0 + r\sin t,\ t \in [\,0, 2\pi\,]\}\,.$$

Tento popis v sobě zahrnuje i jisté „pořadí“ bodů, které je určeno zobrazením $\varphi(t) = r(\cos t + i\sin t)$, $t \in [\,0, 2\pi\,]$; toto zobrazení je tzv. **parametrizace** množiny $K(z_0, r)$. I když budeme studovat vlastnosti do jisté míry nezávislé na parametrizaci, je pro nás mnohem výhodnější pracovat přímo se *spojitými zobrazeními intervalů* nežli s jejich obory hodnot. Proto zavedeme následující terminologii.

Spojité zobrazení φ kompaktního intervalu $[\,a, b\,] \subset \mathbb{R}$ do $\mathbb{C}$ budeme nazývat [6]) **křivka**. Bod $\varphi(a)$ se nazývá **počáteční bod** křivky φ; budeme ho značit $\mathrm{pb}(\varphi)$.

[6]) Někdy se též užívá podrobnější označení *křivka v Jordanově smyslu*; my toto označení užívat nebudeme.

Bod $\varphi(b)$ se nazývá **koncový bod** křivky φ a budeme ho značit $\mathrm{kb}(\varphi)$. Oba body $\varphi(a), \varphi(b)$ jsou **krajní body** křivky φ. Je-li $\varphi(a) = \varphi(b)$, říkáme, že φ je **uzavřená křivka**. Obor hodnot φ značíme $\langle\varphi\rangle$, tj. klademe $\langle\varphi\rangle := \varphi([\,a, b\,])$, a nazýváme ho **geometrický obraz** křivky φ. Uzavřený interval je souvislá kompaktní množina a φ je spojitá funkce. Proto z tvrzení o spojitém obrazu kompaktu vyplývá, že $\langle\varphi\rangle$ je souvislá kompaktní množina; viz [$\mathbb{V}$], Věty 13.4.14 a 13.5.8. Množina $\langle\varphi\rangle$ může být jednobodová, pokud je φ konstantní, ale třeba i čtverec $[\,0, 1\,] \times [\,0, 1\,]$ v případě, že φ je tzv. *Peanova křivka.*

Je-li křivka φ prostá, nazýváme $\langle\varphi\rangle$ **oblouk**. Pokud je φ uzavřená křivka a restrikce $\varphi|[a, b)$ je prosté zobrazení, budeme φ nazývat **Jordanova křivka** a její geometrický obraz **topologická kružnice**. Velmi často, zejména v mluveném projevu, *bývá rozlišování mezi funkcí* $\varphi : [\,a, b\,] \to \mathbb{C}$ *a množinou* $\langle\varphi\rangle \subset \mathbb{C}$ *poněkud nedůsledné.*

Poznámka 1.5.1. Ve všech popsaných případech je $\langle\varphi\rangle$ souvislá kompaktní množina. Obecněji, každý souvislý kompakt K nazýváme **kontinuum**, a pokud obsahuje alespoň dva různé body, **vlastní kontinuum**. Zjistit, zda lze takové kontinuum $K \subset \mathbb{R}^2$ „parametrizovat“, není triviální. Tzv. *Hahn-Mazurkiewicz-Sierpińského věta* říká, že K je geometrický obraz nějaké křivky, právě když je K kompaktní, souvislá a *lokálně souvislá*, což ilustruje důležitost pojmu lokální souvislosti.

Příklad 1.5.2. Jsou-li z, w komplexní čísla, pak křivku φ definovanou vztahem

$$\varphi(t) = z + (w - z)t\,, \qquad t \in [\,0, 1\,]\,,$$

nazýváme **orientovaná úsečka** $[\,z; w\,]$, podrobněji orientovaná úsečka s počátečním bodem z a koncovým bodem w [7]). **Opačně orientovanou úsečkou** k úsečce $[\,z; w\,]$ je úsečka $[\,w; z\,]$. Stručněji mluvíme o úsečce $[\,z; w\,]$ místo o orientované úsečce $[\,z; w\,]$.

Připomínáme čtenáři, že se patrně již na střední škole setkal se vzorcem (v tomto okamžiku ho chápeme jen jako *zkrácení zápisu* po složkách, později však ukážeme, že vzorec platí i pro všechna $t \in \mathbb{C}$)

$$\mathrm{e}^{it} := \cos t + i \sin t\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

a že platí

$$(\cos t + i \sin t)' = -\sin t + i \cos t = i(\cos t + i \sin t) = i\mathrm{e}^{it}.$$

Nyní vzorec využijeme: Je-li $z_0 \in \mathbb{C}$ a $r \in \mathbb{R}_+$, pak křivka definovaná rovností

$$\varphi(t) = z_0 + r\mathrm{e}^{it}, \qquad t \in [\,0, 2\pi\,]\,,$$

[7]) Čtenáře upozorňujeme, že při označení dvojic, uzavřených intervalů v $\mathbb{R}$ apod. užíváme jako oddělovací znaménko čárku, u úseček a polygonálních křivek, které zavedeme později, budeme užívat středník.

se nazývá **kladně orientovaná kružnice** se středem z_0 a poloměrem r. V úvahách, kde není nebezpečí z nedorozumění, se často *mluví* stručně o kružnici či úsečce a označují se tak jak *křivky*, tak i *jejich geometrické obrazy.*

Jelikož se s geometrickými obrazy kružnice a úsečky velmi často pracuje, domluvíme se na tom, že pokud není řečeno něco jiného, jsou parametrizovány přesně tak, jako v předcházejícím Příkladu 1.5.2. Tyto parametrizace budeme někdy nazývat **standardní**.

Křivka definovaná velmi obecně, pouze jako spojité zobrazení uzavřeného intervalu do $\mathbb{C}$, by vyžadovala speciální definici křivkového integrálu. Vyhneme se jí a budeme se zabývat převážně *speciálními křivkami*, které jsou spojitě diferencovatelné, nebo po částech spojitě diferencovatelné, neboť to v mnoha případech postačí. Nebudeme se však vázat na geometrický význam, tj. existenci tečen či polotečen, a těmito otázkami se hlouběji nebudeme zabývat.

Derivací φ v intervalu $[a,b]$ rozumíme funkci, rovnou $\varphi'(t)$ pro $t \in (a,b)$, $\varphi'_+(a)$ v bodě a, $\varphi'_-(b)$ v bodě b. Je-li takto definovaná derivace spojitá v $[a,b]$, říkáme, že křivka $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ je **regulární**. Křivku φ budeme nazývat **po částech regulární**, existuje-li dělení $D = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ intervalu $[a,b]$ tak, že každá z restrikcí $\varphi|[t_{k-1}, t_k]$, $1 \le k \le n$, je regulární. Odtud plyne že derivace $\varphi'(t)$ neexistuje v (a,b) nejvýše v bodech tohoto dělení D; tam však existují příslušné jednostranné derivace (speciálně pracujeme vždy s křivkami *konečné délky*; viz dále). Nyní uzavřeme tuto dodatečnou úmluvu:

Úmluva 1.5.3 (důležitá). Pokud nebude řečeno něco jiného, znamená v dalším výkladu **křivka** vždy *po částech regulární křivka.* Proto tam, kde budeme pracovat s obecnějším pojetím křivky, *výslovně na to upozorníme.*

1.6 Křivkový integrál

Při zavádění integrálu reálných funkcí reálné proměnné se obvykle dokazuje, že Newtonův integrál je jakožto funkcionál na prostoru $\mathcal{C}([a,b])$ všech spojitých funkcí na $[a,b]$ nezáporný, spojitý a lineární [8]). Dále se dokazuje „aditivita vůči integračnímu oboru“, odvozují se pravidla pro výpočet (metoda per partes a substituční metoda) a zkoumá se vztah k integrálu Riemannovu. Některé z těchto vlastností se snadno přenesou i na případ křivkového integrálu v $\mathbb{C}$ [9]).

Připomeneme ještě tvrzení, která nám umožňovala integrály počítat:

Lemma 1.6.1. *Nechť f, g jsou spojitě diferencovatelné reálné či komplexní funkce na*

[8]) Funkcionály jsou funkce, které jsou definovány např. na normovaných lineárních prostorech, systémech funkcí apod. Nezápornost zde znamená, že *nezáporným funkcím* jsou přiřazována *nezáporná čísla*.

[9]) Monotonii např. rozumně přenést nemůžeme, neboť na $\mathbb{C}$ nemáme uspořádání.

intervalu I. Potom pro $\alpha < \beta$, $\alpha, \beta \in I$ platí

$$\int_\alpha^\beta f(t)g'(t)dt = f(\beta)g(\beta) - f(\alpha)g(\alpha) - \int_\alpha^\beta f'(t)g(t)dt \ .$$

Nechť J je interval a $h : I \to J$ je funkce spojitě diferencovatelná na $I \subset \mathbb{R}$. Potom pro každou spojitou funkci f na J a $\alpha < \beta$, $\alpha, \beta \subset I$ platí

$$\int_\alpha^\beta f(h(t))h'(t)dt = \int_{h(\alpha)}^{h(\beta)} f(u)du \ .$$

Důkaz. Stačí zvážit, že je-li $H' = f'g$, je $(fg - H)' = fg'$. Podobně, je-li ve druhém případě $F' = f$, pak $(F \circ h)' = (F' \circ h)h' = (f \circ h)h'$, z čehož lehce plyne tvrzení. □

Definice 1.6.2. Je-li $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ spojitá, definujeme (Newtonův) integrál

$$\int_a^b f(t)dt := \int_a^b \operatorname{Re} f(t)dt + i \int_a^b \operatorname{Im} f(t)dt \ . \tag{1.13}$$

Stejnou rovností definujeme samozřejmě integrál i v případě, že f je spojitá na (a, b) a lze ji spojitě rozšířit na $[a, b]$. V obecnějším případě, kdy existuje dělení $D = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ intervalu $[a, b]$ tak, že každou z restrikcí $f|(t_{k-1}, t_k)$ lze spojitě rozšířit na $[t_{k-1}, t_k]$, $k = 1, \ldots, n$, klademe

$$\int_a^b f(t)dt := \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(t)dt \ . \tag{1.14}$$

Také v tomto případě, a to i když není f definována v bodech dělení D, říkáme, že f je **po částech spojitá** v intervalu $[a, b]$.

Poznámka 1.6.3. Poslední vzoreček (1.14) je zbytečný, pokud čtenář disponuje obecnější definicí Newtonova integrálu z omezené funkce f spojité v $[a, b] \setminus K$, kde K je konečná množina. Na hodnotách f v bodech množiny K pak hodnota integrálu nezávisí. Čtenář by si měl uvědomit, že minimálním prostředkem, s nímž vystačíme, je integrál ze spojité funkce na uzavřeném intervalu: ten jsme pouze nepodstatně zobecnili.

Definice 1.6.4. Nechť $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$, $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$ je křivka a f je spojitá (komplexní) funkce na $\langle\varphi\rangle$. **Integrál z funkce f podél křivky** φ definujeme rovností

$$\int_\varphi f(z)dz := \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \ .$$

Poslední integrál lze upravit na tvar

$$\int_a^b \big((\operatorname{Re} f \circ \varphi)\, \varphi_1' - (\operatorname{Im} f \circ \varphi)\, \varphi_2'\big) + i \int_a^b \big((\operatorname{Im} f \circ \varphi)\, \varphi_1' + (\operatorname{Re} f \circ \varphi)\, \varphi_2'\big) \ ;$$

pro čtenáře, který se zatím setkal pouze s integrálem reálných funkcí reálné proměnné, slouží toto vyjádření jako podrobnější vysvětlení; všechny integrály samozřejmě chápeme jako integrály Newtonovy.

Při integraci komplexních funkcí je užitečné mít k dispozici nerovnost mezi absolutní hodnotou integrálu a integrálem z absolutní hodnoty integrandu. Dokažme, že pro každou po částech spojitou *komplexní* funkci f na intervalu $[a, b]$ platí nerovnost

$$\Big|\int_a^b f(t)dt\Big| \le \int_a^b |f(t)|dt\ . \tag{1.15}$$

Označme w integrál na levé straně nerovnosti (1.15). Je-li $w = 0$, nerovnost platí. V následujícím odhadu využíváme toho, že integrál z reálné části funkce je roven reálné části integrálu. Pokud $w \ne 0$, pak

$$|\overline{w}||w| = \int_a^b \overline{w} f(t)dt = \int_a^b \mathrm{Re}(\overline{w} f(t))dt \le \int_a^b |\overline{w}||f(t)|dt = |\overline{w}| \int_a^b |f(t)|dt\ ,$$

a stačí obdrženou nerovnost dělit hodnotou $|\overline{w}|$. Speciálně, pro křivkový integrál z $f = 1$ dostaneme:

$$\Big|\int_\varphi dz\Big| \le \int_a^b |\varphi'(t)|dt = \int_a^b \Big(\big(\varphi_1'(t)\big)^2 + \big(\varphi_2'(t)\big)^2\Big)^{1/2} dt =: L(\varphi)\,; \tag{1.16}$$

poslední integrál v (1.16) je **délka křivky** φ, kterou značíme $L(\varphi)$; viz $[\mathbb{V}]$, Definici 10.4.2 a Příklad 10.4.3.

Spojité funkce na $\langle\varphi\rangle$ tvoří komplexní normovaný lineární prostor $C := \mathcal{C}(\langle\varphi\rangle)$, definujeme-li standardně

$$\|f\|_C = \max\{|f(z)|;\ z \in \langle\varphi\rangle\} = \max\{|f(\varphi(t))|;\ t \in [a, b]\}\ ;$$

je-li z kontextu zřejmé, ve kterém prostoru pracujeme, index u označení normy vynecháváme.

Důsledek 1.6.5. *Pro křivku* $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ *a* $f \in \mathcal{C}(\langle\varphi\rangle)$ *platí nerovnost*[10])

$$\Big|\int_\varphi f(z)dz\Big| \le \|f\|\, L(\varphi)\,. \tag{1.17}$$

Důkaz. Stačí uvážit, že z (1.15) plyne, že

$$\Big|\int_\varphi f(z)dz\Big| = \Big|\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\Big| \le \|f\| \int_a^b |\varphi'(t)|dt = \|f\|\, L(\varphi)\,, \tag{1.18}$$

což dává (1.17). □

---

[10]) Budeme-li se na následující odhad odvolávat, budeme užívat označení „základní odhad“.

Jsou-li $f, g \in \mathcal{C}(\langle\varphi\rangle)$, $c \in \mathbb{C}$, pak zřejmě platí

$$\int_\varphi (f+g) = \int_\varphi f + \int_\varphi g\,, \quad \int_\varphi cf = c\int_\varphi f$$

a křivkový integrál z Definice 1.6.4 je (komplexním) lineárním funkcionálem na prostoru $\mathcal{C}(\langle\varphi\rangle)$.

Často je užitečné umět nahradit křivku φ *jinou křivkou* ψ s tímtéž geometrickým obrazem tak, aby např. pro každou funkci f spojitou na $\langle\varphi\rangle = \langle\psi\rangle$ platila rovnost $\int_\varphi f = \int_\psi f$.

Definice 1.6.6. Nechť φ je křivka definovaná na $[\,a, b\,]$ a nechť ω je rostoucí funkce se spojitou derivací na $[\,a_1, b_1\,]$ [11]), zobrazující $[\,a_1, b_1\,]$ na $[\,a, b\,]$. Potom říkáme, že křivka $\psi := \varphi \circ \omega$ vznikla z φ **změnou parametru**.

Tvrzení 1.6.7. *Nechť $\varphi : [\,a, b\,] \to \mathbb{C}$ je křivka a nechť ω je rostoucí funkce se spojitou derivací na $[\,a_1, b_1\,]$, zobrazující interval $[\,a_1, b_1\,]$ na $[\,a, b\,]$. Definujme $\psi := \varphi \circ \omega$. Je-li $f \in \mathcal{C}(\langle\varphi\rangle)$, platí*

$$\int_\psi f(z)dz = \int_\varphi f(z)dz\,. \tag{1.19}$$

Důkaz. Stačí uvážit, že ψ je dle věty o derivování složené funkce (po částech regulární) křivka: následující rovnosti

$$\int_{a_1}^{b_1} f(\psi(t))\psi'(t)dt = \int_{a_1}^{b_1} f(\varphi(\omega(t)))\varphi'(\omega(t))\omega'(t)dt = \int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u)du$$

dávají (1.19) přepisem podle definice křivkového integrálu. □

Poznámka 1.6.8 (důležitá). Je-li $\varphi : [\,a_1, b_1\,] \to \mathbb{C}$ regulární křivka, lze změnou parametru přejít k regulární křivce $\psi : [\,a_2, b_2\,] \to \mathbb{C}$ tak, že platí (1.19). Stačí volit např. *lineární funkci* ω tvaru

$$\omega(t) := \frac{(b_1 - a_1)t + (a_1 b_2 - a_2 b_1)}{b_2 - a_2}\,, \quad t \in [\,a_2, b_2\,]\,.$$

Uveďme několik speciálních případů: Jestliže volíme $\omega(u) = a_1 + u(b_1 - a_1)$, $u \in [\,0, 1\,]$, je $\psi = \varphi\circ\omega$ definována na $[\,0, 1\,]$. Opačný přechod mezi intervaly $[\,0, 1\,]$ a $[\,a_1, b_1\,]$ umožňuje volba $\omega(u) = (u - a_1)/(b_1 - a_1)$, $u \in [\,a_1, b_1\,]$.

Pro změnu parametru je užitečná i volba funkce $\omega : [\,a_1, b_1\,] \to [\,a, b\,]$, pro kterou $\omega'(a_1+) = \omega'(b_1-) = 0$. Potom pro křivku ψ je $\psi'_+(a_1) = \psi'_-(b_1) = 0$. Např. pro $[\,a_1, b_1\,] = [\,a, b\,] = [\,-1, 1\,]$ stačí volit $\omega(u) = \sin(\pi u/2)$. Postupným skládáním již popsaných zobrazení lze pro libovolné intervaly $[\,a_1, b_1\,]$, $[\,a_2, b_2\,]$ a regulární křivku $\varphi\colon [\,a_1, b_1\,] \to \mathbb{C}$ přejít změnou parametru k takové křivce $\psi\colon [\,a_2, b_2\,] \to \mathbb{C}$, pro kterou $\psi'_+(a_2) = \psi'_-(b_2) = 0$.

[11]) V krajních bodech a_1, b_1 uvažujeme jednostranné derivace.

Příklad 1.6.9. Pro orientovanou úsečku $[\,z, w\,]$ s počátečním bodem z a koncovým bodem w je její délka rovna $|w - z|$ a platí rovnost

$$\int_\varphi f(z)dz = (w - z)\int_0^1 f(z + (w - z)t)dt\,.$$

Příklad 1.6.10. Je-li φ kladně orientovaná kružnice se středem z_0 a poloměrem r, pak jako v Příkladu 1.5.2 položíme $\varphi(t) = z_0 + r(\cos t + i \sin t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [\,0, 2\pi\,]$, a dostaneme

$$\int_\varphi f(z)dz = ir\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\,\mathrm{e}^{it}dt\,. \tag{1.20}$$

Spočteme-li délku křivky φ, je ve shodě s naší zkušeností rovna $2\pi r$; viz $[\,\mathbb{V}\,]$, Příklad 10.4.5. V případě, že $f(z) = 1/(z - z_0)$, je integrál v (1.20) roven

$$\int_\varphi \frac{dz}{z - z_0} = ir\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{it}}{r\mathrm{e}^{it}}dt = 2\pi i\,; \tag{1.21}$$

na tomto místě by si čtenář měl povšimnout, že tento integrál z „krásné“ funkce, na $\langle\varphi\rangle$ spojité a dokonce v $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ holomorfní, *není* pro uzavřenou křivku φ roven 0.

Definice 1.6.11. Splývá-li koncový bod $\mathrm{kb}(\varphi_1)$ křivky $\varphi_1 : [\,a_1, b_1\,] \to \mathbb{C}$ s počátečním bodem $\mathrm{pb}(\varphi_2)$ křivky $\varphi_2 : [\,a_2, b_2\,] \to \mathbb{C}$, potom definujeme

$$\begin{aligned} \psi_1(t) &:= \varphi_1(t)\,, & t &\in [\,a_1, b_1\,]\,,\\ \psi_2(t) &:= \varphi_2(t - b_1 + a_2)\,, & t &\in [\,b_1, b_1 + b_2 - a_2\,] \end{aligned}$$

a položíme

$$\begin{aligned} \psi(t) &:= \psi_1(t)\,, & t &\in [\,a_1, b_1\,]\,,\\ \psi(t) &:= \psi_2(t)\,, & t &\in [\,b_1, b_1 + b_2 - a_2\,]\,. \end{aligned}$$

V tomto případě budeme psát $\psi = \varphi_1 \dotplus \varphi_2$ a ψ budeme nazývat **orientovaný součet křivek** φ_1 a φ_2.

Tento pojem lze zřejmým způsobem rozšířit na libovolný konečný počet křivek $\varphi_k : [\,a_k, b_k\,] \to \mathbb{C}$, $k = 1, \dots, n$, pokud pro $k = 1, \dots, (n - 1)$ platí rovnosti $\mathrm{kb}(\varphi_k) = \mathrm{pb}(\varphi_{k+1})$. Píšeme pak $\psi = \varphi_1 \dotplus \cdots \dotplus \varphi_n$.

Lemma 1.6.12. *Je-li $f \in \mathcal{C}(\langle\psi\rangle)$ a $\psi = \varphi_1 \dotplus \varphi_2$, potom platí*

$$\int_\psi f(z)dz = \int_{\varphi_1} f(z)dz + \int_{\varphi_2} f(z)dz\,. \tag{1.22}$$

Důkaz. Stačí si uvědomit, že při označení z Definice 1.6.11 platí pro křivky φ_k, ψ_k, $k = 1, 2$, $\psi = \varphi_1 \dotplus \varphi_2$ a každou $f \in \mathcal{C}(\psi)$ s ohledem na Tvrzení 1.6.7

$$\int_\psi f(z)dz = \int_{\psi_1} f(z)dz + \int_{\psi_2} f(z)dz = \int_{\varphi_1} f(z)dz + \int_{\varphi_2} f(z)dz \ ;$$

tím je důkaz dokončen. □

Indukcí dostaneme z Lemmatu 1.6.12 tvrzení pro libovolný konečný počet křivek φ_k, $k = 1, \dots, n$:

Důsledek 1.6.13. *Je-li $f \in \mathcal{C}(\langle\psi\rangle)$ a $\psi = \varphi_1 \dotplus \cdots \dotplus \varphi_n$, potom platí*

$$\int_\psi f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{\varphi_k} f(z)dz \ . \tag{1.23}$$

Poznámky 1.6.14. 1. Využijeme-li označení z Definice 1.6.11, pak je křivka $\varphi : [\,a, b\,] \to \mathbb{C}$ (podrobněji: po částech regulární křivka) orientovaným součtem konečně mnoha regulárních křivek φ_k, $k = 1, \dots, n$, které vzniknou restrikcí φ na intervaly $[\,x_{k-1}, x_k\,]$ dělení $D = \{a = x_0 < \cdots < x_n = b\}$ intervalu $[\,a, b\,]$, na nichž má φ spojitou derivaci.

2. V mnoha případech, které budeme dále vyšetřovat, budeme pracovat s pojmy nezávislými na změně parametru křivky. Zavádění ekvivalence křivek vůči změnám parametru by však bylo pro naše potřeby neúčelné, ač této ekvivalence často využíváme.

3. Není příliš podstatné, že jsme křivky „spojili“, stejně můžeme zacházet (a později to skutečně uděláme) se souborem konečně mnoha (uzavřených) křivek, které na sebe „nenavazují“; pro tento případ však zavedeme další označení. Viz pojem *cyklu* v Kapitole 11.

Poznámka 1.6.15 (důležitá). V Poznámce 1.6.8 jsme popsali, jak sestrojit pro libovolné intervaly $[\,a_1, b_1\,]$, $[\,a_2, b_2\,]$ a regulární křivku $\varphi\colon [\,a_1, b_1\,] \to \mathbb{C}$ změnou parametru křivku $\psi\colon [\,a_2, b_2\,] \to \mathbb{C}$, pro kterou $\psi'_+(a_2) = \psi'_-(b_2) = 0$.

Nechť φ je křivka na $[\,a, b\,]$ a nechť $D = \{a = x_0 < \cdots < x_n = b\}$ je takové dělení intervalu $[\,a, b\,]$, že pro $\varphi_k := \varphi|(x_{k-1}, x_k)$ lze φ'_k spojitě rozšířit na interval $[\,x_{k-1}, x_k\,]$ pro všechna $k = 1, \dots, n$. Jestliže nyní změnou parametru pomocí $\omega_k\colon [\,x_{k-1}, x_k\,] \to [\,x_{k-1}, x_k\,]$ přejdeme od křivek $\varphi_k\colon [\,x_{k-1}, x_k\,] \to \mathbb{C}$ ke křivkám $\psi_k\colon [\,x_{k-1}, x_k\,] \to \mathbb{C}$ takovým, že $(\psi_k)'_+(x_{k-1}) = (\psi_k)'_-(x_k) = 0$, pak pro křivku $\psi = \psi_1 \dotplus \cdots \dotplus \psi_n$ existuje spojitá derivace ψ' na $[\,a, b\,]$. Je-li $\omega\colon [\,a, b\,] \to [\,a, b\,]$ taková, že $\omega|[\,x_{k-1}, x_k\,] = \omega_k$, pak změnou parametru pomocí ω lze přejít od křivky φ k *regulární* křivce ψ. V případě potřeby to budeme využívat.

Křivku ψ, která z $\varphi : [\,a, b\,] \to \mathbb{C}$ vznikne složením s $\omega(t) = -t$, kde $t \in [\,-b, -a\,]$, tj. $\psi = \varphi \circ \omega$, budeme značit $\dot{-}\varphi$ a budeme ji nazývat **opačnou křivkou** nebo podrobněji **opačně orientovanou křivkou** ke křivce φ. Potom snadno obdržíme

$$\int_{\psi} f(z)dz = \int_{-b}^{-a} f(\psi(t))\psi'(t)dt = \int_{-b}^{-a} f(\varphi(\omega(u)))\varphi'(\omega(u))\omega'(u)du =$$
$$= -\int_{a}^{b} f(\varphi(v))\varphi'(v)dv = -\int_{\varphi} f(z)dz\ .$$

Zavedeme zkrácené označení a pro $\varphi = \varphi_1 \dotplus (\dot- \varphi_2)$ píšeme pouze $\varphi = \varphi_1 \dot- \varphi_2$. Analogicky postupujeme i při větším počtu sčítanců.

Je-li φ uzavřená křivka, jsou body jejího geometrického obrazu v jistém smyslu rovnocenné: ať ji „proběhneme" od kteréhokoliv bodu jakožto počátku, křivkový integrál se nezmění v následujícím smyslu:

Lemma 1.6.16. *Nechť $\varphi = \varphi_1 \dotplus \varphi_2$ je uzavřená křivka a $\psi = \varphi_2 \dotplus \varphi_1$. Pak je*

$$\int_{\psi} f(z)dz = \int_{\varphi} f(z)dz$$

pro každou funkci $f \in \mathcal{C}(\langle\varphi\rangle)$.

Důkaz. Stačí uvážit, že

$$\int_{\varphi} f(z)dz = \int_{\varphi_1} f(z)dz + \int_{\varphi_2} f(z)dz$$

pro každou funkci $f \in \mathcal{C}(\langle\varphi\rangle)$. □

Lemma 1.6.17. *Nechť f je spojitá v oblasti $G \subset \mathbb{C}$. Pak jsou ekvivalentní tyto dvě podmínky:*

(1) *Pro každé dvě křivky φ, ψ v G, pro které $\mathrm{pb}(\varphi) = \mathrm{pb}(\psi)$, $\mathrm{kb}(\varphi) = \mathrm{kb}(\psi)$, platí rovnost $\int_\varphi f = \int_\psi f$.*

(2) *Pro každou uzavřenou křivku ω v G je $\int_\omega f = 0$.*

Důkaz. Zvolme libovolně body $z, w \in G$ a dvojici křivek φ, ψ v G s počátečním bodem w a koncovým bodem z. Potom $\omega = \varphi \dot- \psi$ je uzavřená křivka v G; zbytek je zřejmý. □

Úmluva 1.6.18. Nastane-li jeden z případů, popsaných v předcházejícím Lemmatu 1.6.17, říkáme, že (**křivkový**) **integrál z funkce** f **nezávisí na cestě v** G.

Definice 1.6.19. Jsou-li dány body $z_0, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$, pak křivku

$$\varphi := [\,z_0; z_1\,] \dotplus [\,z_1; z_2\,] \dotplus \cdots \dotplus [\,z_{n-1}; z_n\,]$$

nazýváme **lomená čára** nebo též **polygonální křivka**. Budeme ji zapisovat ve tvaru $[\, z_0; z_1; \dots; z_n \,]$. Abychom se vyhnuli oddělenému vyšetřování speciálních případů, je užitečné připustit, že počáteční a koncový bod některé z úseček splývají; pak je standardní parametrizace takové „úsečky“ konstantní zobrazení intervalu $[\, 0, 1 \,]$.

Poznámka 1.6.20. V partii o metrických prostorech jsme v $[\,\mathbb{V}\,]$, Věta 3.5.12, dokázali, že je-li $G \subset \mathbb{R}^m$ oblast, lze každé dva body G spojit lomenou čarou ležící v G. Speciálně, porovnáme-li použitou terminologii, dostáváme tvrzení, že každé dva body oblasti $G \subset \mathbb{C}$ lze spojit polygonální křivkou v G.

Se speciálními polygonálními křivkami, které „ohraničují“ trojúhelníky nebo obdélníky, budeme dále často pracovat. Budeme také potřebovat relativně hlubokou větu z topologie $\mathbb{R}^2$, kterou však dokazovat *nebudeme*. Poznamenejme, že existují i elementární, ale značně pracné důkazy této věty.

Věta 1.6.21 (Jordan 1887*). *Nechť φ je Jordanova křivka. Potom $\mathbb{S} \setminus \langle\varphi\rangle$ má právě dvě komponenty, z nichž právě jedna je omezená. Hranicí každé z těchto oblastí je $\langle\varphi\rangle$.*

Připomínáme, že v kontextu předcházející věty je omezenou komponentou $\mathbb{S} \setminus \langle\varphi\rangle$ ta, která neobsahuje bod ∞. Neomezená komponenta $\mathbb{S} \setminus \langle\varphi\rangle$ obsahuje ∞.

Definice 1.6.22. V kontextu předcházející věty nazýváme omezenou komponentu množiny $\mathbb{S} \setminus \langle\varphi\rangle$ **vnitřkem** a neomezenou komponentu množiny $\mathbb{S} \setminus \langle\varphi\rangle$ **vnějškem** křivky φ. Definice 5.4.9 je zobecněním tohoto speciálního případu. Pro vnitřek se užívá označení $\operatorname{Int}\varphi$ a pro vnějšek $\operatorname{Ext}\varphi$.

1.7 Konvergence posloupností a řad funkcí

Připomeneme několik poznatků o konvergenci posloupností a řad funkcí. Analogicky jako u funkcí reálné proměnné zavádíme i pro komplexní funkce komplexní proměnné *stejnoměrnou* a také *lokálně stejnoměrnou* konvergenci.

Definice 1.7.1. Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost (komplexních) funkcí definovaných na (libovolné) množině $A \neq \emptyset$. Potom říkáme, že posloupnost $\{f_n\}$ **konverguje stejnoměrně na A k funkci f**, je-li splněna podmínka

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k \in \mathbb{N})(\forall x \in A)(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq k)(|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)\,. \tag{1.24}$$

Píšeme pak $f_n \rightrightarrows f$ na A. Zápis $f_n \rightrightarrows$ na A znamená, že *existuje* taková f definovaná na A, že $f_n \rightrightarrows f$ na A.

Říkáme, že posloupnost funkcí $\{f_n\}$ na otevřené množině $G \subset \mathbb{C}$ konverguje **lokálně stejnoměrně na G k funkci f**, jestliže ke každému $z \in G$ existuje okolí $U(z) \subset G$ tak, že $f_n \rightrightarrows f$ na $U(z)$. Píšeme pak $f_n \rightrightarrows_{\mathrm{loc}} f$ na G. Podobně zápis $f_n \rightrightarrows_{\mathrm{loc}}$ na G znamená, že existuje taková funkce f definovaná na G, že $f_n \rightrightarrows_{\mathrm{loc}} f$ na G [12]).

Je vhodné si uvědomit, že pro funkce f_n a f omezené [13]) na A je $f_n \rightrightarrows f$ na A, právě když $\alpha_n := \sup\{|f_n(z) - f(z)|;\ z \in A\} \to 0$; α_n je „supremová norma" $\|f_n - f\|$ rozdílu funkcí f_n a f. Nutnou a postačující podmínkou pro $f_n \rightrightarrows f$ na A je **Bolzano-Cauchyho podmínka**, tj. posloupnost funkcí $\{f_n\}$ konverguje stejnoměrně na množině A, právě když

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k \in \mathbb{N})(\forall m, n \geq k)(\forall z \in A)(|f_m(z) - f_n(z)| < \varepsilon)\,. \tag{1.25}$$

Čtenáři by měly být tyto pojmy spolu s jejich vlastnostmi známé v daleko větší obecnosti, např. v $\mathbb{R}^m$ nebo na metrických prostorech. Tak např. je křivkový integrál *spojitým* lineárním funkcionálem v následujícím smyslu:

Lemma 1.7.2. *Jestliže $f_n \in \mathcal{C}(\langle\varphi\rangle)$, $n \in \mathbb{N}$, a funkce f_n konvergují stejnoměrně k f na $\langle\varphi\rangle$, je*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\varphi f_n = \int_\varphi f\,.$$

Důkaz. Stačí uvážit, že pro $n \to \infty$ platí

$$\Big|\int_\varphi f_n - \int_\varphi f\Big| \leq \Big|\int_\varphi (f_n - f)\Big| \leq \|f_n - f\|\, L(\varphi) \to 0\,,$$

což již dokazuje tvrzení. □

Poznámka 1.7.3. Předcházející tvrzení umožňuje záměnu pořadí limity a integrace podél křivky φ. Analogické tvrzení platí zřejmě i pro stejnoměrně konvergentní řadu spojitých funkcí. Srovnej s [$\mathbb{V}$], Kapitola 15.

Patrně nejdůležitějším typem konvergence, se kterým budeme dále převážně pracovat, je *lokálně stejnoměrná konvergence.* Budeme ji také nazývat **kompaktní konvergencí** [14]), a to vzhledem k následujícímu důležitému tvrzení, které říká, že v podmínkách, v jakých budeme dále pracovat, tyto dva pojmy splývají. Speciální případ je dokázán např. v Lemmatu 15.3.9 v [$\mathbb{V}$], důkaz však připomeneme.

Lemma 1.7.4. *Posloupnost $\{f_n\}$ konverguje lokálně stejnoměrně na otevřené množině $G \subset \mathbb{C}$, právě když pro každou* kompaktní *množinu $K \subset G$ je*

$$f_n \rightrightarrows \ \text{na } K\,. \tag{1.26}$$

[12]) V symbolu $\rightrightarrows_{\mathrm{loc}}$ je „loc" odvozeno z anglického „locally".
[13]) Připomínáme definici: říkáme, že funkce f je omezená, pokud je omezená funkce $|f|$.
[14]) Tento termín je běžný v anglických učebnicích (*compact convergence*).

Důkaz. Nechť platí (1.26) pro každou kompaktní $K \subset G$. Zvolme libovolně $z \in G$ a pak (omezené) okolí $U(z)$ tak, aby $\overline{U(z)} \subset G$. Tento uzávěr je kompaktní, takže platí podle (1.26) $f \rightrightarrows$ na $\overline{U(z)}$, a tím spíše $f_n \rightrightarrows$ na $U(z)$. Odtud vyplývá, že ze stejnoměrné konvergence na každé kompaktní množině $K \subset G$ plyne $f_n \rightrightarrows_{\text{loc}}$ na G.

Obrácenou implikaci obdržíme z definice kompaktnosti: Nechť $K \subset G$ je kompakt; z podmínky $f_n \rightrightarrows_{\text{loc}}$ na G plyne, že existuje pokrytí K systémem okolí $\{U(z); z \in K\}$ tak, že $U(z) \subset G$ pro každé $z \in K$ a je $f_n \rightrightarrows$ na $U(z)$ pro každé $z \in G$. Z tohoto pokrytí K vybereme konečné pokrytí $\{U(z_1), \dots, U(z_m)\}$ kompaktu K. Pak k danému $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ určíme čísla $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{N}$ tak, že

$$(\forall w \in U(z_j))(\forall n \geq k_j)(|f_n(w) - f(w)| < \varepsilon), \qquad j = 1, \dots, m,$$

a zvolíme $k = \max\{k_1, \dots, k_m\}$. Pak pro všechna $z \in K \subset \bigcup_{j=1}^m U(z_j)$ je při $n \geq k$ splněna nerovnost $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$. □

Analogická tvrzení platí i pro řady komplexních funkcí; jejich formulaci přenecháme čtenáři jako cvičení. Na závěr této části připomeneme tvrzení analogické Weierstrassovu M-testu (viz např. Větu 15.2.2 v [$\mathbb{V}$]).

Věta 1.7.5 (M-test). *Nechť $A \neq \emptyset$, nechť $f_n : A \to \mathbb{C}$ a nechť existují čísla M_n tak, že $|f_n| \leq M_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a že řada $\sum M_n$ konverguje. Pak řady $\sum |f_n|$ a $\sum f_n$ konvergují stejnoměrně na A.*

Důkaz. Pro částečné součty s_n řady $\sum f_k$ platí při $m > n$ odhad

$$\sup\{|s_m(z) - s_n(z)|; z \in A\} \leq M_{n+1} + \ldots + M_m$$

a vzhledem ke konvergenci $\sum M_n$ je posloupnost částečných součtů $\{s_n\}$ „stejnoměrně cauchyovská“. □

Úmluva 1.7.6. Lokálně stejnoměrná konvergence řady spojitých funkcí zaručuje spojitost součtu (srv. [$\mathbb{V}$], Poznámka 15.3.5), avšak její přerovnání může změnit hodnotu součtu a dokonce i její konvergenci. Možnost přerovnávat řady beze změny jejich konvergence a součtu zaručuje absolutní konvergence. Je vhodné mít k dispozici současně i absolutní konvergenci řady v každém bodě. Budeme říkat, že *řada funkcí $f_k : X \to \mathbb{C}$* **normálně konverguje v** *X, jestliže ke každému bodu $x \in X$ existuje okolí $U = U(x)$ tak, že pro $\|f_k\|_{U(x)} := \sup\{|f_k(w)|; w \in U(x)\}$ řada $\sum \|f_k\|_{U(x)}$ konverguje.*

Zde přívlastek *normální* vyznačuje „konvergenci supremových norem“ na každém okolí U [15]). Takto konvergují např. mocninné řady v kruhu konvergence apod. Jestliže řada funkcí $\sum f_k$ konverguje normálně v G, pak zřejmě konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně v G. Normální konvergence se zřejmě přenáší i na „vybrané řady“ a my ji budeme mnohokrát využívat.

---

[15]) Index u normy tedy značí množinu, na které jsou funkce definovány, ne příslušný prostor.

Historická poznámka 1.7.7. O historii zavádění komplexních čísel jsme se podrobněji zmínili v Úvodu. Za zmínku stojí fakt, že „geometrický pohled“ na problematiku funkcí komplexní proměnné přijal LOUIS AUGUSTIN CAUCHY (1789 – 1857) teprve v roce 1825. Práce, kterou napsal JEAN-ROBERT ARGAND (1768 – 1822) v r. 1806 a také její zdokonalená verze z r. 1815 měly v tomto směru menší vliv než práce Cauchyho. Cauchymu také náleží většina základních výsledků o řadách; jsou obsaženy v jeho práci z r. 1821.

Stereografickou projekci používal již PTOLEMAIOS (asi 100 – 168) k zobrazování hvězdné oblohy. Popsané užití pochází od GEORGA FRIEDRICHA BERNHARDA RIEMANNA (1826 – 1866), v tisku se patrně poprvé objevilo v práci CARLA GOTTFRIEDA NEUMANNA (1832 – 1925). Topologický přístup umožnil teprve vznik topologie. Jednobodová kompaktifikace $\mathbb{C}$ je speciálním případem tzv. *Aleksandrovovské kompaktifikace*; PAVEL SERGEJEVIČ ALEKSANDROV (1896 – 1982) byl zakladatelem sovětské topologické školy a významně se zasloužil o studium (bi)kompaktních topologických prostorů [16]).

Definice derivace je standardní, zajímavější je všimnout si Lemmatu 1.4.1. Podmínky (2) a (3) se často užívají při studiu funkcí více proměnných, resp. zobrazení z $\mathbb{R}^m$ do $\mathbb{R}^k$; v tom případě se A, resp. ϑ interpretují jako *matice*; viz [1].

Křivka je relativně složitý topologický pojem, jehož definice se zpřesňovala řadu let. Kořeny tohoto pojmu sahají k řecké matematice, v níž vrcholily klasifikací křivek, kterou podal ve svých komentářích PAPPOS (? – ?) ve druhé polovině 3. stol. Další přínosy souvisejí se vznikem analytické geometrie a infinitezimálního počtu; tak např. RENÉ DESCARTES (1596 – 1650) studoval rovinné křivky stupně vyššího než 2. Infinitezimální metody studia křivek nacházíme již u ISAACA NEWTONA (1643 – 1727). Problém určení *délky* křivky byl dokonce jedním z motivů vzniku infinitezimálního počtu. Další pokrok přinesl vznik diferenciální geometrie, v níž se tyto metody dále rozvinuly. Cauchy se ve svých pracích nejprve omezoval na velmi jednoduché křivky složené z úseček a postupně dospěl k práci s uzavřenými křivkami. Problematiku komplexních funkcí komplexní proměnné studoval cca od r. 1814, výhodnost užití kružnic místo hranic intervalů v některých úvahách si však uvědomil teprve v r. 1827; viz [9], str. 136.

Pojem „obecné“ křivky jako *spojitého* zobrazení f intervalu $[\,a,b\,]$ do $\mathbb{C}$ resp. $\mathbb{R}^m$ se objevuje r. 1887 u CAMILLA JORDANA (1838 – 1922). Pro některé aplikace používal pojem *jednoduché křivky*. Vyslovil a „dokázal“ (ne zcela korektně) Větu 1.6.21; její první bezchybný důkaz podal teprve r. 1905 OSWALD VEBLEN (1880 – 1960). Čtenář by si měl povšimnout, že budeme převážně studovat vlastnosti nezávislé na parametrizaci, ale za křivku považujeme zobrazení φ, ne celou třídu parametrizací křivky φ.

Pojetí křivky jakožto kontinua $K \subset \mathbb{R}^2$, které je *řídké* v $\mathbb{R}^2$, lze stopovat ke GEORGU CANTOROVI (1845 – 1918). Jinak řečeno, množina K nemá vnitřní body. Tato podmínka je reakcí na objev GIUSEPPE PEANA (1858 – 1932), který r. 1890 sestrojil spojité zobrazení intervalu $[\,a,b\,] \subset \mathbb{R}^1$ *na* jednotkový čtverec $[\,0,1\,] \times [\,0,1\,] \subset \mathbb{R}^2$; je to křivka ve smyslu *Jordanovy definice*, snadno lze však ukázat, že takové zobrazení *není prosté*. Spojitá zobrazení $\varphi : [\,a,b\,] \to \mathbb{R}^m$, pro něž $(\langle\varphi\rangle)^\circ \neq \emptyset$, se nazývají *Peanovy křivky*.

Jestliže je φ po částech regulární křivka, je její délka $L(\varphi)$ konečná. Při obecnějším pojetí křivky jakožto spojitého zobrazení φ intervalu $[\,a,b\,]$ do $\mathbb{C}$ to již není pravda, dokonce ani v případě, že φ je prosté. Poznamenejme, že obecně se délka $L(\varphi)$ definuje vzorcem $L(\varphi) := \sup\{\sum_{k=1}^{n} |\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})|;\ D = \{a = t_0 < \cdots < t_n = b\} \in \mathcal{D}([\,a,b\,])\}$,

[16]) V ruské terminologii se užíval pro kompaktní prostor termín bikompaktní prostor; viz též [$\mathbb{V}$], str. 363.

kde supremum se uvažuje vzhledem ke všem dělením D intervalu $[a, b]$. Základní aparát pro obecné křivky, analogický tomu, který vyložíme pro *po částech regulární* křivky, je vybudován např. v [6].

V otázce konvergence posloupností a řad funkcí si Cauchy nejprve význam stejnoměrné konvergence neuvědomoval. V prvních krocích k jejímu využití měl Cauchy předchůdce, význam pro spojitost limity spojitých funkcí (ale ne pro záměnu součtu řady a integrálu!) si uvědomil nejpozději v práci publikované r. 1853. Dříve, již r. 1842, dospěl k pojmu stejnoměrné konvergence Carl Wilhelm Theodor Weierstrass (1815 – 1897) a patrně první dokázal věty o derivování a integraci řad funkcí „člen po členu“. Pojem stejnoměrné konvergence pak intenzivně využívali Weierstrassovi žáci, kteří přispěli k tomu, že se stal brzo obecně známý.

Pro pojem *bezpodmínečné* (*absolutní*) konvergence dokázal základní tvrzení o shodném součtu přerovnané řady r. 1837 Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 – 1859). Pojem *podmínečné* (*neabsolutní*) konvergence analyzoval jako první Riemann r. 1854 (věta o přerovnávání: viz [$\mathbb{V}$], str. 292; tento zásadní výsledek byl publikován po Riemannově smrti). Odhady typu Věty 1.7.5 pro mocninné řady užíval v modifikované formě již Niels Henrik Abel (1802 – 1829) (stejnoměrný odhad zbytku). Pojem normální konvergence kombinuje výhody absolutní a lokálně stejnoměrné konvergence. Zavedl ho r. 1908 René Baire (1874 – 1932). Napsal (citát je přeložen z [8]): *Ačkoli zavedení každého nového pojmu musí být provedeno po pečlivé úvaze, zdálo se mi nutné charakterizovat krátkou frází případ nejjednodušší a převládající formy stejnoměrné konvergence řad, jejichž členy jsou v absolutní hodnotě odhadnuty nezápornými členy konvergentní číselné řady* (*což se někdy nazývá Weierstrassovo kritérium*). *Nazývám tyto řady* normálně konvergentní *a doufám, že lidé tuto moji inovaci omluví. Mnoho důkazů o řadách a trochu později o nekonečných součinech se použitím tohoto pojmu, který je mnohem snadněji použitelný než stejnoměrná konvergence, značně zjednoduší.* Využití v partiích jako je funkcionální analýza ukázalo, že tento Baireův krok byl dobře uvážen.

Literatura:

[1] Acosta, E. G., Delago, C. G.: *Fréchet vs. Carathéodory*, Amer. Math. Monthly **101** (1994), str. 332 – 338.

[2] Bečvář, J.: *Je možno z bodů prostoru udělat čísla ?*, str. 81 – 97, obsaženo v : *6. seminář o filozofických otázkách matematiky a fyziky*, JČMF, Brno, 1992.

[3] Carathéodory, C.: *Funktionentheorie I, II*, Birkhäuser, Basel, 1950.

[4] Černý, I.: *Analýza v komplexním oboru*, Academia, Praha, 1983.

[5] Kořínek, V.: *Základy algebry*, Nakladatelství Československé akademie věd, Praha, 1953.

[6] Král, J.: *Teorie potenciálu I*, SPN, Praha, 1965.

[7] Lukeš, J.: *Zápisky z funkcionální analýzy*, Karolinum, nakl. UK, Praha, 1998.

[8] Remmert, R.: *Theory of complex functions*, Springer, New York, 1991, (překlad druhého vydání *Funktionenlehre I.* z r. 1989; první vydání německého originálu je z r. 1984 (Springer), poslední z r. 1995 (Springer)).

[9] Smithies, F.: *Cauchy and the creation of complex function theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

Kapitola 2

Mocninné řady

2.1 Úvod

V této kapitole je vyložen aparát mocninných řad. Shrnujeme v ní vlastnosti obecně známé z elementárních učebnic (reálné) analýzy a uvádíme i některé vlastnosti složitější; viz např. [$\mathbb{V}$], Kapitola 16. Čtenář ji může zběžně projít a vrátit se k ní pouze v případě, že by něčemu o mocninných řadách dále nerozuměl. Pokud je s mocninnými řadami v komplexním oboru již seznámen, může tuto kapitolu přeskočit. Důležité pojmy jsou opět graficky vyznačeny **polotučnou antikvou**, i když patrně nebudou pro čtenáře nové. Připomínáme, že u sumačních znaků budeme opět *vynechávat meze v případě, že se sčítá od* 0 *do* ∞. Na konci kapitoly připomínáme užitečné věty, které se *někdy* v reálné analýze dokazují; my je dokážeme později, jakmile budeme mít k dispozici základní tvrzení teorie komplexních funkcí komplexní proměnné.

2.2 Základní vlastnosti

Definice 2.2.1. Nechť $z_0, a_k \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}_0$. Řada funkcí (proměnné z) tvaru

$$\sum a_k(z - z_0)^k\,, \tag{2.1}$$

se nazývá **mocninná řada**. Čísla a_k, $k \in \mathbb{N}_0$, jsou **koeficienty** řady (2.1) a číslo z_0 je její **střed**.

Příklad 2.2.2. Nejjednodušším netriviálním příkladem mocninné řady (a zároveň velmi důležitým) je **geometrická řada** s prvním členem rovným 1, která zřejmě konverguje právě pro ta $z \in \mathbb{C}$, pro něž $|z| < 1$:

$$\frac{1}{1-z} = \sum z^k = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots\,.$$

Tento vzorec je pro $z \in (-1, 1)$ standardní částí středoškolské látky, často se však uvádí bez odůvodnění konvergence; viz [$\mathbb{V}$], Příklad 3.3.1, str. 81.

Mocninná řada (2.1) konverguje vždy alespoň v bodě z_0; v komplexní rovině $\mathbb{C}$ má přitom velmi jednoduché konvergenční chování. To vyplývá z následujícího tvrzení, které pochází od Nielse Henrika Abela (1802 – 1829).

Lemma 2.2.3 (Abel 1826). *Jestliže mocninná řada* (2.1) *konverguje v bodě* $\zeta \in \mathbb{C}$, $\zeta \neq z_0$, *pak konverguje* absolutně *pro všechna* $z \in \mathbb{C}$, *vyhovující nerovnosti*

$$|z - z_0| < |\zeta - z_0| . \tag{2.2}$$

Důkaz. Nechť $\zeta \neq z_0$ a nechť $z \in \mathbb{C}$ vyhovuje nerovnosti (2.2). Protože řada (2.1) konverguje v bodě ζ, platí $\lim_{k\to\infty} |a_k(\zeta - z_0)| = 0$ a existuje tedy číslo $M \in \mathbb{R}_+$ tak, že $|a_k(\zeta - z_0)| \leq M$ pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$. Je tedy

$$|a_k(z - z_0)^k| = |a_k(\zeta - z_0)^k| \cdot \left|\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right|^k \leq M \left|\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right|^k \tag{2.3}$$

pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$. Pro (2.1) jsme tak našli konvergentní majorantu; je jí geometrická řada s kvocientem menším než 1. □

Definice 2.2.4. Říkáme, že **mocninná řada konverguje** nebo **je konvergentní**, konverguje-li alespoň ve *dvou různých* bodech. Číslo R, $0 \leq R \leq +\infty$,

$$R := \sup_{z\in\mathbb{C}}\{|z - z_0|;\ \sum a_n(z - z_0)^n \text{ konverguje v bodě } z\} \tag{2.4}$$

se nazývá **poloměr konvergence** řady (2.1). Je-li $R > 0$, nazývá se množina

$$U(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C}\,;\ |z - z_0| < R\}$$

kruh konvergence řady (2.1).

Tato terminologie je vcelku přirozená. Z Lemmatu 2.2.3 a z definice suprema vyplývá, že řada (2.1) konverguje v kruhu $U(z_0, R)$ a diverguje pro všechna z, $|z - z_0| > R$ [1]). Zdůrazněme ještě jednu důležitou vlastnost: U geometrické řady je v kruhu konvergence $U(0, 1)$ *posloupnost členů řady omezená* a vně $U(0, 1)$ není *omezená.* Tuto vlastnost mají i obecné mocninné řady.

Lemma 2.2.5. *Posloupnost členů mocninné řady* (2.1) *je v každém bodě kruhu konvergence omezená a není omezená v žádném bodě z doplňku jeho uzávěru. Platí tedy*

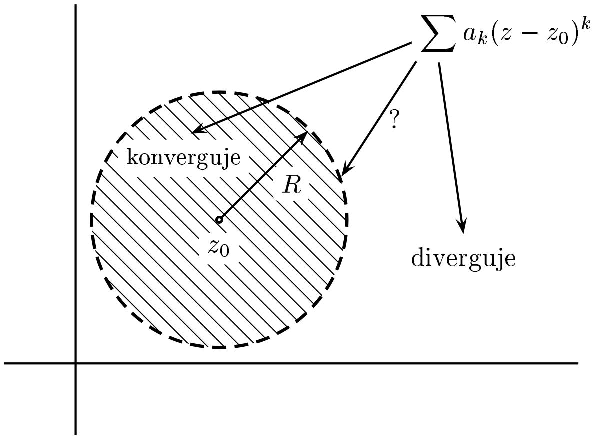
$$R = \sup\{t \geq 0;\ \text{posloupnost } \{|a_k|t^k\} \text{ je omezená}\} .$$

---

[1]) Jestliže pro poloměr konvergence R platí $0 < R < \infty$, nazývá se někdy množina $\{z; |z - z_0| = R\}$ **konvergenční kružnice**; tento název není příliš šťastně utvořen, neboť vzbuzuje dojem, že řada v bodech této množiny konverguje. Právě pro ně však *nelze* o konvergenci mocninné řady (2.1) obecně nic říci.

Důkaz. Stačí si uvědomit, že předpoklad zaručuje možnost odhadu (2.3) z důkazu Lemmatu 2.2.3. □

Příklady 2.2.6. 1. Řady $\sum (k!)z^k$ a $\sum z^k/k!$ ukazují, že pro poloměr konvergence mohou nastat i extrémní případy $R = 0$ a $R = +\infty$. Poloměr konvergence R těchto dvou řad lze určit např. pomocí podílového (d'Alembertova) kritéria.



Obr. 2.1: Konvergence mocninné řady

2. Řada $\sum z^k/a^k$ pro $a \in (0, \infty)$ má poloměr konvergence $R = a$. Z limitní verze Cauchyho odmocninového kritéria (viz [$\mathbb{V}$], str. 93) plyne s ohledem na rovnost

$$\sqrt[k]{|z^k/a^k|} = |z|/a$$

konvergence pro všechna $z \in U(0, a)$ a divergence pro všechna z, pro něž je $|z| > a$.

3. Uvažte, že řady

$$\sum z^k\,, \qquad \sum z^{k+1}/(k+1)\,, \qquad \sum z^{k+2}/((k+1)(k+2))$$

mají poloměr konvergence $R = 1$ a na hranici $\{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| = 1\}$ kruhu konvergence $U(0, 1)$ se chovají rozdílně; prvá na ní všude diverguje, protože neplatí $z^k \to 0$, druhá konverguje v bodě -1 a diverguje v bodě 1, třetí na ní konverguje všude.

Úmluva 2.2.7. Absolutní konvergence řady (2.1) v bodě z závisí v následujícím smyslu na vzdálenosti $|z - z_0|$: Substitucí $z = z_0 + w$ lze vyšetřování konvergence řady (2.1) převést na vyšetřování řady $\sum a_k w^k$ se středem 0. Proto se v dalším textu budeme omezovat na řady o středu $z_0 = 0$. Tvrzení budeme vždy vyslovovat pro řady v obecném tvaru (2.1), budeme je však dokazovat pouze pro případ $z_0 = 0$, tj. pro řadu

$$\sum a_k z^k\,, \tag{2.5}$$

čímž se zápis formálně zjednoduší. Na případ řady (2.5) se obecný případ (2.1) převede jednoduchou substitucí: Stačí zaměnit $z - z_0$ za z.

Lemma 2.2.8. *Nechť řada* $\sum a_k(z-z_0)^k$ *má poloměr konvergence* $R > 0$*. Potom konverguje v* $U(z_0, R)$ *normálně, tedy i absolutně a lokálně stejnoměrně, k funkci spojité v* $U(z_0, R)$*.*

Důkaz. Připomeňme předchozí úmluvu, že v důkazu se automaticky omezujeme na případ (2.5) a že předpokládáme $R > 0$. Absolutní konvergence v $U(0, R)$ je důsledkem Lemmatu 2.2.3 a Definice 2.2.4, v níž jsme definovali kruh konvergence. Je-li $0 < r < R$, existuje podle (2.4) číslo z_1 tak, že $r < |z_1| < R$ a že řada $\sum |a_k z_1^k|$ konverguje. Z toho plyne existence $M \in R_+$ tak, že $|a_k z_1^k| \le M$ pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$. Je-li $|z| < r$, je

$$|a_k z^k| \le |a_k r^k| \le \Big(\frac{r}{|z_1|}\Big)^k |a_k z_1^k| \le M\Big(\frac{r}{|z_1|}\Big)^k,$$

tj. členy řady $\sum a_k z^k$ lze majorizovat členy konvergentní geometrické řady (s kvocientem $r/|z_1| < 1$). Řada (2.5) konverguje na $U(0, r)$ absolutně a stejnoměrně podle Weierstrassova M-testu, a tedy lokálně stejnoměrně na $U(0, R)$; speciálně je součet spojitá funkce v $U(0, R)$. □

Poznámka 2.2.9. V souladu s Poznámkou 1.7.6 z Kapitoly 1 lze říci, že konverguje-li řada (2.1) v bodě $\zeta \ne z_0$, konverguje **normálně** v $U(z_0, |\zeta - z_0|)$. Připomeňme, že pomocí M-testu dokazujeme současně jak absolutní, tak i lokálně stejnoměrnou konvergenci řady v kruhu $U(z_0, |\zeta - z_0|)$.

Úmluva 2.2.10. Pro mocninné řady budeme používat tuto úmluvu: pokud není řečeno něco jiného, vztahem

$$f(z) := \sum a_n(z - z_0)^n \tag{2.6}$$

je definována funkce $f : M \to \mathbb{C}$, kde $M \subset \mathbb{C}$ je množina *všech* z, pro něž řada v (2.6) konverguje. Je-li R poloměr konvergence řady, je zřejmě $U(z_0, R) \subset M$, avšak M může navíc obsahovat i některé body na hranici kruhu konvergence mocninné řady.

Poznámka 2.2.11. Jestliže $R_1, R_2 > 0$ jsou po řadě poloměry řad

$$f(z) := \sum a_k(z - z_0)^k \quad \text{a} \quad g(z) := \sum b_k(z - z_0)^k,$$

pak řady pro součet či rozdíl $f \pm g$ vzniklé sečtením či odečtením „člen po členu“ mají poloměr konvergence *alespoň* $\min\{R_1, R_2\}$. Také mocninná řada o středu z_0, jejíž koeficienty tvoří Cauchyho součin řad $\sum a_k$, $\sum b_k$, má poloměr konvergence *alespoň* $\min\{R_1, R_2\}$ a konverguje k fg. Připomeňme, že jde o řadu, která vznikne formálně násobením obou mocninných řad a sloučením členů se stejnými mocninami $(z - z_0)$.

2.3 Derivování mocninné řady

Připomeňme, že pro posloupnost $\{x_k\}$, $x_k \in \mathbb{R}$, definujeme **limes superior** neboli **horní limitu** $\limsup x_k$ jako *největší* (v $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$) z hromadných bodů posloupnosti $\{x_k\}$. Je-li $\alpha := \limsup x_k \in \mathbb{R}$, platí:

$$\begin{aligned} &\text{je-li } a < \alpha, \text{ je množina } \{k \in \mathbb{N}_0;\, x_k > a\} \text{ nekonečná},\\ &\text{je-li } b > \alpha, \text{ je množina } \{k \in \mathbb{N}_0;\, x_k > b\} \text{ konečná}. \end{aligned}$$

Pomocí těchto vlastností lze limes superior i definovat. Poznamenejme, že při $\alpha = +\infty$ je druhá podmínka prázdná, neboť neexistuje $b > \alpha$.

Lemma 2.3.1 (Cauchy 1821, Hadamard 1888*). *Pro poloměr konvergence R mocninné řady* (2.1) *platí vzorec* (*zde klademe* $1/+\infty = 0$ *a* $1/0 = +\infty$)

$$R = (\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|})^{-1}\,. \tag{2.7}$$

Důkaz. Lemma plyne z obecné formy odmocninového kritéria; viz [$\mathbb{V}$], str. 286. Vzorec (2.7) dokážeme nyní jen na základě výše popsaných vlastností limes superior. Položme

$$L = (\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|})^{-1}\;;$$

dokážeme nerovnosti $L \le R$ a $R \le L$. K tomu postačí dokázat, že pro každé $c \in (0, L)$ je $c \le R$ a pro každé $d \in (L, \infty)$ je $d \ge R$.

Nejprve volme c, $0 < c < L$; potom platí $c^{-1} > \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$, a proto existuje takové $n \in \mathbb{N}$, že pro všechna $k \ge n$ platí $\sqrt[k]{|a_k|} < c^{-1}$. Proto je posloupnost $\{|a_k|c^k\}$ omezená, a tedy podle Lemmatu 2.2.5 je $c \le R$. Je-li $d \in (L, \infty)$, je $d^{-1} < \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$. Proto nerovnost $d^{-1} < \sqrt[k]{|a_k|}$, tj. nerovnost $|a_k|d^k > 1$, platí pro nekonečně mnoho indexů $k \in \mathbb{N}_0$. Avšak odtud plyne, že $\{|a_k|d^k\}$ *nekonverguje* k 0 a tudíž $d \ge R$. Tím je důkaz dokončen. □

Poznámka 2.3.2. Čtenář patrně již zná některé metody výpočtu poloměru konvergence mocninné řady. Vzorec (2.7) nemá velký význam pro *praktický výpočet* poloměru konvergence R řady (2.1), platí však pro *každou* mocninnou řadu. Připomeneme si, jak lze určit poloměr konvergence mocninné řady tvaru (2.1) v některých speciálních případech. Často lze použít vzorec

$$R = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|, \tag{2.8}$$

pokud ovšem limita vpravo existuje. To plyne z absolutní konvergence řady (2.1) v kruhu konvergence a divergence mimo jeho uzávěr. Z limitního podílového kritéria plyne, že řada (2.5) absolutně konverguje pro $z \ne 0$, pokud

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1} z^{k+1}|}{|a_k z^k|} = |z| \lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} < 1$$

a diverguje, pokud předcházející limita je > 1. Analogicky můžeme použít i limitní odmocninové kritérium: Platí

$$R = \big(\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}\big)^{-1}, \tag{2.9}$$

pokud existuje limita ve vzorci (2.9) vpravo. Je vhodné si však uvědomit, že vzorec (2.7) je použitelný i v případě, že limita v (2.8) ani limita v (2.9) neexistuje. Podrobněji se touto otázkou nebudeme zabývat.

Definice 2.3.3. Nechť funkce f je definována v nějakém okolí $U(z_0)$ bodu $z_0 \in \mathbb{C}$. Jestliže existují derivace $f^{(n)}(z_0)$ komplexní funkce f pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$, pak mocninnou řadu

$$T_{f,\,z_0}(z) = \sum \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}\,(z-z_0)^k$$

nazýváme **Taylorovou řadou funkce** f **o středu** z_0.

Čtenář se již s mnohými Taylorovými řadami v reálné analýze setkal, jak však poznáme, je situace v reálné analýze a v komplexní analýze značně rozdílná.

Lemma 2.3.4. *Je-li $R \in [\,0,\infty\,]$ poloměr konvergence řady* (2.1)*, mají tentýž poloměr konvergence i řady vzniklé derivováním a integrováním „člen po členu“, tj.*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k a_k (z-z_0)^{k-1} \quad a \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}(z-z_0)^{k+1}. \tag{2.10}$$

Důkaz. Tvrzení o poloměru stačí dokázat pro první z řad v (2.11); plyne snadno např. ze vzorce (2.7) pro poloměr konvergence a z poznatku, že $\sqrt[k]{k} \to 1$ při $k \to +\infty$. Je totiž

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{k|a_k|} = \big(\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k}\big)\big(\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}\big) ;$$

platnost této rovnosti přenecháme čtenáři k rozmyšlení. □

Věta 2.3.5. *Jestliže je řada* (2.1) *konvergentní, $R > 0$ je její poloměr konvergence, je její součet f holomorfní v $U(z_0, R)$, přičemž funkce*

$$g(z) := \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (z-z_0)^{k-1}, \quad G(z) := \sum \frac{a_k}{k+1}(z-z_0)^{k+1} \tag{2.11}$$

splňují rovnosti $g(z) = f'(z)$ a $G'(z) = f(z)$ pro všechna $z \in U(z_0, R)$. Obecněji platí pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ a všechna $z \in U(z_0, R)$ rovnost

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} n!\binom{k}{n} a_n (z-z_0)^{k-n} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(n+p)!}{p!} a_{n+p}(z-z_0)^p \tag{2.12}$$

a pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$ *je*

$$\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} = a_k\,, \tag{2.13}$$

Poznámka 2.3.6. Řada (2.1) je tedy Taylorovou řadou svého součtu. Její koeficienty jsou **koeficienty Taylorova rozvoje** funkce f v bodě z_0.

Důkaz. Zřejmě stačí dokázat rovnost $g(w) = f'(w)$ v libovolně zvoleném bodě $w \in U(z_0, R)$. Odtud dostaneme vzorec $G'(w) = f(w)$ a vícenásobným opakováním též vzorec (2.12); stačí pouze připomenout, že

$$n!\binom{k}{n} = \frac{k!}{(k-n)!} = k(k-1)\cdots(k-n+1)\,.$$

S ohledem na předcházející Lemma 2.3.1 je funkce g definována v $U(z_0, R)$. Bez újmy na obecnosti budeme opět předpokládat $z_0 = 0$. Položme dále pro $z \in \mathbb{C}$ a $k \in \mathbb{N}$

$$q_k(z) = z^{k-1} + z^{k-2}w + \cdots + z^{k-l}w^{l-1} + \cdots + w^{k-1}\,.$$

Pak je $z^k - w^k = (z-w)\,q_k(z)$, $k \in \mathbb{N}$, a

$$f(z) - f(w) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(z^k - w^k) = (z-w)\sum_{k=1}^{\infty} a_k q_k(z)\,, \quad z \in U(z_0, R)\,.$$

Položme $\vartheta(z) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k q_k(z)$. Z předcházející rovnosti dostáváme identitu

$$f(z) - f(w) = \vartheta(z)(z-w)\,, \quad z \in U(z_0, R)\,,$$

a dosazením w do q_k ověříme, že

$$f'(w) = \vartheta(w) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k w^{k-1} = g(w)\,;$$

použili jsme Lemma 1.4.1, musíme však ještě dokázat *spojitost* ϑ *v bodě* w. Řada, kterou je definována funkce ϑ, je řadou spojitých funkcí. Dokážeme její stejnoměrnou konvergenci na okolí $U(0,r)$, kde $|w| < r < R$ (stále pracujeme za předpokladu $z_0 = 0$). Protože $\sup\{|a_k q_k(z)|;\, z \in U(0,r)\} \le |a_k| k r^{k-1}$, je

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k q_k(z)| \le \sum_{k=1}^{\infty} k|a_k| r^{k-1} < \infty\,, \quad z \in U(0,r)\,,$$

přičemž poslední nerovnost plyne opět z předcházejícího Lemmatu 2.3.4. Tím je důkaz dokončen. $\square$

Důsledek 2.3.7. *Je-li $f(z) = \sum a_k(z - z_0)^k$ a řada vpravo má poloměr konvergence $R > 0$, pak má f v $U(z_0, R)$ derivace všech řádů, lze je všechny vyjádřit mocninnými řadami a platí*

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1)a_k z^{k-n}\,, \quad z \in U(z_0, R)\,.$$

Důsledek 2.3.8 (o jednoznačnosti). *Nechť $\sum a_k(z-z_0)^k = \sum b_k(z-z_0)^k$ pro všechna $z \in U(z_0, r)$ s nějakým $r \in \mathbb{R}_+$. Potom platí $a_k = b_k$ pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$.*

Důkaz. Pro $c_k = a_k - b_k$, $k \in \mathbb{N}_0$, je součet řady $g(z) = \sum c_k(z - z_0)^k$ roven 0 v okolí bodu z_0 a je tedy $g^{(k)}(z_0) = k!c_k = 0$. □

Příklad 2.3.9 (důležitý). Velmi často používáme znalostí o geometrické řadě k odvození rozvojů dalších funkcí. Tak např. pro navzájem různá čísla $z, \zeta, z_0 \in \mathbb{C}$ plynou ze zřejmé identity

$$\frac{1}{z-\zeta} = \frac{1}{(z-z_0)-(\zeta-z_0)} = \frac{1}{z-z_0}\Big(\frac{1}{1-(\zeta-z_0)/(z-z_0)}\Big) = \\ = \frac{1}{-(\zeta-z_0)}\Big(\frac{1}{1-(z-z_0)/(\zeta-z_0)}\Big)$$

snadno rovnosti

$$\frac{1}{z-\zeta} = \sum \frac{(\zeta-z_0)^k}{(z-z_0)^{k+1}}\,, \qquad \frac{1}{z-\zeta} = -\sum \frac{(z-z_0)^k}{(\zeta-z_0)^{k+1}}\,. \tag{2.14}$$

První platí pro všechna z, ζ, pro něž je $|\,\zeta - z_0| < |z - z_0|$, a druhá pro všechna z, ζ, pro něž $|\,\zeta - z_0| > |z - z_0|$. Tato vyjádření jsou velmi užitečná. Budeme je v dalším výkladu používat.

2.4 ♡ Některá další tvrzení

Uvedeme ještě věty, které se někdy o mocninných řadách elementárně, tj. bez rozvíjení teorie funkcí komplexní proměnné, dokazují. Zájemce odkazujeme např. na [$\mathbb{V}$], Kapitolu 16. My je budeme mít k dispozici později, dostaneme je jako důsledek obecnějších vět.

Věta 2.4.1. *Za stejných předpokladů jako ve Větě 2.3.5 lze funkci f v každém bodě $w \in U(z_0, R)$ rozvinout v Taylorovu řadu*

$$f(z) = \sum \frac{f^{(k)}(w)}{k!}(z-w)^k\,, \tag{2.15}$$

jejíž poloměr konvergence je alespoň $R - |w - z_0|$.

Důkaz. Viz např. [$\mathbb{V}$], důkaz Lemmatu 16.3.1, str. 417. □

Poznámka 2.4.2. Věta říká, že řada (2.15) *musí* konvergovat alespoň pro ta z, která vyhovují podmínce $|z-w| < R-|w-z_0|$; *může však konvergovat* i pro další z, která tuto podmínku nesplňují. Jinak řečeno, poloměr konvergence řady (2.15) může být větší než $R - |w - z_0|$. Toho se využívá k rozšiřování f metodou tzv. *analytického pokračování.*

Také velmi užitečnou následující **větu o jednoznačnosti** pro mocninné řady, založenou na předcházející Větě 2.4.1, dokážeme později, při důkazu lokálního vyjádření každé holomorfní funkce mocninnou řadou. Avšak i tuto větu lze dokázat před rozvinutím vlastní teorie funkcí komplexní proměnné. Pak lze ovšem některé poznatky této teorie odvodit podstatně dříve.

Věta 2.4.3. *Nechť $R > 0$, nechť řady $\sum a_k(z-z_0)^k$ a $\sum b_k(z-z_0)^k$ konvergují v kruhu $U(z_0, R)$ a nechť M je množina všech $z \in U(z_0, R)$ takových, pro něž platí*

$$\sum a_k(z-z_0)^k = \sum b_k(z-z_0)^k\,. \tag{2.16}$$

Je-li M' množina všech hromadných bodů M a je-li $M' \cap U(z_0, R) \neq \emptyset$, je $a_k = b_k$ pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$ a rovnost (2.16) platí pro všechna $z \in U(z_0, R)$.

Důkaz. Viz např. [$\mathbb{V}$], důkaz Věty 16.3.4 na str. 419. □

Historická poznámka 2.4.4. Mocninné řady patřily již od vzniku infinitezimálního počtu k důležitým matematickým nástrojům, avšak jejich používání nebylo svázáno s přesnými znalostmi jejich vlastností. V jistém smyslu, který záhy poznáme, teorie funkcí komplexní proměnné „splývá“ s teorií mocninných řad. Již Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813) pracoval s funkcemi, které bylo možno lokálně vyjádřit mocninnou řadou. V práci *Théorie des fonctions analytiques* z r. 1797 chtěl dokonce dokázat, že lze takto vyjádřit každou spojitou funkci. Z té doby pochází termín *analytické funkce*; byly to zároveň právě ty funkce, které byly tehdy pokládány v analýze za užitečné. Poznamenejme, že v dnešní době se často užívá názvu analytické funkce pro jiný typ „objektů“ (nejsou to již zobrazení), které umožňují vhodným způsobem zvládat problém „víceznačnosti“.

Pokud se studují pouze tzv. **formální mocninné řady** o tomtéž středu bez ohledu na konvergenci, lze o nich říci, že tvoří *komplexní algebru*; srv. [2]. Pak $u \in \mathbb{C}$ ztotožňujeme s řadou $u + \sum_{k=1}^{\infty} 0^k (z-z_0)^k$ a pro $f = \sum a_k(z-z_0)^k$, $g = \sum b_k(z-z_0)^k$ definujeme

$$f + g = \sum (a_k + b_k)(z-z_0)^k\,, \quad f \cdot g = \sum p_k(z-z_0)^k\,,$$

kde $p_k := \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$; řada $\sum p_k$ je Cauchyho součin řad $\sum a_k, \sum b_k$; viz [$\mathbb{V}$], str. 311.

Poznamenejme, že r. 1821 Louis Augustin Cauchy (1789 – 1857) odvodil tvrzení o konvergenci mocninné řady *včetně vzorce* (2.7) z Lemmatu 2.3.1; vzorec popsal slovy, neboť formální definici lim sup podal teprve Paul David Gustav du Bois-Reymond (1831 – 1889) r. 1882. Cauchy též současně dokázal vzorec (2.9), pokud v něm uvedená limita existuje.

R. 1888 objevil vzorec (2.7) znovu, patrně zcela nezávisle na Cauchym, Jaques Hadamard (1865 – 1963); v té době byl studentem známé *École Normale*. Přesnou formulaci pak podal v článku z r. 1888, vlivem kterého se v řadě učebnic uvádí (2.7) jako Hadamardův vzorec. Patrně je nejvhodnější užívat označení *Cauchy-Hadamardův vzorec*, neboť Hadamard dalším využitím vzorec „zpopularizoval“; srv. [3].

Upozorněme na závažný rozdíl mezi reálnými funkcemi reálné proměnné a komplexními funkcemi komplexní proměnné, s nímž se čtenář brzo podrobně seznámí. Je-li f nekonečněkrát diferencovatelná funkce na $\mathbb{R}$, pak součet její Taylorovy řady se středem 0 může konvergovat v $\mathbb{R}$ k funkci g, pro kterou $f(x) \neq g(x)$ pro všechna $x \neq 0$, ale existují i funkce f, jejichž Taylorova řada se středem libovolně zvoleném bodě $x \in \mathbb{R}$ konverguje právě jen v bodě x; srv. [$\mathbb{V}$], str. 203, kde je uveden Cauchyho příklad z r. 1822 a str. 204, kde je zmíněn příklad Matyáše Lercha (1860 – 1922).

Naproti tomu pro komplexní funkci f, která je (nekonečněkrát) diferencovatelná v $\mathbb{C}$, její Taylorova řada se středem v libovolném bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ konverguje k f všude v $\mathbb{C}$. To dokážeme v Kapitole 5.

Nakonec uveďme ještě poznámku metodickou: dnes patrně již nikdo nepochybuje o tom, že vykládat mocninné řady pouze pro funkce reálné proměnné je anachronismus. Je nutné si proto rozmyslet pouze to, jak mnoho o mocninných řadách vykládat *bez rozvinutí elementární teorie funkcí komplexní proměnné.* To ovšem záleží na cíli přednášky a na ambicích přednášejícího dosáhnout u studentů solidní hloubky porozumění této velmi důležité partii.

Literatura:

[1] Cauchy, L. A.: *Course d'analyse de l'cole Royal Polytechnique*, Paris, 1821.

[2] Henrici, P.: *Applied and computational complex analysis I, II, III*, John Wiley & Sons, New York, 1973, 1977, 1986, (druhé vydání prvního dílu monografie vyšlo r. 1988).

[3] Maz'ya, V., Shaposhnikova, T.: *Jacques Hadamard, a universal mathematician*, Providence, Amer. Math. Society, 1998.

[4] Wielandt, H.: *Zur Umkehrung des Abelschen Stetigkeitssatzes*, Math. Zeitschr. **56** (1952), str. 206-207.

[5] Zalcman, L.: *Real proofs of complex theorems* (*and vice versa*), Amer. Math. Monthly **81** (1974), str. 115-137.

Kapitola 3

Derivování v komplexním oboru

3.1 Derivování podle komplexní proměnné

V této kapitole se poprvé setkáme s *podstatnými rozdíly* mezi teorií komplexních funkcí komplexní proměnné a teorií funkcí reálné proměnné. Připomeňme standardní definici derivace $f'(z_0)$: Je-li funkce f definována v nějakém okolí $U(z_0)$ bodu z_0, definujeme

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \qquad \left(\text{neboli } f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}\right),$$

pokud limita existuje v $\mathbb{C}$. Pak říkáme, že f je v bodě z_0 (komplexně) diferencovatelná. V Kapitole 1 jsme v Lemmatu 1.4.1 dokázali ekvivalenci několika podmínek, mj. též Carathéodoryho podmínky (3). Jako *ukázku* jejího využití uvedeme dříve slíbený důkaz věty o derivování složené funkce.

Věta 3.1.1. *Nechť funkce f je diferencovatelná v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ a funkce g v bodě $f(z_0)$. Potom složená funkce $g \circ f$ má v bodě z_0 derivaci*

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0)\,.$$

Je-li f funkce holomorfní v otevřené množině $G \subset \mathbb{C}$, g funkce holomorfní v otevřené množině $D \subset \mathbb{C}$ a $f\colon G \to D$, je $g \circ f$ funkce holomorfní v G.

Důkaz. Protože existují derivace f v bodě z_0, a g v bodě $w_0 := f(z_0)$, existují okolí $U(z_0)$, $U(w_0)$ a funkce ϑ_1 a ϑ_2 tak, že platí

$$\begin{aligned} f(z) - f(z_0) &= \vartheta_1(z)(z - z_0)\,, \qquad & z \in U(z_0)\,,\\ g(w) - g(w_0) &= \vartheta_2(w)(w - w_0)\,, \qquad & w \in U(w_0)\,. \end{aligned}$$

To plyne z Carathéodoryho podmínky pro existenci derivace. Funkce ϑ_2 je přitom spojitá v bodě w_0 a funkce ϑ_1 je spojitá v bodě z_0. Dále využijeme větu o spojitosti složené funkce. Po eventuálním zmenšení okolí $U(z_0)$ platí díky spojitosti funkce f v bodě z_0 inkluze $f(U(z_0)) \subset U(w_0)$, a je

$$g(f(z)) - g(f(z_0)) = \vartheta_2(f(z))(f(z) - f(z_0)) = \vartheta_2(f(z))\vartheta_1(z)(z - z_0)$$

pro všechna $z \in U(z_0)$. Avšak podle věty o spojitosti složené funkce je funkce $\vartheta_2 \circ f$ spojitá v z_0, takže součin $(\vartheta_2 \circ f)\,\vartheta_1$ je spojitou funkcí v bodě z_0. Dosazením pak snadno dostaneme

$$(g \circ f)'(z_0) = ((\vartheta_2 \circ f)\,\vartheta_1)(z_0) = \vartheta_2(f(z_0))\,\vartheta_1(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0)\,.$$

Druhá část tvrzení o skládání holomorfních funkcí je jen důsledkem již dokázané části a definice holomorfní funkce. □

Poznámka 3.1.2. Větu 3.1.1 lze snadno modifikovat pro případ, že je „vnitřní funkce“ diferencovatelnou funkcí reálné proměnné. Nechť např. $z, w \in \mathbb{C}$ a

$$h(t) := g(z + t(w - z)), \quad t \in [\,0, 1\,]\,.$$

Jestliže má funkce g derivaci ve všech bodech úsečky $[\,z; w\,]$, platí pro všechna $t \in (0, 1)$ vzorec $h'(t) = g'(z + t(w - z))(w - z)$.

Nyní dokážeme, že mezi derivací $f'(w)$ komplexní funkce komplexní proměnné f v bodě w a parciálními derivacemi jejích složek f_1, f_2, které chápeme jako reálné funkce dvou reálných proměnných, je velmi úzký vztah.

Lemma 3.1.3 (Cauchy-Riemannovy podmínky, 1814*). *Nutnou podmínkou pro existenci derivace $f'(z)$ funkce $f = f_1 + if_2$ v bodě $z = [\,x, y\,]$ je existence obou prvních parciálních derivací každé z funkcí f_1 a f_2 v bodě z a splnění rovností*

$$D_1 f_1(z) = D_2 f_2(z)\,, \quad D_2 f_1(z) = -D_1 f_2(z)\,. \tag{3.1}$$

Pokud derivace $f'(z)$ existuje, platí

$$f'(z) = D_1 f_1(z) + iD_1 f_2(z) = D_2 f_2(z) - iD_2 f_1(z)\,.$$

Důkaz. Předpokládejme, že existuje $f'(z)$; podle definice je pro $h \in \mathbb{R}$

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z + h) - f(z)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(z + ih) - f(z)}{ih}\,,$$

takže po přepisu předchozí rovnosti a úpravě dostaneme

$$\lim_{h \to 0} \frac{f_1(x{+}h, y) - f_1(x, y)}{h} + i \lim_{h \to 0} \frac{f_2(x{+}h, y) - f_2(x, y)}{h} =$$
$$= -i\Big(\lim_{h \to 0} \frac{f_1(x, y{+}h) - f_1(x, y)}{h} + i \lim_{h \to 0} \frac{f_2(x, y{+}h) - f_2(x, y)}{h} \Big)\,.$$

Poslední rovnost dá $D_1 f(z) = -iD_2 f(z)$, resp. pro složky

$$f'(z) = D_1 f_1(z) + iD_1 f_2(z) = -i(D_2 f_1(z) + iD_2 f_2(z))\,; \tag{3.2}$$

Tím je tvrzení dokázáno. □

Poznámka 3.1.4. Cauchy-Riemannovy podmínky (3.1) se často zapisují pomocí jediné rovnice

$$D_1 f(z) = -i D_2 f(z)\,. \tag{3.3}$$

V dříve užívané symbolice se pro $f = f_1 + i f_2$ psalo v bodě $z = x + iy$ „po složkách"

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y)\,, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y)\,.$$

3.2 Existence derivace

Protože zobrazení z $\mathbb{C}$ do $\mathbb{C}$ lze interpretovat při „ztotožnění" $\mathbb{C}$ s $\mathbb{R}^2$ jako zobrazení z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$, porovnáme derivaci funkce komplexní proměnné se *silnou derivací* zobrazení z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$. Používáme opět označení D_1 pro derivování podle první proměnné a D_2 pro derivování podle druhé proměnné.

Poznámka 3.2.1. Připomeňme, že při vyšetřování zobrazení $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ jsme popisovali derivaci (tj. **silnou derivaci** neboli **totální diferenciál**) $Df(x)$ funkce f v bodě $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ maticí typu $k \times m$ o k řádcích a m sloupcích. Její řádky tvořily derivace složek zobrazení f, tj. vektory $Df_1, \dots, Df_k$. Přitom derivace $Df(x)$ existuje, právě když existují derivace $Df_1, \dots, Df_k$; stačí se tedy zabývat každou složkou f_s zvlášť. Např. pro složku f_1 existuje $Df_1(x)$, právě když existuje vektor $A = (a_{11}, \dots, a_{1m})$ tak, že

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f_1(x+h) - f_1(x) - (a_{11}h_1 + \dots + a_{1m}h_m)|}{|h|} = 0\,.$$

V takovém případě je $A = (D_1 f_1(x), \dots, D_m f_1(x)) = \operatorname{grad} f_1(x)$. V obecnějším případě $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ je A *matice* (a_{rs}), $r = 1, \dots, k$, $s = 1, \dots, m$, a mezi jednotlivými řádky této matice není žádný vztah. V případě funkce $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je situace rozdílná, závislost mezi řádky vyjadřují právě Cauchy-Riemannovy podmínky (3.1).

Věta 3.2.2. *Nutnou a postačující podmínkou pro existenci derivace komplexní funkce $f = f_1 + i f_2$ v bodě z je existence derivace každé z funkcí f_1 a f_2 v bodě z, a splnění Cauchy-Riemannových podmínek* (3.1), *tj.*

$$D_1 f_1(z) = D_2 f_2(z)\,, \quad D_2 f_1(z) = -D_1 f_2(z)\,.$$

Důkaz. Podle podmínky (3) z Lemmatu 1.4.1 je diferencovatelnost funkce f v bodě z ekvivalentní s podmínkou

$$f(z+h) - f(z) = Ch + o(h)\,, \quad h \to 0\,, \tag{3.4}$$

kde $C = a + ic = f'(z)$. Je tedy

$$f(z+h) - f(z) = (a+ic)(h_1 + ih_2) + o(h)\,, \quad h \to 0\,. \tag{3.5}$$

Uvědomíme si, že $g(h) = o(h)$ pro $h \to 0$, tj. $g(h)/|h| \to 0$ pro $h \to 0$, právě když pro složky g_1, g_2 funkce g platí $g_1(h)/|h| \to 0$ a $g_2(h)/|h| \to 0$ pro $h \to 0$. Užíváme proto pouze symbol $o(h)$. Z (3.5) pro složky f_1, f_2 funkce $f = f_1 + if_2$ tak dostáváme

$$f_1(z+h) - f_1(z) = ah_1 - ch_2 + o(h)\,, \quad h \to 0\,, \tag{3.6}$$
$$f_2(z+h) - f_2(z) = ch_1 + ah_2 + o(h)\,, \quad h \to 0\,. \tag{3.7}$$

Odtud vidíme, že z existence $f'(z)$ plyne, že f_1, f_2 jsou funkce diferencovatelné v bodě z a že platí (3.1).

Jsou-li v bodě z diferencovatelné obě složky f_1 a f_2 a jsou-li současně splněny Cauchy-Riemannovy podmínky, platí (3.6) a (3.7), přičemž $a = D_1 f_1(z)$ a $c = D_1 f_2(z)$. Násobíme vztah (3.7) číslem i. Po „sečtení" s (3.6) a po úpravě tak dostaneme (3.4) a tedy existenci derivace $f'(z)$. □

Poznámka 3.2.3. Stojí za povšimnutí, že pro determinant matice z derivací složek platí

$$\begin{vmatrix} a & -c \\ c & a \end{vmatrix} = a^2 + c^2 = (D_1 f_1(z))^2 + (D_1 f_2(z))^2 = |f'(z)|^2\,.$$

Poznámka 3.2.4. Podívejme se na předchozí problém ještě z jiného zorného úhlu. Pokud „ztotožníme" $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R}^2$ tak, že bodu $h = h_1 + ih_2 \in \mathbb{C}$ odpovídá bod $[\,h_1, h_2\,] \in \mathbb{R}^2$, a pokud užijeme maticové vyjádření

$$h = h_1 + ih_2 = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \tag{3.8}$$

kde A je matice s reálnými prvky, pak je z lineární algebry známo, že zobrazení $L_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, které je (vzhledem ke standardní bázi) popsáno pomocí vztahu

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ah_1 + bh_2 \\ ch_1 + dh_2 \end{pmatrix}, \tag{3.9}$$

je lineární. Při tomto označení je

$$L_A(1) = a + ic \quad \text{a} \quad L_A(i) = b + id\,. \tag{3.10}$$

Rovněž je známo, že každé lineární zobrazení lze popsat pomocí matice A tímto způsobem, přičemž A určuje zobrazení L_A pomocí (3.9) a L_A určuje sloupce matice A pomocí (3.10).

V případě, že zacházíme se lineárním zobrazením L_A prostoru $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$, žádáme, aby mj. platilo

$$L_A(\alpha) = \alpha L_A(1) \tag{3.11}$$

pro všechna $\alpha \in \mathbb{R}$. Při práci s L_A v $\mathbb{C}$ však žádáme, aby (3.11) platilo pro všechna $\alpha \in \mathbb{C}$, tedy speciálně aby platilo $L_A(i) = iL_A(1)$. To však znamená ve shodě s (3.10)

$$iL_A(1) = i(a + ic) = b + id = L_A(i)\,, \quad \text{neboli} \quad a = d\,, \quad b = -c\,.$$

Jsou to právě Cauchy-Riemannovy podmínky, které váží prvky A rovnostmi $a = d$, $-c = b$, pokud je A „komplexně lineární", takže

$$A = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}, \quad \text{přičemž} \quad L_A(h) = (a + ic)(h_1 + ih_2) = Ch\,.$$

Zvídavého čtenáře odkazujeme např. na [3], kde jsou tyto souvislosti rozebrány ještě podrobněji.

Příklad 3.2.5. Je vhodné uvědomit si, že *existence* příslušných parciálních derivací složek spolu se splněním Cauchy-Riemannových podmínek nezaručuje ještě existenci derivace. Pro $z = x + iy$ definujme

$$f(z) := \frac{xy}{x^2 + y^2}\,, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\,, \quad f(0) := 0\,.$$

Funkce f má identicky nulovou imaginární složku f_2 a reálná složka f_1 se anuluje na obou osách (na množině $\{x + iy;\, xy = 0\}$); v bodě $z = 0$ jsou tedy splněny Cauchy-Riemannovy podmínky, avšak derivace (totální diferenciál) $Df_1(0)$ neexistuje, neboť $f_1 = f$ není v bodě 0 dokonce ani spojitá.

3.3 Holomorfní funkce

V této části se budeme zabývat vlastnostmi holomorfních funkcí. Připomeňme nejprve, že funkce f je holomorfní v otevřené množině $G \subset \mathbb{C}$, jestliže pro všechna $z \in G$ existuje derivace $f'(z)$. Vyšší derivace f'', resp. $f^{(2)}$, $f^{(3)}$, … definujeme pomocí vztahu $f^{(n+1)} := (f^{(n)})'$, $n \in \mathbb{N}$. Jako důsledek poznatků o derivování součtu, součinu a podílu jsme obdrželi tvrzení:

Důsledek 3.3.1. *Nechť f, g jsou funkce holomorfní v otevřené množině $G \subset \mathbb{C}$. Potom též součet $f + g$ a součin fg jsou funkce holomorfní v G a je*

$$(f \pm g)' = f' \pm g'\,, \quad (fg)' = f'g + g'f\,;$$

je-li navíc $g(z) \neq 0$ pro všechna $z \in G$, je podíl f/g holomorfní v G, přičemž

$$(f/g)' = (f'g - fg')/g^2\,.$$

Úmluva 3.3.2. Abychom v důkazech stále neopakovali vyjádření typu „funkce f je holomorfní v množině G", zavedeme pro tuto situaci *označení* $f \in H(G)$. Nebudeme ho užívat ve *znění vět*, ale např. v důkazech, poznámkách apod., aby věty byly lépe srozumitelné i bez čtení celého textu od začátku. Uzavřenost $H(G)$ vzhledem k aritmetickým operacím dále používáme bez vysvětlujícího komentáře. Poznamenejme, že vzhledem k tomu, že konstantní funkce jsou holomorfní, je $H(G)$ (komplexní) lineární prostor.

Definice 3.3.3. Funkce f je **holomorfní v bodě** $z \in \mathbb{C}$, jestliže pro nějaké okolí $U(z)$ bodu z je f holomorfní na $U(z)$. Říkáme, že funkce f definovaná na nějakém okolí $U(\infty)$ je **holomorfní v bodě** ∞, pokud je f funkce holomorfní v nějakém $P(\infty)$ a existuje *konečná* $\lim_{z\to\infty} f(z) = f(\infty)$. Funkce f **je holomorfní v otevřené množině** $G \subset \mathbb{S}$ [1]), pokud je holomorfní v každém bodě množiny G.

Poznámka 3.3.4. Nedefinovali jsme explicitně $f'(\infty)$, neboť z pojmů, které souvisejí s bodem ∞, budeme potřebovat jen některé.

Příklad 3.3.5. Snadno nahlédneme, že je-li $G \subset \mathbb{C}$ otevřená množina a $f \in \mathcal{C}(G)$, tj. f je funkce spojitá na G, pak i $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$, $|f|$ a $\overline{f}$ leží v $\mathcal{C}(G)$. V případě $H(G)$ analogické tvrzení *obecně neplatí.* Srovnejte s Důsledkem 3.4.7 a s Příklady 3.4.8 níže.

Poznámky 3.3.6. 1. Jak později uvidíme, lze funkce holomorfní v otevřené množině $G \subset \mathbb{C}$ lokálně vyjádřit jako součty mocninných řad. Zatím je však zřejmé pouze to, že součet mocninné řady je holomorfní funkce v jejím kruhu konvergence.

2. Na $\mathbb{R}$ lze sestrojit funkci $f \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R})$, tj. funkci, která má spojité derivace všech řádů, která však *není v okolí žádného bodu* $x \in \mathbb{R}$ součtem mocninné řady. Jak dále dokážeme v $\mathbb{C}$ tato situace nemůže nastat, takže f je zároveň příkladem „nekonečně hladké“ funkce na $\mathbb{R}$, kterou nelze holomorfně rozšířit na okolí žádného bodu z $\mathbb{R}$.

Příklad 3.3.7. 1. Polynomy jsou funkce holomorfní v $\mathbb{C}$. Podle uzavřených dohod je polynom $f \equiv 0$ spolu s polynomy nultého stupně holomorfní také v $\mathbb{S}$. Racionální funkce $R(z) = P(z)/Q(z)$, kde P, Q jsou polynomy a $Q \not\equiv 0$, je obecně funkce holomorfní na množině $\mathbb{C} \setminus \{z;\, Q(z) = 0\}$. O chování v bodě ∞ rozhoduje vztah stupňů p, q polynomů P, Q: je-li $p \le q$, je R holomorfní i v bodě ∞. Speciálně mocniny z^{-n}, $n \in \mathbb{N}$, jsou funkce holomorfní v $\mathbb{S} \setminus \{0\}$.

3.4 Primitivní funkce

Před četbou této části by si měl čtenář připomenout alespoň základní fakta o křivkovém integrálu v rozsahu Kapitoly 1.

Definice 3.4.1. Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina. Platí-li pro nějakou funkci F rovnost $F'(z) = f(z)$ pro každé $z \in G$, je F **primitivní funkce k** f **na** G.

Poznámka 3.4.2. Připomeňme nejprve zřejmý fakt, že podle předcházející definice je funkce F holomorfní funkcí na G. Na rozdíl od „reálného případu“ zavádíme primitivní funkci na *obecné* otevřené množině G. Funkce konstantní na každé komponentě G má

[1]) Srovnejte s poznámkami za Definicí 1.4.4.

derivaci rovnou 0 všude v G; odtud snadno vyplývá, že rozdíl dvou primitivních funkcí k téže funkci f na G *obecně není* konstantní funkce na G.

Připomeňme dále, že v reálném případě je pomocí primitivní funkce definován Newtonův integrál; pokud existuje primitivní funkce k f na intervalu (a,b), lze ji pomocí Newtonova integrálu „spočítat" z f: Zvolíme $c \in (a,b)$ a položíme

$$F(x) := \int_c^x f(t)\,dt\,, \quad x \in (a,b)\,.$$

Je-li $G \subset \mathbb{C}$ oblast, $w \in G$ a f funkce na G, vede nás předchozí úvaha k myšlence *definovat*

$$F(z) := \int_\varphi f(u)\,du = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\,, \quad z \in G\,,$$

kde $\varphi : [\,a,b\,] \to G$ je libovolná křivka s počátečním bodem w a koncovým bodem z. Aby však byla tato definice korektní, integrál musí existovat a jeho hodnota musí být pro každé $z \in G$ nezávislá na volbě φ.

Věta 3.4.3. *Je-li f spojitá v oblasti $G \subset \mathbb{C}$, jsou ekvivalentní tyto dvě podmínky:*

(1) *funkce F je primitivní funkcí k f v G;*

(2) *pro každou dvojici bodů $z, w \in G$ a každou křivku φ v G s počátečním bodem w a koncovým bodem z je*

$$\int_\varphi f(u)\,du = F(z) - F(w)\,.$$

Důkaz. Dokažme nejprve (1) $\Rightarrow$ (2). Zvolme nejprve body $z, w \in G$ a křivku $\varphi\colon [\,a,b\,] \to G$, pro niž $\mathrm{pb}(\varphi) = w$ a $\mathrm{kb}(\varphi) = z$. Křivka je obecně po částech regulární a tak pomocí vzorce (1.14) dostaneme

$$\begin{aligned}\int_\varphi f(u)\,du &= \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_a^b F'(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} F(\varphi(t))\,dt = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = F(z) - F(w)\,.\end{aligned}$$

Pro důkaz implikace (2) $\Rightarrow$ (1) zvolme libovolně bod $\zeta \in G$ a $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$; protože funkce f je spojitá v bodě ζ, existuje okolí $U(\zeta) = U(\zeta, r) \subset G$ tak, že pro všechna $z \in U(\zeta)$ je $|f(z) - f(\zeta)| \le \varepsilon$. Je-li $z \in U(\zeta)$, $z \neq \zeta$, položme $\varphi_z(t) := \zeta + t(z - \zeta)$, $t \in [\,0,1\,]$, a

$$F(z) = F(\zeta) + \int_{\varphi_z} f(u)\,du$$

pro každé $z \in U(\zeta)$. Potom pro každé $z \neq \zeta$ dostaneme

$$\Big|\frac{F(z)-F(\zeta)}{z-\zeta} - f(\zeta)\Big| = \Big|\frac{1}{z-\zeta}\Big(\int_{\varphi_z} f(u)du - \int_{\varphi_z} f(\zeta)du\Big)\Big| =$$
$$= \Big|\int_0^1 (f(\zeta + t(z-\zeta)) - f(\zeta))dt\Big| \leq \varepsilon\,.$$

Odtud již plyne $F'(\zeta) = f(\zeta)$. Tím je věta dokázána. □

Příklad 3.4.4. V návaznosti na Příklad 1.6.10 vyplývá z Věty 3.4.3 pro funkci $f(z) = (z-z_0)^k$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$, a kladně orientovanou kružnici $\varphi(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [\,0, 2\pi\,]$, rovnost

$$\int_\varphi (z-z_0)^k dz = 0\,, \tag{3.12}$$

protože f má pro všechna $k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ primitivní funkci v $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ (rovnou $(z-z_0)^{k+1}/(k+1)$).

Věta 3.4.5. *Nechť f je funkce na otevřené množině $G \subset \mathbb{C}$. Potom následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(1) *funkce f je lokálně konstantní v G,*

(2) *pro všechna $z \in G$ je $f'(z) = 0$.*

Důkaz. Z (1) zřejmě plyne (2), stačí tedy dokázat opačnou implikaci. Využijeme k tomu základní poznatky o křivkovém integrálu. Zvolme libovolně bod $z \in G$ a jeho okolí $U(z,r) \subset G$. Potom pro každé $w \in U(z,r)$ leží geometrický obraz úsečky $[\,z;w\,]$ v okolí $U(z,r)$ a pro $[\,z;w\,]$ se standardní parametrizací φ platí

$$f(w) - f(z) = \int_{[\,z;w\,]} f'(u)du = \int_0^1 f'(\varphi(t))(w-z)dt = 0\,,$$

a tedy $f(w) = f(z)$. Tím je dokázána vlastnost (1). □

Důkazový princip, který použijeme při odvození následujícího důsledku, se v teorii funkcí komplexní proměnné často užívá. Je založen na jednoduchém poznatku o souvislých metrických prostorech. Připomněli jsme si ho v Kapitole 1.

Důsledek 3.4.6. *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je oblast a nechť platí $f'(z) = 0$ pro všechna $z \in G$. Potom je funkce f konstantní v G.*

Důkaz. Zvolme $w \in G$. Protože funkce f je lokálně konstantní v oblasti G, je množina $M := \{z \in G;\ f(z) = f(w)\}$ neprázdná, otevřená v G, a ze spojitosti f plyne, že je také uzavřená v G. Je tedy $M = G$. □

Důsledek 3.4.7. *Nechť f je funkce holomorfní v oblasti $G \subset \mathbb{C}$. Potom je f konstantní v G právě tehdy, když je splněna některá z těchto podmínek*

(a) $\overline{f}$ *je holomorfní v* G (b) $\operatorname{Re} f$ *je holomorfní v* G,

(c) $\operatorname{Im} f$ *je holomorfní v* G, (d) $f' \equiv 0$,

(e) $|f|$ *je konstantní v* G.

Důkaz. Je-li $\overline{f}$ holomorfní v G, je $\operatorname{Re} f = (f + \overline{f})/2$ funkce holomorfní v G. Z (a) tedy plyne (b). Pak ale také je $\operatorname{Im} f = (f - \operatorname{Re} f)/i$ holomorfní v G a dostáváme (c) z (b). Přitom $\operatorname{Im} f$ je *reálná* holomorfní funkce a podle Cauchy-Riemannových podmínek je $f' \equiv 0$, z (c) tedy dostáváme (d). Odtud podle Důsledku 3.4.6 vyplývá, že f je konstantní a tedy i $|f|$ je konstantní, neboli platí (e). Pokud je $|f| \equiv 0$, je $f = 0$ a $\overline{f} = f$ je holomorfní, platí tedy (a). Pokud je $|f| = k > 0$, pak $f(z) \neq 0$ pro všechna $z \in G$ a $|f|^2/f = \overline{f}$ je opět jakožto podíl holomorfních funkcí opět holomorfní, takže opět dostáváme (a). Tím jsme dokázali všechny implikace (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow \cdots \Rightarrow$ (e) $\Rightarrow$ (a) a podmínky (a) – (e) jsou tedy ekvivalentní. □

Příklady 3.4.8. K dobrému porozumění podmínek existence derivace a pojmu holomorfní funkce přispěje, když si čtenář promyslí několik následujících příkladů:

1. Funkce $f(z) := z = x + iy$ má derivaci všude v $\mathbb{C}$. Pro její reálnou a imaginární část f_1 a f_2 platí $D_1 f_1(z) = D_2 f_2(z) = 1$ a současně $D_2 f_1(z) = -D_1 f_2(z) = 0$. Odtud vidíme, že pro $g(z) := \overline{z} = x - iy$, $z \in \mathbb{C}$, *nejsou splněny* Cauchy-Riemannovy podmínky v žádném bodě $z \in \mathbb{C}$, takže g, ač je spojitá v $\mathbb{C}$ (zobrazení $z \mapsto \overline{z}$ je dokonce izometrie), nemá v *žádném* bodě $\mathbb{C}$ derivaci. Srovnejte tuto jednoduchou úvahu s poměrně komplikovanou konstrukcí spojité nikde diferencovatelné funkce na $\mathbb{R}$ z [$\mathbb{V}$], str. 401.

2. Pro funkci $f(z) := |z|$ jsou $D_1 f_1(z)$, $D_2 f_1(z)$ nenulové v $\mathbb{P} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ a platí pro ně rovnosti $D_1 f_2(z) = D_2 f_2(z) = 0$ pro všechna $z \in \mathbb{C}$, takže pro žádné $z \neq 0$ nejsou splněny Cauchy-Riemannovy podmínky; v bodě $z = 0$ neexistuje navíc ani jedna z prvních parciálních derivací reálné části f. Podobně také funkce $g(z) := |z|^2 = z\overline{z}$ nemůže mít derivaci v žádném bodě z $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, neboť pak by podle měl derivaci i podíl $g(z)/z = \overline{z}$. Avšak podle předchozí úvahy funkce $z \mapsto \overline{z}$ nemá v žádném bodě z $\mathbb{C}$ derivaci. Porovnáním rovnosti

$$|z|^2 - 0 = \overline{z}(z - 0)$$

s Carathéodoryho podmínkou (nebo přímo z definice derivace) vidíme, že funkce g má derivaci v počátku. Má tedy derivaci v právě jediném bodě a platí $g'(0) = 0$.

Historická poznámka 3.4.9. Věta 3.1.1 ilustruje fakt, že s některými ekvivalentními podmínkami pro existenci derivace se pracuje velmi snadno.

Cauchy-Riemannovy podmínky se v tištěné podobě objevily poprvé v práci z r. 1752, kterou napsal JEAN LE ROND D'ALEMBERT (1717 – 1783). V souvislosti se studiem rovinného proudění se vyskytly u LEONHARDA EULERA (1707 – 1783) a JOSEPHA LAGRANGE (1736 – 1813), avšak to patrně neovlivnilo vývoj teorie funkcí komplexní proměnné. R. 1814 se tyto podmínky objevily v přímé souvislosti s funkcemi komplexní proměnné u LOUISE AUGUSTINA CAUCHYHO (1789 – 1857) a kolem r. 1847 u GEORGA FRIEDRICHA

Bernharda Riemanna (1826 – 1866). Poznamenejme, že někdy bývají tyto rovnice nazývány rovnice d'Alembert-Eulerovy.

Cauchy byl také prvý, kdo od r. 1823 zapisoval Cauchy-Riemannovy podmínky ve formě jediné rovnice (3.3). Na druhé straně teprve r. 1851 si uvědomil souvislost mezi spojitostí komplexní funkce a spojitostí jejích složek. Tehdy si patrně, přibližně ve stejné době jako Riemann, který toho roku dokončil svoji disertaci, plně uvědomil důležitost těchto podmínek pro diferencovatelnost komplexní funkce komplexní proměnné.

V Poznámce 3.2.4 se pracuje s lineárním zobrazením L_A a rovností (3.11) pro $\alpha \in \mathbb{R}$ a $\alpha \in \mathbb{C}$. V prvém případě říkáme, že zobrazení je $\mathbb{R}$-lineární a ve druhém, že zobrazení je $\mathbb{C}$-lineární. Aniž se budeme zabývat podrobnostmi, prozradíme, že *zobrazení f je komplexně diferencovatelné v bodě z, právě když je reálně diferencovatelné* (*složky f_1, f_2 jsou diferencovatelné*) *a diferenciál je $\mathbb{C}$-lineárním zobrazením.*

Dokázané tvrzení o diferencovatelnosti komplexních funkcí lze ještě podstatně zesílit. Následující podmínku publikoval r. 1935 Dmitrij Jevgeněvič Menšov (1892 – 1988): *Funkce f spojitá na otevřené množině G je holomorfní v G, jestliže ke každému bodu z existuje dvojice různých přímek p, p' procházejících bodem z tak, že limity*

$$\lim_{w \to z,\, w \in p} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}, \qquad \lim_{w \to z,\, w \in p'} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}$$

existují v $\mathbb{C}$ a jsou si rovny. Souvislostem mezi diferencovatelností funkcí a tzv. zachováváním úhlů se budeme informativně věnovat v Kapitole 9.

Teorii křivkového integrálu budoval Cauchy postupně od r. 1814. Komplexní funkce v integrandu se u něj objevují krátce před r. 1821 (tehdy poprvé v tištěné formě). Velmi dlouho však trvalo, než dospěl k integraci podél obecnějších křivek. K tomu došlo prakticky v práci z r. 1831; viz [5].

Literatura:

[1] Carathéodory, C.: *Funktionentheorie I, II*, Birkhäuser, Basel, 1950.

[2] Acosta, E. G., Delago, C. G.: *Fréchet vs. Carathéodory*, Amer. Math. Monthly **101** (1994), str. 332 – 338.

[3] Remmert, R.: *Theory of complex functions*, Springer, New York, 1991, (překlad druhého německého vydání *Funktionenlehre I* z r. 1989; první vydání je z r. 1984 (Springer), poslední z r. 1995 (Springer)).

[4] Saks, S., Zygmund, A.: *Analytic functions*, Polskie Towarzystvo Matematyczne, Warszawa, 1952.

[5] Smithies, F.: *Cauchy and the creation of complex function theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

Kapitola 4

Elementární transcendentní funkce

4.1 Reálné elementární funkce

Až dosud jsme se seznámili pouze s velmi jednoduchými funkcemi. Označují se zpravidla, spolu s dalšími, s nimiž se seznámíme v této kapitole, názvem *elementární funkce.* Polynomy i racionální funkce jsou elementární funkce, které jsou holomorfní ve svých definičních oborech. Jsou to nejjednodušší *algebraické funkce* [1]). V Kapitole 2 jsme si připomněli základní poznatky o mocninných řadách. Pomocí nich budeme nyní definovat další holomorfní funkce, které jsou však již podstatně složitější: sčítání mocninné řady v sobě skrývá limitní přechod, takže mocninné řady nám poskytnou přístup i k tzv. *transcendentním elementárním funkcím.*

Úmluva 4.1.1. Abychom odlišili nově zaváděné funkce v komplexním oboru od jejich restrikcí na $\mathbb{R}$, budeme (pouze) v této kapitole používat dvojí označení. Pro reálné funkce reálné proměnné budeme užívat označení *exp*, *cos*, *sin* apod., a pro jejich „komplexní verze“ exp, cos, sin apod. V dalších kapitolách budeme užívat již jen standardní značení exp, cos, sin apod.

Pokud čtenář dobře zvládl základní poznatky o reálných funkcích *exp*, *sin*, *cos*, apod., nemusí Poznámku 4.1.2 číst, je určena pouze k opakování. Budeme speciálně potřebovat Maclaurinovy rozvoje těchto funkcí.

Poznámka 4.1.2. Připomeňme základní vlastnosti reálných elementárních funkcí. Funkce *exp* je spojitá rostoucí (a tedy prostá) funkce na $\mathbb{R}$, pro kterou platí $exp' = exp$, a tudíž $exp \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R})$; dále je $exp(0) = 1$. Funkce k reálné exponen-

[1]) Srovnejte např. s poznámkami v [$\mathbb{V}$], str. 147.

ciále *exp* inverzní je funkce logaritmus, $log : (0,\infty) \overset{\text{na}}{\to} \mathbb{R}$. Platí rovnosti

$$exp\, x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad log\,(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}, \quad x \in (-1, 1\,]\,.$$

Zpravidla se též při zkoumání součinu absolutně konvergentních řad dokazuje, že pro funkci *exp* platí identita

$$exp\,(x+y) = exp\, x \cdot exp\, y\,, \quad x, y \in \mathbb{R}\,,$$

a že vyhovuje podmínce $\lim_{x\to 0}((exp\, x - 1)/x) = 1$. Dále zavádíme $\mathrm{e} := exp(1)$, takže $log(\mathrm{e}) = 1$ [2]). Pro $a \in \mathbb{R}_+$, $b \in \mathbb{R}$ definujeme mocninu o základu a vztahem

$$a^b := exp(b\, log\, a) = \mathrm{e}^{b\, log\, a}\,.$$

Funkce *sin* a *cos* jsou funkce spojité na $\mathbb{R}$, pro jejichž derivace platí $sin' = cos$ a $cos' = -\,sin$; obě funkce tedy leží v $\mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R})$. Nejmenší kladný nulový bod funkce *cos* slouží jako *definice* $\pi/2$ a 2π je pak *nejmenší kladná perioda* každé z funkcí *sin* a *cos*. Funkce *cos* je sudá a funkce *sin* lichá; *sin* je funkce rostoucí v $[\,0; \pi/2\,]$ a kladná v $(0,\pi)$, $sin\, 0 = sin\, \pi = 0$, $sin\, \pi/2 = 1$. Označíme-li

$$N_c(\mathbb{R}) := \{x \in \mathbb{R}\,; cos\, x = 0\}\,, \quad N_s(\mathbb{R}) := \{x \in \mathbb{R}\,; sin\, x = 0\}\,, \tag{4.1}$$

lze tyto množiny lehce popsat pomocí π; je

$$N_c(\mathbb{R}) = \{(2k+1)\pi/2;\ k \in \mathbb{Z}\}\,, \quad N_s(\mathbb{R}) = \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}\,. \tag{4.2}$$

Dále je

$$sin^2 x + cos^2 x = 1\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

a obě funkce jsou tedy omezené; zobrazují $\mathbb{R}$ na $[\,-1; 1\,]$. Lze je vyjádřit pomocí jejich Maclaurinových rozvojů

$$cos\, x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\,, \quad sin\, x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Obě řady konvergují absolutně a lokálně stejnoměrně na $\mathbb{R}$. Tyto poznatky z reálné analýzy budeme používat, některé věci však dokážeme znova, odlišným způsobem než v [$\mathbb{V}$]. Jak uvidíme, komplexní exponenciála má řadu analogických vlastností jako *exp*, ale některé jsou nové: např. *není* prostá a je periodická.

Poznámka 4.1.3. Většina funkcí, které se chystáme zavést, jsou pouze *holomorfní rozšíření* funkcí, které již známe z reálné analýzy. Budeme předpokládat, že čtenář je obeznámen s elementárními funkcemi v reálném oboru a že zná i jejich Taylorovy rozvoje. Pomocí nich lze tyto funkce *snadno* rozšířit na $\mathbb{C}$.

---

[2]) Je $\mathrm{e} = 2,7182818284\ldots$. Snadno se dokáže, že je to iracionální číslo; srv. [$\mathbb{V}$], str. 89. Podstatně náročnější je dokázat, že je to číslo transcendentní.

4.2 Exponenciála a hyperbolické funkce

Definice 4.2.1. Funkce exp, definovaná v $\mathbb{C}$ jako součet řady

$$\exp z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{4.3}$$

se nazývá (komplexní) **exponenciála**.

Poznámka 4.2.2. Tuto pro matematiku snad nejdůležitější funkci lze v $\mathbb{C}$, stejně jako v $\mathbb{R}$, zavést mnoha způsoby. Funkce exp je holomorfní, což vyplývá z definice díky možnosti derivovat mocninnou řadu „člen po členu“. Platí $\exp' = \exp$; zároveň vidíme, že je $\exp \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{C})$ [3]). Máme již k dispozici všechny prostředky, které umožňují jednoduše dokázat další vlastnosti exponenciály, známé z „reálné“ analýzy.

Věta 4.2.3. *Exponenciála vyhovuje v $\mathbb{C}$ funkcionální rovnici*

$$\exp(z+w) = (\exp z) \cdot (\exp w), \quad z, w \in \mathbb{C}. \tag{4.4}$$

Speciálně: Pro každé $z \in \mathbb{C}$ je $\exp z \neq 0$ a $(\exp z)^{-1} = \exp(-z)$.

Důkaz. Zvolme libovolně $w \in \mathbb{C}$ a definujme funkci $g(z) := \exp(z)\exp(w-z)$ pro všechna $z \in \mathbb{C}$. Pak $g'(z) = 0$ pro všechna $z \in \mathbb{C}$ a g je tedy podle Důsledku 3.4.6 konstantní v $\mathbb{C}$. Protože $\exp(0) = 1$ a $g(0) = \exp(w)$, platí rovnost

$$\exp(z)\exp(w-z) = \exp(w) \; ; \tag{4.5}$$

dosazením $w = 0$ dostaneme $\exp(z)\exp(-z) = \exp(0) = 1$; z toho ihned plyne, že $\exp z \neq 0$. Zvolme dále libovolně $z \in \mathbb{C}$ a dosaďme do (4.5) $z + w$ za w, čímž dostaneme dokazovanou rovnost (4.4), která tak platí pro všechna $z, w \in \mathbb{C}$. □

Poznámka 4.2.4. Přímý důkaz (4.4) bez předcházejícího „triku“, založený na násobení absolutně konvergentních řad, lze nalézt např. v [$\mathbb{V}$], str. 305. Jak poznáme ještě dále, pomocí poměrně malé části teorie funkcí komplexní proměnné budeme schopni podat jiné velmi jednoduché důkazy již známých poznatků, případně dospět poměrně snadno i k dalším poznatkům. Jacques Hadamard (1865 – 1963) je autorem výroku, který nám v originálním znění posloužil na str. vii jako motto tohoto textu. Ten v překladu říká, že „*Nejkratší cesta mezi dvěma tvrzeními z reálné analýzy vede přes $\mathbb{C}$*“, a jak dále uvidíme, v mnoha případech to přesně vystihuje situaci; viz [4], str. 137 a [3], str. 626.

Poznámka 4.2.5. Nechť $f(z) = \sum a_k z^k$. Protože zobrazení $z \mapsto \overline{z}$ je spojité [4]), plyne z rovnosti

$$\overline{a_0 + a_1 z + \cdots + a_k z^k} = \overline{a_0} + \overline{a_1}\,\overline{z} + \cdots + \overline{a_k}\,\overline{z}^k$$

[3]) Tak jako v reálném oboru označujeme tímto symbolem (lineární) prostor všech komplexních funkcí, které mají derivace všech řádů.

[4]) Je to dokonce izometrie.

pro součet mocninné řady f v kruhu konvergence rovnost $\overline{f(z)} = \sum \overline{a_k}\,\overline{z}^k$. Jsou-li všechna $a_k \in \mathbb{R}$, pak $\overline{f(z)} = \sum a_k \overline{z}^k$. Speciálně je $\overline{\exp z} = \exp \overline{z}$ pro všechna $z \in \mathbb{C}$ a

$$|\exp z|^2 = \exp z \cdot \overline{\exp z} = \exp z \cdot \exp \overline{z} = \exp(z + \overline{z}) = \exp(2\operatorname{Re} z) = (\mathit{exp}\,(\operatorname{Re} z))^2;$$

odmocněním dostaneme rovnost

$$|\exp z| = \mathit{exp}\,(\operatorname{Re} z) \tag{4.6}$$

platnou pro všechna $z \in \mathbb{C}$. Je tedy $|\exp z| = 1$, právě když $\operatorname{Re} z = 0$, neboli pro všechna $z \in \mathbb{I} := \{it;\ t \in \mathbb{R}\}$. Odtud také plyne možnost vyjádření ve tvaru

$$\exp z = \exp(x + iy) = (\mathit{exp}\,x)(\exp iy) = |\exp z| \exp(i \operatorname{Im} z)\,. \tag{4.7}$$

Některé definice známé z „reálné analýzy“ se na případ funkcí komplexní proměnné jednoduše přenesou:

Definice 4.2.6. Je-li $D_f \subset \mathbb{C}$ definiční obor funkce f, říkáme, že číslo $c \in \mathbb{C}$ je **periodou** funkce f, platí-li $z + nc \in D_f$ a $f(z) = f(z + nc)$ pro všechna $z \in D_f$ a všechna $n \in \mathbb{Z}$. Funkce f je **periodická**, existuje-li nenulová perioda f. Množinu všech period funkce f budeme značit $\operatorname{per}(f)$.

Definice 4.2.7. Funkce f je **sudá**, jestliže pro každé $z \in D_f \subset \mathbb{C}$ je $-z \in D_f$ a zároveň $f(z) = f(-z)$. Podobně je funkce f **lichá**, jestliže pro každé $z \in D_f \subset \mathbb{C}$ je $-z \in D_f$ a $f(z) = -f(-z)$.

Nyní vyjádříme exponenciálu jako součet sudé a liché funkce:

$$\exp z = \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2} + \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{2}\,, \quad z \in \mathbb{C}\,. \tag{4.8}$$

Tyto funkce jsou velmi důležité a mají své názvy i speciální označení:

Definice 4.2.8. Základní **hyperbolické funkce** definujeme rovnostmi

$$\cosh z := \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2}\,, \quad \sinh z := \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{2}\,, \quad z \in \mathbb{C}\,. \tag{4.9}$$

Funkci cosh nazýváme (komplexní) **hyperbolický kosinus** a funkci sinh (komplexní) **hyperbolický sinus**.

Ze (4.8) vyplývá vzorec

$$\exp z = \cosh z + \sinh z\,, \quad z \in \mathbb{C}\,, \tag{4.10}$$

a zřejmě cosh je sudá a sinh lichá funkce; platí tedy

$$\cosh(-z) = \cosh(z)\,, \quad \sinh(-z) = -\sinh(z)\,, \quad z \in \mathbb{C}\,. \tag{4.11}$$

Snadno též nahlédneme, že jejich Maclaurinovy rozvoje mají tvar

$$\cosh z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}\,, \quad \sinh z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}\,, \quad z \in \mathbb{C}\,. \tag{4.12}$$

Řady konvergují normálně v $\mathbb{C}$ a obě funkce jsou proto holomorfní v $\mathbb{C}$ a leží v $\mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{C})$. Snadno se ověří i rovnosti

$$\sinh' z = \cosh z\,, \quad \cosh' z = \sinh z\,, \quad z \in \mathbb{C}\,.$$

Lemma 4.2.9 (součtové vzorce). *Pro funkce* cosh, sinh *platí součtové vzorce*

$$\cosh(z+w) = \cosh z \cosh w + \sinh z \sinh w\,, \quad z, w \in \mathbb{C}\,, \tag{4.13}$$

$$\sinh(z+w) = \sinh z \cosh w + \cosh z \sinh w\,, \quad z, w \in \mathbb{C}\,. \tag{4.14}$$

Analogické rozdílové vzorce dostane čtenář pomocí vzorců (4.11).

Důkaz. Dokažme vzorec (4.13). Dosadíme do obou sčítanců na pravé straně (4.13) podle (4.9) a upravíme; dostaneme tak dvě rovnice (jednu s „horními“ a druhou s „dolními“ znaménky)

$$\begin{aligned}(\exp z \pm \exp(-z))(\exp w \pm \exp(-w)) =\\ = \exp z \exp w \pm \exp z \exp(-w) \pm \exp(-z)\exp w + \exp(-z)\exp(-w)\,,\end{aligned}$$

které sečteme, násobíme (1/4) a upravíme pomocí (4.4). Tak dostaneme (4.13). Analogicky odvodíme (4.14). □

Z rovnice (4.13) dosazením $w = -z$ a úpravou dostaneme rovnost

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1\ ; \tag{4.15}$$

Tím jsme odvodili *základní vzorce* pro hyperbolické funkce. Odvození dalších je jednoduchou záležitostí, na kterou stačí znalosti získané na střední škole.

4.3 Exponenciála a goniometrické funkce

Hyperbolické funkce jsou nepatrně jednoduší než funkce goniometrické. Při zavádění goniometrických vyjdeme z rovnosti (4.8), do které dosadíme iz za z. Dostaneme tak po rozšíření druhého zlomku [5]) na pravé straně rovnice číslem i

$$\exp(iz) = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} + i\,\frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}\,. \tag{4.16}$$

To nás vede k následující definici, analogické k vzorcům (4.9):

[5]) Bez tohoto rozšíření by zaváděný sinus nebyl na $\mathbb{R}$ reálnou funkcí.

Definice 4.3.1 (Eulerovy vzorce). Základní **goniometrické funkce** definujeme vzorci

$$\cos z := \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}\,, \quad \sin z := \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}\,, \quad z \in \mathbb{C}\,. \tag{4.17}$$

Funkci cos nazýváme (komplexní) **kosinus** a funkci sin (komplexní) **sinus**.

Ze (4.10) nebo z Eulerových vzorců (4.17) dostaneme snadno rovnost

$$\exp(iz) = \cos z + i \sin z\,, \quad z \in \mathbb{C}\,. \tag{4.18}$$

Poznámka 4.3.2. Porovnáním definic goniometrických a hyperbolických funkcí, které jsme zatím zavedli, dostáváme rovnosti

$$\cos z = \cosh(iz)\,, \quad \sin z = -i \sinh(iz)\,, \quad z \in \mathbb{C}\,. \tag{4.19}$$

Z nich vidíme, že funkce cos je sudá a funkce sin lichá, tj.

$$\cos(-z) = \cos z\,, \quad \sin(-z) = -\sin z\,, \quad z \in \mathbb{C}\,; \tag{4.20}$$

snadno z nich odvodíme s přihlédnutím k chování celočíselných mocnin čísla i Maclaurinovy rozvoje sinu a kosinu:

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}\,, \quad \sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad z \in \mathbb{C}\,. \tag{4.21}$$

Řady konvergují normálně v $\mathbb{C}$ a tak jsou obě funkce cos a sin holomorfní v $\mathbb{C}$, platí rovnosti

$$\sin' z = \cos z\,, \quad \cos' z = -\sin z\,, \quad z \in \mathbb{C}\,,$$

a cos i sin leží dokonce v $\mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{C})$; speciálně řady v (4.21), konvergují absolutně a lokálně stejnoměrně v $\mathbb{C}$. Porovnáním z Maclaurinovými rozvoji *cos* a *sin* vidíme, že jsme opravdu dostali holomorfní *rozšíření* těchto funkcí na $\mathbb{C}$. Dosadíme-li do součtových vzorců pro hyperbolické funkce iz za z a iw za w, dostaneme např. z (4.13)

$$\cosh(i(z+w)) = \cosh(iz)\cosh(iw) + \sinh(iz)\sinh(iw)\,,$$

což s pomocí vztahů (4.19) dává součtový vzorec

$$\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w\,, \quad z, w \in \mathbb{C}\,. \tag{4.22}$$

Podobným způsobem dostaneme i druhý součtový vzorec

$$\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w\,, \quad z, w \in \mathbb{C}\,. \tag{4.23}$$

Speciálně pro $w = \pi/2$ dostaneme rovnosti

$$\cos(z + \pi/2) = -\sin z\,, \quad \sin(z + \pi/2) = \cos z\,, \quad z \in \mathbb{C}\,. \tag{4.24}$$

Z rovnice (4.15) dostaneme dosazením iz za z a jednoduchým výpočtem rovnost

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1\,, \quad z \in \mathbb{C}\ ; \tag{4.25}$$

čtenář zná analogický vzorec pro $z \in \mathbb{R}$ ze střední školy. Zde je na místě varování: ze vzorce (4.25) *neplyne* $|\sin z| \le 1$, $|\cos z| \le 1$ pro všechna $z \in \mathbb{C}$, neboť čtverec komplexního čísla *nemusí být* nezáporné reálné číslo; později ukážeme, že funkce sin nabývá všech hodnot z $\mathbb{C}$. Ze vzorce (4.4) speciálně dostaneme

$$\exp z = \exp(x + iy) = \mathit{exp}\, x\,(\mathit{cos}\, y + i\, \mathit{sin}\, y)\,. \tag{4.26}$$

Tím jsme mj. vyjádřili *komplexní* exponenciálu pomocí *reálných* funkcí reálné proměnné *exp*, *cos* a *sin* ; podobně je

$$\begin{aligned} \cos(x + iy) &= \mathit{cos}\, x\, \mathit{cosh}\, y - i\, \mathit{sin}\, x\, \mathit{sinh}\, y\,, \\ \sin(x + iy) &= \mathit{sin}\, x\, \mathit{cosh}\, y + i\, \mathit{cos}\, x\, \mathit{sinh}\, y\ ; \end{aligned}$$

hyperbolické funkce tak poskytují pohodlný prostředek pro rozklad „komplexního“ kosinu a sinu na složky.

Ze vzorce (4.4) plyne indukcí rovnost $\exp nz = (\exp z)^n$ pro všechna $z \in \mathbb{C}$ a všechna $n \in \mathbb{N}$; protože pro $n = 0$ je tato rovnost triviální a protože $z^n = 1/z^{-n}$, $\exp(-z) = 1/\exp z$, je patrné, že rovnost $\exp nz = (\exp z)^n$ platí pro všechna $n \in \mathbb{Z}$ a všechna $z \in \mathbb{C}$. Odtud plyne pro všechna $z = x + iy \in \mathbb{C}$ identita

$$(\exp(x + iy))^n = (\mathit{exp}\, x)^n (\mathit{cos}\, ny + i\, \mathit{sin}\, ny)\,.$$

Tento vztah bývá na střední škole uváděn ve zjednodušené formě (pro $x = 0$) pod jménem **Moivrova věta** či **Moivrova formule**:

$$(\mathit{cos}\, y + i\, \mathit{sin}\, y)^n = \mathit{cos}\, ny + i\, \mathit{sin}\, ny\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,. \tag{4.27}$$

Poznámka 4.3.3. Připomeňme již odvozené vzorce (4.25) a (4.15). Dosaďme do nich $t \in \mathbb{R}$ za z a uvažujme body $[x, y] = [\mathit{cos}\, t, \mathit{sin}\, t]$ a body $[x, y] = [\mathit{cosh} t, \mathit{sinh} t]$. V prvním případě leží tyto body na *kružnici* o rovnici $x^2 + y^2 = 1$, ve druhém na *hyperbole* o rovnici $x^2 - y^2 = 1$. Vzorce, které jsme pro hyperbolické a goniometrické funkce odvodili, jsou analogické.

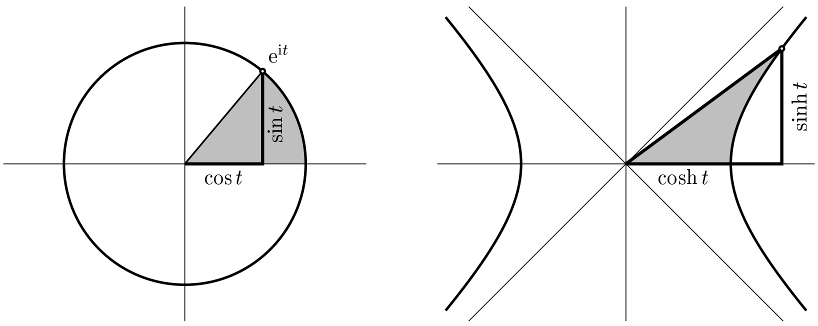
Tato analogie je hluboká a lze jí dát i geometrický charakter. Sledujte Obr. 4.1. Parametr t lze v obou případech interpretovat pomocí obsahu jistých „křivočarých trojúhelníků“. Připomeňme dva vzorce z reálné analýzy

$$\int \sqrt{1 - x^2}\, dx = \frac{1}{2}\big(x\sqrt{1 - x^2} - \mathit{arccos}\, x\big)\,, \tag{4.28}$$

$$\int \sqrt{x^2 - 1}\, dx = \frac{1}{2}\big(x\sqrt{x^2 - 1} - \mathit{log}(x + \sqrt{x^2 - 1}\big)\,. \tag{4.29}$$

Představme si body $[\,cos\,t, sin\,t\,]$ a $[\,cosh t, sinh t\,]$ s oběma kladnými souřadnicemi. U goniometrických funkcí lze t interpretovat nejen jako úhel, ale též jako dvojnásobný obsah kruhové výseče odpovídající úhlu o velikosti t; její obsah spočteme pomocí vzorce (4.28):

$$P = \frac{1}{2}\,sin\,t\,cos\,t + \int_{cos\,t}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\,sin\,t\,cos\,t + \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} - arccos\,x)\Big|_{x=cos\,t}^{1} = \frac{t}{2}$$



Obr. 4.1: Popis kružnice a hyperboly

U hyperboly lze t interpretovat jako dvojnásobný obsah „trojúhelníku“, omezeného obloukem hyperboly od vrcholu k bodu $[\,cosh t, sinh t\,]$ a úsečkami, které spojují koncové body tohoto oblouku s bodem $[\,0,0\,]$:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2}\,sinh t\,cosh t - \int_{1}^{cosh\,t} \sqrt{x^2-1}\,dx = \\ &= \frac{1}{2}\,sinh t\,cosh t + \frac{1}{2}\Big(x\sqrt{x^2-1} - log(x+\sqrt{x^2-1})\Big)\Big|_{x=cosh\,t}^{1} = \frac{1}{2}\,log\,\mathrm{e}^t = \frac{t}{2} \end{aligned}$$

Oba zmíněné „křivočaré trojúhelníky“, odpovídající parametru $(t/2)$, jsou na obrázku graficky zvýrazněny.

Všimněme si ještě dalších vlastností goniometrických funkcí. Tak např. z rovnosti $\cos it = \cosh t$, $t \in \mathbb{R}$, ihned plyne, že

$$\lim_{t\to\pm\infty} \cos it = \lim_{t\to\pm\infty} \frac{exp\,t + exp\,(-t)}{2} = \infty\,;$$

funkce cos *není* tedy na $\mathbb{C}$ omezená. To je jedna z vlastností, které se podstatně liší pro reálný a komplexní případ. Čtenář by si rovněž měl povšimnout, že pro žádné $x \in \mathbb{R}$ není $\cosh x = 0$.

Věta 4.3.4. *Funkce* exp *je periodická. Je* per(exp) $= \{2k\pi i\,;\, k \in \mathbb{Z}\}$. *Rovnost* $\exp z = \exp w$ *nastává, právě když pro nějaké* $k \in \mathbb{Z}$ *nastává rovnost* $z - w = 2k\pi i$.

Zobrazení $\varphi(t) = \exp(it)$, $t \in (-\pi, \pi\,]$, je prosté a

$$\varphi((-\pi, \pi\,]) = K(0,1) = \{z \in \mathbb{C};\ |z| = 1\}\,.$$

Důkaz. Připomeňme z Poznámky 4.1.2, že 2π je nejmenší kladná perioda funkcí *cos* a *sin*. Z definice periody plyne, že množina všech period tvoří vzhledem ke sčítání komutativní grupu. Ze vzorce (4.4) vyplývá, že pro každou periodu c funkce exp platí rovnost

$$\exp(z) = \exp(z + c) = \exp(z) \cdot \exp(c)\,.$$

Číslo c je v per(exp), právě když $\exp c = 1$. Protože $1 = |\exp c\,| = \mathit{exp}\,(\operatorname{Re} c)$ a pro $u \in \mathbb{R}$ je $\mathit{exp}\, u = 1$, právě když $u = 0$, dostáváme $\operatorname{Re} c = 0$; odtud plyne, že $c = it$ pro nějaké $t \in \mathbb{R}$. Pak však

$$1 = \exp c = \exp(it) = \mathit{cos}\, t + i\, \mathit{sin}\, t\,,$$

tj. $\mathit{cos}\, t = 1$, $\mathit{sin}\, t = 0$; tento případ nastane, právě když $t = 2k\pi$. Jinak řečeno, $c \in \operatorname{per}(\exp)$, právě když $c/2\pi i \in \mathbb{Z}$. Funkce exp je proto *periodická funkce* a

$$\operatorname{per}(\exp) = \{2k\pi i\,;\ k \in \mathbb{Z}\}\,. \tag{4.30}$$

Rovnost $\exp(z) = \exp(w)$ nastává, právě když $\exp(z - w) = 1$, neboli pro $(z - w)/2\pi i \in \mathbb{Z}$. Je-li $1 = |\exp z\,| = \mathit{exp}\,(\operatorname{Re} z)$, pak $z \in \mathbb{I} := \{it\,;\ t \in \mathbb{R}\}$. Je tedy $\varphi((-\pi, \pi\,]) \subset K(0,1)$. Pro každé $z = x + iy \in K(0,1)$ mají rovnice $\mathit{cos}\, t = x$, $\mathit{sin}\, t = y$ jediné řešení v intervalu $(-\pi, \pi\,]$, což dává zbytek tvrzení. □

Poznámka 4.3.5. Rovnost $\exp(is) = \exp(it)$ nemůže pro $s, t \in \mathbb{R}$, $s \neq t$, nastat, jestliže $|s - t| < 2\pi$. Proto je funkce exp prostá pro každé $u \in \mathbb{R}$ v pásu

$$\{z \in \mathbb{C}\,;\ \operatorname{Im} z \in (\,u, u + 2\pi\,]\}\,. \tag{4.31}$$

Vyjádříme-li nyní $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} = \mathbb{P}$ v „goniometrickém tvaru“

$$z = |z|(\mathit{cos}\, \alpha + i\, \mathit{sin}\, \alpha)\,, \tag{4.32}$$

je číslo α určeno jednoznačně např. podmínkou $-\pi < \alpha \leq \pi$, ale obecně je určeno jen „jednoznačně mod 2π“. To znamená, že pro $z = x + iy$ můžeme při vyjádření ve tvaru (4.32) pouze říci, že $y \equiv \alpha \bmod 2\pi$. S oborem $-\pi < \alpha \leq \pi$ budeme nejčastěji pracovat; jak uvidíme v další části této kapitoly, užitečnost této volby souvisí s definicí logaritmu v komplexním oboru.

Lemma 4.3.6. *Pro komplexní exponenciálu* exp *je* $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{P}$.

Důkaz. Podle (4.6) je $\exp z \neq 0$, a tedy zřejmě $\exp(\mathbb{C}) \subset \mathbb{P}$. Je-li $w \in \mathbb{P}$, nalezneme řešení rovnice $\exp z = w$ vzhledem k neznámé z v pásu $\{z \in \mathbb{C}\,;\ \operatorname{Im} z \in (-\pi, \pi\,]\}$. Položme $z = x + iy$. Pak $|\exp z| = \mathit{exp}\, x = |w|$, z čehož plyne $x = \mathit{log}\,|w|$. Z Věty 4.3.4 plyne existence jediného $y \in (-\pi, \pi\,]$, pro něž nastává rovnost $\mathit{cos}\, y + i\, \mathit{sin}\, y = \varphi(y) = w/|w| \in K(0,1)$. □

Označení 4.3.7. Pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ definujeme

$$\mathbf{R}_\alpha = \{z \in \mathbb{P};\ z = |z| \exp(i\alpha)\}\,.$$

Geometricky je $\mathbf{R}_\alpha$ množina všech bodů polopřímky vycházející z bodu 0 a protínající jednotkovou kružnici v bodě $\exp(i\alpha)$; počátek přitom na $\mathbf{R}_\alpha$ neleží. Zřejmě je $\mathbf{R}_\alpha = \mathbf{R}_\beta$, právě když $\alpha = \beta (\mathrm{mod}\, 2\pi)$. Místo $\mathbf{R}_0$ používáme již dříve zavedené označení $\mathbb{R}_+$. Píšeme tedy $\mathbb{R}_+$ místo $(0, +\infty)$ a také $\mathbf{R}_\pi$ místo $(-\infty, 0)$.

Poznámka 4.3.8. Celou situaci se pokusíme přiblížit geometricky. Obecně je nemožné jednoduše znázorňovat komplexní funkce komplexní proměnné graficky: Již znázornění každé ze složek odděleně není jednoduché. Představu nám však může zprostředkovat zobrazování jednoduchých geometrických křivek (přímek, kružnic apod.). Pro získání lepší představy o funkci exp si všimneme obrazů přímek rovnoběžných s osami. Vyjdeme ze vztahu (4.26). Protože je $\mathit{exp}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$, je z něj patrno, že přímka o rovnici $y = y_0$ se zobrazí na polopřímku $\mathbf{R}_{y_0}$. Gaussovu rovinu $\mathbb{C}$ lze vyjádřit jako sjednocení přímek o rovnicích $y = y_0 \in \mathbb{R}$ a množina $\{\exp(iy)\,;\, y \in \mathbb{R}\}$ je celá jednotková kružnice, proto zobrazuje exp komplexní rovinu $\mathbb{C}$ na $\mathbb{C} \setminus \{0\} = \mathbb{P}$.

Přímka o rovnici $x = x_0 \in \mathbb{R}$ se zobrazí na kružnici $K(0, r)$ o středu 0 a o poloměru $r = \mathit{exp}\, x_0 > 0$, avšak „proběhnutou nekonečněkrát“. Snadno nahlédneme, že obrazem úsečky $[x_0 + iy_0; x_0 + i(y_0 + 2\pi)]$ je táž kružnice. Tuto techniku využijeme dále i ve složitějších případech, např. v Doplňcích při vyšetřování Žukovského funkce.

4.4 Logaritmus a argument

Nejprve dokážeme obecné tvrzení o derivování inverzní funkce. Bezprostředně je pak použijeme k derivování zaváděného logaritmu. Poznamenejme, že je-li $f : F \to G$ prosté zobrazení F do G a pro $g : G \to F$ je $g(f(z)) = z$ pro všechna $z \in F$, je restrikce g na $f(F) \subset G$ inverzním zobrazením k f.

Věta 4.4.1. *Nechť F a G jsou otevřené množiny v $\mathbb{C}$, $f : F \to \mathbb{C}$ a $g : G \to \mathbb{C}$ jsou spojité funkce takové, že $f(F) \subset G$ a $g(f(z)) = z$ pro všechna $z \in F$. Je-li g holomorfní v G a je-li $g'(w) \neq 0$ pro všechna $w \in G$, je i f holomorfní v F a pro všechna $z \in F$ platí rovnost*

$$f'(z) = \frac{1}{g'(f(z))}\,. \tag{4.33}$$

Důkaz. Zvolme pevně bod $z \in F$ a uvažujme taková $h \in \mathbb{C}$, pro něž je $h \neq 0$, $z + h \in F$. Potom $z = g(f(z))$, $z + h = g(f(z + h))$, takže $f(z) \neq f(z + h)$ a

$$1 = \frac{g(f(z+h)) - g(f(z))}{h} = \frac{g(f(z+h)) - g(f(z))}{f(z+h) - f(z)} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}\,.$$

Limita levé strany první rovnosti pro $h \to 0$ je 1, existuje tedy i limita výrazu na pravé straně druhé rovnosti. Protože $\lim_{h \to 0}(f(z + h) - f(z)) = 0$ a pro $h \neq 0$ je

$f(z+h) \neq f(z)$, je podle věty o limitě složené funkce

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(f(z+h)) - g(f(z))}{f(z+h) - f(z)} = g'(f(z)) \ ;$$

protože $g'(f(z)) \neq 0$, existuje i limita $\lim_{h\to 0}(f(z+h) - f(z))/h = f'(z)$ a platí vzorec (4.33). □

Poznámka 4.4.2. Jak uvidíme později, lze toto tvrzení ještě zesílit, neboť totéž dokážeme za slabších předpokladů; viz Tvrzení 5.8.3. Na druhé straně nám tato jednoduchá verze umožní dokázat tvrzení o souvislosti logaritmu a exponenciály.

Definice 4.4.3. Pro $w \in \mathbb{P} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ zavedeme označení [6])

$$\operatorname{Log} w := \{z \in \mathbb{C} \,;\, w = \exp z\} . \tag{4.34}$$

Prvky *množiny* $\operatorname{Log} w$ nazýváme **hodnoty logaritmu** w.

Poznámka 4.4.4. V reálné analýze je funkce *exp* : $\mathbb{R} \to (0,\infty)$ prostá a zobrazuje $\mathbb{R}$ *na* $(0,\infty)$, takže pro dané $y \in (0,\infty)$ existuje *právě jedno řešení* x rovnice *exp* $x = y$; pro každé $w \in \mathbb{P}$ však existuje v $\mathbb{C}$ *nekonečně mnoho řešení* z rovnice $\exp z = w$. Euler považoval za „logaritmus w" každý prvek této množiny. Jak jsme ukázali výše, v každém pásu (4.31), závislém na volbě $u \in \mathbb{R}$, leží právě jedno takové řešení.

Abychom se přiblížili pojetí z reálné analýzy, vybereme si jeden z pásů (4.31): na něm určíme k funkci exp *inverzní funkci*; ta bude jedním z možných užitečných rozšíření funkce *log*, v tomto případě na $\mathbb{P}$. Je rozumné, aby přímka $\mathbb{R}$ byla *uprostřed* takového pásu, protože chceme rozšířit reálný logaritmus *log* definovaný na $\mathbb{R}_+$. Pro $u = -\pi$ tak dostaneme funkci, která se obvykle značí Log, zatímco množina ze vzorce (4.34) se značí obvykle log. Záměnou tradičního označení dosáhneme analogie: tak jako se značí holomorfní rozšíření *exp* na $\mathbb{C}$ opět exp (grafické rozlišení v dalších kapitolách opustíme), bude log značit *funkci* a ne *množinu*. Naopak velké písmeno v označení Log připomene obvyklé značení množin. Toto hledisko, i když vede k porušení české tradice v označování, by však mělo být pro začátečníka „přirozenější".

Definice 4.4.5. Označme pás (4.31) pro $u = -\pi$ symbolem M, tj. položme

$$M := \{z = x + iy \,;\, x \in \mathbb{R},\, y \in (-\pi, \pi\,]\} . \tag{4.35}$$

Funkci log definujeme jako funkci *inverzní* k restrikci $\exp|M$ funkce exp na pás M a nazýváme ji **hlavní hodnota logaritmu**. Definujeme arg := Im(log); tuto reálnou funkci nazýváme **hlavní hodnota argumentu**. Dále klademe

$$\operatorname{Arg} z := \{\alpha \in \mathbb{R} \,;\, z = |z| \exp(i\alpha)\} , \quad z \in \mathbb{P} . \tag{4.36}$$

Prvky *množiny* $\operatorname{Arg} z$ nazýváme **hodnoty argumentu** z.

---

[6]) Toto označení je netradiční; viz následující Poznámku 4.4.4.

Poznámka 4.4.6. V zavedeném označení jsou tedy $\operatorname{Log} z$ a $\operatorname{Arg} z$ pro každé $z \in \mathbb{P}$ nekonečné *množiny*, kdežto log a arg jsou *funkce*. Srovnáním s vyjádřením (4.32) zjistíme, jaký je geometrický smysl argumentu; funkci arg si lze snadno představit: $\arg z$ je velikost orientovaného úhlu $\alpha \in (-\pi, \pi]$, který svírá průvodič bodu z, tj. polopřímka $\mathbf{R}_\alpha$, s $\mathbb{R}_+$. Obecněji, uvažujeme-li všechna $\alpha \in \mathbb{R}$, je tento úhel je určen modulo 2π; viz Poznámku 4.3.5. Také reálná část $\log z$ je snadno představitelná: grafem $\mathit{log}\,|z|$ je plocha v $\mathbb{R}^3$ vzniklá „rotací grafu funkce *log*“.

Je-li $z \in \mathbb{P}$, má rovnice $\exp w = z$ v pásu M definovaném v (4.35) jediné řešení $w = \log z$; obecněji v každém pásu (4.31) existuje jediné řešení této rovnice. Protože $\exp(\log z) = z$, je $|\exp(\log z)| = \mathit{exp}(\operatorname{Re}(\log z)) = |z|$, $z \in \mathbb{P}$ a tedy $\operatorname{Re}(\log z) = \mathit{log}\,|z|$. Dostáváme tedy

$$\log z = \mathit{log}\,|z| + i \arg z\,, \quad z \in \mathbb{P}\,.$$

Poznámka 4.4.7. Nyní můžeme pro každé $z \in \mathbb{P}$ snadno popsat *množiny* $\operatorname{Log} z$ a $\operatorname{Arg} z$ pomocí *funkcí* log a arg: je $\log z = \mathit{log}\,|z| + i \arg z$, z čehož dostaneme

$$\operatorname{Log} z = \{\log z + 2k\pi i;\ k \in \mathbb{Z}\}\,, \quad \operatorname{Arg} z = \{\arg z + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}\,.$$

Nejednoznačnost imaginární části je způsobena tím, že nepracujeme *lokálně* a zajímáme se o všechna řešení w rovnice $\exp w = z$ [7]).

Lemma 4.4.8. *Funkce* log *a* arg *zavedené v Definici 4.4.5 jsou nespojité ve všech bodech množiny* $\mathbf{R}_\pi := \{t \exp(i\pi);\ t \in \mathbb{R}_+\}$ *a spojité v* $\mathbb{P} \setminus \mathbf{R}_\pi$*. Funkce* log *je holomorfní na* $\mathbb{P} \setminus \mathbf{R}_\pi$ *a její derivace je* $\log'(z) = 1/z$ *pro všechna* $z \in \mathbb{P} \setminus \mathbf{R}_\pi$*.*

Důkaz. Protože funkce $\operatorname{Re}(\log z) = \mathit{log}\,|z|$, $z \in \mathbb{P}$, je složením dvou spojitých funkcí a je tedy spojitá, pro vyšetření spojitosti log se stačí zabývat pouze funkcí $\arg z = \operatorname{Im}(\log z)$. Je-li $z_0 \in \mathbf{R}_\pi$, je $z_0 = \operatorname{Re} z_0 < 0$. Pro $z_k \to z_0$, $\operatorname{Im} z_k < 0$, $k \in \mathbb{N}_0$, je $\arg z_k < -\pi/2$, avšak $\arg z_0 = \pi$. Neplatí tedy $\arg z_k \to \arg z_0$. Lze ukázat, že pro každý bod $z_0 \in \mathbf{R}_\pi$

$$\lim_{z \to z_0,\, \operatorname{Im} z \geq 0} \log z = \log z_0\,, \quad \text{a} \quad \lim_{z \to z_0,\, \operatorname{Im} z < 0} \log z = \log z_0 - 2\pi i\,.$$

Spojitost v ostatních bodech z $\mathbb{P}$ dokážeme sporem: je-li $z_0 \in \mathbb{P} \setminus \mathbf{R}_\pi$ a arg *není* spojitá v bodě z_0, existují body $z_k \to z_0$ tak, že $\arg z_k \to t \in [-\pi, \pi]$, $t \neq \arg z_0$. Je však $\exp(\log z_k) \to \exp(\log z_0)$, a tedy platí zároveň

$$\exp(i \arg z_k) \to \exp(i \arg z_0)\,, \quad \exp(i \arg z_k) \to \exp(it)\,.$$

Avšak pak $\arg z_0 - t = 2l\pi$ pro nějaké $l \in \mathbb{Z}$ a z $|\arg z_0 - t| < 2\pi$ dostaneme $l = 0$, což je potřebný spor.

[7]) Ve starší literatuře se množiny $\operatorname{Log} z$ a $\operatorname{Arg} z$ často nazývaly „nekonečněznačné funkce“; přiřazovaly každému $z \in \mathbb{P}$ *nekonečně mnoho hodnot*. Terminologicky to však není v souladu s definicí funkce či zobrazení.

Protože exp je holomorfní a prostá na vnitřku M°, kde M je definována v (4.35), $\exp(M^\circ) = \mathbb{P} \setminus \mathbf{R}_\pi$ je oblast, na které je funkce $\log = \exp^{-1}$ spojitá, je podle Věty 4.4.1

$$\log'(z) = \frac{1}{\exp'(\log z)} = \frac{1}{\exp(\log z)} = \frac{1}{z}\,,$$

a log je tedy holomorfní v $\mathbb{P} \setminus \mathbf{R}_\pi$. □

Příklad 4.4.9. Každé číslo $w \in \mathbb{P}$ má (jedinou) hlavní hodnotu logaritmu; s ohledem na $\log w = \mathit{log}\,|w| + i \arg w$ dostáváme

$$\log(1) = 0\,, \quad \log(-1) = \pi i\,, \quad \log(i) = \pi i/2\,, \quad \log(-i) = -\pi i/2\,.$$

Všechny hodnoty komplexního logaritmu $\log w$ dostaneme z $\log w$ přičtením všech násobků $2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. Je tedy

$$\begin{aligned} \mathrm{Log}(1) &= \{2k\pi i;\ k \in \mathbb{Z}\}\,, & \mathrm{Log}(-1) &= \{(2k+1)\pi i;\ k \in \mathbb{Z}\}\,,\\ \mathrm{Log}(i) &= \{(2k+1/2)\pi i;\ k \in \mathbb{Z}\}\,, & \mathrm{Log}(-i) &= \{(2k-1/2)\pi i;\ k \in \mathbb{Z}\}\,. \end{aligned}$$

Definice 4.4.10. Je-li $M \subset \mathbb{C}$ a je-li $f : M \to \mathbb{P}$ *spojitá* funkce, pro kterou je $f(z) \in \mathrm{Log}(\varphi(z))$ pro všechna $z \in M$, nazýváme ji **spojitá větev logaritmu** φ **na** M. Podobně spojitá funkce g na M, pro kterou je $g(z) \in \mathrm{Arg}(\varphi(z))$, $z \in M$, se nazývá **spojitá větev argumentu** φ **na** M. Je-li φ identické zobrazení na M, pak φ vynecháváme a f nazýváme **spojitá větev logaritmu na** M a g **spojitá větev argumentu na** M [8]).

Je-li f spojitá větev logaritmu φ na množině M (tj. $f(z) \in \mathrm{Log}(\varphi(z))$ a f je spojitá na M), pak $\varphi(z) = \exp(f(z))$, $z \in M$, a $\mathrm{Im}\, f$ je spojitou větví argumentu φ na M. Je-li f spojitá větev argumentu φ na množině M (tj. $f(z) \in \mathrm{Arg}(\varphi(z))$ a f je spojitá na M), potom $\mathit{log}\,|\varphi| + if$ je spojitou větví logaritmu φ na M. Budeme se proto dále zabývat převážně spojitými větvemi logaritmu. Analogická tvrzení pro spojité větve argumentu si čtenář snadno dokáže sám.

Poznámky 4.4.11. V těchto poznámkách předpokládáme, že $M \subset \mathbb{C}$ a $\varphi : M \to \mathbb{P}$ je spojitá funkce vzhledem k M.

1. Je-li f spojitá větev logaritmu nebo argumentu φ na množině M, pak zřejmě $\varphi(z) \neq 0$ pro všechna $z \in M$.

2. Je-li g spojitá větev logaritmu φ na množině M, pak pro každé $k \in \mathbb{Z}$ je zřejmě $g_k := g + 2k\pi i$ rovněž spojitou větví logaritmu φ na M.

Věta 4.4.12. *Je-li $G \subset \mathbb{P}$ souvislá množina a $f : G \to \mathbb{C}$ je spojitá větev logaritmu na G, pak $\mathcal{F} := \{f + 2k\pi i\,;\ k \in \mathbb{Z}\}$ je množina všech spojitých větví logaritmu na G. Je-li navíc G oblast, je každá $f \in \mathcal{F}$ funkcí holomorfní v G a platí $f'(z) = z^{-1}$, $z \in G$.*

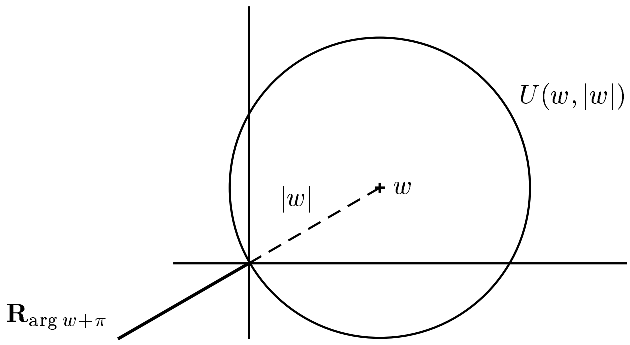
[8]) Někdy se též užívají termíny *jednoznačná větev logaritmu* a *jednoznačná větev argumentu.* Srv. např. [2].

Důkaz. Jsou-li g_1, g_2 spojité větve logaritmu φ na *souvislé* množině G, platí rovnosti $\varphi(z) = \exp(g_1(z)) = \exp(g_2(z))$ a funkce $g_1 - g_2$ je spojitá na M. Podle Věty 4.3.4 je $(g_1(z) - g_2(z))/2\pi i \in \mathbb{Z}$ pro každé z; avšak spojitá funkce, která na souvislé množině nabývá *pouze celočíselných hodnot* je konstantní. Existuje tedy $k \in \mathbb{Z}$ tak, že $g_1 = g_2 + 2k\pi i$, což spolu s Poznámkou 4.4.11, (2) dává první část tvrzení. Druhá část plyne analogicky jako v Lemmatu 4.4.8 z Věty 4.4.1 o derivování složené funkce. Stačí pracovat s jednou funkcí $f \in \mathcal{F}$: je $\exp(f(z)) = z$ a

$$f'(z) = \frac{1}{\exp'(f(z))} = \frac{1}{\exp(f(z))} = \frac{1}{z}\,.$$

Odtud plyne $f'(z) = z^{-1}$ pro *každou* $g \in \mathcal{F}$, neboť rozdíl $f - g$ je konstantní funkce v G. □

Ukazuje se, že existence spojité větve logaritmu (nebo argumentu) je velmi důležitou otázkou, která je klíčovou pro zavedení důležitého pojmu indexu bodu vzhledem k uzavřené křivce, neprocházející tímto bodem. Budeme se nyní tomuto problému věnovat.



Obr. 4.2: Vyjádření logaritmu řadou

Lemma 4.4.13. *Je-li $w \in \mathbb{P}$, $\alpha = \arg w$, pak existuje spojitá větev logaritmu v $\mathbb{P} \setminus \mathbf{R}_{\pi+\alpha}$; její restrikce na $U(w, |w|)$ je na tomto kruhu spojitou větví logaritmu a lze ji vyjádřit mocninnou řadou o středu w a poloměru konvergence $R = |w|$.*

Důkaz. Protože číslo ζ leží v $\mathbf{R}_{\alpha+\pi}$, právě když je $\zeta/w < 0$ (tj. $\zeta/w \in \mathbf{R}_\pi$), plyne z podmínky $z \in \mathbf{R}_{\alpha+\pi}$ naopak podmínka $z/w \in \mathbb{P} \setminus \mathbf{R}_\pi$. Proto je korektní definovat

$$f(z) = \log(z/w) + \log w\,, \quad z \in \mathbb{P} \setminus \mathbf{R}_{\pi+\alpha}\,,$$

a je pak $f'(z) = (1/(z/w))/w = 1/z$, $f(w) = \log w$; funkce f je zřejmě spojitou větví logaritmu v $\mathbb{P} \setminus \mathbf{R}_{\alpha+\pi}$.

Rozvoj f v $U(w,|w|)$ (viz Obr. 4.2) lze nalézt např. tak, že rozvineme funkci

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{w + (z-w)} = \sum (-1)^k \frac{(z-w)^k}{w^{k+1}}$$

a z tohoto rozvoje získáme rozvoj funkce f integrací řady „člen po členu". Dostaneme tak

$$f(z) = \log w + \sum \frac{(-1)^k}{k+1} \Big(\frac{z-w}{w}\Big)^{k+1} ;$$

hodnotu aditivní „integrační konstanty" jsme získali dosazením $z = w$: protože se součet řady anuluje pro $z = w$, je $f(w) = \log w$. □

Lemma 4.4.14. *Je-li $\varphi : [a,b] \to \mathbb{P}$ spojitá funkce, pak existuje spojitá větev logaritmu funkce φ na $[a,b]$, tj. spojitá funkce $\Phi(t)$, $t \in [a,b]$, pro kterou platí*

$$\varphi(t) = \exp(\Phi(t)) , \quad t \in [a,b] .$$

Jestliže navíc existuje derivace φ' na $[a,b]$, pak existuje i derivace Φ' a platí $\Phi'(t) = \varphi'(t)/\varphi(t)$, $t \in [a,b]$.

Důkaz. Protože je $\langle\varphi\rangle$ kompaktní množina, je její vzdálenost d od bodu 0 kladná. Protože funkce φ je *stejnoměrně* spojitá na $[a,b]$, lze zvolit dělení $D \in \mathcal{D}([a,b])$, $D = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$, že obrazy $\varphi([t_{k-1},t_k])$ intervalů dělení mají průměr menší než d. Protože pro každé $t \in [t_{k-1},t_k]$ je $|\varphi(t_{k-1}) - \varphi(t)| < d$, je také $\varphi(t) \in U_k := U(\varphi(t_{k-1}), d)$, $k = 1,\ldots,n$. Protože $|\varphi(t)| \geq d$ pro všechna $t \in [a,b]$, zřejmě $0 \notin U_k$. Na U_k, $k = 1,\ldots,n$, však podle Lemmatu 4.4.13 existují spojité větve logaritmu. Označme l_k větev na U_k a položme $\Phi_k := l_k \circ \varphi$ na $[t_{k-1},t_k]$. Funkce Φ_k jsou spojitými větvemi logaritmu φ na $[t_{k-1},t_k]$.

Základní myšlenkou dalšího postupu nejprve zhruba nastíníme; spočívá ve „slepování" větví Φ_k. Postupujeme takto: k Φ_2 přičteme $2n_1\pi i$ s takovým $n_1 \in \mathbb{Z}$, aby $\Phi_1(\varphi(t_1)) = \Phi_2(\varphi(t_1)) + 2n_1\pi i$. Tím jsme dosáhli toho, že definice

$$\Phi(t) := \Phi_1(t) , \ t \in [t_0,t_1] , \quad \Phi(t) := \Phi_2(t) + 2n_1\pi i , \ t \in [t_1,t_2]$$

je korektní. Pak přičteme vhodnou konstantu k větvi Φ_3 atd. Po konečně mnoha krocích tak získáme spojitou větev logaritmu φ na $[a,b]$. Nyní postup formálně popíšeme.

Pro každé $k = 1,\ldots,n-1$ jsou $\Phi_k(\varphi(t_k))$, $\Phi_{k+1}(\varphi(t_k))$ dvě hodnoty logaritmu čísla $\varphi(t_k)$ a existuje proto $n_k \in \mathbb{Z}$ tak, že

$$\Phi_k(\varphi(t_k)) = \Phi_{k+1}(\varphi(t_k)) + 2n_k\pi i .$$

Funkce

$$\Phi(t) := \Phi_k(t) + \sum_{j=1}^{k-1} 2n_k\pi i , \quad t \in [t_{k-1},t_k] , \ k = 1,\ldots,n ,$$

je korektně definována a je spojitou větev logaritmu φ na $[a, b]$, neboť pro každé k na $[t_{k-1}, t_k]$ platí

$$\exp(\Phi(t)) = \exp(\Phi_k(t)) = \exp(l_k(\varphi(t))) = \varphi(t)\,.$$

Další část o derivování plyne z Poznámky 3.1.2, neboť skládáme diferencovatelné funkce l_k s „hladkou“ φ. Tím je důkaz dokončen. □

Poznámky 4.4.15. 1. Je-li h spojitá funkce na $\langle\varphi\rangle$, $h : \langle\varphi\rangle \to \mathbb{P}$, lze aplikovat Lemma 4.4.14 na funkci $\psi(t) = h(\varphi(t))$, $t \in [a, b]$ a dostat tak spojitou větev logaritmu $h \circ \varphi$ na $[a, b]$. Je-li např. $h(z) = z - z_0$, $z \in \mathbb{C}$, a φ křivka neprocházející bodem z_0, dostaneme tak existenci spojité větve logaritmu $\varphi - z_0$.

2. Existuje-li pro křivku φ: $[a, b] \to \mathbb{C}$ spojitá větev Φ logaritmu $\varphi - z_0$ na $[a, b]$, nazývá se rozdíl $\Phi(b) - \Phi(a)$ **přírůstkem logaritmu** $\varphi - z_0$ **podél křivky** φ. Pokud je Ψ spojitá větev argumentu $\varphi - z_0$ na $[a, b]$, nazývá se rozdíl $\Psi(b) - \Psi(a)$ **přírůstkem argumentu** $\varphi - z_0$ **podél křivky** φ.

4.5 Obecná (komplexní) mocnina

Mocniny z^k s celým exponentem k, přesněji $z \mapsto z^k$, $z \in \mathbb{P}$, $k \in \mathbb{Z}$, jsme již definovali. Nyní zavedeme obecnou mocninu z^α i pro $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. V reálném oboru jsme obecnou mocninu x^a definovali pro $x \in (0, \infty)$ s $a \in \mathbb{R}$ jako funkci $x \mapsto exp\,(a\,log\,x)$; v komplexním oboru to se uděláme analogicky, ovšem s nezbytnou opatrností. Kromě *funkce log* máme ovšem k dispozici pro každé $z \in \mathbb{P}$ *množinu* $\operatorname{Log} z$; zavedeme proto dvě definice.

Definice 4.5.1. *Funkci*

$$z \mapsto \exp(\alpha \log(z))\,, \quad z \in \mathbb{P}\,,$$

kde log je hlavní větev logaritmu, nazýváme pro $\alpha \in \mathbb{C}$ **hlavní hodnota** α**-té mocniny** čísla z a značíme ji symbolem m_α, nebo také z^α, $z \in \mathbb{P}$.

Definice 4.5.2. Pro každé $\alpha \in \mathbb{C}$ a každé $z \in \mathbb{P}$ definujeme *množinu*

$$M_\alpha(z) := \{\exp(\alpha w);\ w \in \operatorname{Log} z\}\,, \tag{4.37}$$

kterou budeme nazývat **komplexní** α**-tou mocninou** čísla z. Její *prvky* jsou **hodnoty** α**-té mocniny** čísla z.

Poznámka 4.5.3. Protože log je rozšířením funkce *log* známé z reálné analýzy, je rovněž z^α zobecněním dříve zavedené funkce x^α. Poznamenejme, že pro $\alpha \in \mathbb{Z}$ a $z \in \mathbb{P}$ platí rovnosti

$$\begin{aligned} M_\alpha(z) &= \{\exp(\alpha w);\ w \in \operatorname{Log} z\} = \{\exp(\alpha(\log w + 2k\pi i))\} = \\ &= \{\exp(\alpha \log w) \cdot \exp(\alpha \cdot 2k\pi i)\} = \{z^\alpha\}\,, \end{aligned}$$

a je to jednoprvková množina. Ve shodě s označením lze psát místo $\exp z$ symbol e^z pro *všechna* $z \in \mathbb{C}$. Je totiž $\mathrm{e}^z = \exp(z \log \mathrm{e}) = \exp(z)$, neboť $\log(\mathrm{e}) = log(\mathrm{e}) = 1$ podle definice z reálné analýzy; viz též Poznámku 4.1.2. Tohoto označení budeme v dalším textu často využívat.

Pro každé $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ platí: Funkce z^α je spojitá v $\mathbb{P} \setminus \mathbf{R}_\pi$ a pro každé $z_0 \in \mathbf{R}_\pi$

$$\lim_{z \to z_0,\, \operatorname{Im} z \geq 0} z^\alpha = z_0^\alpha\,, \qquad \lim_{z \to z_0,\, \operatorname{Im} z < 0} z^\alpha = e^{-2\alpha\pi i} z_0^\alpha\,.$$

Protože $\alpha \notin \mathbb{Z}$, je $e^{-2\alpha\pi i} \neq 1$. Funkce z^α je pro všechna $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ nespojitá ve všech bodech $z \in \mathbf{R}_\pi$. Podle Věty 3.1.1 platí rovnost

$$(z^\alpha)' = \alpha z^{a-1}\,, \quad z \in \mathbb{P} \setminus \mathbf{R}_\pi\,.$$

Je důležité vyšetřit pro všechna uvažovaná $\alpha \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ i množinu $M_\alpha(z)$. Protože $\operatorname{Log} z = \{\log z + 2k\pi i;\ k \in \mathbb{Z}\}$ a $\exp(\alpha \log z) = z^\alpha$, je

$$M_\alpha(z) = \{z^\alpha \cdot \exp(2k\alpha\pi i);\ k \in \mathbb{Z}\}\,.$$

Je proto vhodné vědět, ze kterých čísel se skládá množina $\{\exp(2k\alpha\pi i);\ k \in \mathbb{Z}\}$; jak se ukáže, závisí to na α. Z upraveného vyjádření tvaru $\{(\exp(2\alpha\pi i))^k;\ k \in \mathbb{Z}\}$ vidíme, že tato čísla pro $k \in \mathbb{N}$ tvoří geometrickou posloupnost a stejně tak i pro $-k \in \mathbb{N}$. Pro $\alpha \in \mathbb{I} = \{it;\ t \in \mathbb{R}\}$ leží přitom na přímce a pro $\alpha \in \mathbb{R}$ na kružnici.

Pro všechna čísla $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, která jsou reálná iracionální, nebo jsou komplexní a mají nenulovou imaginární část, je množina $M_\alpha(z)$ *nekonečná*. Kdyby totiž platila pro některá dvě *různá* celá čísla k, l, rovnost $\exp(2k\alpha\pi i) = \exp(2l\alpha\pi i)$, pak by také platila rovnost $\exp(2(k-l)\alpha\pi i) = 1$, a tedy $\alpha(k-l) \in \mathbb{Z}$, což dává potřebný spor dokazující nekonečnost uvažované množiny.

Pro racionální čísla $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ je vyšetřovaná množina konečná; je-li $\alpha = p/q$, kde $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ jsou nesoudělná čísla, tvoří tato množina vrcholy pravidelného q-úhelníku. V algebře se dokazuje, že čísla $0, 1, \ldots, q-1$ leží v q různých třídách modulo q, čísla $0, 1/q, 2/q, \ldots, (q-1)/q$ v q různých třídách $(\operatorname{mod} 1)$ a čísla

$$2k\,\frac{p}{q}\,\pi i\,, \quad k = 0, 1, \ldots, (q-1) \tag{4.38}$$

v q různých třídách $(\operatorname{mod} 2\pi i)$; podobně pro každé $l \in \mathbb{Z}$ leží číslo $2l(p/q)\pi i$ v jedné ze tříd určených čísly (4.38). Speciálně je tato množina vždy *konečná*, a pro popsaný případ je

$$m_{p/q}(z) = \{z^{p/q} \exp(2k\,\frac{p}{q}\,\pi i);\ k \in \mathbb{N}_0\,, 0 \leq k \leq q-1\}\,.$$

4.6 Funkce tangens a kotangens

Zavedení funkce tangens (a kotangens) v komplexním oboru není obtížné, k definici pomocí podílu $\operatorname{tg} := \sin / \cos$ je však užitečné znát množiny (srv. se (4.1))

$$N_c(\mathbb{C}) := \{z \in \mathbb{C}\,; \cos z = 0\} \quad \text{a} \quad N_s(\mathbb{C}) := \{z \in \mathbb{C}\,; \sin z = 0\}\,. \tag{4.39}$$

Zřejmě $\sin z = 0$, právě když platí $\exp(iz) = \exp(-iz)$, neboli $\exp(2iz) = 1$. Podle Věty 4.3.4 je to právě když $2iz = 2k\pi i$ pro $k \in \mathbb{Z}$, neboli když $z \in \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$, takže $N_s(\mathbb{C}) = \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$, a vzhledem k (4.24) je $N_c(\mathbb{C}) = \{(2k+1)\pi/2;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Definice 4.6.1. Pro všechna $z \in \mathbb{C}$ definujeme

$$\operatorname{tg} z := \frac{\sin z}{\cos z}\,,\ z \in \mathbb{C} \setminus N_c(\mathbb{C})\,, \quad \operatorname{cotg} z := \frac{\cos z}{\sin z}\,,\ z \in \mathbb{C} \setminus N_s(\mathbb{C})\,. \tag{4.40}$$

Poznámka 4.6.2 (důležitá). Z předcházející definice vidíme, že obě funkce tg i cotg jsou rozšířením stejnojmenných „reálných“ funkcí. Z Eulerových vzorců (4.17) dostaneme pro $w = \exp(2iz)$ neméně zajímavé vyjádření

$$\operatorname{tg} z = \frac{1}{i}\frac{w-1}{w+1}\,,\ z \in \mathbb{C} \setminus N_c(\mathbb{C})\,, \quad \operatorname{cotg} z = i\frac{w+1}{w-1}\,,\ z \in \mathbb{C} \setminus N_s(\mathbb{C})\,. \tag{4.41}$$

Tato vyjádření jsou důležitá pro vyšetřování inverzních funkcí; analogická vyjádření existují i pro hyperbolický tangens, který se definuje pomocí rovnosti $\operatorname{tgh} z := \sinh z / \cosh z$ a hyperbolický kotangens ($\operatorname{cotgh} := \cosh z / \sinh z$). Funkce tg je holomorfní v množině $\mathbb{C} \setminus N_c(\mathbb{C})$ a podobně funkce cotg je holomorfní v množině $\mathbb{C} \setminus N_s(\mathbb{C})$. Nebudeme se těmito funkcemi zatím hlouběji zabývat. Jako ukázku uvedeme odvození vzorce, známého z reálné analýzy: z definice snadno dostaneme identitu

$$\operatorname{tg}'(z) = \frac{\cos^2 z + \sin^2 z}{\cos^2 z} = \frac{1}{\cos^2 z}$$

platnou všude v množině $\mathbb{C} \setminus N_c(\mathbb{C})$. Později rozšíříme funkce tg a cotg na $\mathbb{C}$ tak, že budou spojité všude v $\mathbb{C}$.

4.7 ♡ Doplňky

Poznámka 4.7.1 (o exponenciále). Čtenář by možná uvítal, kdybychom se na vlastnosti „reálné“ exponenciály *exp* zmíněné v Poznámce 4.1.2 neodvolávali a odvodili je přímo z Definice 4.2.1. To je na základě již dokázané Věty 4.2.3 jednoduché, pro úplnost však postup stručně popíšeme.

Z definice (4.3) plyne $\mathit{exp}\,x > 1$ pro všechna $x \in \mathbb{R}_+$. Pomocí Věty 4.2.3 dostaneme $\mathit{exp}\,x > 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Podle Věty 2.3.5 obdržíme $\mathit{exp}' = \mathit{exp}$, z čehož plyne, že *exp* je spojitá rostoucí funkce na $\mathbb{R}$. Je $0 < \mathit{exp}\,x < 1$ v $(-\infty, 0)$, $\mathit{exp}\,0 = 1$ a $\mathit{exp}\,x > 1$ v $(0, \infty)$. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ je $(\mathit{exp}\,x - (1+x))' = \mathit{exp}\,x - 1$, takže funkce $\mathit{exp}\,x - 1 - x$ má v bodě 0 minimum a platí tedy nerovnost $\mathit{exp}\,x \geq 1 + x$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Následující dvě Věty 4.7.2 a 4.7.3 spolu s Poznámkou 4.7.4 ukazují, že stejně jako v reálném oboru lze komplexní exponenciálu zavést více způsoby: pomocí jednoduché diferenciální rovnice v $\mathbb{C}$ a „počáteční podmínky“, pomocí funkcionální rovnice v $\mathbb{C}$, a také jako limitu posloupnosti jistých polynomů (odlišných od

Taylorových polynomů). Poznámka 4.7.4 popisuje cestu, která sahá až k Eulerovi a která je schůdná i v komplexním oboru.

Věta 4.7.2. *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je oblast. Je-li f holomorfní v G a je-li $b \in \mathbb{C}$, jsou ekvivalentní tyto podmínky:*

(1) *Existuje $a \in \mathbb{C}$ tak, že $f(z) = a \exp(bz)$ v G;*

(2) *rovnost $f'(z) = bf(z)$ platí pro všechna $z \in G$.*

Speciálně, funkce f holomorfní v $\mathbb{C}$, pro kterou je $f' = f$ a $f(0) = 1$, je komplexní exponenciála.

Důkaz. Výpočtem lehce ověříme, že z (1) plyne (2). Funkce $g(z) := f(z)\exp(-bz)$, $z \in G$, splňuje podle (2) v G podmínku $g'(z) = 0$, a podle Věty 3.4.5 je tedy konstantní v G. Označíme-li její hodnotu a, dostaneme odtud snadno (1). ☐

Věta 4.7.3. *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je oblast, obsahující bod 0, nechť f je funkce, která má nenulovou derivaci $b := f'(0)$ a vyhovuje funkcionální rovnici*

$$f(z+w) = f(z)f(w), \quad \textit{pokud je} \quad z, w, z+w \in G. \tag{4.42}$$

Potom je $f'(z) = bf(z)$. Speciálně, pro $b = 1$ je f restrikce exponenciály na G.

Důkaz. Připomeňme, že podmínkou o nenulovosti derivace jsou konstantní řešení funkcionální rovnice (4.42) vyloučena. Existuje tedy $z_0 \in \mathbb{C}$, pro něž $f(z_0) \neq 0$, takže z rovnosti (4.42) plyne $f(z_0 + 0) = f(z_0)f(0)$ a $f(0) = 1$. Zvolme nyní libovolné $z \in G$ a $r > 0$ tak, aby okolí $U(z, r)$ i $U(0, r)$ ležela v G. Pak podle (4.42) pro $0 < |h| < r$ je

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f(z)\,\frac{f(h) - 1}{h} = f(z)\,\frac{f(h) - f(0)}{h - 0},$$

z čehož plyne limitním přechodem pro $h \to 0$ existence $f'(z) = f(z)f'(0) = bf(z)$. Protože tento vztah platí pro všechna $z \in G$, je f holomorfní v G a lze užít Větu 4.7.2, z níž již plyne dokazované tvrzení. ☐

Poznámka 4.7.4. V [$\mathbb{V}$], str. 153, je „reálná“ exponenciála zavedena na $\mathbb{R}$ jako limita posloupnosti polynomů:

$$\mathit{exp}\, x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n. \tag{4.43}$$

S následujícím podrobným návodem čtenář snadno dokáže, že obdobně lze postupovat i v komplexním oboru. Označíme-li

$$q(n,k) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right),$$

pro každou dvojici čísel $k, n \in \mathbb{N}$, pro něž je $1 < k \le n$, snadno zjistíme, že

$$\Bigl(1 + \frac{z}{n}\Bigr)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{z^k}{n^k} = 1 + z + \sum_{k=2}^{n} q(n,k) \frac{z^k}{k!} \,.$$

Dále je

$$d(n) := \Bigl| \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} - \bigl(1 + \frac{z}{n}\bigr)^n \Bigr| = \Bigl| \sum_{k=2}^{n} \Bigl(1 - q(n,k)\Bigr) \frac{z^k}{k!} \Bigr| \,,$$

přičemž z Bernoulliho nerovnosti (viz [$\mathbb{V}$], str. 28) snadno plyne, že

$$q(n,k) \ge \Bigl(1 - \frac{k-1}{n}\Bigr)^{k-1} \ge 1 - \frac{k-1}{n}(k-1) \,, \quad \text{což dá} \quad 1 - q(n,k) < \frac{k(k-1)}{n} \,.$$

Odtud již dostaneme odhad

$$d(n) < \sum_{k=2}^{n} \frac{k(k-1)}{n} \frac{|z|^k}{k!} < \frac{|z|^2}{n} \, exp\,(|z|) \,,$$

takže (4.43) platí i v komplexním oboru, tj.

$$\exp z = \lim_{n \to \infty} \Bigl(1 + \frac{z}{n}\Bigr)^n \,, \quad z \in \mathbb{C} \,.$$

Poznámka 4.7.5 (o čísle π). V důkazu Věty 4.3.4 se opíráme o znalosti z reálné analýzy. Je to proto, že nechceme některé úvahy zbytečně opakovat. Na druhé straně některé pojmy lze v komplexní analýze definovat ekvivalentně jiným způsobem: tak bychom mohli např. *definovat* π jako nejmenší $c \in \mathbb{R}_+$ takové, že

$$\operatorname{per}(\exp) = 2ci\mathbb{Z} \,. \tag{4.44}$$

Již víme, že $\exp(z + 2k\pi i) = \exp z$ pro všechna $k \in \mathbb{Z}$. Pokud pro $z = x + iy$ je $\exp z = 1$, je $x = 0$. Nyní stačí dokázat, že pro všechna y, $0 < y < 2\pi$ je $\exp(iy) \ne 1$. To dokážeme sporem: zvolme pevně $0 < y < 2\pi$ a předpokládejme, že $\exp(iy) = 1$. Pak je $y/4 \in (0, \pi/2)$, takže pro u, v, pro něž $\exp(iy/4) = cos(y/4) + i\, sin(y/4) = u + iv$, platí zřejmě $u > 0$, $v > 0$ a

$$1 = \exp(iy) = (u + iv)^4 = u^4 - 6u^2v^2 + v^4 + 4iuv(u^2 - v^2) \,. \tag{4.45}$$

Porovnáním imaginárních částí dostaneme $u^2 = v^2$, tj. $u = v$, a dosadíme do reálné části vpravo v (4.45) u za v. Dostaneme tak

$$v^4 - 6v^4 + v^4 = -4v^4 < 0$$

a nalezený spor ukazuje, že nejmenší kladné c, pro které $2ci \in \operatorname{per}(\exp)$, je π.

Poznámka 4.7.6 (další vzorce). Čtenář si může položit otázku, jak je to se všemi těmi vzorci pro goniometrické funkce, se kterými se seznámil na střední škole, případně později v „reálné“ analýze. Vzorce (4.22) a 4.23 (pro rozdíly) jsme v „reálné variantě“ užili spolu s hodnotou derivace $sin'(0) = 1 = cos(0)$ k zavedení funkcí sin a cos a k odvození mnoha dalších vzorců; viz [$\mathbb{V}$], str. 164 a násl. Mohli bychom sledovat tuto cestu. Později se však seznámíme s obecným principem, který nám umožní „přenášet“ vzorce pro goniometrické funkce platné v $\mathbb{R}$ do $\mathbb{C}$.

Poznámka 4.7.7 (o odmocninách). Poznali jsme množiny M_α pro různá α. Je přirozené si blíže všimnout některých speciálních případů. Speciálně pro $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ množina $M_{1/n}(z)$ obsahuje pro každé $z \in \mathbb{P}$ celkem n různých hodnot n**-té odmocniny** ze z (pro $n = 1$ jde o identitu). Pro každé $z \in \mathbb{P}$ je

$$M_{1/n}(z) = \Big\{|z|^{1/n} \cdot \exp\Big(\frac{\arg z + 2k\pi}{n} i\Big);\ k = 0, 1, \dots, n-1\Big\}.$$

Geometrická interpretace je jednoduchá: Body Gaussovy roviny odpovídající těmto n hodnotám tvoří pro $n > 2$ vrcholy pravidelného n-úhelníku vepsaného do kružnice se středem 0 a poloměrem $|z|^{1/n}$; pro $n = 2$ se jedná o krajní body úsečky. Stačí tedy znát jeden z vrcholů, např. ten, který odpovídá hlavní hodnotě $z^{1/n} = |z|^{1/n} \exp((i \arg z)/n)$ a všechny hodnoty n**-té odmocniny z čísla** 1, které zřejmě tvoří množinu

$$\Big\{\exp\Big(\frac{2k\pi i}{n}\Big);\ k = 0, 1, \dots, n-1\Big\},$$

a kterými tuto hlavní hodnotu postupně násobíme. Pro $n = 2$ a $z > 0$ dostáváme právě dvě hodnoty, zapisované někdy stručně pomocí zápisu $\pm\sqrt{z}$. Obecně se *v komplexní analýze* označuje pro $z \in \mathbb{P}$ symbolem $\sqrt[n]{z}$ *množina všech n hodnot* $M_{1/n}(z)$, *v reálné analýze* pro $z > 0$ znamená *tentýž symbol* $\sqrt[n]{z}$ jediné (kladné) reálné číslo. Abychom předešli nedorozumění, užili jsme v tomto textu netradiční symboly M_α a m_α, a to i pro $\alpha = 1/n$.

Postupovali jsme záměrně tak, že pro $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ jsme funkce známé z reálné analýzy rozšířili z $\mathbb{R}_+$ na $\mathbb{P}$, tedy analogicky jako jsme postupovali u exponenciály a goniometrických funkcí.

Příklady 4.7.8. 1. V reálné analýze je $\sqrt[3]{1} = 1$ a je to *jedno číslo*, v komplexní analýze je $M_{1/3}(1)$ *množina*, jejíž jeden prvek je (reálné) číslo 1 a další dva jsou imaginární čísla: $cos(2\pi/3) + i\, sin(2\pi/3)$ a $cos(4\pi/3) + i\, sin(4\pi/3)$; zde lze zápis opět zestručnit a oba prvky zapsat najednou ve tvaru $-1/2 \pm i\sqrt{3}/2$. Symbol $M_{1/3}$ je tedy množina *všech řešení* rovnice $z^3 = 1$.

2. Podobně v $\mathbb{R}$ je $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt[3]{-27} = -3$ a $\sqrt{-4}$ není definována, zatímco při zavedeném označení je

$$M_{1/2}(9) = \{-3, 3\}, \quad M_{1/3}(-27) = \{-3,\ 3/2 - 3i\sqrt{3}/2,\ 3/2 + 3i\sqrt{3}/2\} \text{ a}$$
$$M_{1/2}(-4) = \{-2i, 2i\}.$$

3. Určíme ještě i^i: dle naší úmluvy jde o hlavní hodnotu, takže s využitím Příkladu 4.4.9 dostáváme $i^i := \exp(i \log i) = \exp(i(\pi i/2)) = \mathrm{e}^{-\pi/2}$. Naproti tomu je $M_i(i)$ množina; protože $M_i(i) := \{\exp(i(2k\pi + \pi/2)i); k \in \mathbb{Z}\} = \{\mathrm{e}^{-(2k+1/2)\pi};\ k \in \mathbb{Z}\}$, je to nekonečná množina *reálných* čísel.

Poznámka 4.7.9. Všimněme si nyní vztahu ke středoškolské látce. Připomeneme, že např. číslo $\sqrt{2}$ je kladné (iracionální) číslo a že jsme v reálné analýze *nedefinovali* $\sqrt{x}$ pro $x < 0$. Rovnice $x^2 = 2$ má dvě řešení, totiž čísla $+\sqrt{2}$ a $-\sqrt{2}$. Korektně zapíšeme příslušný postup výpočtu tak, že přejdeme k rovnici $|x| = \sqrt{2}$ a pak použijeme např. zkrácený zápis $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$.

Při řešení **kvadratické rovnice** $az^2 + bz + c = 0$ s koeficienty $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ násobíme obě strany rovnice číslem $4a \neq 0$ a upravíme ji na tvar

$$(2az + b)^2 = b^2 - 4ac\,.$$

Odtud vidíme, že je $2az + b \in M_{1/2}(b^2 - 4ac)$, a tedy

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm m_{1/2}(b^2 - 4ac)}{2a} \tag{4.46}$$

Na střední škole se komplexní odmocnina nezavádí a navíc se řeší pouze rovnice s reálnými koeficienty. S dostupným aparátem, tj. „reálnou" druhou odmocninou, bychom měli např. při řešení rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, psát důsledněji

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \qquad \text{pro} \quad D = b^2 - 4ac \geq 0\,,$$
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-D}}{2a} \qquad \text{pro} \quad D = b^2 - 4ac < 0\,.$$

4.8 ♡ Žukovského funkce

Tato funkce má podstatně širší využití, než by se z následujícího výkladu mohlo zdát: pro nás je v tuto chvíli zajímavá její souvislost s goniometrickými funkcemi.

Definice 4.8.1. Je-li $a \in \mathbb{P}$, definujeme **Žukovského funkci** (s „parametrem a") rovností

$$F_a(z) := \frac{1}{2}\Big(z + \frac{a^2}{z}\Big)\,, \quad z \in \mathbb{P}\,; \tag{4.47}$$

pro $a = 1$ budeme psát stručněji pouze F místo F_1. Čtenář by si měl povšimnout, že $F_a(z) = a\,F(z/a)$.

Dosazením ověříme vzorce

$$\cos z = F(\exp(iz))\,, \quad \sin z = -F(i\exp(iz)), \quad z \in \mathbb{C}\,. \tag{4.48}$$

Lemma 4.8.2. *Rovnost $F(z) = F(w)$ nastává pro dvojici bodů $z, w \in \mathbb{C}$, právě když je $z = w$ nebo $z = 1/w$.*

Důkaz. Dosadíme do rovnosti $F(z) - F(w) = 0$ a upravíme: Pro $z, w \in \mathbb{P}$ je

$$\frac{1}{2}\Big(z + \frac{1}{z}\Big) - \frac{1}{2}\Big(w + \frac{1}{w}\Big) = \frac{1}{2}\Big(z - w + \frac{1}{z} - \frac{1}{w}\Big) = \frac{1}{2}(z - w)\Big(1 - \frac{1}{zw}\Big) = 0\ ;$$

Odtud již plyne dokazované tvrzení. □

Důsledek 4.8.3. *Žukovského funkce F zobrazuje $\mathbb{P}$ na $\mathbb{P}$ a je prostá na každé oblasti $G \subset \mathbb{C}$, která neobsahuje dvojici bodů z, w, $z \neq w$, pro něž je $z = 1/w$.*

Poznámka 4.8.4. První část předcházejícího tvrzení je důsledkem definice: Z rovnice $F(z) = w$ snadno spočteme $z_{1,2} = w \pm m_{1/2}(w^2 - 1)$, $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 1$; hodnot ± 1 nabývá F v bodech ± 1. Druhá plyne z Lemmatu 4.8.2. Je však užitečné získat o zobrazení pomocí Žukovského funkce podrobnější informaci.

Všimněme si nejprve, že platí $F'(z) = (1/2)(1 - 1/z^2)$ a že též je $F'(1) = F'(-1) = 0$. Body $-1, 1$ jsou pevnými body F, tj. $F(-1) = -1$ a $F(1) = 1$ a lze snadno nahlédnout, že obrazem kružnice $K(0,1)$ je „dvakrát proběhnutá úsečka“: $F(K(0,1)) = [-1; 1]$.

V rovnosti $F(z) = w$ položme $z = r\mathrm{e}^{it}$, $w = u + iv$ a porovnejme reálné a imaginární části. Je

$$u = \frac{1}{2}\Big(r + \frac{1}{r}\Big) \, cos \, t \,, \quad v = \frac{1}{2}\Big(r - \frac{1}{r}\Big) \, sin \, t \,,$$

což je při pevně zvoleném $r \in \mathbb{R}_+$, $r \neq 1$, parametrické vyjádření elipsy, délky jejíchž poloos jsou $(1/2)(r + 1/r)$ a $(1/2)|r - 1/r|$. Pro všechna jmenovaná r mají tyto elipsy společná ohniska, protože pro jejich výstřednosti platí

$$e^2 = \frac{1}{4}\Big(r + \frac{1}{r}\Big)^2 - \frac{1}{4}\Big(r - \frac{1}{r}\Big)^2 = 1 \,.$$

Ponecháme-li stranou případy $t = 0 \bmod \pi/2$ a uvažujeme konstantní t [9]) dostaneme snadno úpravou

$$\frac{u^2}{cos \, t} - \frac{v^2}{sin \, t} = 1 \,.$$

Tyto křivky jsou hyperboly. Zobrazujeme-li tedy kružnice o středu v počátku a k nim ortogonální polopřímky $\mathbf{R}_t$, pak jejich obrazy jsou (kromě vyloučených případů) konfokální elipsy a k nim ortogonální hyperboly. Jejich ortogonalita se zobrazením F zachovala. Později uvidíme, že nejde o náhodu.

Dosud jsme vyšetřili pouze obor hodnot funkce exp. Z toho, co jsme dokázali o Žukovského funkci, snadno dostaneme:

Důsledek 4.8.5 (o oborech hodnot). *Je* $\cos(\mathbb{C}) = \sin(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$.

Uvážíme-li vzájemný vztah (4.24) mezi sinem a kosinem stačí dokázat např. rovnost $\cos(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$. Ta však znamená, že každé číslo $w \in \mathbb{C}$ je hodnotou funkce cos v nějakém bodě $z \in \mathbb{C}$. Protože $\cos 0 = 1$, $\cos \pi = -1$, je to pravda v případě, že $w = \pm 1$. Nechť tedy $w \in \mathbb{C}$, $w \neq \pm 1$; rovnici $\cos z = w$ upravme pomocí Eulerova vzorce (4.17) pro kosinus na tvar $\mathrm{e}^{2iz} - 2w\mathrm{e}^{iz} + 1 = 0$. Jedním z řešení kvadratické rovnice $\zeta^2 - 2w\zeta + 1 = 0$ je $\zeta = w + m_{1/2}(w^2 - 1)$. Odtud ihned plyne, že $z = -i \log \zeta$ je řešením rovnice $\cos z = w$.

Příklad 4.8.6. Dokažme, že funkce cos je prostá na pásu $\{z \in \mathbb{C};\, 0 < \operatorname{Re} z < \pi\}$, funkce sin je prostá na pásu $\{z \in \mathbb{C};\, \pi/2 < \operatorname{Re} z < \pi/2\}$. Dokážeme jen tvrzení o kosinu, tvrzení pro sinus z něj vyplyne pomocí druhého vztahu z (4.24). Protože je $\exp(iz)$ na uvažovaném pásu prostá funkce a $\cos z = F(\exp(iz))$, kde F je Žukovského funkce, platilo by $\cos z = \cos w$ pro $z \neq w$ pouze v případě, že $\exp(iz) = \exp(-iw)$, tj. že $\exp(i(z + w)) = 1$. V uvažovaném pásu však rovnost $z + w = 2k\pi$ nemůže nastat pro žádné celé $k \neq 0$.

[9]) Vyloučené případy zobrazení polopřímek $\mathbf{R}_t$ se musí vyšetřit zvlášť.

Poznámka 4.8.7. Není obtížné vyšetřit i obor hodnot funkce tg. Vyjdeme z vyjádření tangenty prvním ze vzorců (4.41) a řešíme rovnici $(\exp(2iz)-1)/(\exp(2iz)+1)=iw$. Víme, že zlomek $(a-1)/(a+1)$ není pro žádné $a \in \mathbb{C}$ roven 1, takže funkce tg nenabývá nikde v $\mathbb{C}$ hodnoty $1/i=-i$. Z rovnice $(a-1)/(a+1)=-1$ dostaneme $a=0$, avšak $\exp(2iz) \neq 0$ pro všechna $z \in \mathbb{C}$; proto tg rovněž nenabývá hodnoty i. Nyní ukážeme, že na definičním oboru

$$D_{\mathrm{tg}} := \mathbb{C} \setminus N_c(\mathbb{C}) = \{z \in \mathbb{C}\,;\, \cos z \neq 0\}$$

nabývá tg *všech hodnot* z $\mathbb{C} \setminus \{i,-i\}$. Řešíme rovnici

$$\frac{a-1}{a+1} = iw, \quad w \neq \pm 1\,.$$

Ta má jediné (nenulové) řešení vzhledem k a: je $a=(1+iw)/(1-iw)$. Odtud plyne $z=(1/2i)\log a$ neboli

$$z = \frac{1}{2i}\log\Big(\frac{1+iw}{1-iw}\Big)$$

řešením zkoumané rovnice; tím je dokázáno, že funkce tg nabývá všech hodnot z množiny $\mathbb{C} \setminus \{i,-i\}$.

Poznámka 4.8.8 (o arkustangentě). Pokud bychom pro $z \in \mathbb{C} \setminus \{i,-i\}$ vynásobili každé $\zeta \in \mathrm{Log}((1+iz)/(1-iz))$ číslem $1/2i$, dostali bychom *množinu*, která se někdy značí symbolem $\mathrm{Arctg}\, z$. Schematicky to zapíšeme ve tvaru

$$\mathrm{Arctg}(z) := \frac{1}{2i}\,\mathrm{Log}\,\frac{1+iz}{1-iz}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{i,-i\}\,.$$

Proveďte srovnání se vzorcem (2) z úvodní kapitoly. Takto definovaná arkustangenta je opět, stejně jako Log a Arg *množinou*, jejíž prvky nazýváme opět *hodnotami* arkustangenty. K této problematice se opět vrátíme v následující kapitole. Srovnejte s Příkladem 5.2.7, případně i s Příkladem 5.2.6.

U funkcí tg a cotg se jeví výhodné rozšířit je na $\mathbb{C}$ jejich limitou v $\mathbb{S}$ tak, že položíme

$$\mathrm{tg}\, z = \infty\,,\ z \in N_c(\mathbb{C})\,, \quad \mathrm{cotg}\, z = \infty\,,\ z \in N_s(\mathbb{C})\,.$$

Zde se setkáváme s dalším rozdílem mezi teorií reálných funkcí reálné proměnné a teorií komplexních funkcí komplexní proměnné. V prvé $\lim_{x\to\pi/2} \mathrm{tg}\, x$ neexistuje, zatímco v druhé $\lim_{z\to\pi/2} \mathrm{tg}\, z = \infty$. Přesto se někdy tyto dva zásadně odlišné případy důsledně nerozlišují. Pokud pracujeme s funkcemi tg a cotg takto rozšířenými na $\mathbb{C}$, je $\mathrm{tg}\,(\mathbb{C}) = \mathrm{cotg}\,(\mathbb{C}) = \mathbb{S} \setminus \{i,-i\}$.

Poznámka 4.8.9. Znovu připomínáme, že jsme v této kapitole rozlišovali graficky mezi (dříve zavedenými) reálnými variantami elementárních funkcí a zaváděnými funkcemi komplexní proměnné. V dalším textu to již nebudeme dělat a v případě potřeby upozorníme, kdy pracujeme výhradně s restrikcí funkce na $\mathbb{R}$.

Historická poznámka 4.8.10. Vývoj chápání elementárních transcendentních funkcí v reálném oboru nebudeme popisovat; viz např. [$\mathbb{V}$], str. 171 – 174. Carl Friedrich

GAUSS (1777 – 1855) napsal r. 1811 v dopise z 18. prosince 1811 FRIEDRICHOVI WILHELMU BESSELOVI (1784 – 1846): *Na úplném začátku bych žádal každého, kde chce zavést do analýzy novou funkci, aby objasnil, zda se spokojí s reálnými veličinami (tj. s reálnou proměnnou) a bude považovat imaginární hodnoty za něco ne zcela rozvinutého, nebo se připojí k mému názoru, že imaginární veličiny* $a + \sqrt{-1}\,b = a + ib$ *musíme považovat za zcela rovnoprávné veličinám reálným.* Tímto výrokem předznamenal do jisté míry ukončení vývojového období jednotlivých komplexních funkcí komplexní proměnné a zrod *teorie* funkcí komplexní proměnné.

O diskusích kolem možných hodnot logaritmu $\log x$ pro $x < 0$ jsme se zmínili v úvodní kapitole. Ty završil LEONHARD EULER (1707 – 1783), u něhož se setkáváme s komplexní exponenciálou a vzorci (4.17), které jsou po něm nazývány. Logaritmus byl pro Eulera *mnohoznačnou* funkcí: za $\log z$ považoval každé komplexní číslo w, pro něž je $\exp w = z$. Exponenciálu zaváděl jako *limitu posloupnosti* polynomů i v komplexním oboru; viz vzorec (4.43). Analogicky postupoval u logaritmu. Znal vyjádření exponenciály řadou (4.3) a její vztahy ke goniometrickým funkcím. Patrně jako první dospěl k soudobému tvaru formule (4.27) nazvané po Moivrovi, který ji objevil. Pochopení vlastností funkcí arg a log je rozhodující pro klíčová tvrzení teorie funkcí komplexní proměnné. Poznamenejme ještě, že „čistý přístup“ k exponenciále (bez využití znalostí o *exp*) jsme se pokusili demonstrovat popisem způsobů jejího zavedení. Charakterizace elementárních funkcí pomocí funkcionálních rovnic má kořeny opět v pracích LOUISE AUGUSTINA CAUCHYHO (1789 – 1857), Cauchy se však zabýval spojitými reálnými řešeními těchto rovnic; viz [$\mathbb{V}$], str. 172.

ABRAHAM DE MOIVRE (1667 – 1754) r. 1707 publikoval numerické příklady předcházející (4.27). Pravděpodobně kolem r. 1730 již užíval vzorec

$$\cos\vartheta = \tfrac{1}{2}\sqrt[n]{\cos n\vartheta + i\sin n\vartheta} + \tfrac{1}{2}\sqrt[n]{\cos n\vartheta - i\sin n\vartheta}$$

a později, r. 1738, dospěl k relativně komplikovanému postupu pro výpočet $\sqrt[n]{x+iy}$; rovnost (4.27) patrně nikdy explicitně neuvedl. Dnešní pojetí završil Euler r. 1748 a vlastní formuli (4.27) rigorózně dokázal o rok později pro všechna $n \in \mathbb{Z}$.

Jako perličku nematematického charakteru uveďme, že způsob zavedení π pomocí nejmenšího kladného nulového bodu funkce cos posloužil jako záminka k diskriminaci známého německého odborníka na teorii čísel EDMUNDA LANDAUA (1877 – 1938) po nástupu nacistů k moci v Německu.

Definice funkcí tg a cotg je přirozená (zobecnění postupu aplikovaného v „reálném případě“). Jejich hlubší význam bude patrnější po přečtení Kapitoly 9 o meromorfních funkcích. Funkce $\pi\operatorname{cotg}(\pi z)$ a $\pi/\sin(\pi z)$ se užívají ke sčítání řad metodou, plynoucí z reziduové věty; viz Kapitolu 7.

I hyperbolické funkce byly známy před vznikem teorie funkcí komplexní proměnné. Zavedl je r. 1757 VINCENCIO RICATTI (1707 – 1775), jejich standardní značení pochází od JOHANNA HEINRICHA LAMBERTA (1728 – 1777). Jejich první tabulky se objevily r. 1890. Bylo by škodlivé se domnívat, že jde o samoúčelně vzniklé „neužitečné“ analogy goniometrických funkcí; např. grafem funkce $\cosh|\mathbb{R}$ je křivka, která se nazývá řetězovka. Tvar této křivky má např. drát vysokého napětí mezi vzdálenými sloupy stojícími v téže výšce. Nalézt analytický popis řetězovky bylo jedním z nejstarších problémů ležících u zrodu infinitezimálního počtu. Neúspěšně se jím zabýval již LEONARDO DA VINCI (1452 – 1519), avšak jedno z prvních řešení metodami infinitezimálního počtu podal

Johann Bernoulli (1667 – 1748). Užitečnost hyperbolických funkcí pro teorii funkcí komplexní proměnné ukazují např. vztahy (4.19).

Funkce, která je pojmenována po Nikolaji Jegorovičі Žukovském (1847 – 1921), hraje důležitou roli v aplikacích v hydromechanice a teorii proudění. Pro nás má význam její souvislost s goniometrickými funkcemi. Podrobnější studium jejích vlastností nalezne čtenář např. v [2].

V partii o odmocninách jsme se přiblížili částečně algebře. Partie o „n-tých odmocninách z jedné“ tvořila často i u nás část přednášek z algebry. V historických knížkách o algebře lze nalézt fakta o „algebraických“ kořenech zkoumání komplexních čísel.

Literatura:

[1] Bressoud, D.: *A radical approach to real analysis*, The Mathematical Association of America, Washington, 1994.

[2] Černý, I.: *Analýza v komplexním oboru*, Academia, Praha, 1983.

[3] Kline, M.: *Mathematical thoughts from ancient to modern time*, Oxford University Press, New York, Oxford, 1990.

[4] Remmert, R.: *Theory of complex functions*, Springer, New York, 1991, (překlad druhého vydání *Funktionenlehre I* z r. 1989; první vydání je z r. 1984 (Springer)).

[5] Rühs, F.: *Funktionentheorie*, VEB Deutsche Verlag des Wissenschaften, Berlin, 1962.

Kapitola 5

Holomorfní funkce

Tato kapitola tvoří jádro celé teorie, kterou budujeme. Je věnována souvislostem mezi diferencovatelností komplexních funkcí, existencí primitivní funkce a křivkovým integrálem. Dále v ní odvodíme řadu důležitých vlastností holomorfních funkcí, zejména těch, které mají lokální charakter.

5.1 Speciální křivky

Označení 5.1.1. Budeme potřebovat dva speciální případy uzavřených polygonálních křivek, které jsou intuitivně hranicemi trojúhelníku nebo obdélníku v $\mathbb{C}$. Použijeme opět ztotožnění $\mathbb{C}$ s $\mathbb{R}^2$; podotýkáme výslovně, že v obou případech připouštíme „degenerované případy“, tj. oba útvary nemusí mít žádný vnitřní bod.

Je-li $\{a, b, c\}$ uspořádaná trojice komplexních čísel, pak označíme $\triangle\{a, b, c\}$ *nejmenší konvexní množinu* obsahující body $\mathbb{R}^2$ odpovídající číslům a, b, c. Je-li $G \subset \mathbb{R}^2$ a $\triangle\{a, b, c\} \subset G$, říkáme, že $\triangle\{a, b, c\}$ je *trojúhelník v* G. Dále položíme

$$\triangle[\,a; b; c\,] = [\,a; b; c; a\,] = [\,a; b\,] \dotplus [\,b; c\,] \dotplus [\,c; a\,]$$

a není-li nebezpečí z nedorozumění a body a, b, c jsou zřejmé z kontextu, píšeme kratčeji $(\triangle) := \triangle[\,a; b; c\,]$. Pro každou $f \in \mathcal{C}((\triangle))$ tedy

$$\int_{(\triangle)} f = \int_{[\,a;b\,]} f + \int_{[\,b;c\,]} f + \int_{[\,c;a\,]} f\,, \tag{5.1}$$

a hodnota integrálu ve vzorci (5.1) vlevo přes $(\triangle) = \triangle[a, b, c]$ se s ohledem na Lemma 1.6.16 nemění cyklickou záměnou a, b, c v uspořádané trojici $\{a, b, c\}$. Záměnou trojice $\{a, b, c\}$ za $\{a, c, b\}$ se změní v odpovídajícím integrálu v (5.1) vlevo jeho znaménko.

Je-li $a = \alpha + i\gamma$, $b = \beta + i\gamma$, $c = \beta + i\delta$, $d = \alpha + i\delta$, kde $\alpha \le \beta$, $\gamma \le \delta$, bude $Q\{a, b, c, d\}$ nejmenší konvexní množina, která obsahuje body a, b, c, d. Je-li $Q\{a, b, c, d\} \subset G$, říkáme, že $Q\{a, b, c, d\}$ je obdélník v G. Dále položíme

$$Q[\,a; b; c; d\,] = [\,a; b; c; d; a\,] = [\,a; b\,] \dotplus [\,b; c\,] \dotplus [\,c; d\,] \dotplus [\,d; a\,]\,;$$

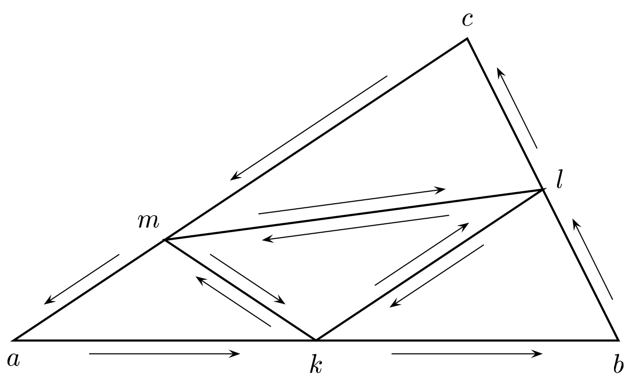
není-li nebezpečí z nedorozumění, píšeme kratčeji $(Q) := Q[\,a; b; c; d\,]$. Všimněte si, že obdélník, který uvažujeme, má vždy speciální polohu, neboť jeho „strany“ jsou v nedegenerovaném případě rovnoběžné s osami souřadnic v $\mathbb{R}^2$. Znovu připomínáme, že připouštíme „degenerované případy“, tj. útvary nemusí mít žádný vnitřní bod; ty je třeba v některých případech vyšetřit zvlášť. V nedegenerovaném případě jsou uvažované křivky Jordanovými křivkami.

5.2 Lokální Cauchyho věta

Lemma 5.2.1 (Cauchy, Goursat 1883*). *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je oblast, nechť $v \in G$ a nechť f je spojitá v G a holomorfní v $G \setminus \{v\}$. Potom platí pro každý trojúhelník $\triangle \subset G$ rovnost*

$$\int_{(\triangle)} f(z)dz = 0\,. \tag{5.2}$$

Důkaz. Doporučujeme čtenáři, aby sledoval při četbě důkazu Obr. 5.1. Nejprve předpokládejme $v \notin \triangle$. Nechť $(\triangle) = \triangle[\,a; b; c\,]$ a nechť k je střed úsečky $[\,a; b\,]$, l střed úsečky $[\,b; c\,]$ a m střed úsečky $[\,c; a\,]$. Uvažujme čtyři trojúhelníky $\triangle_j$,



Obr. 5.1: Cauchy-Goursatovo lemma; $v \notin \triangle\{a, b, c\}$

$j = 1, 2, 3, 4$, tvořené po řadě uspořádanými trojicemi bodů

$$\{a, k, m\}, \quad \{k, b, l\}, \quad \{l, c, m\}, \quad \{k, l, m\}$$

a označme L délku křivky $(\triangle)$. Zřejmě je

$$(\triangle_1) = [\,m; a\,] \dotplus [\,a; k\,] \dotplus [\,k; m\,]\,, \quad (\triangle_2) = [\,k; b\,] \dotplus [\,b; l\,] \dotplus [\,l; k\,]\,,$$
$$(\triangle_3) = [\,l; c\,] \dotplus [\,c; m\,] \dotplus [\,m; l\,]\,, \quad (\triangle_4) = [\,m; k\,] \dotplus [\,k; l\,] \dotplus [\,l; m\,]\,,$$

přičemž poslední uzavřená křivka $(\triangle_4)$ je součtem úseček opačně orientovaných k „posledním" orientovaným úsečkám v předcházejících třech součtech, tj. úseček $[\,k; l\,], [\,l; m\,], [\,m; k\,]$. Definujme A jako hodnotu integrálu z f přes $(\triangle)$. Protože se integrály přes $[\,k; m\,]$, $[\,m; k\,]$, resp. přes $[\,m; l\,]$, $[\,l; m\,]$, resp. přes $[\,l; k\,]$, $[\,k; l\,]$ liší jen znaménkem a protože integrály přes $[\,a; b\,]$, $[\,b; c\,]$, $[\,c; a\,]$ jsou po řadě součty integrálů přes $[\,a; k\,]$ a $[\,k; b\,]$, přes $[\,b; l\,]$ a $[\,l; c\,]$ a přes $[\,c; m\,]$ a $[\,m; a\,]$, je

$$A = \int_{(\triangle)} f(z)dz = \sum_{j=1}^{4} \int_{(\triangle_j)} f(z)dz\ . \tag{5.3}$$

Z (5.3) a z trojúhelníkové nerovnosti vyplývá, že absolutní hodnota nejméně jednoho z integrálů na pravé straně (5.3) je alespoň $|A|/4$. Zřejmě též platí odhad $\operatorname{diam}(\triangle) \le L((\triangle))$.

Označme odpovídající trojúhelník $\triangle^1$ a opakujme právě provedenou úvahu s $\triangle^1$ místo s $\triangle$. Tak určíme trojúhelník $\triangle^2$, atd.; postup opakujeme a tak sestrojíme klesající posloupnost do sebe zařazených (uzavřených) trojúhelníků $\triangle^n$ takovou, že délka $(\triangle^n)$ je $2^{-n}L$, přičemž délky nejdelší strany $(\triangle^n)$ a tedy i $\operatorname{diam}(\triangle^n)$ tvoří posloupnost konvergující k 0. Pro integrály z f přes $(\triangle^n)$ dostaneme

$$|A| \le 4^n \Big| \int_{(\triangle^n)} f(z)dz \Big|, \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{5.4}$$

Podle Cantorovy věty (viz např. [$\mathbb{V}$], Větu 13.3.11) existuje právě jeden bod $\zeta \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} \triangle^n$. Zřejmě je $\zeta \in \triangle \subset G$, takže $\zeta \ne v$ a funkce f má v bodě ζ derivaci. Nyní zvolme libovolně $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Podle vzorce (1.11) z Lemmatu 1.4.1 existuje $r \in \mathbb{R}_+$ tak, že

$$|f(z) - f(\zeta) - f'(\zeta)(z - \zeta)| \le \varepsilon |z - \zeta|\,, \tag{5.5}$$

kdykoli je $|z - \zeta| < r$. Existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že $2^{-n}L < r$, tudíž $|z - \zeta| < r$ pro všechna $z \in \triangle^n$ a platí odhad (5.5). Protože ke každému polynomu existuje primitivní funkce, je např. podle Věty 3.4.3

$$\int_{(\triangle^n)} f(z)dz = \int_{(\triangle^n)} [f(z) - f(\zeta) - f'(\zeta)(z - \zeta)]dz\ , \tag{5.6}$$

a z (5.5), z (5.6) a ze standardního odhadu integrálu (1.18) z Kapitoly 1 plyne, že

$$\Big| \int_{(\triangle^n)} f(z)dz \Big| \le \varepsilon\, (2^{-n}L)^2\,.$$

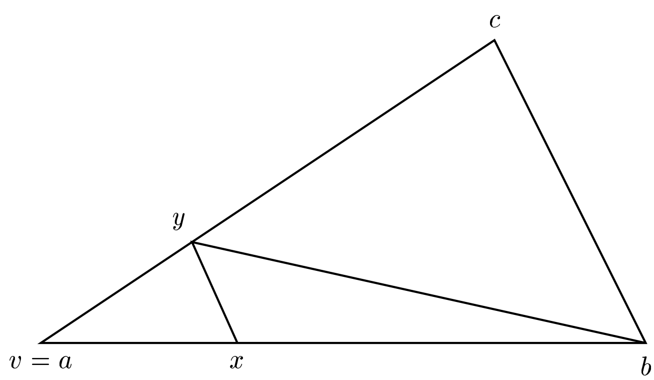
Užijeme-li (5.4), dostaneme $|A| \le \varepsilon L^2$ s libovolně předem zvoleným kladným ε. Pro vyšetřovaný případ $v \notin \triangle$ je tedy skutečně $A = 0$.

Předpokládejme dále, že v je vrcholem trojúhelníku $\triangle$ a že např. $v = a$; sledujte Obr. 5.2. Je-li $\triangle$ degenerovaný (a, b a c leží na téže přímce), potom platí (5.2) pro každou spojitou funkci f. Pokud nikoli, zvolme bod x uvnitř úsečky $[\,a;b\,]$ a y uvnitř úsečky $[\,a;c\,]$. Integrál z funkce f přes $(\triangle)$ je součtem integrálů přes křivky $\triangle[\,a;x;y\,]$, $\triangle[\,x;b;y\,]$ a $\triangle[\,b;c;y\,]$.

Podle toho, co jsme již dokázali, poslední dva integrály jsou rovny 0, neboť odpovídající trojúhelníky neobsahují v. Integrál přes $(\triangle)$ je tedy součtem integrálů přes úsečky $[\,a;x\,]$, $[\,x;y\,]$ a $[\,y;a\,]$, tj. přes trojúhelník $\triangle[\,a;x;y\,]$. Pro každé $r \in \mathbb{R}_+$ lze volit $x, y \in U(a,r)$. Protože existuje $K \in \mathbb{R}_+$ tak, že $|f| \le K$ v $\triangle$, podle standardního odhadu (1.18) je tedy

$$\Big| \int_{\triangle[\,a;x;y\,]} f(z)\,dz \Big| \le KL(\triangle[\,a;x;y\,])$$

a poslední součin konverguje k 0 pro $x \to a$, $y \to a$. Z toho plyne, že i v tomto případě platí (5.2).



Obr. 5.2: Cauchy-Goursatovo lemma; případ $v = a$

Leží-li v uvnitř některé strany trojúhelníku $\triangle$, spojíme ho úsečkou s vrcholem $\triangle$ ležícím proti této straně a na vzniklé dva trojúhelníky aplikujeme předcházející úvahu. Je-li konečně v libovolný vnitřní bod $\triangle$, aplikujeme předcházející výsledky na trojúhelníky $\triangle[\,a;b;v\,]$, $\triangle[\,b;c;v\,]$ a $\triangle[\,c;a;v\,]$. $\square$

Poznámka 5.2.2. Analogicky, patrně dokonce formálně ještě jednodušeji lze dokázat verzi předcházejícího Lemmatu 5.2.1 s libovolným intervalem Q, tj. s (Q) na místě $(\triangle)$. Obě verze (s trojúhelníky i s intervaly) jsou vhodné pro „obrácenou větu“: jak dále ukážeme, pokud se pro oblast $G \subset \mathbb{C}$ anuluje integrál z funkce f přes $(\triangle)$ pro každý trojúhelník $\triangle \subset G$ nebo přes (Q) pro každý interval $Q \subset G$, je f holomorfní funkce v G. Analogickou větu pro kružnice bychom popsanou technikou nemohli dokázat; srv. Věty 5.5.9 a 5.5.10.

Definice 5.2.3. Připomeňme znovu, že množina $M \subset \mathbb{R}^m$ je ***hvězdovitá vzhledem k bodu*** $v \in M$, jestliže M obsahuje pro každé $z \in M$ geometrický obraz úsečky $[\,v; z\,]$. Je-li M hvězdovitá vzhledem ke každému bodu $v \in M$, pak říkáme, že množina M je ***konvexní***.

Je-li G oblast a je-li $z \in G$, existuje $r \in \mathbb{R}_+$ tak, že $U(z, r) \subset G$; je-li G navíc hvězdovitá vzhledem k nějakému bodu v, snadno nahlédneme, že $\triangle[\,v; z; \zeta\,] \subset G$ pro každé $\zeta \in U(z, r)$. Tuto informaci ihned využijeme v důkazu následující věty:

Věta 5.2.4 (Cauchyho věta pro hvězdovité oblasti). *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je oblast hvězdovitá vzhledem k bodu $v \in G$ a nechť f je funkce spojitá v G a holomorfní v $G \setminus \{v\}$. Potom pro každou uzavřenou křivku φ v G*

$$\int_\varphi f(z)dz \, = 0\,; \tag{5.7}$$

definujeme-li na G funkci F vztahem

$$F(z) := \int_{[\,v;z\,]} f(u)du \;, \quad z \in G\,, \tag{5.8}$$

je F primitivní funkcí k f v G.

Důkaz. Hvězdovitá oblast G obsahuje pro každý bod $z \in G$ geometrický obraz úsečky $[\,v; z\,]$. Definujme funkci F pomocí vzorce (5.8). Zvolme nyní libovolný bod $\zeta \in G$ a nějaké jeho okolí $U(\zeta) \subset G$. Pro body $z \in U(\zeta)$ leží trojúhelník s vrcholy v, ζ, z v G a platí pro něj Lemma 5.2.1, takže $F(z) - F(\zeta)$ je hodnota integrálu z funkce f podél $[\,\zeta; z\,]$:

$$F(z) - F(\zeta) = \int_{[\,v;z\,]} f(u)du - \int_{[\,v;\zeta\,]} f(u)du \, = \int_{[\,\zeta;z\,]} f(u)du \;.$$

Proto platí rovnosti

$$\frac{F(z) - F(\zeta)}{z - \zeta} - f(\zeta) = \frac{1}{z-\zeta} \int_{[\,\zeta;z\,]} f(u)du - f(\zeta) = \frac{1}{z-\zeta} \int_{[\,\zeta;z\,]} \big(f(u) - f(\zeta)\big)\,du$$

pro všechna $z \in U(\zeta)$, $z \neq \zeta$. Ke každému $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ existuje s ohledem na spojitost funkce f v bodě ζ takové $\delta \in \mathbb{R}_+$, že pro $|u - \zeta| < \delta$ je $|f(u) - f(\zeta)| < \varepsilon$; je proto

$$\Big|\frac{F(z) - F(\zeta)}{z - \zeta} - f(\zeta)\Big| \le \frac{1}{|z - \zeta|} \Big| \int_{[\,\zeta;z\,]} \big(f(u) - f(\zeta)\big)\,du \Big| \le \varepsilon$$

pro všechna z, pro něž je $0 < |z - \zeta| < \delta$. Tím je dokázána rovnost $f(\zeta) = F'(\zeta)$. Vzhledem k tomu, že $\zeta \in G$ bylo libovolně zvoleno, je $f = F'$ v G. □

Důsledek 5.2.5. *Věta 5.2.4 platí speciálně pro každou konvexní množinu G a f holomorfní v G, přičemž ve vyjádření* (5.8) *lze volit za bod v libovolný bod z G.*

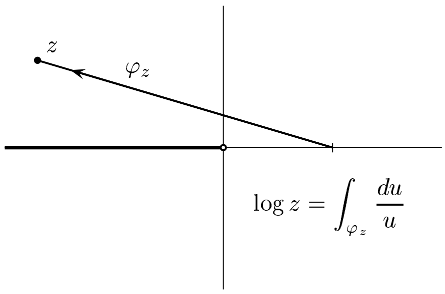
Příklad 5.2.6. Logaritmus $\log|\mathbb{R}_+$, tj. restrikci funkce log na $\mathbb{R}_+$, lze též zavést způsobem, který propagoval Felix Klein (1849 – 1925). Prozkoumáme tuto možnost v komplexním oboru. V $\mathbb{R}$ se definuje

$$\log x = \int_1^x \frac{dt}{t}, \quad x \in \mathbb{R}_+ .$$

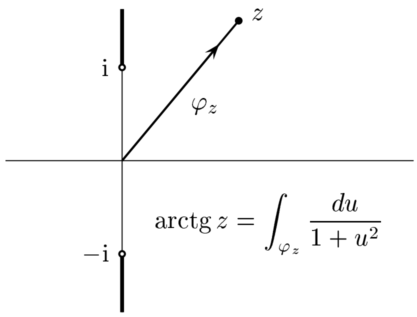
Oblast $G := \mathbb{P} \setminus \mathbf{R}_\pi$ je hvězdovitá vzhledem k bodu 1, takže podle Věty 5.2.4 je funkce

$$F(z) := \int_{[\,1;z\,]} \frac{dz}{z}\,, \quad z \in G\,,$$

funkcí primitivní k funkci $1/z$ v G; je přitom zřejmé, že $F(1) = 0$. Protože stejné vlastnosti má i restrikce funkce log na G, je $F = \log$ všude v G. Viz Obr. 5.3.



Obr. 5.3: Funkce log



Obr. 5.4: Funkce arctg

Příklad 5.2.7. Stejným způsobem jako v předcházejícím příkladu bychom mohli zavést v komplexním oboru i funkci arctg. Označme $G := \mathbb{C} \setminus \{it\,;\, t \in \mathbb{R}, |t| \geq 1\}$. Potom je G hvězdovitá vzhledem k 0 a lze definovat pro $[\,0; z\,]$,

$$\operatorname{arctg} z := \int_{[\,0;z\,]} \frac{du}{1+u^2}\,, \quad z \in G\,. \tag{5.9}$$

Funkce arctg je holomorfním rozšířením funkce arctg z $\mathbb{R}$ na G. Všimněte si, že „výřezy“ nám umožnily definovat na G přímo *funkci* arctg bez zavádění spojitých větví nebo *množiny hodnot* Arctg. Viz Obr. 5.4.

Nyní můžeme znovu prozkoumat vztah (2), o kterém jsme se zmínili v úvodní kapitole, neboli zda a v jakém smyslu platí rovnost

$$\operatorname{arctg} z = \frac{1}{2i} \log \frac{1+iz}{1-iz}\,, \quad z \in G\,. \tag{5.10}$$

Funkce definovaná vztahem (5.9) je podle Věty 5.2.4 primitivní funkcí k $1/(1+z^2)$. Derivováním výrazu na pravé straně rovnosti (5.10) dle vzorce z Tvrzení 3.1.1 dostaneme

$$\frac{1}{2i}\frac{1-iz}{1+iz}\Big(\frac{1+iz}{1-iz}\Big)' = \frac{1}{2i}\frac{2i}{(1+iz)(1-iz)} = \frac{1}{1+z^2}\,.$$

Obě strany (5.10) mají tedy v oblasti G stejnou derivaci a proto se liší jen o aditivní konstantu. Protože se obě strany v bodě 0 rovnají 0, rovnost (5.10) platí v celé oblasti G.

Při zkoumání oboru hodnot funkce tg jsme pracovali s *množinou* (v terminologii, které se vyhýbáme, s „víceznačnou funkcí“) všech řešení rovnice $\operatorname{tg} w = z$

$$\frac{1}{2i}\operatorname{Log}\frac{1+iz}{1-iz}\,. \tag{5.11}$$

Poznamenejme, že rovnost $\operatorname{tg} w = z$ pak pro $z \neq \pm i$ nastává, právě když je

$$\frac{1}{2i}\frac{\exp(2iw)-1}{\exp(2iw)+1} = z\,, \quad \text{neboli} \quad 2iw = \log\frac{1+iz}{1-iz} + 2k\pi i\,,$$

kde k je celé číslo. Analogická situace nastává při zavádění „komplexního arkuskosinu“ apod.

5.3 Cauchyho integrál

Křivkové integrály přes křivku φ tvaru

$$\int_\varphi \frac{f(w)dw}{w-z}\,, \quad z \in \mathbb{C}\setminus\langle\varphi\rangle\,,\ f \in \mathcal{C}(\langle\varphi\rangle)\,,$$

jsou velmi důležité a jsou známy pod názvem **integrály Cauchyho typu**. Dokážeme, že to jsou funkce proměnné z holomorfní v $\mathbb{C}\setminus\langle\varphi\rangle$. Nejprve dokážeme jednoduchou variantu věty o derivování těchto integrálů podle (komplexního) parametru.

Lemma 5.3.1. *Nechť $\varphi : [\,a,b\,] \to \mathbb{C}$ je křivka, $f \in \mathcal{C}(\langle\varphi\rangle)$. Položme*

$$F(z) := \int_\varphi \frac{f(w)}{w-z}\,dw\,, \quad z \in \mathbb{C}\setminus\langle\varphi\rangle\,. \tag{5.12}$$

Potom

$$F^{(k)}(z) = k!\int_\varphi \frac{f(w)dw}{(w-z)^{k+1}}\,, \quad z \in \mathbb{C}\setminus\langle\varphi\rangle\,,\ k \in \mathbb{N}\,; \tag{5.13}$$

je-li $z_0 \in \mathbb{C}\setminus\langle\varphi\rangle$ a $R := \operatorname{dist}(z_0,\langle\varphi\rangle)$, je

$$F(z) = \sum\Big(\int_\varphi \frac{f(w)dw}{(w-z)^{k+1}}\Big)(z-z_0)^k\,, \quad z \in U(z_0,R)\,. \tag{5.14}$$

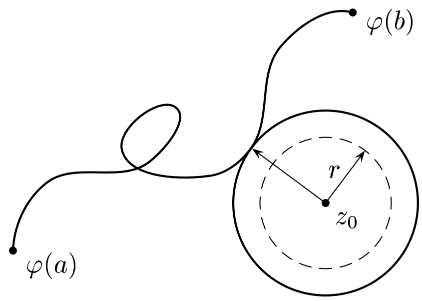
Důkaz. Nechť $G := \mathbb{C} \setminus \langle\varphi\rangle$. Nechť $z_0 \in G$, $0 < r < R$, $z \in U(z_0, r)$, $w \in \langle\varphi\rangle$. Pak je $|(z - z_0)/(w - z_0)| \le r/R < 1$ a

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-z_0)-(z-z_0)} = \sum \frac{(z-z_0)^k}{(w-z_0)^{k+1}} \tag{5.15}$$

přičemž řada vpravo konverguje stejnoměrně vzhledem k $w \in \langle\varphi\rangle$. Protože spojitá funkce f je na $\langle\varphi\rangle$ omezená, lze (5.15) násobit $f(z)$, aniž se poruší stejnoměrná konvergence a lze použít důsledku Lemmatu 1.7.2 pro řady a obdržet

$$\begin{aligned} F(z) = \int_\varphi \frac{f(w)}{w-z}\,dw &= \int_\varphi \Big(f(w) \sum \frac{(z-z_0)^k}{(w-z_0)^{k+1}} \Big)\,dw = \\ &= \sum (z-z_0)^k \Big(\int_\varphi \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}\,dw \Big). \end{aligned}$$

Vzorec v (5.14) je Taylorův rozvoj funkce $F(z)$ v mocninnou řadu o středu z_0,



Obr. 5.5: Vyjádření Cauchyho integrálu mocninnou řadou

jejíž koeficienty jsou rovny $F^{(k)}(z_0)/k!$; z toho plyne vzorec (5.13). □

Derivace F lze tedy získat derivováním vyjádření v (5.12) podle proměnné z za integračním znamením. Pokud bychom měli dokázánu obecnou větu o derivování integrálu podle komplexního parametru, měli bychom možnost dospět k vyjádření jiným způsobem.

5.4 Index bodu vzhledem ke křivce

V dalším budeme potřebovat pojem indexu bodu $\zeta \in \mathbb{S} \setminus \langle\varphi\rangle$ vzhledem k (obecné) uzavřené křivce. Tento pojem názorně odpovídá „počtu oběhů“ křivky φ kolem [1]) bodu ζ. Připomeňme výsledky Příkladů 1.6.10 a 3.4.4:

[1]) V angličtině se též užívá názorný termín *winding number.*

Příklad 5.4.1. Pro kladně orientovanou kružnici φ o středu z_0 a poloměru r, tj. pro křivku $\varphi(t) = z_0 + r\exp(it)$, $t \in [\,0, 2\pi\,]$, platí pro všechna $k \in \mathbb{Z}$ rovnost

$$\int_\varphi \frac{dz}{(z-z_0)^k} = \int_0^{2\pi} \left(r\mathrm{e}^{it}\right)^{-k} ir\mathrm{e}^{it}dt = r^{1-k}\int_0^{2\pi} i\mathrm{e}^{i(1-k)t}dt \,.$$

Je-li $k \neq 1$, má poslední integrand primitivní funkci $\mathrm{e}^{i(1-k)t}/(1-k)$, která je 2π-periodická; pro $k = 1$ je integrand roven i. Odtud vyplývá

$$\int_\varphi \frac{dz}{(z-z_0)^k} = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad k \in \mathbb{Z},\ k \neq 1\,, \\ 2\pi i & \text{pro} \quad k = 1\,. \end{cases}$$

V dalším navážeme na tento výsledek pro případ $k = 1$.

Definice 5.4.2. Nechť $\varphi : [\,a, b\,] \to \mathbb{C}$ je uzavřená (ne nutně regulární!) křivka a nechť $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \langle\varphi\rangle$. Je-li funkce f spojitou větví logaritmu funkce $\varphi - \zeta$ na $[\,a, b\,]$, pak definujeme

$$\operatorname{ind}(\varphi, \zeta) := \frac{1}{2\pi i}(f(b) - f(a))\,;$$

číslo $\operatorname{ind}(\varphi, \zeta)$ nazýváme **indexem bodu** ζ **vzhledem ke křivce** φ. Pro $\zeta = \infty$ klademe $\operatorname{ind}(\varphi, \infty) = 0$.

Poznámka 5.4.3. Poznamenejme, že Definice 5.4.2 má dobrý smysl, neboť existenci spojité větve logaritmu zaručuje Lemma 4.4.14 a rozdíl libovolných dvou spojitých větví logaritmu $\varphi - \zeta$ je podle Věty 4.4.12 konstantní funkce. Zřejmě pro každou křivku platí rovnost $\operatorname{ind}(\varphi, z) = -\operatorname{ind}(\dot{-}\,\varphi, z)$. Jestliže je $\varphi = \varphi_1 \dot{+} \varphi_2$ a $\psi = \varphi_2 \dot{+} \varphi_1$, potom $\operatorname{ind}(\varphi, z) = \operatorname{ind}(\psi, z)$, tj. hodnota indexu „nezávisí na volbě počátečního bodu“ uzavřené křivky. Definice zavádí index vůči obecnějším křivkám než jsou křivky po částech regulární.

Lemma 5.4.4. *Nechť $\varphi : [\,a, b\,] \to \mathbb{C}$ je uzavřená křivka. Potom pro každý bod $\zeta \in \mathbb{S} \setminus \langle\varphi\rangle$ je $\operatorname{ind}(\varphi, \zeta)$ celé číslo a pro $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \langle\varphi\rangle$ je*

$$\operatorname{ind}(\varphi, \zeta) = \frac{1}{2\pi}(g(b) - g(a))\,,$$

kde g je libovolná spojitá větev argumentu funkce $\varphi - \zeta$ na $[\,a, b\,]$.

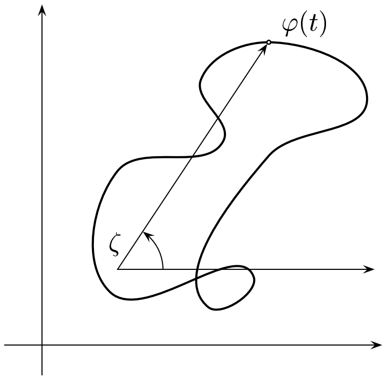
Důkaz. Označme $f = f_1 + if_2$ libovolně zvolenou spojitou větev logaritmu $\varphi - \zeta$ na $[\,a, b\,]$. Připomeňme, že $f_1(t) = \log|\varphi(t) - \zeta|$ a že $f_2(t)$ je spojitá větev $\arg(\varphi(t) - \zeta)$. Protože je $\varphi(b) = \varphi(a)$, jsou $f(b)$ a $f(a)$ hodnoty logaritmu *téhož čísla* $\varphi(a) - \zeta$; jejich rozdíl je proto k-násobkem $2\pi i$ pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$ a podíl rozdílu a čísla $2\pi i$ je tedy celé číslo. Dále je

$$\frac{f(b) - f(a)}{2\pi i} = \frac{(f_1(b) - f_1(a)) - i(f_2(b) - f_2(a))}{2\pi i} = \frac{f_2(b) - f_2(a)}{2\pi}\,,$$

protože $f_1(b) = f_1(a)$. Je-li g libovolná spojitá větev argumentu $\varphi - \zeta$ na $[a, b]$, platí

$$\operatorname{ind}(\varphi, \zeta) := \frac{1}{2\pi}(g(b) - g(a)), \tag{5.16}$$

protože platí rovnost $f_2(b) - f_2(a) = g(b) - g(a)$. □



Obr. 5.6: Znázornění přírůstku spojité větve $\arg(\varphi(t) - \zeta)$ podél křivky φ

Poznámka 5.4.5. Poznamenejme nejprve, že $\operatorname{ind}(\varphi, \zeta)$ je až na faktor roven přírůstku spojité větve logaritmu nebo argumentu $\varphi - \zeta$ podél křivky φ. Z (5.16) je nejsnáze patrný význam indexu. Zvolíme-li spojitou větev argumentu $\varphi - \zeta$ a označíme ji g, je $g(a)$ orientovaný úhel, který svírá vektor $\varphi(a) - \zeta$ se směrem polopřímky R_+; ten se při průběhu t intervalem $[a, b]$ *spojitě mění.* Představíme-li si situaci „dynamicky“, měříme úhel průvodiče $\varphi(t) - \zeta$ se směrem polopřímky $\mathbb{R}_+$ a zjišťujeme orientovaný přírůstek úhlu podél křivky. Ten pak po dělení konstantou 2π dává „počet oběhů $\varphi(t)$ kolem bodu ζ“. Odtud je odvozen zmíněný anglický termín *winding number.*

Věta 5.4.6. *Je-li $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ uzavřená křivka a je-li $\zeta \in \mathbb{S} \setminus \langle\varphi\rangle$, je*

$$\operatorname{ind}(\varphi, \zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{dz}{z - \zeta}. \tag{5.17}$$

Důkaz. Podle definice křivkového integrálu je

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{dz}{z - \zeta} = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t) - \zeta}\, dt\,. \tag{5.18}$$

Podle druhé části Lemmatu 4.4.14 a Poznámky 4.4.15 je integrál vpravo integrálem z derivace Φ' sestrojené spojité větve logaritmu funkce $\varphi - \zeta$. Jestliže zvolíme takové dělení $D = \{a = t_0 < \cdots < t_n = b\}$, že $\varphi'|(t_{k-1}, t_k)$ je spojitě rozšiřitelná na $[\,t_{k-1}, t_k\,]$ pro všechna $k = 1, \ldots, n$, platí

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)-\zeta}\,dt &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\pi i}\int_{t_{k-1}}^{t_k} \Phi'(t)\,dt = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^n [\,\Phi(t_k) - \Phi(t_{k-1})\,] = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\big(\Phi(b) - \Phi(a)\big) = \operatorname{ind}(\varphi, \zeta)\,.\end{aligned}$$

Tím je důkaz dokončen. □

Poznámka 5.4.7. Pro uzavřené křivky ve smyslu naší úmluvy, tj. křivky po částech regulární, se někdy index pomocí vztahu (5.17) *definuje*. V tom případě plyne rovnost $\operatorname{ind}(\varphi, \infty) = 0$ „přirozeně" z definice: integrujeme pak funkci identicky rovnou 0. V této kapitole *budeme dále pracovat pouze s po částech regulárními křivkami*; pro ně lze vzorec (5.17) považovat za ekvivalentní Definici 5.4.2.

V této souvislosti je zajímavé, že lze Lemma 4.4.14 „obejít" a dokázat souvislost vzorce (5.17) se spojitou větví logaritmu přímo. Z definice dostaneme (5.18), kde na pravé straně je integrovaná funkce $\varphi'/(\varphi - \zeta)$ po částech spojitá na $[\,a, b\,]$. Proto k ní existuje zobecněná primitivní funkce g. Ta je spojitá na $[\,a, b\,]$ a existuje konečná množina $K \subset [\,a, b\,]$ tak, že je

$$g'(t) = \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t) - \zeta}\,, \quad t \in K \setminus [\,a, b\,]\,,$$

přičemž

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{dz}{z - \zeta} = \frac{g(b) - g(a)}{2\pi i}\,.$$

Nyní dokážeme, že existuje $c \in \mathbb{P}$ tak, že funkce $\Phi = g - c$ je spojitou větví logaritmu $\varphi - \zeta$ na $[\,a, b\,]$. Tím bude dokázána *nezávisle* na Lemmatu 4.4.14 existence spojité větve logaritmu $\varphi - \zeta$ na $[\,a, b\,]$ a zároveň i (5.17). Funkce $\exp(g)/(\varphi - \zeta)$ je spojitá a různá od 0 na $[\,a, b\,]$, přičemž pro $t \in [\,a, b\,] \setminus K$ je

$$\Big(\frac{\exp(g(t))}{\varphi(t) - \zeta}\Big)' = \frac{\exp(g(t))\varphi'(t) - \exp(g(t))\varphi'(t)}{(\varphi(t) - \zeta)^2} = 0\,; \tag{5.19}$$

proto je rovna nenulové konstantě, kterou zapíšeme ve tvaru $\exp c$. Tak dostaneme pro všechna $t \in [\,a, b\,]$ rovnosti

$$\exp(\Phi(t)) = \exp(g(t) - c) = \varphi(t) - \zeta\,,$$

takže Φ je spojitá větev logaritmu $\varphi - \zeta$ na $[\,a, b\,]$.

Důsledek 5.4.8. *Nechť $\varphi : [\,a, b\,] \to \mathbb{C}$ je uzavřená křivka. Je-li $G := \mathbb{S} \setminus \langle\varphi\rangle$, je funkce $F(z) := \operatorname{ind}(\varphi, z)$, $z \in G$, funkcí holomorfní v G, která je konstantní v každé komponentě množiny G. V neomezené komponentě množiny G nabývá hodnoty* 0.

Důkaz. Z Lemmatu 5.4.4 plyne, že funkce F nabývá v G pouze celočíselných hodnot. Podle Lemmatu 5.3.1 je holomorfní a tedy i spojitá v $\mathbb{C} \setminus \langle\varphi\rangle$, z čehož plyne, že je konstantní v komponentách množiny $\mathbb{C} \setminus \langle\varphi\rangle$. Jelikož je $F(\infty) = 0$, stačí ukázat, že v nějakém okolí $U(\infty)$ nabývá F pouze hodnoty 0. To však vyplývá z odhadu

$$|\operatorname{ind}(\varphi, \zeta)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{dz}{z-\zeta}\right| \le \frac{1}{2\pi}\frac{L(\varphi)}{\inf\{|\varphi(t)-\zeta|;\, t\in[a,b]\}} = \frac{1}{2\pi}\frac{L(\varphi)}{\operatorname{dist}(\zeta, \langle\varphi\rangle)}\,.$$

Protože pro $\zeta \to \infty$ má poslední výraz limitu 0, je $\operatorname{ind}(\varphi, z) = 0$ pro všechna z ležící v (neomezené) komponentě $\mathbb{S} \setminus \langle\varphi\rangle$, obsahující bod ∞. □

Definice 5.4.9. Pro každou uzavřenou křivku φ v $\mathbb{C}$ definujeme

$$\operatorname{Int}(\varphi) := \{z \in \mathbb{C};\, \operatorname{ind}(\varphi, z) \ne 0\}\,, \quad \operatorname{Ext}(\varphi) := \{z \in \mathbb{C};\, \operatorname{ind}(\varphi, z) = 0\}\,.$$

Množinu $\operatorname{Int}(\varphi)$ nazýváme **vnitřek křivky** φ a množinu $\operatorname{Ext}(\varphi)$ **vnějšek křivky** φ. Čtenář by si měl uvědomit, že tato definice není v kolizi s Definicí 1.6.22 [2]).

Je $\mathbb{C} = \operatorname{Int}(\varphi) \cup \langle\varphi\rangle \cup \operatorname{Ext}(\varphi)$, avšak *obecně* neplatí $\overline{\operatorname{Int}(\varphi)} = \operatorname{Int}(\varphi) \cup \langle\varphi\rangle$. Definujme např. $\varphi := \psi \dot{-} \psi$, kde $\psi(t) := e^{2\pi i t}$, $t \in [0,1]$. Pak $\operatorname{Int}(\varphi) = \emptyset$ a rovnost zřejmě neplatí.

Důsledek 5.4.10. *Nechť je φ kladně orientovaná kružnice o středu z_0 a poloměru $r \in \mathbb{R}_+$. Potom*

$$\operatorname{ind}(\varphi, \zeta) = \begin{cases} 1 & \textit{pro všechna } \zeta \in U(z_0, r)\,, \\ 0 & \textit{pro všechna } \zeta \in \mathbb{S} \setminus \overline{U(z_0, r)}\,. \end{cases}$$

Je-li φ záporně orientovaná kružnice o středu z_0 a poloměru r, je $\operatorname{ind}(\varphi, \zeta) = -1$ *pro všechna $\zeta \in U(z_0, r)$.*

Důkaz. Tvrzení plyne z přímého výpočtu pro střed z_0 a z Důsledku 5.4.8. □

Poznámka 5.4.11. Důkaz předcházejícího Důsledku 5.4.10 se opírá o Větu 1.6.21 z Kapitoly 1. Lze dokázat, že analogické tvrzení platí i pro každou Jordanovu křivku φ. Pro každé ζ z neomezené komponenty $\mathbb{S} \setminus \langle\varphi\rangle$ je $\operatorname{ind}(\varphi, \zeta) = 0$ a pro ζ z omezené komponenty je $|\operatorname{ind}(\varphi, \zeta)| = 1$.

Poznámka 5.4.12 (důležitá). U uzavřených křivek, které budeme užívat k výpočtům, vyjádřených jako orientovaný součet úseček a částí kružnic, lze hodnotu indexu zpravidla „vyčíst z obrázku“. Většinou se totiž pracuje s Jordanovými křivkami. Pro ně se ještě zavádí toto označení: Jestliže pro každý bod $w \in \operatorname{Int}(\varphi)$ je $\operatorname{ind}(\varphi, w) = +1$, říkáme, že φ je **kladně orientovaná** Jordanova křivka; pokud pro každé $w \in \operatorname{Int}(\varphi)$ je $\operatorname{ind}(\varphi, w) = -1$, říkáme, že φ je **záporně orientovaná** Jordanova křivka. Toto rozlišení je velmi názorné. Jestliže Jordanova křivka φ

[2]) Označení je odvozeno od anglických termínů *interior* a *exterior*.

„oběhne bod $w \in \operatorname{Int}(\varphi)$ proti směru otáčení hodinových ručiček", je kladně orientovaná, souhlasí-li směr obíhání po $\langle\varphi\rangle$ se směrem otáčení hodinových ručiček, je křivka záporně orientovaná. Právě tato názornost byla příčinou, že ještě v první třetině tohoto století se v teorii funkcí komplexní proměnné pokládalo mnoho základních poznatků z topologie roviny za zřejmé, přestože právě jejich důkazy, ač často elementární, jsou poměrně *velmi nepřehledné a dlouhé*. Pro určení hodnot indexu lze užít např. následující tvrzení.

Tvrzení 5.4.13 (Maříkova věta). *Nechť $\varphi : [\,a, b\,] \to \mathbb{C}$ je uzavřená křivka; buďte dále $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \langle\varphi\rangle$ dva body, pro něž je $\operatorname{Re} z_1 < \operatorname{Re} z_2$, $\operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2$ a $\varphi(a) \notin \langle[\,z_1; z_2\,]\rangle$. Nechť konečně množina*

$$T_\varphi := \{t \in [\,a, b\,];\ \varphi(t) \in \langle[\,z_1; z_2\,]\rangle\}$$

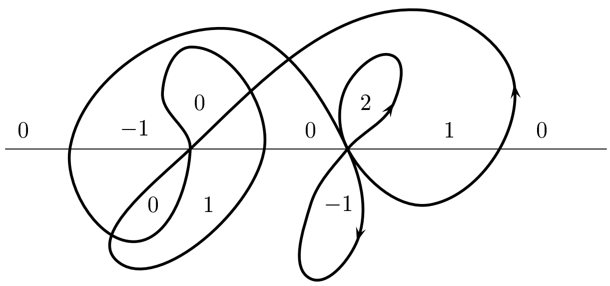
je konečná, přičemž funkce $\operatorname{Im}\varphi$ je v každém bodě $t \in T_\varphi$ ryze monotónní. Definujme funkci $\eta_\varphi : T_\varphi \to \mathbb{R}$ podmínkami

$$\eta_\varphi(t) := \begin{cases} 1\,, & \text{\textit{je-li funkce} } \operatorname{Im}\varphi \text{ \textit{v bodě} } t \in T_\varphi \text{ \textit{rostoucí}}, \\ -1\,, & \text{\textit{je-li funkce} } \operatorname{Im}\varphi \text{ \textit{v bodě} } t \in T_\varphi \text{ \textit{klesající}}. \end{cases}$$

Pak je

$$\operatorname{ind}(\varphi, z_1) = \operatorname{ind}(\varphi, z_2) + \sum_{t \in T_\varphi} \eta_\varphi(t)\,.$$

Tvrzení je s nepodstatnými změnami v označení převzato z [9], str. 93. Jiné tvrzení, pomocí kterého lze určovat index bodu vzhledem ke křivce, lze nalézt např. v [5], str. 247, Věta 10.37. Srv. Obr. 5.7, kde jsou v jednotlivých komponentách $\mathbb{C} \setminus \langle\varphi\rangle$ hodnoty indexu vyznačeny.



Obr. 5.7: Hodnoty indexu v komponentách $\mathbb{C} \setminus \langle\varphi\rangle$.

Již samotná Cauchyho věta poskytuje možnost výpočtu některých integrálů. Nebudeme se početní stránkou hlouběji zabývat, uvedeme jen několik ilustrativních příkladů; později se seznámíme s obecnější metodou výpočtu. Integrály, které zde i dále počítáme, jsou chápány *v Newtonově smyslu.*

Příklad 5.4.14. Nejprve uveďme jednu triviální ukázku, která přímo nesouvisí s výkladem v této kapitole, avšak ilustruje formální zjednodušení, které stojí za povšimnutí.

V reálné analýze se následující integrály počítají různými metodami, např. dvojnásobnou aplikací metody per-partes, integrováním řady „člen po členu", derivováním podle parametru apod.; viz např. [5], str. 92 a 93. Dokážeme jiným způsobem, že pro každé $a > 0$ a $b \in \mathbb{R}$ je

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax} \cos bx dx = \frac{a}{a^2+b^2}, \quad \int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax} \sin bx dx = \frac{b}{a^2+b^2}. \tag{5.20}$$

Pro $w = a + ib$ známe primitivní funkci k $f(z) := \exp(-wz)$, $z \in \mathbb{C}$; obdržíme tak

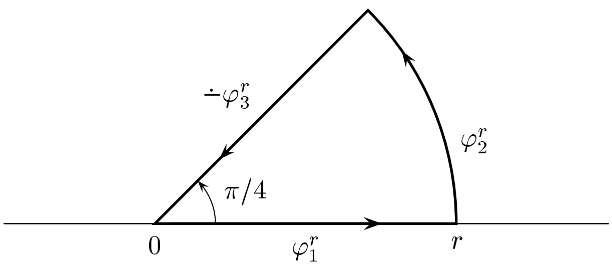
$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-at}(\cos bt + i \sin bt) dt = \int_0^\infty \mathrm{e}^{(-a+ib)t} dt = \frac{\mathrm{e}^{(-a+ib)t}}{-a+ib}\Big|_{t=0}^\infty = \frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{b}{a^2+b^2},$$

z čehož porovnáním reálné a imaginární části plynou oba vzorce v (5.20).

Příklad 5.4.15. Spočteme hodnotu tzv. **Fresnelových integrálů** a dokážeme, že (integrály chápeme stále v *Newtonově* smyslu)

$$\int_0^\infty \sin t^2 dt = \int_0^\infty \cos t^2 dt = \sqrt{\frac{\pi}{8}}. \tag{5.21}$$

K tomu potřebujeme znát hodnotu **Laplaceova integrálu**



Obr. 5.8: Znázornění křivky použité pro výpočet Fresnelových integrálů

$$\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}, \tag{5.22}$$

který se počítá v „reálné analýze" např. pomocí dvojného integrálu:

$$I^2 = \Big(\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx\Big)\Big(\int_{-\infty}^\infty e^{-y^2} dy\Big) = \iint_{(-\infty,\infty)\times(-\infty,\infty)} e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy =$$
$$= 4\int_0^{\pi/2} \Big(\int_0^\infty \rho e^{-\rho^2} d\rho\Big) dt = \pi.$$

Při výpočtu se užívá *Fubiniova věta* a *věta o substituci* pro polární souřadnice $x = \rho \cos t$, $y = \rho \sin t$; takto jednoduše to jde s Lebesgueovým integrálem, výpočet musíme eventuálně modifikovat podle úrovně znalostí o vícerozměrné integraci.

Zvolme nyní funkci $f(z) := e^{iz^2}$, $z \in \mathbb{C}$ a definujme pro každé $r \in \mathbb{R}_+$ křivku $\varphi^r := \varphi_1^r \dot{+} \varphi_2^r \dot{-} \varphi_3^r$, kde

$$\varphi_1^r(t) := t\,,\ t \in [\,0, r\,]\,,\ \varphi_2^r(t) := re^{it}\,,\ t \in [\,0, \pi/4\,]\,,\ \varphi_3^r(t) := te^{i\pi/4}\,,\ t \in [\,0, r\,]\,.$$

Protože oblast $\mathbb{C}$ je konvexní a f je holomorfní v $\mathbb{C}$, platí pro každé $r \in \mathbb{R}_+$ podle Věty 5.2.4 rovnost

$$0 = \int_{\varphi^r} f(z)dz \Big(= \int_{\varphi_1^r} f(z)dz + \int_{\varphi_2^r} f(z)dz - \int_{\varphi_3^r} f(z)dz \Big)\,.$$

Dokážeme, že druhý z integrálů v závorce konverguje pro $r \to \infty$ k 0. K odhadu užijeme základní odhad (1.18) z Kapitoly 1 a vztah $|\exp z| = \exp(\operatorname{Re} z)$, který jsme odvodili v Poznámce 4.7.1; pomocí nich dostaneme

$$\Big| \int_{\varphi_2^r} f(z)dz \Big| = \Big| \int_0^{\pi/4} \exp(ir^2 e^{2it})\, ire^{it} dt \Big| \le r \int_0^{\pi/4} \exp(-r^2 \sin 2t) dt\,. \quad (5.23)$$

V intervalu $[\,0, \pi/4\,]$ je $t \le \sin(2t)$, takže poslední integrál v (5.23) z nezáporné funkce lze odhadnout shora integrálem, který pro $r \to +\infty$ konverguje k 0:

$$0 \le r \int_0^{\pi/4} \exp(-r^2 t) dt < r \int_0^{\infty} \exp(-r^2 t) dt = \frac{1}{r} \to 0\,.$$

Dále je

$$\int_{\varphi_1^r} f(z)dz = \int_0^r e^{it^2} dt = \int_0^r \cos t^2 dt + i \int_0^r \sin t^2 dt\,,$$

$$\int_{\varphi_3^r} f(z)dz = e^{\pi i/4} \int_0^r e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \int_0^r e^{-t^2} dt\,,$$

z čehož dostáváme pro všechna $r \in \mathbb{R}_+$ vztah

$$\int_0^r (\cos t^2 + i \sin t^2) dt = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \int_0^r e^{-t^2} dt - \int_{\varphi_2^r} f(z)dz\,,$$

a z něj limitním přechodem pro $r \to \infty$, užitím (5.22) a porovnáním reálné a imaginární části vzorec (5.21). V dalších příkladech podobného typu budeme již *v označení křivek závislost křivek na parametru r apod. vynechávat.*

Poznámka 5.4.16 (důležitá). Jak si čtenář patrně již povšiml, při vytváření křivek, které používáme k výpočtům podle Cauchyho věty, resp. později podle tzv. reziduové věty, se *nesnažíme parametrizovat* výsledný orientovaný součet a integrujeme vzhledem k co nejjednodušším parametrizacím jednotlivých členů orientovaného součtu. To samozřejmě neovlivňuje hodnotu počítaného integrálu.

Příklad 5.4.17. Dokážeme, že

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}\,. \tag{5.24}$$

V reálné analýze se zpravidla dokazuje, že tento Newtonův integrál existuje [3]), elementárními metodami ho však nelze spočítat. Zde integrál spočteme, a to aniž budeme nuceni *předem dokazovat jeho existenci*; ta vyplyne přímo z metody výpočtu. Položme

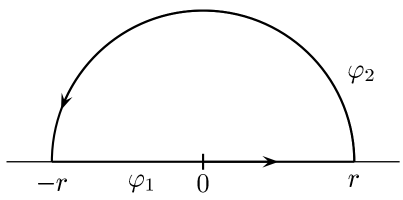
$$f(z) := \frac{e^{iz} - 1}{z}\,, \quad z \in \mathbb{P}\,.$$

Snadno nahlédneme, že funkci f lze hodnotou $f(0) := i$ spojitě rozšířit na $\mathbb{C}$ a že toto rozšíření je funkce holomorfní v $\mathbb{C}$:

$$f(z) = i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(iz)^{k-1}}{k!}\,, \quad z \in \mathbb{C}\,.$$

Lze tedy opět užít Větu 5.2.4. Definujme $\varphi := \varphi_1 \dot{+} \varphi_2$, kde pro každé $r \in \mathbb{R}_+$ je

$$\varphi_1(t) := t\,, \quad t \in [-r, r]\,, \qquad \varphi_2(t) := r\mathrm{e}^{it}\,, \quad t \in [0, \pi]\,.$$



Obr. 5.9: Křivka φ pro Příklad 5.4.17

Opět pro všechna $r \in \mathbb{R}_+$ platí rovnost

$$\int_\varphi f(z)dz = \int_{\varphi_1} f(z)dz + \int_{\varphi_2} f(z)dz = 0\,.$$

Uvážíme, že

$$\int_{\varphi_1} f(z)dz = \int_{-r}^{r} \frac{\mathrm{e}^{it} - 1}{t}\, dt = \int_{-r}^{r} \Big(\frac{\cos t - 1}{t} + i\, \frac{\sin t}{t} \Big) dt$$

[3]) Integrál z funkce $|\sin(t)/t|$ přes týž interval nekonverguje (a tedy integrál neexistuje jakožto integrál *Lebesgueův*).

a všimneme si, že díky spojitému rozšíření integrujeme funkce *spojité* v bodě 0. První integrál vpravo je roven nule (integrujeme lichou funkci), druhý je již „skoro“ $2i$-násobkem hledaného integrálu v (5.24). Platí tedy pro všechna uvažovaná r

$$2i\int_0^r \frac{\sin t}{t}\,dt = -\int_{\varphi_2} \frac{e^{iz}-1}{z}\,dz = -\int_0^\pi \frac{\exp(ir\mathrm{e}^{it})}{r\mathrm{e}^{it}}\,ir\mathrm{e}^{it}\,dt + \int_0^\pi \frac{ir\mathrm{e}^{it}}{r\mathrm{e}^{it}}\,dt \qquad (5.25)$$

Hodnota posledního integrálu v (5.25) je πi a nezávisí na r, takže srovnáním se vzorcem (5.24) zbývá dokázat, že předposlední integrál v (5.25) konverguje k 0 pro $r \to \infty$. Platí

$$0 \le \left| \int_0^\pi \frac{\exp(ir\mathrm{e}^{it})}{r\mathrm{e}^{it}}\,ir\mathrm{e}^{it}\,dt \right| \le \int_0^\pi e^{-r\sin t}\,dt = 2\int_0^{\pi/2} e^{-r\sin t}\,dt \le$$
$$\le 2\int_0^\infty e^{-rt/2}\,dt = \frac{4}{r} \to 0\,,$$

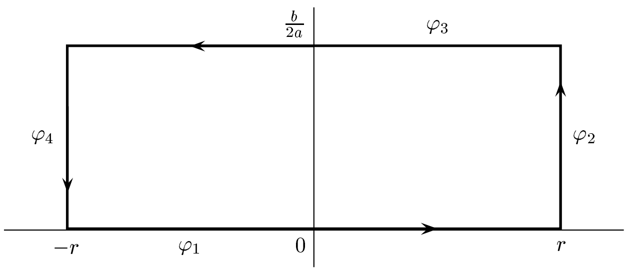
takže limitní přechod v (5.25) pro $r \to \infty$ dává (5.24). S právě provedeným „trikem“ se ještě setkáme.

Příklad 5.4.18. Také následující integrál se v reálné analýze počítá různými metodami. Pomocí Cauchyho věty dokážeme, že pro všechna $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ je

$$\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-ax^2}\cos bx\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\exp\left(-\frac{b^2}{4a}\right). \qquad (5.26)$$

Protože je integrand „sudou funkcí vzhledem k b“, budeme předpokládat, že $b > 0$; případ $b = 0$ vyřešíme zvlášť. Využijeme opět vzorec (5.22) a budeme integrovat funkci $f(z) := \exp(-az^2)$, $z \in \mathbb{C}$, holomorfní v $\mathbb{C}$, přes křivku (Q), kde $Q = [-r, r] \times [0, b/2a]$. Je tedy

$$\int_{(Q)} \mathrm{e}^{-az^2}\,dz = 0\,. \qquad (5.27)$$



Obr. 5.10: Křivka φ pro Příklad 5.4.18

Označíme-li

$$\varphi_1(t) = t, \quad t \in [-r, r], \qquad \varphi_3(t) = -t + ib/2a, \quad t \in [-r, r],$$
$$\varphi_2(t) = r + it\frac{b}{2a}, \quad t \in [0, 1], \qquad \varphi_4(t) = -r + i(1-t)\frac{b}{2a}, \quad t \in [0, 1],$$

pak $(Q) = \varphi_1 \dotplus \varphi_2 \dotplus \varphi_3 \dotplus \varphi_4$ a (5.27) platí pro všechna $r \in \mathbb{R}_+$. Budeme postupovat trochu rychleji: Je

$$\int_{\varphi_1} f(z)dz = \int_{-r}^{r} \mathrm{e}^{-ax^2} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-r\sqrt{a}}^{r\sqrt{a}} \mathrm{e}^{-t^2} dt \quad \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} \quad \sqrt{\frac{\pi}{a}},$$

kde jsme užili definici křivkového integrálu přes φ_1 a substituci $x = t/\sqrt{a}$. Zároveň jsme ověřili, že vzorec (5.26) platí i pro případ $b = 0$. Pro integrál přes φ_3 dostáváme

$$\begin{aligned}\int_{\varphi_3} f(z)dz &= -\int_{-r}^{r} \exp\Big(-a\Big(-t + \frac{ib}{2a}\Big)^2\Big) dt = -\int_{-r}^{r} \exp\Big(-a\Big(t^2 - \frac{ib}{a}t - \frac{b^2}{4a^2}\Big)\Big) dt = \\ &= -\exp\Big(\frac{b^2}{4a}\Big) \int_{-r}^{r} \mathrm{e}^{-at^2} (\cos bt + i \sin bt) dt = \qquad (\star) \\ &= -\exp\Big(\frac{b^2}{4a}\Big) \int_{-r}^{r} \mathrm{e}^{-at^2} \cos bt dt \quad \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} \quad -\exp\Big(\frac{b^2}{4a}\Big) \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-at^2} \cos bt dt,\end{aligned}$$

kde se člen se sinem v řádku $(\star)$ anuluje s ohledem na to, že integrand je lichá funkce.

Zbývající dva integrály lze v absolutní hodnotě odhadnout shodně pomocí odhadu (1.17) z Důsledku 1.6.5. Pro oba případy $k = 2$ a $k = 4$ platí pro délky křivek $L(\varphi_2) = L(\varphi_4) = b/2a$ a pro $z = x + iy$ z $\langle\varphi_2\rangle$ a $\langle\varphi_4\rangle$ je $|x| = r$ a $y \in [0, b/2a]$. Odtud dostaneme

$$|\exp(-az^2)| = \exp\big(-a(x^2 - y^2)\big) \le \exp\Big(\frac{b^2}{4a}\Big) \exp(-ar^2),$$

z čehož plyne, že

$$\Big|\int_{\varphi_k} f(z)dz\Big| \le L(\varphi_k)\|f\| = \frac{b}{2a} \exp\Big(\frac{b^2}{4a}\Big) \exp(-ar^2) \quad \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} \quad 0. \qquad (5.28)$$

Dostáváme tak z (5.27) po limitním přechodu $r \to \infty$

$$\sqrt{\frac{\pi}{a}} - \exp\Big(\frac{b^2}{4a}\Big) \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-at^2} \cos bt dt = 0,$$

z čehož již plyne dokazovaný vzorec (5.26).

5.5 Cauchyho vzorec

Lemma 5.5.1. *Nechť f je holomorfní funkce v oblasti $G \subset \mathbb{C}$ a nechť $w \in G$. Definujme funkci F na množině G předpisem*

$$F(z) = \frac{f(z) - f(w)}{z - w}, \quad z \neq w, \qquad F(w) = f'(w). \tag{5.29}$$

Potom je funkce F spojitá na G a holomorfní v $G \setminus \{w\}$.

Důkaz. Snadno nahlédneme, že funkce F je holomorfní v $G \setminus \{w\}$ a protože $F(w) = \lim_{z \to w} F(z)$, je F spojitá v bodě w. □

Věta 5.5.2 (Cauchyho vzorec). *Nechť f je holomorfní funkce v hvězdovité oblasti $G \subset \mathbb{C}$ a nechť φ je uzavřená křivka v G. Potom pro všechna $\zeta \in G \setminus \langle\varphi\rangle$ platí vzorec*

$$f(\zeta) \cdot \operatorname{ind}(\varphi, \zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{f(z)}{z - \zeta} dz . \tag{5.30}$$

Důkaz. Definujme funkci F na G pomocí (5.29). Použijeme ji při úpravě integrálu v (5.30); je

$$\int_\varphi \frac{f(z)}{z - \zeta}\, dz = \int_\varphi \Big(\frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} + \frac{f(\zeta)}{z - \zeta}\Big) dz = \int_\varphi F(z) dz + f(\zeta) \int_\varphi \frac{dz}{z - \zeta} .$$

Na první z integrálů aplikujeme Větu 5.2.4, při výpočtu druhého užijeme vzorec (5.17) a tak dostaneme (5.30). □

Předcházející výsledek o souvislosti holomorfní funkce f s *Cauchyho integrálem* se nazývá *Cauchyho vzorec.* Tento vzorec má mnoho užitečných důsledků. Protože $\operatorname{ind}(\varphi, \zeta)$ je konstantní v každé komponentě $\mathbb{S} \setminus \langle\varphi\rangle$, je vhodné se omezit na speciální jednoduchou situaci: Je-li φ např. *kladně orientovaná kružnice*, má Cauchyho vzorec (5.30) zvláště jednoduchý tvar, protože $\operatorname{ind}(\varphi, \mathbf{.}) = 1$ v $\operatorname{Int}(\varphi)$ a $\operatorname{ind}(\varphi, \mathbf{.}) = 0$ v $\operatorname{Ext}(\varphi)$.

Věta 5.5.3. *Nechť f je funkce holomorfní v otevřené množině $G \subset \mathbb{C}$ a nechť kruh $U(z_0, r)$, $r \in \mathbb{R}_+$, je obsažen i se svým uzávěrem v G. Nechť φ je kružnice, $\varphi(t) := z_0 + r \exp(it)$, $t \in [\,0, 2\pi\,]$. Potom platí:*

(1) *Pro všechna $\zeta \in U(z_0, r)$ je*

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{f(z)}{z - \zeta}\, dz . \tag{5.31}$$

(2) *Pro všechna $\zeta \in \operatorname{Int}(\varphi)$ a $k \in \mathbb{N}$ je*

$$f^{(k)}(\zeta) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\varphi \frac{f(z)}{(z - \zeta)^{k+1}}\, dz . \tag{5.32}$$

(3) *Je-li f funkce holomorfní v otevřené množině $G \subset \mathbb{C}$, má derivace všech řádů. Pro každé $\zeta \in G$ platí rovnost*

$$f(z) = \sum a_k (z - \zeta)^k ,$$

a to v $\mathbb{C}$, pokud $G = \mathbb{C}$, a v $U(\zeta, d)$, kde $d := \operatorname{dist}(\zeta, \mathbb{C} \setminus G)$, v případě, že $G \neq \mathbb{C}$.

Důkaz. Protože je $\overline{U(z_0, r)} \subset G$, existuje $r_1 \in (r, \infty)$ tak, že $\overline{\operatorname{Int}(\varphi)} \subset U(z_0, r_1)$; v $\operatorname{Int}(\varphi)$ je $\operatorname{ind}(\varphi, \zeta) = 1$, takže tvrzení (1) je důsledkem Věty 5.5.2. Podle Lemmatu 5.3.1 platí tedy i (2). Je-li $G = \mathbb{C}$, lze v Lemmatu 5.3.1 volit $R \in \mathbb{R}_+$ libovolně a $R \in (0, d)$, je-li $G \neq \mathbb{C}$; z toho plyne (3). Tím je Věta 5.5.3 dokázána. □

Věta 5.5.4 (Morera 1886*). *Je-li f spojitá v otevřené množině $G \subset \mathbb{C}$ a nezávisí-li integrál z f (ve smyslu Úmluvy 1.6.18) na cestě v G, je funkce f holomorfní v G.*

Důkaz. Předpoklady zaručují existenci primitivní funkce F k f, což jsme již dokázali ve Větě 3.4.3. Protože $F \in H(G)$, a $F' = f$, je také podle části (3) Věty 5.5.3 $f \in H(G)$. □

Úmluva 5.5.5. Oblast G, ve které integrál z každé funkce holomorfní v G nezávisí na cestě, budeme nazývat **přípustnou**. Zatím pouze víme, že hvězdovité oblasti, a tedy speciálně konvexní oblasti, jsou přípustné.

Ve Větě 5.5.9 a Větě 5.5.10 dokážeme další verze Morerovy věty, a to za slabších předpokladů.

Poznámka 5.5.6 (spíše filozofická). Je vhodné uvědomit si, že řada v (5.14) je jednoznačně určena jak restrikcí funkce f na $\langle\varphi\rangle$, tak i restrikcí f na libovolně malé okolí bodu z_0. Obě tyto restrikce jednoznačně určují všechny derivace funkce f v bodě z_0 a platí rovnost

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k , \quad z \in U(z_0, d) .$$

Je zde tedy vazba mezi „lokálním“ i „globálním“ chováním funkce f.

Podle Definice 2.3.3 se řada z (3) nazývá (stejně jako v „reálném případě“) *Taylorova řada* funkce f. Je zde však *podstatný rozdíl*: V reálném případě spojité rozšíření funkce $f(x) = \exp(-1/x^2)$ na $\mathbb{R}$ je funkce, která má na $\mathbb{R}$ spojité derivace všech řádů, avšak přesto není v žádném okolí počátku součtem mocninné řady o středu 0; v případě holomorfní funkce to nastat nemůže. To je jeden z nejdůležitějších důsledků Cauchyho vzorce.

Věta 5.5.7. *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina a f je funkce holomorfní v G, která nenabývá hodnoty 0. Potom existuje funkce g holomorfní v G taková, že je $f = \exp \circ g$, právě když f'/f má primitivní funkci v G.*

Důkaz. Je-li $f = \exp \circ g$, kde $g \in H(G)$, dostáváme zderivováním $f' = g' \exp \circ g$, a tedy $g' = f'/f$; funkce g je tedy primitivní funkcí k funkci f'/f. Obráceně, je-li g holomorfní v G a je-li $g' = f'/f$, je $(f \exp(-g))' = f' \exp(-g) - f' \exp(-g) = 0$ v G. Na každé komponentě G je proto $f \exp(-g)$ konstantní; označme hodnotu této konstanty pro zvolenou komponentu $k \neq 0$. Volíme $c \in \mathbb{C}$ tak, aby $k = \exp c$; na uvažované komponentě je $\exp(g + c) = f$; stejnou úvahu můžeme provést pro každou komponentu množiny G. □

Důsledek 5.5.8. *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je hvězdovitá (speciálně konvexní) oblast a nechť funkce f je holomorfní a všude nenulová v G. Pak má f v G spojité větve logaritmu, a všechny tyto větve jsou funkce holomorfní v G.*

Důkaz. Protože f'/f je holomorfní v G, existuje podle Věty 5.2.4 funkce primitivní k f'/f v G. Podle Věty 5.5.7 pak existuje $g \in H(G)$ tak, že $f = \exp \circ g$ v G, což znamená, že g je spojitá větev logaritmu f. Protože každá spojitá větev logaritmu f v G se na každé komponentě množiny G liší od g jen o (aditivní) konstantu, je holomorfní v G. □

Věta 5.5.9. *Nechť f je spojitá v otevřené množině $G \subset \mathbb{C}$ a nechť $\int_{(\triangle)} f = 0$ pro každý trojúhelník $\triangle \subset G$. Pak je f funkce holomorfní v G.*

Důkaz. Větu jsme prakticky dokázali v důkazu Cauchyho Věty 5.2.4; stačí uvážit, že ke každému bodu $z_0 \in G$ existuje okolí $U(z_0, r) \subset G$, což je konvexní množina. Základní podmínka pro trojúhelníky (jako při v mimo trojúhelník) pak dává podle Věty 5.2.4 existenci primitivní funkce k restrikci $f \,|\, U(z_0, r)$. □

Lemma 5.5.10 (Morera 1886*). *Je-li f spojitá v otevřené množině $G \subset \mathbb{C}$ a integrál z f se anuluje vzhledem ke hranici každého intervalu obsaženého v G, tj. pro každý obdélník, který spolu se svým vnitřkem leží v G, pak je f holomorfní funkce v G.*

Důkaz. Zvolme libovolně $U(w, r) \subset G$ s $r \in \mathbb{R}_+$; dokážeme, že funkce f má v $U(w, r)$ primitivní funkci. Zvolme $z \in U(w, r)$ a označme Q interval o vrcholech w, u, z, v

$$w = w_1 + iw_2\,, \quad u = z_1 + iw_2\,, \quad z = z_1 + iz_2\,, \quad v = w_1 + iz_2$$

a definujme primitivní funkci $F(z)$, $z \in U(w, r)$:

$$F(z) = \int_{[\,w;u;z\,]} f(u)du \, = \int_{[\,w;v;z\,]} f(u)du\ .$$

Podle předpokladů věty je tato definice korektní. Zvolme číslo $\delta > 0$ takové, že $U(z,\delta) \subset G$ a definujme pro $0 < |h| < \delta$ křivku $\omega_h(t) = z + th$, $t \in [0,1]$. Potom pro $h \in \mathbb{R}$, $h \to 0$, platí

$$\Big| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \Big| = \Big| \frac{1}{h} \int_{\omega_h} f - f(z) \Big| \le \int_0^1 |f(z+th) - f(z)| dt \to 0\,.$$

Odtud plyne $D_1 F(z) = f(z)$. Stejnou úvahu lze provést s ih na místě h a dospět k $D_2 F(z) = i f(z)$. Funkce f je spojitá a F splňuje Cauchy-Riemannovy podmínky, takže F (a tedy i f) je holomorfní. □

Poznámka 5.5.11. Věty 5.5.9 a 5.5.10 ukazují, že pro přípustnost oblasti G zdaleka není nutné předpokládat, že integrál z každé funkce $f \in H(G)$ je roven 0 pro *každou* uzavřenou křivku v G; stačí to ověřit pouze pro hranice všech trojúhelníků, nebo pro hranice všech intervalů, kde opět uvažujeme i „degenerované“ případy.

Důsledek 5.5.12. *Nechť f je spojitá na oblasti $G \subset \mathbb{C}$ a holomorfní na $G \setminus K$, kde K je množina izolovaná v G. Pak je f holomorfní na G.*

Důkaz. Zvolme libovolně $w \in K$. Protože K je množina izolovaná v G, existuje $r \in \mathbb{R}_+$ tak, že f je holomorfní na $U(w,2r)\setminus\{w\}$ a spojitá na $U(w,2r)$. Na $U(w,r)$ sestrojíme primitivní funkci F k f pomocí Věty 5.2.4. Pak F je holomorfní a podle Věty 5.5.3 je i f holomorfní v $U(w,r)$. Stejnou úvahu lze aplikovat na každý bod z K; proto je $f \in H(G)$. □

Příkladem použití Lemmatu 5.5.10 je např. důkaz následující věty

Věta 5.5.13 (Schwarzův princip zrcadlení). *Nechť G je oblast v $\mathbb{C}$ symetrická vzhledem k reálné ose, tj. taková, která s každým $z \in G$ obsahuje i $\overline{z}$. Nechť dále*

$$G^+ := \{z \in G\,;\, \operatorname{Im} z > 0\}\,, \quad G^- := \{z \in G\,;\, \operatorname{Im} z < 0\}\,, \quad G^0 := G \cap \mathbb{R}\,,$$

a nechť f je holomorfní v G^+, spojitá v $G \setminus G^-$ a reálná v G^0. Funkce g definovaná v G vztahy

$$g(z) = g_1(z) := f(z)\,,\ \ z \in G^+ \cup G^0\,, \quad g(z) = g_2(z) := \overline{f(\overline{z})}\,,\ \ z \in G^- \cup G^0 \tag{5.33}$$

je holomorfní v oblasti G.

Důkaz. Je-li $h\colon z \to \overline{z}$, je g_2 v $G\setminus G_+$ tvaru $h \circ f \circ h$ a je proto spojitá. Dále je g spojitá i v bodech $\mathbb{R}$, protože g_1 i g_2 jsou spojité a $g_1(z) = g_2(z)$, $z \in G \cap \mathbb{R}$. Pro funkci g zřejmě platí $\int_{(Q_1)} g = 0$ pro každý obdélník $Q_1 \subset G^+$, neboť $g = f$ v G^+ a $f \in H(G^+)$. Pro každý obdélník $Q_2 \in G^-$ a $Q_1 = \overline{Q_2}$ je

$$\int_{(Q_2)} g = \int_{(Q_2)} g_2 = \int_{(Q_1)} g_1 = \int_{(Q_1)} f = 0\,;$$

to platí i pro obecnější křivky ležící „symetricky“ vzhledem k $\mathbb{R}$. Prochází-li $\mathbb{R}$ vnitřním bodem obdélníku $Q \subset G$, dělí úsečka $u_0 = [a;b] := \overline{Q} \cap \mathbb{R}$ na dva obdélníky Q_1, Q_2.

Pak ale stačí ukázat, že $\int_{(Q)} g = \int_{(Q_1)} g + \int_{(Q_2)} g = 0$. To však vyplývá z toho, že pro úsečku $u_\varepsilon(t) := (1-t)a + tb + i\varepsilon$, $t \in [0;1]$ je

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{u_\varepsilon} g(z)dz = \int_{u_0} f = \int_a^b f(t)dt\,,$$

nahradíme-li Q_1, Q_2 „zmenšenými obdélníky“ se stranami $\langle u_{\pm\varepsilon}\rangle$ a provedeme limitní přechod pro $\varepsilon \to 0+$. □

Významné využití Věty 5.5.9 v následujícím důkaze dává pohodlný přístup k větě o (lokálně) stejnoměrné limitě holomorfních funkcí:

Věta 5.5.14 (Weierstrass 1841*). *Nechť $\{f_k\}_{k=0}^\infty$ je posloupnost funkcí holomorfních na otevřené množině $G \subset \mathbb{C}$, $f_k \rightrightarrows_{\rm loc} f$ na G. Potom je také f funkce holomorfní v G a pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je*

$$f_k^{(n)} \rightrightarrows_{\rm loc} f^{(n)} \quad \textit{na množině } G\,.$$

Důkaz. Funkce f_k jsou zřejmě pro všechna $k \in \mathbb{N}$ spojité v G. Zvolme libovolně bod $z \in G$ a jeho okolí $U(z) \subset G$. V každém trojúhelníku $\triangle \subset U(z)$ je $f_k \rightrightarrows f$, takže je f speciálně spojitá na $(\triangle)$ a podle Lemmatu 1.7.2 platí rovnost

$$\int_{(\triangle)} f(w)dw = \lim_{k\to\infty} \int_{(\triangle)} f_k(w)dw\,.$$

Protože $f_k \in H(G)$, integrály na pravé straně rovnosti se anulují a podle Věty 5.5.9 je rovněž $f \in H(G)$.

Pro důkaz druhé části tvrzení zvolíme $z \in G$ a $r \in \mathbb{R}_+$ tak, aby uzávěr okolí $U(z,r)$ ležel v G. Pak užijeme Cauchyho vzorec pro derivaci (5.32) z Věty 5.5.3, z něhož pro $\zeta \in U(z,r)$ a $\varphi(t) := z + r\exp(it)$, $t \in [0, 2\pi]$, obdržíme

$$\begin{aligned} |f_k^{(n)}(\zeta) - f^{(n)}(\zeta)| &= \left|\frac{n!}{2\pi i}\int_\varphi \frac{f_k(w)-f(w)}{(w-\zeta)^{n+1}}dw\right| \le \\ \le \frac{n!}{2\pi}&\frac{\sup\{|f_k(w)-f(w)|;\, w \in \langle\varphi\rangle\}}{\operatorname{dist}(\zeta,\langle\varphi\rangle)^{n+1}}L(\varphi)\,, \quad \zeta \in \operatorname{Int}(\varphi)\,. \end{aligned}$$

Snadno nahlédneme, že např. pro $\zeta \in U(z,r/2)$ a $K := \overline{U(z,r/2)}$ platí analogický odhad stejnoměrně na K, pouze ve jmenovateli zlomku musíme nahradit výraz $\operatorname{dist}(\zeta,\langle\varphi\rangle)$ výrazem $\operatorname{dist}(K,\langle\varphi\rangle) = r/2$; jako důsledek odtud dostaneme $f_k^{(n)} \rightrightarrows_{\rm loc} f^{(n)}$ na množině G. □

Důsledek 5.5.15. *Nechť f_k jsou funkce holomorfní na otevřené množině G a nechť řada $\sum f_k$ konverguje lokálně stejnoměrně na G. Pak je její součet funkce holomorfní na G a pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\sum f_k^{(n)} = f^{(n)}$, přičemž řada vlevo konverguje lokálně stejnoměrně v G.*

Lemma 5.5.16. *Nechť f je holomorfní v oblasti $G \subset \mathbb{C}$, $w \in G$. Definujme funkci g proměnné z na množině G jako v (5.29) předpisem*

$$g(z) = \frac{f(z) - f(w)}{z - w}, \quad z \neq w, \qquad g(w) = f'(w).$$

Potom g je holomorfní funkce v G.

Důkaz. Podle Lemmatu 5.5.1 a Důsledku 5.5.12 je $g \in H(G)$. □

5.6 Věta o průměru

Věta 5.6.1 (o průměru). *Nechť f je funkce holomorfní v oblasti $G \subset \mathbb{C}$ a nechť uzávěr kruhu $U(\zeta, r)$ o poloměru $r \in \mathbb{R}_+$ je obsažen v oblasti G. Potom je*

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\zeta + r\mathrm{e}^{it})dt, \tag{5.34}$$

tj. hodnota holomorfní funkce $f(\zeta)$ je v každém bodě ζ oblasti G lokálně integrálním průměrem svých hodnot na kružnici o středu ζ.

Důkaz. Je-li φ kladně orientovaná kružnice o středu ζ a poloměru r, pak vzorec (5.34) vyplývá z (5.31) převodem na Newtonův integrál:

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(\zeta + r\mathrm{e}^{it})dt}{r\mathrm{e}^{it}} ir\mathrm{e}^{it}dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\zeta + r\mathrm{e}^{it})dt ;$$

tím je vzorec dokázán. □

Jako ilustraci použití Věty 5.6.1 dokážeme jednoduché lemma:

Lemma 5.6.2 (o existenci nulového bodu). *Nechť $V := U(w, r) \subset G$ je okolí bodu w v oblasti G takové, že $\overline{V} \subset G$. Je-li f holomorfní v G a platí-li*

$$\min\{|f(z)|;\, z \in \partial V\} > |f(w)|,$$

potom existuje $\zeta \in V$ takové, že $f(\zeta) = 0$.

Důkaz. Budeme dokazovat sporem. Pokud neexistuje takový bod $\zeta \in V$, pro nějž $f(\zeta) = 0$, je $f(z) \neq 0$ v okolí $\overline{V}$ a $g = 1/f$ je holomorfní funkce v okolí množiny $\overline{V}$. Z Věty 5.6.1 plyne

$$\begin{aligned} |f(w)|^{-1} = |g(w)| \leq \max\{|g(z)|;\, z \in \partial V\} = \max\{|f(z)|^{-1};\, z \in \partial V\} = \\ = \Big(\min\{|f(z)|;\, z \in \partial V\}\Big)^{-1}, \end{aligned}$$

a tedy $|f(w)| \geq \min\{|f(z)|;\, z \in \partial V\}$, což je ve sporu s předpokladem dokazovaného lemmatu. □

Důsledek 5.6.3 (odhad). *Za stejných předpokladů jako ve Větě 5.6.1 o průměru platí odhad*

$$|f(\zeta)| \leq M_r := \max\{|f(z)|;\, z \in \partial U(\zeta, r)\}\,. \tag{5.35}$$

Důkaz. Vzorec (5.35) je jednoduchým důsledkem vzorce (5.34) z Věty 5.6.1 o průměru a základního odhadu (1.17). □

Důsledek 5.6.3 je *jednoduchou* verzí tzv. **principu maxima modulu**. V následujícím lemmatu dokážeme trikem silnější tvrzení:

Lemma 5.6.4 (Landau 1916). *Nechť f je holomorfní funkce v oblasti $G \subset \mathbb{C}$ a nechť kruh $U(\zeta, r)$ o poloměru $r \in \mathbb{R}_+$ je obsažen i se svým uzávěrem v oblasti G a nechť $\varphi(t) = \zeta + r\mathrm{e}^{it}$, $t \in [\,0, 2\pi\,]$. Potom pro všechna $z \in U(\zeta, r)$ je*

$$|f(z)| \leq M_r := \max\{|f(z)|;\, z \in \langle\varphi\rangle\}\,. \tag{5.36}$$

Důkaz. Ze vzorce (5.31) vyplývá snadno pomocí (1.17) nerovnost $|f(z)| \leq r\alpha_z M_r$, kde $\alpha_z := \max\{1/|w - z|\,;\, w \in \partial U(\zeta, r)\}$. Protože je $f^k \in H(G)$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$, platí analogický odhad i pro $|f^k(z)|$; z něj vyplývá pro všechna $z \in U(\zeta, r)$

$$|f(z)| \leq (r\,\alpha_z)^{1/k} M_r\,, \quad z \in U(\zeta, r)\,.$$

Limitním přechodem pro $k \to \infty$ dostaneme odtud (5.36). □

Předcházející lemma je ovšem důsledkem dále uvedených „silnějších“ forem principu maxima modulu; srovnej s Větou 5.9.1. I tyto dvě nejjednodušší verze principu maxima modulu mají však jednoduché a závažné důsledky:

Lemma 5.6.5 (o aproximaci). *Nechť f je funkce holomorfní v otevřené množině $G \subset \mathbb{C}$ a nechť $\zeta \in G$. Označme*

$$\|f' - f'(\zeta)\|_D := \sup\{|f'(u) - f'(\zeta)|;\, u \in D\}\,. \tag{5.37}$$

Potom pro každé okolí $U(\zeta, r)$, jehož uzávěr D leží v G, a pro každé dva různé *body $z, w \in D$ je*

$$\left|\frac{f(z) - f(w)}{z - w} - f'(\zeta)\right| \leq \|f' - f'(\zeta)\|_D\,. \tag{5.38}$$

Důkaz. Protože $D \subset G$, existuje $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ tak, že $U(\zeta, r+\varepsilon) \subset G$. K funkci $f' - f'(\zeta)$ je primitivní funkcí na $U(\zeta, r+\varepsilon)$ např. funkce $u \mapsto f(u) - f'(\zeta)\cdot u$, $u \in U(\zeta, r+\varepsilon)$, z čehož plyne

$$f(z) - f(w) - f'(\zeta)(z - w) = \int_{[\,w;z\,]} (f'(u) - f'(\zeta))du\;.$$

Standardní odhad integrálu podle (1.17) dává

$$\Big|\int_{[w;z]}(f'(u)-f'(\zeta))du\Big| \le \|f'-f'(\zeta)\|_D\cdot|z-w|\,,$$

z čehož dostáváme (5.38). □

Věta 5.6.6 (o lokální existenci inverzní funkce). *Nechť f je funkce holomorfní v otevřené množině $G\subset\mathbb{C}$ a nechť $f'(\zeta)\neq 0$ v nějakém bodě $\zeta\in G$. Potom existuje takové okolí $U(\zeta)\subset G$, že restrikce $f|U(\zeta)$ je prostá funkce.*

Důkaz. Jelikož $f'(\zeta)\neq 0$ a f' je spojitá, lze volit $U(\zeta)=U(\zeta,r)$ tak, aby jeho uzávěr D ležel v G a aby platila nerovnost

$$\|f'-f'(\zeta)\|_D<|f'(\zeta)|\,. \tag{5.39}$$

Použijeme Lemma 5.6.5. Pokud by v $U(\zeta)$ ležely dva body $w\neq z$ takové, že $f(w)=f(z)$, plynula by z (5.38) nerovnost $|f'(\zeta)|<|f'(\zeta)|$; tento spor dokazuje tvrzení. □

5.7 Věta o jednoznačnosti

V této části uvedeme několik často užívaných tvrzení o holomorfních funkcích. Jedním z nich je velmi důležitá věta o jednoznačnosti, která popisuje jev, nemající v „reálné analýze“ (ani pro nekonečně diferencovatelné funkce) obdobu.

Věta 5.7.1 (o jednoznačnosti). *Nechť f je funkce holomorfní v* oblasti $G\subset\mathbb{C}$ *a nechť $f\equiv 0$ na množině $N_1\subset G$, která má hromadný bod v oblasti G. Potom $f\equiv 0$ v G. Obecněji, pro holomorfní funkce g, h, pro něž platí rovnost $g(z)=h(z)$ na množině, která má hromadný bod v G, platí rovnost $g(z)=h(z)$ všude na G.*

Předcházející Věta 5.7.1 je mírným zobecněním Věty 2.4.3 o jednoznačnosti pro mocninné řady, kterou jsme však nedokázali. Důkaz Věty 5.7.1 je založen na souvislosti G. Dokážeme, že množina všech nulových bodů f je neprázdná, otevřená v G a uzavřená v G, tedy splývá s G. Vzhledem k mimořádné důležitosti věty poslední úvahu o otevřenosti a uzavřenosti provedeme podrobněji.

Důkaz. Druhá část věty vyplývá z prvé, položíme-li $f=g-h$, budeme tedy dokazovat pouze první část. Označme N množinu *všech* nulových bodů f, které leží v G. Protože $N_1\subset N$, je $N\neq\emptyset$ a má hromadný bod v G. Množina N je zřejmě uzavřená v G: je-li $w_k\in N$, $w_k\to w\in G$, je $f(w_k)=0$ pro všechna k, a ze spojitosti funkce f plyne $f(w)=\lim_{k\to\infty}f(w_k)=0$, tedy $w\in N$. Množina N' všech hromadných bodů N je tedy podmnožinou N a je také uzavřená v G.

Dokážeme ještě, že N' je otevřená množina: Nechť $w\in N'$ a $U(w,r)\subset G$. Podle Věty 5.5.3 je funkce f součtem své Taylorovy řady $f(z)=\sum a_k(z-w)^k$,

$z \in U(w,r)$. Kdyby všechny koeficienty a_k nebyly rovny 0, existovalo by nejmenší číslo $p \in \mathbb{N}_0$ takové, že $a_p \neq 0$, a bylo by

$$f(z) = \sum_{k=p}^{\infty} a_k (z-w)^p = (z-w)^p f_1(z)\,, \quad z \in U(w,r)\,,$$

kde $f_1(w) = a_p \neq 0$. Protože f_1 je spojitá v bodě w, jsou oba činitelé vpravo různí od 0 v jistém prstencovém okolí $P(w,r_1) \subset U(w,r)$, $r_1 \in \mathbb{R}_+$. To je však spor s předpokladem, že $w \in N'$. Proto N' obsahuje nějaké okolí $U(w)$ bodu w. Množina N' je tedy otevřenou i uzavřenou podmnožinou oblasti G. Jak jsme připomněli v Kapitole 1 v části 1.2, plyne odtud $N' = N = G$. □

Příklady 5.7.2. 1. Nejprve ukážeme, jak se vzorce pro goniometrické funkce apod. „přenášejí“ do komplexního oboru. Dokážeme, že např. vzorec

$$\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z \tag{5.40}$$

známý z „reálné analýzy“ platí pro všechna $z \in \mathbb{C}$. Na obou stranách rovnosti jsou funkce g, h holomorfní v oblasti $\mathbb{C}$ a je $g(z) = h(z)$ pro všechna $z \in \mathbb{R}$. Položíme $N_1 = \mathbb{R}$ v předcházejícím tvrzení. Potom je i $\mathbb{R} \subset N'$, a podle Věty 5.7.1 vzorec (5.40) platí pro všechna $z \in \mathbb{C}$.

2. Podobně ze vzorce $\sin(x \pm 2\pi) = \sin x$ platného pro všechna $x \in \mathbb{R}$ plyne analogicky vzorec $\sin(z \pm 2\pi) = \sin z$ pro všechna $z \in \mathbb{C}$. Analogickou úvahu lze provést pro ostatní „reálně periodické funkce“ holomorfní v $\mathbb{C}$.

3. Snadno nahlédneme, že funkce $f(z) := (\exp z - 1)/z$, $z \in \mathbb{P}$, a $f(0) := 1$ je holomorfní v $\mathbb{C}$. Proto je i $g = 1/f$ holomorfní v okolí $U(0, 2\pi)$ bodu 0 a lze ji (jednoznačně) vyjádřit mocninnou řadou

$$g(z) = \frac{z}{\exp z - 1} = \sum \frac{B_k}{k!} z^k\,, \tag{5.41}$$

Řada vpravo se v teorii funkcí komplexní proměnné používá přímo k *definici* tzv. **Bernoulliho čísel** B_k; srv. [$\mathbb{V}$], str. 433, kde jsme Bernoulliho čísla definovali jiným způsobem. Podle vzorce (4.41) je

$$\operatorname{cotg} z = i\,\frac{e^{2iz}+1}{e^{2iz}-1} = i\Big(1 + \frac{2}{e^{2iz}-1}\Big) = \Big(i + \frac{1}{z}\,\frac{2iz}{e^{2iz}-1}\Big)\,,$$

odkud dostaneme vztah

$$\operatorname{cotg} z = i + \frac{1}{z}\, g(2iz)\,. \tag{5.42}$$

Protože cotg je lichá funkce, je $z \operatorname{cotg} z$ sudá funkce. Ze vzorce (5.42) plyne též identita $g(z) + z/2 = (1/2i) z \operatorname{cotg}(z/2i)$, takže i $g(z) + z/2$ je sudá funkce. Odtud plyne, že $B_1 = -1/2$ a $B_{2k+1} = 0$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$. Platí tedy rovnosti

$$g(z) = \frac{z}{\exp z - 1} = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} z^{2k}\,.$$

Odtud již snadno dostaneme identitu

$$\operatorname{cotg} z = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4^k B_{2k}}{(2k)!} z^{2k-1}\,, \quad z \in P(0,\pi)\,. \tag{5.43}$$

Podobně platí

$$\operatorname{tg} z = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{4^k(4^k-1) B_{2k}}{(2k)!} z^{2k-1}\,, \quad z \in U(0,\pi/2)\,. \tag{5.44}$$

4. Ukažme trochu složitější aplikaci Věty 5.7.1; znovu dokážeme, že pro všechna $z, w \in \mathbb{C}$ platí vzorec

$$\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w\,.$$

Využijeme toho, že vzorec platí pro všechna $z, w \in \mathbb{R}$. Větu o jednoznačnosti použijeme nejprve tak, že zvolíme např. $w \in \mathbb{R}$ pevně a uvážíme, že na obou stranách vzorce jsou funkce proměnné z holomorfní v celé rovině $\mathbb{C}$. Z Věty 5.7.1 a z platnosti vzorce pro všechna $z \in \mathbb{R}$ plyne platnost vzorce pro w a všechna $z \in \mathbb{C}$. Tuto úvahu lze zopakovat s každým $w \in \mathbb{R}$. Nyní zvolíme libovolně ale pevně $z \in \mathbb{C}$. Opět jsou obě strany rovnosti pro toto zvolené z holomorfními funkcemi v proměnné w, takže z rovnosti pro všechna $w \in \mathbb{R}$ plyne rovnost pro z a všechna $w \in \mathbb{C}$. Protože jsme volili $z \in \mathbb{C}$ libovolně, platí vzorec pro všechna $z, w \in \mathbb{C}$.

Poznámka 5.7.3. Pro funkce holomorfní v $\mathbb{C}$ zavedl Weierstrass již r. 1876 speciální název **celé funkce**. Celými funkcemi jsou např. všechny polynomy; další celé funkce jako např. $\exp, \sin, \cos$ jsou transcendentní; viz ještě Kapitolu 8.

Vrátíme se ke vzorci (5.35), kterému lze dát i jiný tvar. Jestliže platí rovnost $f(z) = \sum a_k (z-\zeta)^k$ na nějakém okolí uzávěru $\overline{U(\zeta, r)}$, je

$$|f(\zeta)| = |a_0| \le M_r \ \left(= \frac{M_r}{r^0} \right).$$

Máme tedy odhad velikosti koeficientu a_0. Přirozeným zobecněním odhadu jsou tzv. **Cauchyho odhady** pro *všechny* koeficienty mocninné řady, která (jak již víme) je Taylorovou řadou svého součtu.

Lemma 5.7.4 (Cauchyho odhady 1835). *Za předpokladů Věty 5.6.1 platí pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$ tento odhad koeficientů Taylorova rozvoje o středu ζ :*

$$|a_k| = \Big|\frac{f^{(k)}(\zeta)}{k!}\Big| \le \frac{M_r}{r^k}\,; \tag{5.45}$$

zde je M_r opět maximem funkce $|f|$ na hranici kruhu $U(\zeta, r)$.

Důkaz. Ze vzorce (5.32) z Věty 5.5.3 a ze základního odhadu křivkového integrálu (1.18) dostaneme pro všechna $k \in \mathbb{N}$ vztahy

$$|a_k| = \Big|\frac{f^{(k)}(\zeta)}{k!}\Big| = \Big|\frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{f(z)}{(z-\zeta)^{k+1}}\,dz\Big| \le \frac{1}{2\pi}\frac{M_r}{r^{k+1}}2\pi r = \frac{M_r}{r^k}\,,$$

což jsou spolu s (5.35) Cauchyho odhady. □

Poznámka 5.7.5. Také v případě Cauchyho odhadů lze pro *nekonstantní* funkci f dokázat, že v (5.45) platí dokonce ostrá nerovnost. Poznamenejme ještě, že pomocí standardních úvah o pokrytí lze dospět k tvrzení:

Věta. *Je-li G oblast v $\mathbb{C}$, $K \subset G$ kompaktní množina a $L \subset G$ kompaktní okolí K, existuje pro každé $k \in \mathbb{N}$ číslo $M_k \in \mathbb{R}_+$ závislé pouze na G, K a L tak, že*

$$\|f^{(k)}\|_K \le M_k \|f\|_L$$

pro všechny funkce $f \in H(G)$.

Roli L *nemůže* převzít K, což plyne snadno z příkladu: $f_n(z) := z^n \in H(\mathbb{C})$, $K := \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| \le 1\}$, protože v tomto případě je $\|f_n\|_K = 1$, avšak $\|f_n'\|_K = n$, $n \in \mathbb{N}$.

Lemma 5.7.6. *Je-li $p \in \mathbb{N}$, je celá nenulová funkce f polynomem stupně menšího než p, právě když vyhovuje podmínce $\lim_{z\to\infty} f(z)/z^p = 0$.*

Důkaz. Jedna část tvrzení je zřejmá: Je-li f polynom stupně menšího než p, tj. $f(z) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k z^k$, pak

$$\lim_{z\to\infty}\frac{f(z)}{z^p} = \lim_{z\to\infty}\Big(\frac{a_0}{z^p} + \frac{a_1}{z^{p-1}} + \cdots + \frac{a_{p-1}}{z}\Big) = 0\,.$$

Druhá část tvrzení Lemmatu je vyplývá přímo z Cauchyho odhadů pro koeficienty a_k z Lemmatu 5.7.4, kde M_r značí opět maximum funkce $|f|$ na hranici kruhu $U(0, r)$:

$$|a_k| \le \frac{M_r}{r^k} = \frac{M_r}{r^p}\frac{1}{r^{k-p}}\,;$$

první zlomek na pravé straně rovnosti má podle předpokladů pro $r \to \infty$ limitu 0, druhý má pro $k \ge p$ vlastní limitu (rovnou 1 nebo 0). Je tedy $a_k = 0$ pro všechna $k \ge p$. □

Věta 5.7.7 (Liouville 1847*). *Každá omezená celá funkce je konstantní.*

Důkaz. Podmínka z předcházejícího Lemmatu 5.7.6 je zřejmě splněna pro každou omezenou celou funkci f s $p = 1$, a tak $f(z) = a_0$, takže f je polynom stupně < 1, tedy konstantní funkce. □

Věta 5.7.8 (základní věta algebry; Gauss 1799*). *Nechť P je polynom kladného stupně. Potom existuje alespoň jedno číslo $\zeta \in \mathbb{C}$ tak, že $P(\zeta) = 0$.*

Důkaz. Pokud neexistuje nulový bod funkce P, je $1/P$ omezená celá funkce a je tedy konstantní podle Liouvillovy věty. Polynom P pak ale nemá kladný stupeň. □

Poznámka 5.7.9. Předcházející existenční Větu 5.7.8 nazval právě Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855) *základní větou* teorie algebraických rovnic; u nás se užívá vžitý název *základní věty algebry*. První zmínku o ní nacházíme u Petera Rotha (?? – 1617) v práci z r. 1608, i když tvrzení je připisováno Albertu Girardovi (1595 – 1632) (1629). Gauss se k důkazu základní věty algebry ještě několikrát vrátil (1815, 1816) a podal čtyři různé důkazy tohoto tvrzení. Pokusy o důkaz nacházíme také již u Jeana d'Alemberta (1717 – 1783) r. 1746 a u Eulera; tyto důkazy však byly, stejně jako první důkaz Gaussův, z hlediska dnešních nároků na přesnost neúplné. Poznamenejme ještě, že je publikováno přes 100 různých důkazů tohoto tvrzení.

5.8 Otevřené zobrazení

Poznámka 5.8.1. Připomeňme, že zobrazení metrického prostoru (P, ϱ) do metrického prostoru (Q, σ) je spojité, právě když pro každou otevřenou množinu $B \subset Q$ je také její vzor $f^{-1}(B)$ otevřená množina. Obráceně, jestliže pro každou otevřenou množinu $A \subset P$ je její obraz $f(A)$ otevřená množina, nazývá se f ***otevřené zobrazení*** prostoru P.

Věta 5.8.2 (věta o otevřenosti zobrazení). *Nechť funkce f je nekonstantní a holomorfní v oblasti $G \subset \mathbb{C}$. Potom f je otevřené zobrazení G do $\mathbb{C}$.*

Důkaz. Dokažme, že pro každé $w_0 \in f(G)$ existuje $d \in \mathbb{R}_+$ tak, že $U(w_0, d) \subset f(G)$: Je-li $w_0 \in f(G)$, existuje bod z_0 tak, že $f(z_0) = w_0$. Takový bod z_0 není hromadným bodem množiny $\{z \in G;\, f(z) = w_0\}$, protože pak by byla funkce f podle věty o jednoznačnosti konstantní v G. Existuje tedy $r_0 \in \mathbb{R}_+$ tak, že f nikde v $P(z_0, r_0)$ nenabývá hodnoty w_0; zvolíme-li pevně $r \in (0, r_0)$, nenabývá f této hodnoty nikde v $K := \overline{U(z_0, r)}$ kromě bodu z_0. V důsledku toho je

$$d := (1/2) \min\{|f(z) - w_0|; |z - z_0| = r\} > 0\,,$$

a pro všechna z, $|z - z_0| = r$ a všechna w, $|w - w_0| < d$ je

$$|f(z) - w| \geq |f(z) - w_0)| - |w - w_0| \geq 2d - d = d\,. \tag{5.46}$$

Protože $f(z_0) = w_0$, stačí dokázat, že každé $w \in P(z_0, d)$ je hodnotou této funkce v nějakém bodě z množiny K. Předpokládejme obráceně, že existuje $w \in P(z_0, d)$ tak, že $w \notin f(K)$, a utvořme funkci $g := 1/(f - w)$. Tato funkce je pak holomorfní a nenulová v každém bodě z K, tedy holomorfní a nenulová v jistém $U(z_0, r')$, kde $r' > r$ a podle (5.46) a Věty 5.6.3 je pak

$$\frac{1}{d} < \frac{1}{|w_0 - w|} = \frac{1}{|f(z_0) - w|} = g(z_0) \le \max\{|g(z)|\,;\, |z - z_0| = r\} \le \frac{1}{d}\,,$$

což je spor. Funkce f tedy nabývá v K, a tedy i v G každé hodnoty $w \in U(w_0, d)$. Tím je věta dokázána. □

V Kapitole 4 jsme dokázali Větu 4.4.1, kterou jsme užili k derivování logaritmu; měla však zbytečně silné předpoklady. Ukážeme nyní, že některé lze vynechat.

Důsledek 5.8.3 (věta o derivaci inverzní funkce). *Nechť f je funkce holomorfní na oblasti $G \subset \mathbb{C}$ a $f'(z) \neq 0$ pro všechna $z \in G$. Pak je zobrazení f otevřené a lokálně prosté v G. Jestliže je f navíc prostá funkce na G, je inverzní funkce $g := (f)^{-1}$ holomorfní a platí*

$$g'(w) = \frac{1}{f'(g(w))} = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))}\,, \quad w \in f(G)\,. \tag{5.47}$$

Důkaz. Podle Věty 5.8.2 je f otevřené zobrazení a podle Věty 5.6.6 je f lokálně prosté. Je-li f navíc prostá funkce na G, existuje inverzní zobrazení g k f a je spojité na $f(G)$, takže lze použít Větu 4.4.1; tak dostaneme druhou část tvrzení včetně (5.47). □

Poznámka 5.8.4. Tento postup důkazu, založený na vlastnosti průměru, použil Constantin Carathéodory v již zmíněné dvoudílné knize [3]; viz prvý díl, str. 133 a násl.

5.9 ♡ Princip maxima modulu

Věta 5.9.1 (princip maxima modulu). *Nechť f je* nekonstantní *funkce holomorfní v oblasti $G \subset \mathbb{C}$; pak platí:*

(1) *Je-li $U(z_0, r) \subset G$, existuje $u \in U(z_0, r)$ tak, že je $|f(z_0)| < |f(u)|$, tj. funkce $|f|$ nemá v bodě z_0 lokální maximum.*

(2) *Je-li $U(z_0, r) \subset G$, je $|f(z)| < m$ pro všechna $z \in U(z_0, r)$, kde definujeme $m := \sup\{|f(z)|;\, z \in U(z_0, r)\}$.*

(3) *Je-li $G \subset \mathbb{C}$ omezená oblast, je-li f spojitá na uzávěru $\overline{G}$ a holomorfní v G, a je-li $M = \max\{|f(z)|;\, z \in \partial G\}$, je $|f(z)| < M$ pro všechna $z \in G$.*

Důkaz. Dokážeme nejprve (1) a pak implikace (1) $\Rightarrow$ (2) a (1) $\Rightarrow$ (3). Předpokládejme, že (1) neplatí, tj. že pro všechna dostatečně malá ρ a všechna $t \in [0, 2\pi]$ je

$$|f(z_0 + \rho e^{it})| \leq |f(z_0)|\,. \tag{5.48}$$

Pak podle (5.48) užitím (5.34) dostaneme, že pro všechna dostatečně malá ρ je

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0 + \rho e^{it})| dt \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0)| dt = |f(z_0)|\,,$$

a tudíž oba integrály mají stejnou hodnotu. Proto platí rovnost

$$\int_0^{2\pi} (|f(z_0)| - |f(z_0 + \rho e^{it})|)\, dt = 0\,.$$

Integrovaná funkce v posledním integrálu je spojitá a podle (5.48) nezáporná. Pokud by byla v jediném bodě kladná, byl by kladný i její integrál, musí tedy být identicky rovna 0. Odtud ale plyne existence okolí bodu z_0, na kterém je $|f|$ konstantní, a tudíž, podle Důsledku 3.4.7, na kterém je konstantní i f. Podle Věty 5.7.1 je f konstantní v G; nalezený spor ukazuje, že platí (1).

(1) $\Rightarrow$ (2): Pokud by pro nějaké $w \in G$ bylo $|f(w)| = m$, podle (1) by existovalo $z \in G$ tak, že $|f(z)| > m$. Protože je to ve sporu s definicí m, platí (2).

(1) $\Rightarrow$ (3): Je-li konečně f spojitá na $\overline{G}$, pak $|f|$ nabývá svého maxima m na kompaktní množině $\overline{G}$. Pokud $m = M$, tvrzení platí. Kdyby bylo $m > M$, nabývala by $|f|$ maxima v G a to vede ke sporu s (1). Tím je věta dokázána. $\square$

Důsledek 5.9.2. *Nechť f je funkce holomorfní v oblasti $G \subset \mathbb{C}$. Nabývá-li funkce $|f|$ v G maxima, je f konstantní na G.*

Poznámka 5.9.3. Cesta k některým důležitým tvrzením vede též přes tzv. **Gutzmerovu formuli**. August Gutzmer (1860 – 1925) ji publikoval r. 1887. Z Cauchyho vzorce (5.32) pro $f^{(n)}(z_0)$ dostaneme snadno

$$a_n r^n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + r e^{it})\, e^{-int} dt\,,$$

z čehož již plyne následující věta:

Věta 5.9.4 (Gutzmer 1887). *Je-li $f(z) = \sum a_k (z - z_0)^k$, má-li řada poloměr konvergence větší než číslo $r \in \mathbb{R}_+$ a označíme-li $M_r := \{\max |f(z)|;\ |z - z_0| = r\}$, platí*

$$\sum |a_k|^2 r^{2k} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0 + r e^{it})|^2 dt \leq (M_r)^2\,. \tag{5.49}$$

Důkaz. Protože $\overline{f(z_0 + re^{it})} = \sum \overline{a_k} r^k \mathrm{e}^{-ikt}$, je

$$|f(z_0 + r\mathrm{e}^{it})|^2 = f(z_0 + r\mathrm{e}^{it}) \cdot \overline{f(z_0 + r\mathrm{e}^{it})} = \sum \overline{a_k} r^k f(z_0 + r\mathrm{e}^{it})\, \mathrm{e}^{-ikt} dt\ ,$$

přičemž řada konverguje stejnoměrně na intervalu $[\,0, 2\pi\,]$. Integrací (vpravo „člen po členu") dostáváme

$$\int_0^{2\pi} |f(z_0 + r\mathrm{e}^{it})|^2 dt\ = \sum \overline{a_k} r^k \int_0^{2\pi} f(z_0 + r\mathrm{e}^{it})\, \mathrm{e}^{-ikt} dt\ = 2\pi \sum |a_k|^2 r^{2k}\,.$$

Odhad pomocí $(M_r)^2$ je důsledkem základního odhadu (1.17) pro integrál vlevo v předcházejících rovnostech. □

Poznámka 5.9.5. Uvedeme další varianty důkazu Liouvillovy věty.
(a) Tvrzení lze dokázat *přímo* z Cauchyho odhadů z Lemmatu 5.7.4: Jestliže $|f(z)| \le M$, $z \in \mathbb{C}$, je

$$|a_k| \le \frac{M}{r^k}$$

pro všechna $r \in \mathbb{R}_+$ a všechna $k \in \mathbb{N}$, z čehož limitním přechodem pro $r \to \infty$ dostaneme $a_k = 0$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$, takže je opět $f(z) = a_0$ pro všechna $z \in \mathbb{C}$.
(b) Užijeme pouze odhadu pro první derivaci, avšak *v každém bodě* $z_0 \in \mathbb{C}$. Zvolme jedno takové z_0 a rozviňme f v mocninnou řadu o středu z_0

$$f(z) = \sum a_k (z - z_0)^k\,.$$

Úvahou obdobnou jako v (a) dostaneme $f'(z_0) = 0$, a to pro každé $z_0 \in \mathbb{C}$, z čehož již snadno pomocí Věty 3.4.5 dostaneme, že f je konstantní v $\mathbb{C}$.
(c) Z Gutzmerovy formule pro rozvoj $f(z) = \sum a_k (z - z_0)^k$ o středu $z_0 = 0$ plyne pro všechna $r \in \mathbb{R}_+$ nerovnost

$$\sum |a_k|^2 r^{2k} < M^2\,,$$

z čehož limitním přechodem pro $r \to \infty$ vyplývá, že $a_1 = a_2 = \cdots = 0$, a tedy $f(z) = a_0$, $z \in \mathbb{C}$.

Se základní větou algebry je ekvivalentní tvrzení o faktorizaci, které pro nás má motivační význam.

Důsledek 5.9.6 (faktorizační lemma). *Za předpokladů Věty 5.7.8 existuje číslo $c \in \mathbb{C}$, navzájem různá čísla $z_1, \dots, z_r \in \mathbb{C}$ a čísla $m_1, \dots, m_r \in \mathbb{N}$ tak, že P je jednoznačně (až na pořadí činitelů) vyjádřen ve tvaru součinu*

$$P(z) = c(z - z_1)^{m_1} \cdots (z - z_r)^{m_r}\,, \tag{5.50}$$

kde $m_1 + \cdots + m_r = n$.

Předcházející důsledek, který je ekvivalentní se základní větou algebry, je o tzv. *rozkladu P na kořenové činitele*, což je vyjádření (5.50). Čísla $m_1, \dots, m_r$ se nazývají *násobnosti* nulových bodů $z_1, \dots, z_r$. Někdy též za uvedených předpokladů říkáme, že polynom P má *právě n* kořenů, pokud každý počítáme tolikrát, kolik činí jeho násobnost.

Poznámky 5.9.7. 1. Všimněte si, že jde o speciální vlastnost polynomů, která *nemá* analogii u ostatních funkcí z $H(\mathbb{C})$. Funkce exp nemá *žádný nulový bod* v $\mathbb{C}$, zatímco množiny nulových bodů funkcí sin a cos jsou *nekonečné*.

2. Je-li $l \geq 0$ násobnost 0 jakožto kořene polynomu P (v případě potřeby zobecňujeme a čísla, v nichž se polynom P neanuluje, považujeme za kořeny P o násobnosti 0), lze polynom P vyjádřit ve tvaru

$$P(z) = cz^l \prod_{k=1}^{r} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right)^{m_k}, \tag{5.51}$$

kde pro násobnosti opět platí vztah $l + m_1 + \cdots + m_r = n$.

3. Připomeňme, že z vyjádření (5.50) plynou např. důležité vztahy mezi kořeny a koeficienty polynomů. Pro matematickou analýzu je důležité pozorování, že polynom s reálnými koeficienty má *párové* komplexně sdružené imaginární kořeny, tj. že s kořenem w má i kořen $\overline{w}$ a jsou stejné násobnosti. Protože pro ně pak je

$$(z - w)(z - \overline{w}) = z^2 - (w + \overline{w})z + w\overline{w}\,,$$

kde $(w + \overline{w})$, $w\overline{w}$ jsou reálná čísla, lze každý polynom s reálnými koeficienty stupně alespoň 1 vyjádřit (až na pořadí činitelů) jednoznačně ve tvaru součinu lineárních a kvadratických *reálných* polynomů.

Na závěr shrneme v jediné větě nejdůležitější poznatky o holomorfních funkcích, se kterými jsme se v této kapitole seznámili:

Věta 5.9.8. *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina a $f : G \to \mathbb{C}$ spojitá funkce na G. Potom jsou následující podmínky ekvivalentní:*

(1) *funkce f je holomorfní v G;*

(2) *pro každý trojúhelník $\triangle \subset G$ platí rovnost $\int_{(\triangle)} f = 0$;*

(3) *křivkový integrál z f v G* lokálně *nezávisí na křivce, ale pouze na jejích koncových bodech;*

(4) *je-li $\overline{U(z_0, r)} \subset G$ a je-li $\varphi(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, je*

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(z)}{z - w} dz\,, \quad w \in U(z_0, r)\,;$$

(5) *funkci f lze v okolí každého bodu $z_0 \in G$ vyjádřit jako součet mocninné řady (poloměr konvergence této řady je vždy* alespoň $d = \operatorname{dist}(z_0, \mathbb{C} \setminus G)$ [4]).

[4]) Zde opět klademe $d = +\infty$ v případě, že $G = \mathbb{C}$.

Historická poznámka 5.9.9. Jistou formu výchozího Lemmatu 5.2.1 dokázali Gauss r. 1811 a Louis Augustin Cauchy (1789 – 1857) r. 1814 a 1825, avšak spojitost derivace byla v jejich důkazech podstatná. První verzi prezentovaného důkazu objevil r. 1883 Édouard Jaen Baptiste Goursat (1858 – 1936) a dopisem ji sdělil Charlesu Hermitovi (1822 – 1901). Hermite dopis otiskl r. 1884. Goursat používal obdélníky místo trojúhelníků. Že jeho důkaz nevyužívá ve skutečnosti spojitosti derivace, explicitně neuvedl; byl si však této skutečnosti záhy vědom. Důkaz formálně publikovaný r. 1884 modifikoval až r. 1900 tak, že explicitně uvedl předpoklad pouhé *existence* f' .

Triangulační technika pochází od Alfreda Pringsheima (1850 – 1941) z r. 1901 a z pozdější práce publikované r. 1903. Důkaz Cauchyho věty lze provést i „reálnou technikou" pomocí *Greenovy věty*; více o tom a o příbuzných věcech lze nalézt v článku [11].

Lemma 5.3.1 je vlastně variantou věty o derivování integrálu podle (komplexního) parametru. Trik s rozvinutím funkce $1/(z-\zeta) = 1/(\varphi(t)-\zeta)$ v mocninnou řadu a záměnou pořadí sčítaní řady a integrace použil patrně jako první Cauchy r. 1831, je však často užíván dodnes; viz jeho varianty v [2], str. 48 či [8], str. 208. Podstatné je, do jaké hloubky je dříve rozvinut aparát mocninných řad. Obecnější verzi této věty nalezne čtenář např. v [9], str. 224. Konvergence řady v $U(z_0, r)$ vyplývá přímo z důkazu, plyne však mj. i z odhadu pro koeficienty a_k pomocí normy $\|f\|$ funkce f v prostoru $\mathcal{C}(\langle\varphi\rangle)$

$$2\pi\,|a_k| = \Big|\int_\varphi \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{k+1}}\Big| \le \int_\varphi \Big|\frac{f(z)|}{z-z_0^{k+1}}\Big|dz \le \frac{\|f\|\cdot L(\varphi)}{r^{k+1}},$$

který platí pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$, a z jednoduchých vzorečků (2.8) nebo (2.9) pro poloměr konvergence mocninné řady.

Připomeňme, že při užití (5.17) plyne rovnost $\operatorname{ind}(\varphi, \infty) = 0$ „přirozeně" z definice: integrujeme nulovou funkci. Když již víme, k čemu máme dojít, lze v případě našeho chápání křivek definovat index pomocí (5.17), postupovat nezávisle na Lemmatu 4.4.14 a dokázat vztah indexu k logaritmu jen s využitím základních pojmů; viz např. [9], str. 228. Srv. též [1], str. 115; tam je tato cesta v kontextu po částech regulárních křivek označena za nejjednodušší. Velmi obtížné je vystopovat v této souvislosti kořeny užití indexu, sahají však patrně až ke Cauchymu.

Početní příklady, které jsme zařadili, ilustrují využití jednoduché verze Cauchyho věty. Výpočtem hodnot integrálů podobného typu začal Cauchy budovat postupně celou teorii, kterou vytvořil. Integrály z Příkladu 5.4.15 hrají důležitou roli v teorii difrakce světla. Jsou pojmenovány po fyzikovi Augustinovi Jeanovi Fresnelovi (1788 – 1827). Při výpočtu se využívá toho, že známe hodnotu *Laplaceova integrálu* (5.22); tu lze určit mnoha způsoby. Jeho hodnotu určil Pierre Simon de Laplace (1749 – 1827) zcela nezávisle, dříve k ní však dospěl r. 1771 Leonhard Euler (1707 – 1783). Často se tento integrál nazývá *Gaussův integrál*, ač to byl právě Gauss, který ho poprvé pojmenoval Laplaceovým jménem. Hodnotu integrálu z Příkladu 5.4.17 vypočetl také již Cauchy, avšak nekorektním způsobem. Poznamenejme ještě, že se označení Fresnelovy integrály užívá i pro integrály

$$\int_0^\infty \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\,dt = \int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

které vzniknou z integrálů (5.21) substitucí.

Tvrzení obsažená ve Větě 5.5.3, která Cauchy odvodil, markantně ilustrují rozdíl mezi diferencovatelností v $\mathbb{R}$ a v $\mathbb{C}$. Lze je obdržet i bez integrální reprezentace Cauchyho vzorcem. Cauchy odvodil *Cauchyho vzorec* (5.31) ve speciálním tvaru již r. 1819, avšak teprve r. 1831 rozeznal obrovskou sílu tohoto nástroje. Přitom jej užil pro všechny body kruhu ještě v práci z r. 1822. R. 1831 pomocí něj dokázal část (3) Věty 5.5.3. Poznamenejme, že k integraci přes obecnější uzavřené křivky dospěl Cauchy teprve až v r. 1831.

Větu 5.5.14 dokázal Carl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815 – 1897) jiným způsobem. Abychom ukázali možné aplikace Morerovy věty, využili jsme ji k důkazu první části tvrzení. Význam, jak postřehl již např. Osgood r. 1896, tkví v tom, že k důkazu holomorfnosti f stačí pouze základní poznatky teorie. Důsledek 5.5.15 lze chápat jako zobecnění tvrzení o derivování *mocninných řad* člen po členu. Z Věty 5.9.1 plyne toto tvrzení: *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je omezená oblast a $\{f_k\}$ jsou funkce spojité na uzávěru $\overline{G}$ a holomorfní v G, přičemž je $f_k \rightrightarrows f$ na ∂G. Potom $f_k \rightrightarrows f$ na G.* Speciálně jsou splněny předpoklady Weierstrassovy Věty 5.5.14. Řada $\sum_{k=0}^{\infty} z^k/k^2$ však ukazuje, že se stejnoměrná konvergence nemusí přenést na posloupnost či řadu derivací.

Důsledek 5.5.4 uzavírá náš obraz o holomorfních funkcích: jsou to spojité funkce, které jsou v jistém přesně vymezeném smyslu „rozumně křivkově integrovatelné“. To je kromě existence derivace nebo diferencovatelnosti složek spolu s Cauchy-Riemannovými podmínkami další popis holomorfních funkcí. V zahraniční literatuře bývá nazýván *Morerova věta*. Důsledek 5.5.4 v uvedené verzi dokázali později jiní autoři, mezi nimiž byli např. Jean de la Vallée Poussin (1866 – 1962) r. 1893, Dimitri Pompeiu (1873 – 1954) r. 1895, nebo William Fogg Osgood (1864 – 1943) r. 1896. Zdá se, že Morerův výsledek neznali. Giacinto Morera (1856 – 1909) však v podstatě dokázal silnější tvrzení, které uvádíme níže jako Důsledek 5.5.10. Podobná tvrzení, např. Důsledek 5.5.9, jsou *tvrzení Morerova typu*; pracují s užší třídou speciálních křivek a těchto speciálních vlastností lze z výhodou v některých tvrzeních využít. Čtenář by si měl povšimnout dalšího aspektu Morerovy věty: ta dává mj. pohodlný přístup k větě o (lokálně) stejnoměrné limitě holomorfních funkcí; viz Větu 5.5.14. To si uvědomili jak Morera, tak později Osgood.

Uvedený princip zrcadlení z Věty 5.5.13 dokázal a dále zobecnil Hermann Amandus Schwarz (1843 – 1923) v letech 1867-70; místo přes přímku $\mathbb{R}$ lze uvažovat „holomorfní rozšíření“ přes obecnější hladké křivky. Odkazy na původní Schwarzovy práce lze nalézt např. v [6], str. 57.

Zdánlivě triviálním důsledkem Cauchyho vzorce je *věta o průměru*. Ačkoli se lehce dokáže, má dalekosáhlé důsledky. Jedním z nich je jednoduchá verze *principu maxima modulu* v následujícím Důsledku 5.6.3. Ten umožňuje dokázat otevřenost zobrazení holomorfní funkcí s nenulovou derivací a zlepšenou verzi věty o derivování inverzní funkce z Důsledku 5.8.3.

Přibližně v r. 1831, kdy si Cauchy uvědomil přednosti práce s kružnicemi, dospěl také ke zobecnění odhadu z Důsledku 5.6.3: byl schopen odhadnout velikost nejen prvního, ale dokonce *všech* koeficientů Taylorova rozvoje. Dnes jsou tyto odhady nazývány zpravidla *Cauchyho odhady*. Tím se otevřelo další pole techniky využití Cauchyho vzorce. Důsledkem Cauchyho vzorce je také tzv. *věta o jednoznačnosti*. Její význam je obrovský; různé aspekty jejího využití jsme se pokusili ilustrovat na několika příkladech. Poznamenejme v této souvislosti, že je-li f nekonstantní funkce holomorfní v oblasti $G \subset \mathbb{C}$, nemá množina $\{z \in G;\ f(z) = \alpha\}$ nejen žádný vnitřní bod, ale nemá dokonce žádný hromadný bod v G; je tedy izolovaná v G. S dalšími souvislostmi s touto větou se ještě čtenář setká v následující části textu.

Není bez zajímavosti, že oba vzorce (5.43) a (5.44) byly známy již Eulerovi. Vztah pro (5.43) lze upravit na „elegantnější" tvar

$$\frac{z}{2}\operatorname{cotg}\frac{z}{2} = 1 - B_2\frac{z^2}{2!} + B_4\frac{z^4}{4!} - B_6\frac{z^6}{6!} + \cdots .$$

Lemma 5.7.6 je jednou z přístupových cest k *Liouvillově větě* a je samo o sobě zajímavým tvrzením. JOSEPH LIOUVILLE (1809 – 1882) publikoval Větu 5.7.7 r. 1847 v práci o dvojperiodických funkcích, jako Liouvillovu větu ji pojmenoval později r. 1879 CARL WILHELM BORCHARDT (1817 – 1880). Připomínáme, že zde priorita patrně náleží Cauchymu, který tuto větu dokázal již r. 1844; srv. [2], str. 82. Viz též Poznámka 5.9.5. Jednou z vět, kterou lze pomocí Liouvillovy věty dokázat jako její jednoduchý důsledek, je tzv. *základní věta algebry.* Také k ní vede řada cest. Tak např. Cauchy dokázal základní větu algebry nejprve r. 1817, pak r. 1820 pro polynomy s reálnými koeficienty a r. 1821 rozšířil tento výsledek na polynomy s komplexními koeficienty; dříve obdržel částečný výsledek v tomto směru r. 1815 JEAN ROBERT ARGAND (1768 – 1822).

I když nelze vytvářet analogickou teorii funkcí jako je teorie funkcí komplexní proměnné obecně na $\mathbb{R}^m$, má Liouvillova věta analogii v teorii harmonických funkcí na $\mathbb{R}^m$; v tomto případě však stačí např. omezenost funkce zdola.

Věta 5.9.1 obsahuje několik silnějších tvrzení než to, které je obsahem Důsledku 5.6.3. Všechna jsou zpravidla označována názvem *princip maxima modulu.* Věta 5.9.4 je opět zajímavá sama o sobě. Pomocí ní lze dokázat některé výsledky jiným způsobem. AUGUST GUTZMER (1860 – 1925) ji publikoval r. 1887. Podle Gutzmera ji objevil CARL GUSTAV AXEL HARNACK (1851 – 1888), nicméně poprvé se objevila v práci z r. 1806, kterou napsal MARC-ANTOINE PARSEVAL (1755 – 1836). Zde jsme zachovali pojmenování podle Gutzmera, použité již dříve v českém textu.

Zbytek kapitoly obsahuje přípravné úvahy o faktorizaci a shrnuje podstatná dokázaná tvrzení do jediné věty o ekvivalenci různých podmínek.

Jak jsme viděli, většinu uvedených tvrzení nám umožnil dokázat Cauchyho vzorec pro kladně orientovanou kružnici. Role kružnice není přitom podstatná, stejně se dá pracovat např. s hranicemi intervalů. Dosud jsme se zaměřili převážně na odvození výsledků „lokálního charakteru"; např. k důkazu toho, že funkce je holomorfní, jsme ověřili *lokálně* existenci primitivní funkce k f. Dále se postupně zaměříme na takové výsledky, které mají „globální charakter".

Poznamenejme, že např. podmínku z Věty 5.5.9 by zřejmě stačilo ověřit pro všechny trojúhelníky s diametrem menším než dané $\delta \in \mathbb{R}_+$. Varianta Morerovy Věty 5.5.10 se knižně poprvé objevila r. 1912 u WILLIAMA FOGGA OSGOODA (1864 – 1943).

Nakonec ještě připomeňme další aspekt popsaných tvrzení: právě Cauchyho vzorec umožňuje přechod mezi „globální reprezentací" křivkovým integrálem a „lokální" vlastností, jakou je zřejmě diferencovatelnost všech řádů.

Literatura:

[1] Ahlfors, L. V.: *Complex analysis*, McGraw-Hill, New York, 1966.

[2] Burckel, R. B.: *An introduction to classical complex analysis, Vol. I*, Birkhäuser, Basel and Stuttgart, 1979.

[3] Carathéodory, C.: *Funktionentheorie I, II*, Birkhäuser, Basel, 1950.

[4] Černý, I.: *Analýza v komplexním oboru*, Academia, Praha, 1983.

[5] Lukeš, J.: *Příklady k teorii Lebesgueova integrálu*, SPN, Praha, 1968.

[6] Osgood, W. F.: *Allgemeine Theorie der analytischen Funktionen a) einer und b) mehrerer komplexen Größen*, obsaženo v: *Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften,* Band II., 2. Teil, 1. Heft, B. G. Teubner, Leipzig, 1899 – 1916.

[7] Maz'ya, V., Shaposhnikova, T.: *Jacques Hadamard, a universal mathematician*, Amer. Math. Society, Providence, 1998.

[8] Remmert, R.: *Theory of complex functions*, Springer, New York, 1991,

[9] Rudin, W.: *Analýza v reálném a komplexním oboru*, Academia, Praha, 1977, (Překlad druhého vydání *Real and Complex Analysis* z r. 1974; první vydání je z r. 1966 (McGraw-Hill, Inc.)).

[10] Saks, S., Zygmund, A.: *Analytic functions*, PTM, Warszawa, 1952, (Překlad polské verze *Funkcje Analityczne* z r. 1948).

[11] Zalcman, L.: *Real proofs of complex theorems (and vice versa)*, Amer. Math. Monthly **81** (1974), str. 115-137.

Kapitola 6

Laurentovy řady

V této kapitole budeme používat nový nástroj. Jsou jím Laurentovy řady, které jsou zobecněním mocninných řad. Připomeňme, že množina $M \subset G$ je izolovaná v otevřené množině $G \subset \mathbb{C}$, jestliže pro každý bod $z \in G$ existuje prstencové okolí $P(z) \subset G$, pro něž je $P(z) \cap M = \emptyset$. Budeme se zabývat funkcemi, které jsou holomorfní všude v otevřené množině G kromě množiny $K \subset G$, která je izolovaná v G. Jinak řečeno, budeme pracovat s funkcemi, které jsou pro každé $z \in G$ holomorfní v jistém prstencovém okolí $P(z) \subset G$.

6.1 Zobecnění Cauchyho vzorce

Označení 6.1.1. Je-li $0 \leq r_1 < r_2 \leq \infty$ a $z_0 \in \mathbb{C}$, označíme

$$P(z_0, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C}\,;\, r_1 < |z - z_0| < r_2\}\,. \tag{6.1}$$

Tuto množinu nazýváme **mezikružím** nebo též **prstencem o středu** z_0**, vnitřním poloměru** r_1 **a vnějším poloměru** r_2. Prstencové okolí $P(z_0)$ je zřejmě speciálním prstencem o vnitřním poloměru $r_1 = 0$.

Budeme potřebovat pomocná tvrzení o spojité závislosti křivkového integrálu na reálném parametru a o jeho derivování podle reálného parametru. Platí též analogická tvrzení o spojitosti a o derivování podle komplexního parametru, která nebudeme potřebovat. Připomeňme, že jsme dokázali zjednodušenou verzi takového tvrzení o derivování Cauchyho integrálu podle parametru; viz Větu 5.5.3.

Tvrzení 6.1.2. *Nechť* $\varphi : [\,a, b\,] \to \mathbb{C}$ *je křivka, nechť* $I \subset \mathbb{R}$ *je otevřený interval a nechť funkce* $f : \langle\varphi\rangle \times I \to \mathbb{C}$ *je spojitá. Pak je*

$$g(u) := \int_\varphi f(z, u)\,dz\,, \quad u \in I\,,$$

spojitá funkce na I.

Důkaz. Zvolme libovolně bod $v \in I$ a uzavřený interval $J \subset I$ tak, že $v \in J$. Dokážeme spojitost g v bodě v vzhledem k J. Ze stejnoměrné spojitosti f na $\langle\varphi\rangle \times J$ existuje pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ takové $\delta > 0$, že

$$(z \in \langle\varphi\rangle,\ t, u \in J,\ |t-u| < \delta) \Rightarrow |f(z,t) - f(z,u)| < \varepsilon\,. \tag{6.2}$$

Odtud však vyplývá pro každé $u \in J$, $|u-v| < \delta$,

$$|g(u) - g(v)| = \Big|\int_\varphi (f(z,u) - f(z,v))dz\Big| \le \int_\varphi |f(z,u) - f(z,v)|dz \le \varepsilon L(\varphi)\,,$$

a tedy i spojitost g v bodě v vzhledem k J. □

Tvrzení 6.1.3. *Nechť $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ je křivka a $I \subset \mathbb{R}$ otevřený interval a nechť dále $f : \langle\varphi\rangle \times I \to \mathbb{C}$ je spolu s parciální derivací $D_2 f$ spojitá na $\langle\varphi\rangle \times I$. Potom má funkce*

$$g(u) := \int_\varphi f(z,u)dz\ , \quad u \in I\,,$$

v intervalu I spojitou derivaci, pro kterou je

$$g'(u) = \int_\varphi D_2 f(z,u)dz = \int_\varphi \frac{\partial f(z,u)}{\partial u}dz\ , \quad u \in I\,. \tag{6.3}$$

Důkaz. Funkci f lze rozložit na reálnou a imaginární část a dokazovat tvrzení pro každou z nich zvlášť. Proto můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že f je *reálná* funkce. Zvolme $u \in I$ a dokažme rovnost v (6.3) pro tento bod u. Nechť $u \in (c,d) \subset [c,d] \subset I$ a nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Protože je parciální derivace $D_2 f = \partial f/\partial u$ stejnoměrně spojitá na $\langle\varphi\rangle \times [c,d]$, existuje $\delta > 0$ tak, že

$$(z \in \langle\varphi\rangle,\ t \in [c,d],\ |t-u| < \delta) \Rightarrow \Big|\frac{\partial f(z,t)}{\partial u} - \frac{\partial f(z,u)}{\partial u}\Big| < \varepsilon\,. \tag{6.4}$$

Pro táž z, t existuje podle věty o přírůstku funkce bod $\xi_{z,t}$ tak, že $|\xi_{z,t} - u| < |t-u|$ a

$$\Big|\frac{f(z,t) - f(z,u)}{t-u} - \frac{\partial f(z,u)}{\partial u}\Big| = \Big|\frac{\partial f(z,\zeta_{z,t})}{\partial u} - \frac{\partial f(z,u)}{\partial u}\Big| < \varepsilon\,, \tag{6.5}$$

takže

$$\Big|\frac{g(t) - g(u)}{t-u} - \int_\varphi \frac{\partial f(z,u)}{\partial u}\Big| = \Big|\int_\varphi \Big[\frac{f(z,t) - f(z,u)}{t-u} - \frac{\partial f(z,u)}{\partial u}\Big]\Big| \le L(\varphi)\,\varepsilon\,.$$

Tím je dokázáno, že

$$g'(u) = \lim_{t\to u}\frac{g(t) - g(u)}{t-u} = \int_\varphi \frac{\partial f(z,u)}{\partial u}dz\ .$$

Spojitost g' je důsledkem Tvrzení 6.1.2. □

Lemma 6.1.4. *Nechť f je holomorfní funkce v prstenci $P(z_0, r_1, r_2)$ a nechť pro každé $\rho \in (r_1, r_2)$ je $\varphi_\rho(t) = z_0 + \rho e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Potom je funkce*

$$\rho \mapsto \int_{\varphi_\rho} f(z)dz\ , \quad \rho \in (r_1, r_2)\,, \tag{6.6}$$

konstantní.

Důkaz. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $z_0 = 0$. Označme $g(z) := zf(z)$ a dále

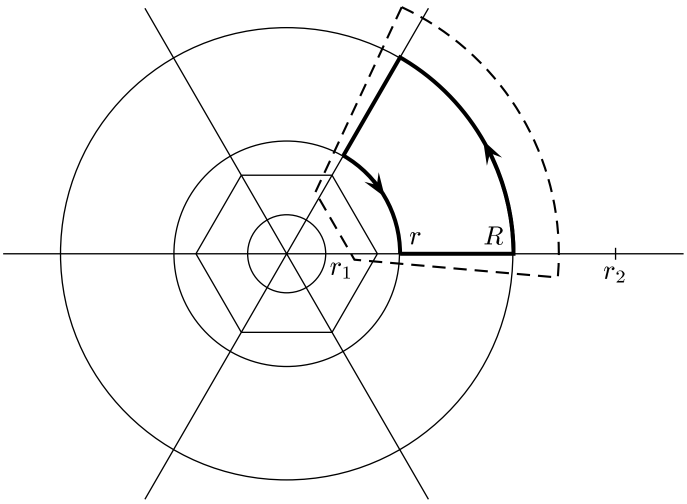
$$J(\rho) := \int_{\varphi_\rho} f(z)dz = \int_{\varphi_\rho} \frac{g(z)}{z} dz = i\int_0^{2\pi} g(\rho\,\mathrm{e}^{it})dt\ , \quad \rho \in (r_1, r_2)\,. \tag{6.7}$$

Podle Tvrzení 6.1.3 o derivování integrálu podle (reálného) parametru je

$$J'(\rho) = i\int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial\rho}\Big(g(\rho\,\mathrm{e}^{it})\Big)\,dt = i\int_0^{2\pi} g'(\rho\,\mathrm{e}^{it})\,\mathrm{e}^{it}dt = \frac{1}{\rho}\int_{\varphi_\rho} g'(z)dz = 0\,, \quad \rho \in (r_1, r_2)\,.$$

Poslední rovnost plyne z toho, že integrál je roven rozdílu hodnot funkce g v krajních bodech uzavřené křivky φ_ρ. □

Poznámky 6.1.5. 1. Existuje ještě jiný „názorný“ důkaz, který pro $z_0 = 0$ stručně popíšeme; pokud se však neopřeme o Obr. 6.1, je při podrobném sepsání také dost dlouhý. Je-li $r_1 < \rho < \sigma < r_2$, lze v $P(0, r_1, r)$ zvolit pravidelný n-úhelník, jehož vrcholy a počátek určují polopřímky roztínající $P(0, \rho, \sigma)$ na vzájemně podobné „křivočaré“



Obr. 6.1: Obrázek k Poznámce 6.1.5, (1)

čtyřúhelníky. Přitom n-úhelník lze volit tak, že každý z těchto čtyřúhelníků leží v jisté otevřené *konvexní* množině, v níž je funkce f holomorfní. Orientujeme-li křivky určené hranicemi těchto čtyřúhelníků vesměs kladně, pak se všechny integrály z f přes tyto křivky anulují a jejich součet se rovná součtu integrálů přes obě kružnice o poloměrech ρ, σ. Je tedy

$$\int_{\varphi_\rho} f(z)dz = \int_{\varphi_\sigma} f(z)dz\ .$$

2. Popíšeme ještě jiný způsob, jak dokázat, že poslední integrál v (6.7) nezávisí na ρ. Bez újmy na obecnosti opět předpokládáme, že je $z_0 = 0$. Funkce log zobrazí „rozříznuté mezikruží“ $P(0, \rho, \sigma) \setminus (-\sigma, -\rho)$ na $(\log \rho, \log \sigma) \times (-\pi, \pi)$, přičemž uzávěr Q tohoto obdélníku je obsažen v množině $\log(P(0, r_1, r_2) \setminus (-r_2, -r_1))$. Převedeme tak integraci g na integraci $(g \circ \exp)\exp$ přes „hranici obdélníku“ v oblasti, pro kterou již Cauchyho větu máme dokázánu. Integrujeme holomorfní funkci $g(\exp w)\exp w = \widetilde{g}(w)$ přes (Q) a dostaneme hodnotu 0; viz [4], str. 125.

Z předcházejícího tvrzení dostaneme **Cauchyho vzorec pro prstenec** [1]), který nám umožní řešit problém vyjádření funkcí ve tvaru součtů řad obecnějšího typu než jsou mocninné řady.

Věta 6.1.6. *Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 \leq r_1 < r_2 \leq \infty$ a nechť f je funkce holomorfní v $P(z_0, r_1, r_2)$. Je-li $\zeta \in P(z_0, r_1, r_2)$, $r_1 < \rho < |\zeta - z_0| < \sigma < r_2$, a označíme-li*

$$\varphi_\rho(t) = z_0 + \rho \exp(it)\,, \quad \varphi_\sigma(t) = z_0 + \sigma \exp(it)\,, \qquad t \in [\,0, 2\pi\,]\,,$$

je

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_\sigma} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_\rho} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz\,. \tag{6.8}$$

Důkaz. Princip důkazu již známe z předchozího výkladu; viz důkaz Věty 5.5.2. Definujme na $P(z_0, r_1, r_2)$ funkci F takto:

$$F(z) = \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta}\,, \quad z \neq \zeta\,, \qquad F(\zeta) = f'(\zeta)\,.$$

Tato funkce je holomorfní v $P(z_0, r_1, r_2)$, což plyne z Lemmatu 5.5.16. Proto můžeme použít i výsledku z předchozího Lemmatu 6.1.4: Je

$$\int_{\varphi_\sigma} F(z)dz = \int_{\varphi_\rho} F(z)dz\,.$$

Po dosazení a úpravě dostaneme

$$\int_{\varphi_\sigma} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz - \int_{\varphi_\rho} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz = f(\zeta)\Big(\int_{\varphi_\sigma} \frac{dz}{z - \zeta} - \int_{\varphi_\rho} \frac{dz}{z - \zeta} \Big) = 2\pi i f(\zeta)\,,$$

neboť $\mathrm{ind}(\varphi_\sigma, \zeta) = 1$ a $\mathrm{ind}(\varphi_\rho, \zeta) = 0$. Tím je vzorec dokázán. □

6.2 Laurentovy řady

V předcházejícím výkladu jsme pracovali s holomorfními funkcemi; dokázali jsme, že je lze lokálně vyjádřit jako součty mocninných řad. Nyní zavedeme obecnější, tzv. *Laurentovy řady.*

---

[1]) Jiný důkaz lze nalézt např. v [4], str. 98.

Příklad 6.2.1. Funkci $f(z) = (1-z)^{-1}$ můžeme vyjádřit ještě jinak nežli řadou $\sum z^k$. Pišme

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z}\frac{1}{1-1/z} = -\frac{1}{z}\sum \frac{1}{z^k} = -\sum \frac{1}{z^{k+1}}\,;$$

snadno nahlédneme, že tato řada konverguje pro všechna z, pro která je $|z| > 1$, a ve všech ostatních bodech $z \in \mathbb{C}$ diverguje. Jak později ukážeme, situace s řadami tohoto typu je podobná jako u mocninných řad o středu 0: existuje takové r, $0 \le r \le \infty$, že řada konverguje pro všechna z, $|z| > r$, a diverguje pro všechna z, $|z| < r$.

Úmluva 6.2.2 (důležitá). Dále budeme užívat označení

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} a_k (z-z_0)^k := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k}\,, \tag{6.9}$$

které nám umožní stručný a elegantní zápis vyšetřovaných řad.

Lemma 6.2.3. *Nechť a_k, $-k \in \mathbb{N}$ a z_0 jsou komplexní čísla. Existuje právě jedno číslo r, $0 \le r \le \infty$ takové, že řada*

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} a_k (z-z_0)^k \tag{6.10}$$

konverguje absolutně pro všechna $z \in P(z_0, r, \infty) = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z-z_0| > r\}$ a diverguje pro všechna $z \in \mathbb{C}$, pro něž $|z-z_0| < r$. Pro r platí vzorec

$$r = \limsup_{k\to\infty} |a_{-k}|^{1/k} \tag{6.11}$$

a řada (6.10) *konverguje ve všech bodech množiny $P(z_0, r, \infty)$ absolutně a na množině $P(z_0, r, \infty)$ lokálně stejnoměrně a tedy i normálně.*

Důkaz. Připomeňme, že mocninná řada $\sum b_k v^k$ konverguje (absolutně) pro všechna $v \in \mathbb{C}$, $|v| < R$, a diverguje pro všechna $v \in \mathbb{C}$, $|v| > R$, kde R je poloměr konvergence této řady; platí přitom Cauchy-Hadamardův vzorec (2.7)

$$R = \bigl(\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|b_k|}\,\bigr)^{-1},$$

ve kterém klademe $1/+\infty = 0$ a $1/0 = +\infty$. Dosadíme-li za v výraz $1/(z-z_0)$ a a_{-k} za b_k, $k \in \mathbb{N}$, $a_0 = 0$, dostaneme řadu (6.10). Nechť $r := \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_{-k}|}$. Řada (6.10) zřejmě absolutně konverguje pro všechna $z \in \mathbb{C}$, pro něž $|z-z_0| > r$, a diverguje pro všechna z, pro něž $|z-z_0| < r$. Lokálně stejnoměrná konvergence plyne z Weierstrassova M-testu z Věty 1.7.5: konverguje-li (6.10) v bodě $\zeta \in P(z_0, r, \infty)$ absolutně, je řada

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} |a_k||\zeta - z_0|^k$$

v $P(z_0, |\zeta - z_0|, \infty)$ majorantní řadou řady (6.10) a v $P(z_0, r, \infty)$ konverguje (6.10) normálně. $\square$

Poznámka 6.2.4. Podobně jako je tomu u mocninných řad, neplatí ani u řad (6.10) žádné obecné tvrzení o konvergenci či divergenci v bodech kružnice $\{z \in \mathbb{C}\,;\ |z - z_0| = r\}$; k ilustraci uvažujme tyto řady se středem $z_0 = 0$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z^k}\,, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{kz^k}\,, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 z^k}\,.$$

Všechny tři řady konvergují absolutně pro všechna $z \in \{w \in \mathbb{C};\ |w| > 1\}$, avšak na množině $\{w \in \mathbb{C}\,;\ |w| = 1\}$ první z řad všude diverguje, třetí všude konverguje a druhá konverguje např. pro $z = -1$ a diverguje pro $z = 1$.

Definice 6.2.5. Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$. Symbol

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \tag{6.12}$$

budeme nazývat **Laurentovou řadou o středu** z_0. Čísla a_k jsou **koeficienty** Laurentovy řady. Říkáme, že tato řada konverguje v bodě $z \in \mathbb{C}$, jestliže v tomto bodě *současně konvergují* obě řady

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \qquad \sum_{k=-\infty}^{-1} a_k (z - z_0)^k\,.$$

První, resp. druhá z těchto řad se nazývá **regulární část**, resp. **hlavní část** Laurentovy řady (6.12) o středu z_0. **Součet** Laurentovy řady definujeme vztahem

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k + \sum_{k=-\infty}^{-1} a_k (z - z_0)^k\,, \tag{6.13}$$

má-li pravá strana smysl. Množinu $P(z_0, r, R)$, kde R je poloměr konvergence regulární části řady (6.12) a r je pro hlavní část řady (6.12) určeno vzorcem (6.11), nazýváme v případě $r < R$ **prstenec konvergence** řady (6.12); připouštíme přitom případy $r = 0$ i $R = +\infty$. Užíváme podobnou terminologii jako u mocninných řad: pokud Laurentova řada (6.12) konverguje v $P(z_0, r, R)$ a $r < R$, říkáme i o ní, že v každém bodě $z \in P(z_0, r, R)$ **konverguje absolutně** a že v $P(z_0, r, R)$ konverguje **lokálně stejnoměrně** a **normálně**.

Důsledek 6.2.6. *Pokud Laurentova řada konverguje v prstenci* $P(z_0, r, R)$*, je její součet holomorfní funkce v* $P(z_0, r, R)$*.*

Důkaz. Tvrzení plyne okamžitě z toho, že sčítáme holomorfní funkce v $P(z_0, r, R)$ a konvergence Laurentovy řady (6.12) v prstenci $P(z_0, r, R)$ je lokálně stejnoměrná. $\square$

6.3 Vyjádření funkce Laurentovu řadou

Doporučujeme čtenáři, aby si před studiem Věty 6.3.1 připomněl Příklad 2.3.9. Důkaz provedeme podrobně, i když jsme něco podobného již dělali. Jako speciální případ zahrnuje totiž vyjádření Taylorovou řadou, s nímž se čtenář setkal již dříve.

Věta 6.3.1 (Laurent, Cauchy 1843*). *Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 \le r_1 < r_2 \le \infty$, a nechť f je funkce holomorfní v $P(z_0, r_1, r_2)$. Potom existuje právě jedna Laurentova řada se středem z_0 a s koeficienty a_k, $k \in \mathbb{Z}$, tak, že platí rovnost*

$$f(\zeta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (\zeta - z_0)^k, \quad \zeta \in P(z_0, r_1, r_2)\,.$$

Je-li $\rho \in (r_1, r_2)$ a definujeme-li $\varphi_\rho(t) = z_0 + \rho \exp(it)$, $t \in [\,0, 2\pi\,]$, platí pro všechna $n \in \mathbb{Z}$ rovnost

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_\rho} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz\ . \tag{6.14}$$

Důkaz. Nejprve budeme předpokládat, že funkce f je vyjádřena v $P(z_0, r_1, r_2)$ Laurentovou řadou

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad z \in P(z_0, r_1, r_2)\ . \tag{6.15}$$

Řada konverguje v $P(z_0, r_1, r_2)$ lokálně stejnoměrně a na geometrickém obrazu $\langle \varphi_\rho \rangle$ konvergují regulární i hlavní část řady (6.15) stejnoměrně. Tato stejnoměrná konvergence na $\langle \varphi_\rho \rangle$ zůstane zachována, násobíme-li řadu člen po členu omezenou funkcí $(z - z_0)^{-(n+1)}$:

$$\frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k-n-1}, \quad z \in \langle \varphi_\rho \rangle\,.$$

Tuto novou řadu lze tedy integrovat „člen po členu“, čímž dostaneme

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_\rho} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_\rho} \Big(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{a_k}{(z - z_0)^{n+1-k}} \Big) dz =$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_\rho} \frac{a_k}{(z - z_0)^{n+1-k}}\, dz\ .$$

Právě uvedené integrandy mají kromě případu $k = n$ všechny primitivní funkci na $P(z_0, r_1, r_2)$, takže se anulují všechny členy řady, ve kterých je $k \neq n$. Zbývající člen je roven a_n, tj.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_\rho} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz = a_n \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_\rho} \frac{dz}{z - z_0} = a_n\,;$$

pokud existují, jsou koeficienty a_n Laurentovy řady funkce f určeny funkcí f jednoznačně.

Existenci Laurentova rozvoje funkce f rozvoje dokážeme pomocí Cauchyho vzorce pro mezikruží z Věty 6.1.6. Zvolíme $\zeta \in P(z_0, r_1, r_2)$ a pak poloměry kružnic ρ a σ tak, aby

$$r_1 < \rho < |\zeta - z_0| < \sigma < r_2 \,.$$

Podle vzorce (6.8) je

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\Big(\int_{\varphi_\sigma} \frac{f(z)}{z-\zeta}\,dz \;-\; \int_{\varphi_\rho} \frac{f(z)}{z-\zeta}\,dz \Big)\,. \tag{6.16}$$

V integrálech v (6.16) je integrand stejný. Vyjádříme ho pomocí geometrických řad; viz Příklad 2.3.9. V prvním případě je $|z - z_0| = \sigma$, a pro všechna ζ, pro něž je $|\zeta - z_0| < \sigma$, dostáváme rovnost

$$\frac{1}{z-\zeta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^k}{(z-z_0)^{k+1}}\,,$$

přičemž řada vpravo konverguje stejnoměrně vzhledem k z na $\langle\varphi_\sigma\rangle$, neboť pro $z \in \langle\varphi_\sigma\rangle$ je $|\,\zeta - z_0|/|z - z_0| = |\,\zeta - z_0|/\sigma < 1$. Proto po násobení funkcí f omezenou a spojitou na $\langle\varphi_\sigma\rangle$ dostaneme opět stejnoměrně konvergentní řadu, kterou lze integrovat „člen po členu“; tím dostaneme

$$\int_{\varphi_\sigma} \frac{f(z)}{z-\zeta}\,dz \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} (\zeta - z_0)^k \int_{\varphi_\sigma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\,dz\;.$$

Podobně postupujeme ve druhém případě, kdy je $|z - z_0| = \rho$, navíc však ještě transformujeme sčítací index: klademe $k + 1 = -j$, takže $j < 0$, a pak ještě položíme $j = k$. Pro všechna ζ, pro něž je $|\,\zeta - z_0| > \rho$, platí rovnosti

$$-\frac{1}{z-\zeta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}} = \sum_{j=-\infty}^{-1} \frac{(z-z_0)^{-j-1}}{(\zeta - z_0)^{-j}} = \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{(\zeta - z_0)^k}{(z-z_0)^{k+1}}\,;$$

řada konverguje stejnoměrně na $\langle\varphi_\rho\rangle$, protože pro všechna $z \in \langle\varphi_\rho\rangle$ lze odhadnout $|z - z_0|/|\,\zeta - z_0| = \rho/|\,\zeta - z_0| < 1$. Opět násobíme funkcí f spojitou a omezenou na $\langle\varphi_\rho\rangle$ a integrujeme „člen po členu“, čímž analogicky dostaneme

$$-\int_{\varphi_\rho} \frac{f(z)}{z-\zeta}\,dz \;=\; \sum_{k=-\infty}^{-1} (\zeta - z_0)^k \int_{\varphi_\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\,dz\;.$$

Protože je funkce $f(z)/(z - z_0)^{k+1}$ pro každé $k \in \mathbb{Z}$ holomorfní v $P(z_0, r_1, r_2)$, podle Lemmatu 6.1.4 pro každé $\rho_1 \in (r_1, r_2)$ je

$$\int_{\varphi_{\rho_1}} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\,dz \;=\; \int_{\varphi_\sigma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\,dz \;=\; \int_{\varphi_\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\,dz\;,$$

z čehož po dosazení do (6.16) a sečtení dostáváme vzorec

$$f(\zeta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\zeta - z_0)^k \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_{\rho_1}} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz \ ,$$

který se shoduje s tvrzením věty a po zjednodušení označení záměnou ρ za ρ_1 se vzorcem (6.14). □

Poznámka 6.3.2. Jinak řečeno, pro součty f Laurentových řad tvaru (6.15) v prstenci $P(z_0, r_1, r_2)$ jsme nalezli tvar prostého zobrazení $f \mapsto \{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, které přiřazuje funkci f koeficienty „její“ Laurentovy řady. Je-li $r_1 = 0$ a f má holomorfní rozšíření na $U(z_0, r_2)$, jsou koeficienty $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ Laurentovy řady podle dokázané Věty 6.3.1 zároveň koeficienty její Taylorovy řady. Protože je kruh přípustná množina a integrandy ve vzorci pro výpočet a_{-n}, $n \in \mathbb{N}$, jsou holomorfní funkce, je $a_{-n} = 0$.

Definice 6.3.3. Je-li f součtem Laurentovy řady (6.12) v prstenci $P(z_0, r_1, r_2)$, kde $0 \le r_1 < r_2 \le \infty$, potom říkáme, že řada (6.12) je **Laurentovým rozvojem funkce f v $P(z_0, r_1, r_2)$**. Podobně též nazýváme součet regulární části řady **regulární část funkce f v prstenci** $P(z_0, r_1, r_2)$ a součet hlavní části řady **hlavní část funkce f v prstenci** $P(z_0, r_1, r_2)$.

Příklad 6.3.4. Čtenář si snad již povšiml, že funkce f může mít více navzájem různých Laurentových rozvojů se stejným středem. Jejich mezikruží konvergence jsou disjunktní. To je důležité při formulaci úloh, neboť Laurentův rozvoj funkce závisí v uvedeném smyslu nejenom na středu řady z_0, ale i na prstenci, v němž rozvoj máme nalézt. Tak např. funkce $f(z) := 1/(1-z)$ má dva Laurentovy rozvoje o středu 0, z nichž jeden konverguje v $U(0,1)$ a je zároveň Taylorovým rozvojem f o středu 0, a druhý je Laurentovým rozvojem v $P(0, 1, \infty)$; srovnejte s Příkladem 6.2.1 (1).

6.4 Singularity holomorfních funkcí

Definice 6.4.1. Nechť f je funkce holomorfní v prstencovém okolí $P(z_0, r)$ bodu $z_0 \in \mathbb{C}$ pro nějaké $r \in \mathbb{R}_+$, avšak *není* holomorfní v bodě z_0. Potom říkáme, že bod z_0 je **izolovaným singulárním bodem** nebo **izolovanou singularitou** funkce f.

Příklady 6.4.2. Ukazuje se, že izolované singularity mohou být různých typů; uveďme několik jednoduchých příkladů:

1. Funkce $f(z) = (\exp(z) - 1)/z$ *není definována* v bodě $z = 0$, avšak má v tomto bodě limitu: Tato limita je rovna $\exp'(0) = \exp(0) = 1$. Z Důsledku 5.5.12 vyplývá, že f bude holomorfní v $\mathbb{C}$, pokud položíme $f(0) = 1$. Je-li f definována v bodě 0, avšak $f(0) \neq \lim_{z\to 0} f(z) = 1$, stane se f holomorfní v $\mathbb{C}$, pokud hodnotu f v bodě 0 změníme a položíme $f(0) = 1$.

2. Pokud je $f(z) = 1/z$, pak je bod 0 opět izolovanou singularitou f. Opět existuje limita $\lim_{z\to 0} f(z)$, ta je však nekonečná.

3. Funkce $f(z) = \sin(1/z)$ má také izolovanou singularitu v bodě 0, avšak tentokrát *neexistuje limita* $\lim_{z\to 0} f(z)$. Stačí si uvědomit, že restrikce g funkce f na $\mathbb{R}$ je *reálná* funkce, pro kterou neexistuje $\lim_{x\to 0+} g(x)$, protože neexistuje $\lim_{t\to\infty} \sin t$.

Předcházející příklady v jistém smyslu ilustrují všechny možnosti, které mohou pro izolované singulární body nastat. To v této části zpřesníme a také dokážeme. Uveďme ještě příklad stejného typu jako v předcházejícím případě; využijeme tentokrát větu o jednoznačnosti. Definujme $f(z) = z^2 \sin(1/z)$ pro $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ a $f(0) = 0$. Potom je f holomorfní v $\mathbb{P} = P(0, \infty)$, ale ne v bodě 0. Bod 0 je hromadným bodem posloupnosti $\{1/n\pi\}_{n=1}^{\infty}$, tedy nulových bodů f a kdyby byla f holomorfní i v bodě 0, plynulo by odtud podle věty o jednoznačnosti $f \equiv 0$ v $\mathbb{C}$, což vede ke sporu. Přitom restrikce $f\,|\,\mathbb{R}$ má všude v $\mathbb{R}$ derivaci! Je užitečné si povšimnout, že

$$\lim_{z\to 0} \frac{z^2 \sin(1/z) - 0}{z - 0} = \lim_{z\to 0} z \sin(1/z)$$

v $\mathbb{C}$ neexistuje (čtenář by si měl uvědomit rozdíl mezi chováním v $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$).

Lemma 6.4.3. *Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$, nechť f je holomorfní a omezená v jistém $P(z_0)$. Potom existuje konečná limita $\lim_{z\to z_0} f(z)$ a definujeme-li $f(z_0) := \lim_{z\to z_0} f(z)$, stane se f holomorfní funkcí v příslušném okolí $U(z_0)$. Speciálně je Laurentův rozvoj f o středu z_0 roven Taylorovu rozvoji o středu z_0, a hlavní část Laurentova rozvoje je tedy nulová funkce.*

Důkaz. Definujme $g(z) = (z - z_0)^2 f(z)$, $z \in P(z_0)$ a $g(z_0) = 0$. Podle definice snadno spočteme, že $g'(z_0) = 0$, a g je tedy holomorfní v $U(z_0)$. Podle Věty 5.5.3 o vyjádření holomorfní funkce Taylorovou řadou a s přihlédnutím k tomu, že je $g(z_0) = g'(z_0) = 0$, existují koeficienty $a_k \in \mathbb{C}$ tak, že je

$$g(z) = (z - z_0)^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = (z - z_0)^2 f(z)\,.$$

Proto je f po spojitém rozšíření hodnotou $f(z_0) = a_0$ holomorfní v $U(z_0)$ a hlavní část jejího Laurentova rozvoje je rovna nule. □

Lemma 6.4.4. *Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$, nechť f je holomorfní v jistém $P(z_0)$ a nechť $p \in \mathbb{N}$ má tu vlastnost, že limita funkce $g(z) := (z - z_0)^p f(z)$ v bodě z_0 je konečná a nenulová. Potom je hlavní část Laurentova rozvoje funkce f v $P(z_0)$ nenulová a je polynomem stupně p „v $1/(z - z_0)$“. Přitom je $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$.*

Důkaz. Z předpokladů a Lemmatu 6.4.3 plyne, že funkci g lze holomorfně rozšířit z $P(z_0)$ na příslušné $U(z_0)$ tak, že $g(z_0) \neq 0$. Funkci g lze rozvinout v Taylorovu řadu

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k\,,$$

ve které je $a_0 \neq 0$. V $P(z_0)$ je tedy

$$f(z) = (z - z_0)^{-p} g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k-p} = \sum_{k=-p}^{\infty} b_k (z - z_0)^k \,,$$

kde $b_k = a_{k+p}$, $k = -p, -p+1, \ldots$. Protože je $a_0 \neq 0$, je též $b_{-p} = a_0 \neq 0$, a hlavní část f je nenulová; má však konečný počet nenulových členů a má tvar $h(1/(z - z_0))$, kde h je polynom stupně p. Součin $(z - z_0)^{-p} g(z) = f(z)$ má pro $z \to z_0$ limitu ∞. $\square$

Poznámka 6.4.5 (Laurentova řada v $P(\infty)$). Nechť obě řady

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{z^k} \,, \qquad \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{a_k}{z^k} := \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^n$$

konvergují na nějakém $P(\infty, r) = \{z \in \mathbb{C};\ |z| > 1/r\}$ s $r \in [0, \infty)$. Potom

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{a_k}{z^k} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{a_n}{z^n} \,; \tag{6.17}$$

řadu v (6.17) vlevo nazýváme **Laurentovou řadou o středu ∞ v** $P(\infty)$. První z řad na pravé straně (6.17) je její **regulární část** a druhá její **hlavní část**. Označíme-li f součet této Laurentovy řady, je řada (6.17) **Laurentovým rozvojem funkce f o středu ∞**. Čtenář by si měl povšimnout, že u formálně shodného Laurentova rozvoje o středu 0 odpovídá jeho hlavní část regulární části „u nekonečna"; regulární části u 0 podobně odpovídá hlavní část u ∞. „Absolutní" člen a_0 patří vždy k regulární části rozvoje.

Věta 6.4.6 (Casorati 1868, Weierstrass 1876). *Nechť je funkce f holomorfní v jistém okolí $P(z_0)$, $z_0 \in \mathbb{C}$, a nechť $f(z) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$, $z \in P(z_0)$. Potom nastává právě jedna z těchto tří možností:*

(1) *Funkce f je omezená v nějakém prstencovém okolí $P(z_0)$ bodu z_0; pak existuje v $\mathbb{C}$ limita $\lim_{z \to z_0} f(z)$ a po spojitém rozšíření funkce f touto limitou v bodě z_0 je f holomorfní v $U(z_0)$. Hlavní část Laurentova rozvoje funkce f v $P(z_0)$ je identicky rovna 0.*

(2) *Funkce f má limitu $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$. Hlavní část Laurentova rozvoje f v $P(z_0)$ má pouze konečný nenulový počet nenulových koeficientů a_k.*

(3) *Pro každé $\rho > 0$ je $\overline{f(P(z_0, \rho))} = \mathbb{S}$, tj. obraz $f(P(z_0, \rho))$ „libovolně malého" prstencového okolí $P(z_0, \rho)$ je množina hustá v $\mathbb{S}$. Hlavní část Laurentova rozvoje v $P(z_0)$ má nekonečně mnoho nenulových koeficientů.*

Důkaz. Ukážeme, že pokud nenastane (3), nastane právě jedna z možností (1) či (2). Jestliže je pro nějaké $\rho \in \mathbb{R}_+$ uzavřená množina $M := \overline{f(P(z_0, \rho))}$ *vlastní* podmnožinou $\mathbb{S}$, je $\mathbb{S} \setminus M$ neprázdná otevřená množina. Existuje tedy $w_0 \in \mathbb{C} \setminus M$ a

$\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ tak, že $\overline{U(w_0, \varepsilon)} \cap M = \emptyset$. Potom na prstencovém okolí $P(z_0, \rho)$ dostaneme pro funkci $g(z) := (f(z) - w_0)^{-1}$ odhad

$$|g(z)| = \frac{1}{|f(z) - w_0|} \leq \frac{1}{\varepsilon}.$$

Funkce $g \not\equiv 0$ splňuje předpoklady Lemmatu 6.4.3 a lze ji tedy po spojitém rozšíření do bodu z_0 rozvést v Taylorovu řadu o středu z_0; je

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k.$$

Je-li $p \geq 0$ nejmenší index, pro nějž je $c_p \neq 0$, je

$$g(z) = \sum_{k=p}^{\infty} c_k (z - z_0)^k = (z - z_0)^p \sum_{k=p}^{\infty} c_k (z - z_0)^{k-p} = (z - z_0)^p h(z),$$

kde $h(z_0) = c_p \neq 0$. Existuje tedy okolí $U(z_0, \rho_1)$ takové, že funkce h je holomorfní a všude různá od 0 na $U(z_0, \rho_1)$. Funkce $1/h$ je na tomto okolí holomorfní a lze ji tedy rozvést v Taylorovu řadu o středu z_0. Nechť je

$$\frac{1}{h(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k, \quad z \in U(z_0, \rho_1),$$

kde $b_0 = 1/c_p \neq 0$. Pak však v $P(z_0, \rho_1)$ platí rovnosti

$$f(z) - w_0 = \frac{1}{g(z)} = (z - z_0)^{-p} \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^{k-p} = \sum_{k=-p}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

Je tedy $a_{-p} = b_0 \neq 0$, a hlavní část rozvoje f v Laurentovu řadu je tvaru $P(1/(z - z_0))$, kde P je polynom stupně $p \in \mathbb{N}_0$. V závislosti na tom, zda $p > 0$ či $p = 0$, nastane případ (2) či (1), a v hlavní části je tedy jen konečný počet nenulových koeficientů.

Obráceně, pokud má hlavní část Laurentova rozvoje funkce f v bodě z_0 pouze *konečný* počet nenulových koeficientů, existuje podle Lemmatu 6.4.3 a Lemmatu 6.4.4 konečná nebo nekonečná $\lim_{z \to z_0} f(z)$, a zřejmě je $\mathbb{C} \setminus \overline{f(P(z_0, \rho))} \neq \emptyset$ pro každé dostatečně malé $\rho > 0$. □

Definice 6.4.7. Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ je izolovaná singularita funkce f a nechť

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

je její Laurentův rozvoj v nějakém prstencovém okolí $P(z_0)$. Nastane-li případ (1) z předcházející Věty 6.4.6, říkáme, že z_0 je **odstranitelnou singularitou** funkce f. Nastane-li případ (2), existuje nejmenší $p \in \mathbb{N}$ tak, že $a_{-p} \neq 0$ a bod z_0 nazýváme **pólem řádu** p nebo p**-násobným pólem** funkce f. V případě (3) říkáme, že bod z_0 je **podstatnou singularitou** funkce f.

V této souvislosti je užitečné definovat analogické pojmy i pro bod ∞. Budeme pak moci snáze studovat funkce jako zobrazení $\mathbb{S}$ do $\mathbb{S}$.

Definice 6.4.8. Jestliže je f definována na nějakém $P(\infty)$, pak říkáme, že **bod** ∞ **je odstranitelná singularita**, resp. **pól násobnosti** p, resp. **podstatná singularita funkce** f, je-li bod 0 odstranitelnou singularitou, resp. pólem násobnosti p, resp. podstatnou singularitou funkce $f(1/z)$, definované v nějakém $P(0)$.

Poznámka 6.4.9. Definice je velmi přirozená v následujícím smyslu: Nechť je funkce f holomorfní v nějakém $P(\infty)$. Potom je bod ∞ odstranitelnou singularitou funkce f, pokud existuje konečná $\lim_{z\to\infty} f(z)$. Pokud je $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$ a $a_{-p} \neq 0$ pro nějaké $p \in \mathbb{N}$, ale $a_{-k} = 0$ pro všechna $k > p$, je bod ∞ pólem řádu p funkce f. Pokud tato limita neexistuje, má f v bodě ∞ podstatnou singularitu. Zároveň je vhodné rozšířit tuto analogii i na nulové body funkce f: Bod ∞ je **nulovým bodem funkce** f **násobnosti** p, je-li bod 0 nulovým bodem násobnosti p funkce $g(z) := f(1/z)$, $z \in P(\infty)$, $g(0) := 0$.

Věta 6.4.10. *Nechť f je holomorfní funkce v jistém okolí $P(z_0)$ a nechť $z_0 \in \mathbb{S}$ je nulovým bodem, resp. pólem funkce f násobnosti p. O souvislostech nulových bodů a pólů funkce f a pólů a nulových bodů funkce $1/f$ v bodě z_0 platí:*

(1) *Je-li $p \in \mathbb{N}$ a z_0 je p-násobným nulovým bodem f, pak je z_0 p-násobným pólem funkce $1/f$.*

(2) *Je-li $p \in \mathbb{N}$ a z_0 je p-násobným pólem f, pak je z_0 odstranitelnou singularitou funkce $1/f$; po rozšíření $1/f$ spojitě do bodu z_0 je tento bod p-násobným nulovým bodem funkce $1/f$.*

(3) *Je-li $z_0 \in \mathbb{C}$ p-násobným nulovým bodem funkce f, je $(p-1)$-násobným nulovým bodem funkce f'.*

(4) *Je-li $z_0 \in \mathbb{C}$ p-násobným pólem funkce f, potom je $(p+1)$-násobným pólem funkce f'.*

Důkaz. Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$. Předpokládejme bez újmy na obecnosti, že $f(z) \neq 0$ pro všechna $z \in P(z_0)$ a že v $P(z_0)$ má f Laurentův rozvoj

$$f(z) = \sum_{k=p}^{\infty} a_k (z-z_0)^k = (z-z_0)^p \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+p}(z-z_0)^k\,, \quad a_p \neq 0\,, \tag{6.18}$$

pro nějaké $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Označme $h(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+p}(z-z_0)^k$, $z \in U(z_0)$. Potom $1/h(z) \neq 0$ v $U(z_0)$, funkce $1/h(z)$, $z \in U(z_0)$, je holomorfní v $U(z_0)$ a je součtem své Taylorovy řady o středu z_0. Pro $g(z) = 1/f(z)$ snadno dostaneme

$$g(z) = \sum_{k=-p}^{\infty} b_k(z-z_0)^k = (z-z_0)^{-p} \sum_{k=0}^{\infty} b_{k-p}(z-z_0)^k\,, \quad b_{-p} = 1/a_p \neq 0\,.$$

Odtud vyplývají tvrzení (1) a (2). Derivaci $f'(z)$ dostaneme přímým výpočtem a je v $P(z_0)$ rovna výrazu:

$$p(z-z_0)^{p-1}\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+p}(z-z_0)^k + (z-z_0)^p \sum_{k=1}^{\infty} k a_{k+p}(z-z_0)^{k-1}, \quad a_p \neq 0\,. \tag{6.19}$$

Pro $p \in \mathbb{N}$ z (6.19) dostaneme (3) a pro $-p \in \mathbb{N}$ analogicky obdržíme (4). V případě, že $z_0 = \infty$ se analogicky vyšetří funkce $f(1/z)$ v okolí bodu 0. $\square$

S funkcemi, které jsou holomorfní „skoro na celé množině G“, budeme často pracovat. Proto k zestručnění užíváme následující úmluvu:

Úmluva 6.4.11. Funkce f je holomorfní v otevřené množině $G \subset \mathbb{C}$ **až na množinu** $M \subset G$ vždy znamená, že M je uzavřená množina izolovaná v G a f je holomorfní na $G \setminus M$, ale není holomorfní v *žádném bodě* M. Pokud nebude řečeno něco jiného, budeme všechny odstranitelné singularity funkcí považovat za „odstraněné“, tj. je-li f funkce s izolovanými singulárními body v otevřené množině $G \subset \mathbb{C}$, nahradíme ji vždy rozšířením z $G \setminus M$ (označení f ponecháme) pomocí limity

$$f : z \mapsto \lim_{w \to z} f(w)$$

ve všech bodech $z \in M$, ve kterých tato limita existuje a je konečná [2]). Izolovanými singulárními body jsou tedy dále *vždy póly nebo podstatné singularity.*

6.5 l'Hospitalovo pravidlo

Úvahy, které jsme použili při důkazu Věty 6.4.10 nyní užijeme ještě k důkazu komplexní varianty l'Hospitalova pravidla, která je formálně jednodušší než v „reálném případě“, a která je užitečná pro některé výpočty:

Tvrzení 6.5.1 (l'Hospitalovo pravidlo). *Nechť funkce f, g jsou holomorfní v nějakém prstencovém okolí $P(z_0)$, $z_0 \in \mathbb{C}$, a nechť z_0 je izolovaný nulový bod obou funkcí f, g. Potom existují obě následující limity a platí rovnost*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}\,.$$

[2]) Jak později uvidíme, analogické rozšíření je někdy užitečné provést i v těch bodech, které jsou *póly* funkce f.

Důkaz. Je-li $z_0 \in \mathbb{C}$, existují holomorfní funkce f_1, g_1 nenabývající hodnoty 0 v nějakém $U(z_0)$, a $p, q \in \mathbb{N}$ tak, že

$$f(z) = (z - z_0)^p f_1(z)\,, \quad g(z) = (z - z_0)^q g_1(z)\,, \quad z \in P_1(z_0)\,.$$

Jednoduchou úpravou dostaneme

$$\frac{f(z)}{g(z)} = (z - z_0)^{p-q} \frac{f_1(z)}{g_1(z)}\,, \quad \frac{f'(z)}{g'(z)} = (z - z_0)^{p-q} \frac{p f_1(z) + (z - z_0) f_1'(z)}{q g_1(z) + (z - z_0) g_1'(z)}\,,$$

z čehož pro $p - q > 0$ vyplývá, že limity obou výrazů jsou nulové, kdežto pro $p - q < 0$ jsou rovny ∞. Je-li $p - q = 0$, tj. $p = q$, je

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{p f_1(z) \pm (z - z_0) f_1'(z)}{p g_1(z) \pm (z - z_0) g_1'(z)} = \frac{f_1(z_0)}{g_1(z_0)} = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)}\,,$$

čímž je důkaz tvrzení dokončen. □

Poznámka 6.5.2. Tvrzení platí i pro případ, že f, g mají v bodě z_0 pól, ale nemá praktický význam: řád pólu funkcí f, g se derivováním zvyšuje a tak nedochází k žádoucímu zjednodušení výrazu $f(z)/g(z)$.

Poznámka 6.5.3. Čtenář by si měl rozmyslit, co z Věty 6.4.10 vyplývá pro operace s funkcemi, které mají v nějakém bodě z_0 odstranitelnou singularitu nebo pól, tj. pro něž hlavní část Laurentova rozvoje v tomto bodě má pouze konečný počet nenulových koeficientů [3]).

Jsou-li $f, g \in H(P(z_0))$ a f, g mají v bodě z_0 nejvýše pól, pak také $f \pm g$ a fg leží v $H(P(z_0))$ a tyto funkce mají v bodě z_0 nejvýše pól. Pro případ f/g musíme vyloučit možnost $g \equiv 0$ na nějakém $P(z_0)$. Pak bod z_0 může být pouze *izolovaným nulovým bodem* funkce g a po eventuálním zmenšení prstencového okolí lze předpokládat, že $g(z) \neq 0$ pro všechna $z \in P(z_0)$. V takovém případě má funkce f/g v z_0 *opět nejvýše pól.* Není obtížné zformulovat kvantitativní tvrzení typu: *Má-li f v bodě z_0 pól (nulový bod) násobnosti p a funkce g pól (nulový bod) násobnosti q, potom $f \pm g, \ldots$ má v bodě z_0 ....* Tuto situaci však v konkrétním případě řešíme ad hoc pro příslušné f, g a obecné tvrzení nebudeme ani formulovat.

6.6 ♡ Ještě o singularitách

Začneme jednoduchým pozorováním: víme již, že pro všechna $|z| < 1$ je

$$(1 - z)^{-1} = 1 + z + z^2 + \cdots = \sum z^k\,, \quad z \in U(0, 1)\,.$$

Funkce $f^*(z) = (1 - z)^{-1}$, která je definována v $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, je nám důvěrně známa, a tak lze snadno „uhodnout“ tvar její Taylorovy řady: lze ji pro každý bod $z_0 \neq 1$ vyjádřit

[3]) Často se užívá pro tuto situaci vyjádření „mají nejvýše pól v z_0“.

v $U(z_0, |1-z_0|)$ mocninnou řadou

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^k}{(1-z_0)^{k+1}}\,.$$

Všimněme si nyní restrikce $f := f^*|\,U(0,1)$: pro každé $z_0 \neq 1$, $|z_0| = 1$, existuje v nějakém okolí $U(z_0)$ funkce $g \in H(U(z_0))$ tak, že restrikce obou funkcí g a f na $U(z_0) \cap U(0,1)$ splývají. Jinak řečeno, f lze „holomorfně rozšířit“ z $U(0,1)$ do bodu z_0. Výjimkou je jediný bod na konvergenční kružnici, a to bod 1. Body tohoto typu budeme dále (alespoň ve speciálních případech) studovat.

Definice 6.6.1. Nechť funkce f je holomorfní v otevřené množině $G \subset \mathbb{C}$ s neprázdnou hranicí ∂G. Potom k bodu $\zeta \in \partial G$ může existovat okolí $U(\zeta)$ a funkce $f_1 \in H(G \cup U(\zeta))$ taková, že $f_1 = f$ na G, tj. f lze „rozšířit holomorfně“ na otevřenou množinu G_1, $G \subset G_1$, takovou, že $\zeta \in G_1$. Jestliže tento případ *nenastane*, nazýváme bod $\zeta \in \partial G$ **singulárním bodem** nebo kratčeji **singularitou** funkce f. Jestliže neexistuje žádná otevřená množina $G_1 \neq G$, $G \subset G_1$, a funkce g holomorfní v G_1 taková, že $g\,|\,G = f$, nazývá se hranice ∂G **přirozenou hranicí funkce** f.

Poznamenejme, že definice zobecňuje dříve uvedenou definici izolovaného singulárního bodu; ten je ve smyslu předchozí definice singulárním bodem (pokud neuvažujeme odstranitelné singularity).

Příklady 6.6.2. 1. Funkce $f(z) := (1-z)^{-1}$ má singulární bod 1. Je totiž $\lim_{z\to 1} = \infty$ a funkce holomorfní v bodě 1 by musela mít v bodě 1 *limitu v* $\mathbb{C}$. Součet geometrické řady $f_1(z) := \sum z^k$, který je definován pouze v $G = U(0,1)$, má na hranici ∂G jediný singulární bod 1.

2. Funkce $f(z) := (1+z^2)^{-1}$ má dva izolované singulární body $\zeta = \pm i$; její restrikce $f_1 := f\,|\,U(0,1)$, která je součtem mocninné řady $\sum (-1)^k z^{2k}$, má proto rovněž dva singulární body na jednotkové kružnici. Tyto příklady nás mohou vést k domněnce, že pro funkci, která je součtem mocninné řady v konvergenčním kruhu $U(z_0, R)$, $R \in \mathbb{R}_+$, leží na hranici $\partial U(z_0, R)$ vždy bod, v němž je limita vzhledem k $U(z_0, R)$ rovna ∞. Jak ukáže následující příklad, není tato domněnka správná.

3. Funkce $f(z) := \sum z^{k+1}/(k+1)^2$ je definována a je spojitá na $\overline{U(0,1)}$, přestože je poloměr konvergence řady opět roven 1. Jak se snadno ukáže, na hranici $\partial U(z_0, r)$ kruhu konvergence mocninné řady musí však vždy ležet *alespoň jeden* singulární bod jejího součtu; viz následující Věta 6.6.3.

Věta 6.6.3. *Nechť $f(z) := \sum a_k (z-z_0)^k$ v $U(z_0, R)$, kde $R \in \mathbb{R}_+$ je poloměr konvergence řady vpravo. Potom na hranici kruhu konvergence řady leží alespoň jeden singulární bod funkce f.*

Důkaz. Dokážeme, že pokud takový singulární bod na $K := \partial U(z_0, R)$ neexistuje, řada konverguje na $U(z_0, R_1)$ s $R_1 > R$ a R nemůže tedy být jejím poloměrem konvergence. Pišme zkráceně U místo $U(z_0, R)$. Nechť pro *každé* $\zeta \in K$ existuje okolí $U(\zeta)$ a funkce $f_\zeta \in H(U(\zeta))$ splývající s f na U. Tato okolí a funkce pevně zvolíme a položíme $G := U \cup \bigcup_{\zeta\in K} U(\zeta)$. Pro každý bod $z \in G \setminus U$ zvolíme ζ tak, že $z \in U(\zeta)$ a položíme $g(z) := f_\zeta(z)$; pro $z \in U$ definujeme $g(z) := f(z)$. Aby tato definice byla korektní, musíme ukázat, že pro $\zeta, \eta \in K$, pro něž existuje $z \in (U(\zeta) \cap U(\eta)) \setminus U$, je $f_\zeta(z) = f_\eta(z)$. V tom případě však existuje na úsečce $[\,\zeta;\eta\,]$ její část $M \subset U \cap U(\zeta) \cap U(\eta)$ tak, že $M' = M$ (všechny její body jsou hromadnými body M) a je

$$f_\zeta(w) = f(w) = f_\eta(w)\,, \quad w \in M\,.$$

Z Věty 5.7.1 o jednoznačnosti plyne $f_\zeta(w) = f_\eta(w)$ pro každý bod $w \in U(\zeta) \cap U(\eta)$ a tedy i $f_\zeta(z) = f_\eta(z)$. Funkce g je rozšířením funkce f na G a $g \in H(G)$. Dále $U \cup K \subset G$, a proto existuje $R_1 > R$ tak, že Taylorova řada pro g (a tedy i pro f) o středu z_0 konverguje všude v $U(z_0, R_1)$. □

Poznámka 6.6.4. Je-li f definována na otevřené množině G a je-li ∂G přirozenou hranicí funkce f, jsou všechny body ∂G singularitami f. Nabízí se přirozená otázka, zda je přirozená hranice vždy izolovanou podmnožinou $\mathbb{C}$ (jako např. u funkce tg nebo cotg), nebo může-li to být např. i celá hranice jednotkového kruhu G. V takovém případě bude funkce f součtem své Taylorovy řady o středu 0. Ukazuje se, že sestrojení takové funkce není složité. Konstrukci popisuje následující příklad.

Příklad 6.6.5. Uvažujme funkci f, definovanou v $U(0,1)$ mocninnou řadou

$$f(z) := \sum z^{2^k} = z + z^2 + z^4 + z^8 + \cdots\,.$$

Užijeme Cauchy-Hadamardův vzorec a zjistíme, že řada má poloměr konvergence $R = 1$. Zvolme $n \in \mathbb{N}$ a takové ζ, aby platilo $(\zeta)^{2^n} = 1$; těchto ζ je 2^n a jsou rozloženy na hranici $\partial U(0,1)$ tak, že tvoří vrcholy pravidelného 2^n-úhelníku. Pro každé $t \in (0,1)$ a pro všechna $k \in \mathbb{N}$, $k \geq n$, je $(t\zeta)^{2^k} = t^{2^k}$, takže řady pro $f(t\zeta)$ a pro $f(t)$ se liší *nejvýše v prvních n členech.*

Pro speciálně zvolenou posloupnost $t_j := (1/2)^{1/2^j}$, $j \in \mathbb{N}$, je $t_j \in (0,1)$, $t_j \to 1$, a přitom

$$f(t_j) > \sum_{k=0}^{j} (t_j)^{2^k} > (j+1)(t_j)^{2^j} = (j+1)(1/2) \to \infty\,.$$

Reálná funkce $f(t)$, $t \in (0,1)$, je rostoucí na intervalu $(0,1)$, proto odtud vyplývá $\lim_{t\to 1-} f(t) = \infty$; odtud dále plyne $\lim_{t\to 1-} |f(t\zeta)| = \infty$. Množina vrcholů všech pravidelných n-úhelníků o středu 0 s vrcholy na $\partial U(0,1)$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ tvoří hustou podmnožinu hranice $\partial U(0,1)$. Ukázali jsme tak, že v husté množině bodů ζ na jednotkové kružnici neexistuje konečná limita (vzhledem k úsečce $[\,0;\zeta\,]$) funkce f, takže všechny body jednotkové kružnice jsou singulární.

Historická poznámka 6.6.6. Věta 6.1.6 se vyskytuje u Louise Augustina Cauchyho (1789 – 1857) v práci z r. 1840. V ní se však Cauchy opírá o jiný přístup, založený na větě o průměru. Vzhledem k důležitosti věty jsme uvedli návody, jak ji dokázat jiným způsobem.

Pierre Alphonse Laurent (1813 – 1854) nebyl profesí matematik; jako armádní inženýr se podílel na stavbě přístavu v *Le Havru.* Objev řad ohlásil bez důkazu v krátké poznámce r. 1843; Cauchy o něm referoval tentýž rok. Je zajímavé, že původní Laurentova práce nebyla nikdy publikována; posmrtně byly publikovány Laurentovy úvahy včetně důkazu v jiném článku r. 1863 s komentářem, který napsal Joseph Liouville (1809 – 1882); současně byl publikován podrobný důkaz, který napsal za svého života Cauchy. Laurentovy řady byly známy i Weierstrassovi [4]). Někteří matematici jejich objev nepovažovali za závažný. Také u Leopolda Kroneckera (1823 – 1891) převládl názor, že Laurentovy řady jsou málo významným důsledkem Cauchyho vzorce z Věty 6.1.6, který nestojí za speciální označení jménem (o svém kolegovi Weierstrassovi se Kronecker vůbec v této souvislosti nezmiňuje). Na druhé straně např. Alfred Pringsheim (1850 – 1941) vyslovil již r. 1896 podiv nad tím, jak málo pozornosti Weierstrass tomuto svému rannému výsledku věnoval („*. . . bez Laurentových řad nemá elementární teorie funkcí žádný smysl.*“)

Charakteristiku odstranitelné izolované singularity pomocí omezenosti v prstencovém okolí singulárního bodu lze stopovat až k práci Georga Friedricha Bernharda Riemanna (1826 – 1866) z r. 1851 [5]). Termín *pól* zavedli r. 1875 Charles August Albert Briot (1817 – 1882) s Jeanem Clodem Bouquetem (1819 – 1885). Věta 6.4.6 prošla delším vývojem. Její původní verze charakterizuje podstatnou izolovanou singularitu z_0 funkce f jako bod, ve kterém neexistuje $\lim_{z\to z_0} f(z)$. Objevil ji Felice Casorati (1835 – 1890) r. 1868, později Carl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815 – 1897) dospěl nezávisle k tomuto výsledku r. 1876. Protože je toto tvrzení netriviálním jádrem Věty 6.4.6, užívá se pro ni zpravidla název *Casorati-Weierstrassova věta.* Větu také zcela nezávisle objevil Julian Vasiljevič Sochockij (1842 – 1927).

Tvrzení v bodu (3) Věty 6.4.6 lze zesílit. R. 1879 dokázal Charles Émile Picard (1856 – 1941) tzv. **velkou Picardovu větu**. Ta říká, že *je-li* $z_0 \in \mathbb{S}$ *podstatnou singularitou funkce* f*, existují taková* $r_0 \in \mathbb{R}_+$ *a* $w \in \mathbb{S}$*, že pro všechna prstencová okolí* $P(z_0, r)$*,* $0 < r < r_0$*, je* $f(P(z_0, r)) = \mathbb{C} \setminus \{w\}$*, kde tato jednobodová množina nezávisí na* r. Pro funkci $f(z) = \exp(1/z)$ je např. $w = 0$: $f(P(0, \rho))$ pro *všechna* $\rho \in \mathbb{R}_+$ neobsahuje 0. Pokud $w = \infty$, nabývá f v $P(z_0, r)$ *všech* hodnot z $\mathbb{C}$. K bližšímu seznámení s tímto tvrzením doporučujeme čtenáři hezký článek [7]; viz též [2].

Tvrzení o vztahu pólů a nulových bodů mají převážně technický charakter, jsou však velmi užitečná při výpočtech.

Další část kapitoly je krátkým pohledem na zajímavou problematiku rozšiřování holomorfních funkcí. Věta 6.6.3 ukazuje, že každá funkce definovaná jako součet mocninné řady v kruhu konvergence $U(0, R)$

$$f(z) := \sum a_k z^k \tag{6.20}$$

má na konvergenční kružnici alespoň jeden singulární bod. Vzniká otázka, zda lze všechny nebo alespoň jeden z nich určit z posloupnosti koeficientů $\{a_k\}$. Leon François

---

[4]) Jak se uvádí v [5], Weierstrass znal prokazatelně řady tohoto typu už v r. 1841, avšak jeho výsledek byl publikován až r. 1897; užíval pro ně termín *mocninné* řady.

[5]) Jde o Riemannovu dizertační práci.

Alfred Lecornu (1854 – 1940) publikoval r. 1887 článek, ve kterém se pokusil dokázat o řadě (6.20), že existence limity

$$\zeta := \lim_{k\to\infty} \left(a_k/a_{k+1}\right) \tag{6.21}$$

zaručuje, že součet f řady (6.20) má na hranici kruhu konvergence *jediný singulární bod* ζ. Obrácenou větu, tj. že existence *jediného* takového bodu ζ zaručuje rovnost (6.21), dokázali G. König r. 1876 a Gaston Darboux r. 1878. Lecornovo tvrzení vyvrátil Jacques Salomon Hadamard (1865 – 1963) pomocí řady

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Big(1 + \frac{(-1)^k}{k+1}\Big) z^k ,$$

jejíž součet $(1-z)^{-1} + \log(1+z)$ má na jednotkové kružnici *dva* singulární body ± 1; zároveň dokázal, že Lecornovu podmínku je třeba nahradit podmínkou

$$\limsup_{k\to\infty} \Big|\frac{a_k}{a_{k+1}} - \zeta\Big|^{1/k} < 1 .$$

Jako nejlepší bibliografický pramen, popisující život a matematické výsledky Hadamardovy, lze doporučit obsáhlou knihu [7].

Příklad 6.6.5 je jen jedním z mnoha možných. Kronecker i Weierstrass věděli z teorie tzv. modulárních funkcí, že jednotková kružnice $K(0,1)$ je hranicí funkce $1+2\sum_{k=1}^{\infty} z^{k^2}$. R. 1891 dokázal Eric Ivar Fredholm (1866 – 1927), že pro každou funkci

$$f(z) = \sum a^k z^{k^2} ,$$

kde $0 < |a| < 1$, je $K(0,1)$ opět hranicí f; v tomto případě řada konverguje všude v $M := U(0,1) \cup K(0,1)$ a součet f je „hladká“ funkce na M. Existuje mnoho dalších vylepšení tohoto výsledku, zmíníme se však o jediném. R. 1892 Hadamard dokázal toto tvrzení: *Nechť $\{\alpha_k\}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel a mocninná řada v definici funkce f*

$$f(z) := \sum a_k z^{\alpha_k}$$

má poloměr konvergence $R \in \mathbb{R}_+$. Jestliže pro nějaké $\delta \in \mathbb{R}_+$ platí pro všechna dostatečně velká $k \in \mathbb{N}$ nerovnost

$$\alpha_{k+1} - \alpha_k \geq \delta\alpha_k ,$$

pak je $K(0,R) := \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| = R\}$ přirozenou hranicí funkce f.

Jestliže má mocninná řada (6.20) poloměr konvergence $R = 1$, je množina singulárních bodů f uzavřená v $K := \partial U(0,1)$. Pokud je *vlastní* podmnožinou K, existuje bod $\zeta \in K$ a funkce $g \in H(U(\zeta,r))$ tak, že $g(z) = f(z)$ pro $z \in U(\zeta,r) \cap U(0,1)$. Funkci f lze rozšířit holomorfně na otevřenou množinu $G = U(\zeta,r) \cup U(0,1)$ a $U(0,1)$ je *vlastní* podmnožinou G. Tato věc stojí v pozadí Weierstrassovy teorie, založené na „pokračování pomocí mocninných řad“. Se speciálním případem této techniky jsme se setkali při konstrukci spojité větve logaritmu, kdy jsme pokrývali $\langle\varphi\rangle$ kruhy, na nichž byl logaritmus vyjádřen součtem mocninné řady. Podstatné je zde to, že „slepením“ konečně mnoha otevřených kruhů U_k, $k = 1,\ldots,n$, z nichž každé dva po sobě jdoucí mají neprázdný průnik a jejichž symetrický rozdíl $(U \setminus V) \cup (V \setminus U)$ je neprázdný, dostaneme prostředek pro rozšiřování holomorfní funkce f_1 z U_1 postupně hodnotami f_k na U_k až na f_n na U_n. Může se však stát, že $G := U_1 \cap U_n \neq \emptyset$ a přitom restrikce na G nesplývají, tj. $f_1|\,G \neq f_n|\,G$. Tudy vede cesta k tzv. *analytickým funkcím*, které umožňují korektní práci s již dříve zmíněnými „víceznačnými funkcemi".

Příklad 6.6.5 ukazuje, že je-li $G = U(0,1)$, existuje taková funkce $f \in H(G)$, pro kterou je ∂G její přirozenou hranicí; někdy se v tomto případě říká, že G je **množinou holomorfnosti** funkce f. Dá se nejenom dokázat, že *ke každé neprázdné otevřené množině $G \subset \mathbb{C}$ existuje $f \in H(G)$, jejíž přirozenou hranicí je ∂G*, ale že takových funkcí je v $H(G)$ v jistém smyslu *většina*: Pokud uvažujeme $H(G)$ s topologií lokálně stejnoměrné konvergence, tvoří množina těch funkcí f, pro které je ∂G přirozenou hranicí, reziduální množinu a množina „pokračovatelných f" je pouze množinou 1. kategorie v $H(G)$. Viz též např. [3], kde je podán přehled podobných výsledků.

Literatura:

[1] Burckel, R. B.: *An introduction to classical complex analysis, Vol. 1*, Birkhäuser, Basel, 1979.

[2] Černý, I.: *Analýza v komplexním oboru*, Academia, Praha, 1983.

[3] Netuka, I., Veselý, J.: *Sto let Baireovy věty o kategoriích*, Pokroky MFA **45** (2000), str. 232-256.

[4] Novák, B.: *Funkce komplexní proměnné pro učitelské studium MFF UK*, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1980.

[5] Remmert, R.: *Theory of complex functions*, Springer, New York, 1991, (překlad druhého vydání *Funktionenlehre I* z r. 1989; první vydání je z r. 1984 (Springer)).

[6] Maz'ya, V., Shaposhnikova, T.: *Jacques Hadamard, a universal mathematician*, Providence, Amer. Math. Society, 1998.

[7] Zalcman, L.: *Picard's theorem without tears*, Amer. Math. Monthly **85** (1978), str. 265-268.

Kapitola 7

Reziduová věta

7.1 Speciální množiny v $\mathbb{C}$

V této části dokážeme užitečná tvrzení o množinách izolovaných v otevřené množině $G \subset \mathbb{C}$; poslouží nám při zacházení s množinami izolovaných singulárních bodů funkcí. Připomeňme, že množina M je izolovaná množina v otevřené množině G, jestliže $M \subset G$ a ke každému bodu $x \in G$ existuje prstencové okolí $P(x) \subset G$ tak, že $M \cap P(x) = \emptyset$, tedy G neobsahuje žádný hromadný bod M.

Lemma 7.1.1. *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina a $M \subset G$ množina izolovaná v G. Potom je pro každou kompaktní množinu $K \subset G$ průnik $M \cap K$ konečná množina.*

Důkaz. Protože M je uzavřená a K kompaktní, je $M \cap K$ kompaktní. Pokud je $M \cap K$ nekonečná množina, vybereme z ní nekonečnou prostou posloupnost bodů $\{w_n\}$. Z této posloupnosti bodů lze vybrat posloupnost $\{w_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ konvergentní k nějakému bodu $w \in M \cap K \subset M$. Tento bod je hromadným bodem M v G, a tedy M není izolovaná v G. □

Lemma 7.1.2. *Nechť $M \subset G$ je množina izolovaná v otevřené množině $G \subset \mathbb{C}$. Potom je M spočetná množina.*

Důkaz. Je-li $G = \mathbb{C}$, definujme $K_k := \{z \in \mathbb{C};\ |z| \leq k\}$, $k \in \mathbb{N}$. Množiny K_k jsou zřejmě kompaktní. Dále je $\mathbb{C} = \bigcup_{k=1}^{\infty} K_k$ a $M \cap K_k$ jsou konečné množiny pro všechna $k \in \mathbb{N}$. Odtud vyplývá, že $M = \bigcup_{k=1}^{\infty}(M \cap K_k)$ je spočetná množina.

Čtenář si jistě povšiml, že jsme „vyčerpali“ $\mathbb{C}$ pomocí kompaktních množin K_k. To lze však udělat i pro obecnou otevřenou $G \subset \mathbb{C}$, $G \neq \mathbb{C}$. Stačí modifikovat definici K_k a pro $k \in \mathbb{N}$ definovat

$$K_k = \{z \in G;\ \operatorname{dist}(z, \mathbb{C} \setminus G) \geq 1/k\} \cap \{z \in \mathbb{C};\ |z| \leq k\}\,.$$

Vzhledem ke spojitosti funkce dist je prvá množina uzavřená a druhá kompaktní, takže K_k jsou kompaktní množiny a $\bigcup_{k=1}^{\infty} K_k = G$. Zbytek úvahy je již analogický jako v případě $G = \mathbb{C}$. $\square$

Poznámka 7.1.3. Z předcházejícího vyplývá, že je-li $\{w_n\}$ prostá (nekonečná) posloupnost bodů množiny M izolované v $\mathbb{C}$, je $\lim_{n\to\infty} w_n = \infty$. Naproti tomu množina M izolovaná v $\mathbb{S}$ je *konečná*: stačí uvážit, že $\mathbb{S}$ je kompaktní množina. Označíme-li M' množinu hromadných bodů množiny M, vyplývá z toho, že M je izolovaná v otevřené $G \subset \mathbb{C}$, právě když $M' \cap G = \emptyset$. Protože je též zřejmě $M' \subset M \cap G$, je M uzavřená v G a $G \setminus M$ je otevřená množina.

7.2 Reziduová věta

Čtenář by si měl opět připomenout Příklad 5.4.1, který ukazuje jistou výjimečnost případu $k = -1$ při integraci mocnin $(z - z_0)^k$. Jak víme, každou funkci f holomorfní v nějakém okolí $P(z_0)$ bodu $z_0 \in \mathbb{C}$ lze rozvést jediným způsobem v Laurentovu řadu o středu z_0.

Definice 7.2.1 (Cauchy 1826*). Je-li f holomorfní v jistém prstencovém okolí $P(z_0)$ bodu $z_0 \in \mathbb{C}$, nazýváme **reziduem funkce** f **v bodě** z_0 koeficient u mocniny $(z - z_0)^{-1}$ v Laurentově rozvoji funkce f v $P(z_0)$.

Je-li tedy

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k\,, \quad z \in P(z_0)\,,$$

je reziduum funkce f v bodě z_0 číslo a_{-1}; užíváme pro něj označení $\operatorname{res}(f, z)$, ev. i $\operatorname{res}(f(z), z)$. Je-li speciálně f holomorfní v okolí $U(z_0)$ bodu z_0, je $\operatorname{res}(f, z_0) = 0$.

Poznámka 7.2.2. Definice rezidua je korektní, protože Laurentův rozvoj funkce f v $P(z_0)$ je jediný; viz Věta 6.3.1. Čtenáře může překvapit letopočet, k němuž se zavedení vztahuje. Cauchy však poprvé zavedl reziduum pro *póly* vyšetřované funkce v souvislosti s integrací funkcí po Jordanově křivce neprocházející žádným pólem; jak víme, tento integrál již nemusí být roven 0, což dává při srovnání s Větou 5.2.4 tušit genezi užitého termínu „reziduum“.

Lemma 7.2.3. *Nechť funkce f je holomorfní v otevřené množině $G \subset \mathbb{C}$ všude až na konečnou množinu $M = \{z_1, \ldots, z_n\}$. Jsou-li H_j hlavní části Laurentových rozvojů funkce f v prstencových okolích $P(z_j)$, $j = 1, \ldots, n$, lze funkci*

$$g(z) = f(z) - \sum_{j=1}^{n} H_j(z)\,, \quad z \in G \setminus M \tag{7.1}$$

spojitě rozšířit na G a toto rozšíření je funkce holomorfní v množině G.

Důkaz. Tvrzení je téměř zřejmé, jestliže si uvědomíme některé skutečnosti. Předně všechny užité Laurentovy rozvoje funkce f o středech z_j konvergují lokálně stejnoměrně v jistých prstencích o středech z_j s „vnitřním poloměrem“ rovným 0, a proto jejich hlavní části

$$H_j(z) = \sum_{k=-\infty}^{-1} a_{jk}(z - z_j)^k\,, \qquad j = 1, \ldots, n \tag{7.2}$$

konvergují pro všechna $j = 1, \ldots, n$ lokálně stejnoměrně v $P(z_j, \infty)$, a tedy i na $G \setminus \{z_j\}$. Funkce H_j je tedy holomorfní v $G \setminus \{z_j\}$, $j = 1, \ldots, n$. Pomocí (6.14) spočteme koeficienty Laurentových rozvojů funkce g v bodech z_j a zjistíme, že mají hlavní části rovny 0; body množiny M jsou tedy odstranitelnými singularitami funkce g. Po spojitém rozšíření g na G je rozšířená g zřejmě holomorfní v G. □

Příklad 7.2.4. Předpokládejme, že $z_0 \in \mathbb{C}$ a že H je funkce holomorfní v $\mathbb{C}\setminus\{z_0\}$, pro kterou má Laurentův rozvoj v $P(z_0)$ nulovou regulární část, tj.

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{-1} a_k(z - z_0)^k\,, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}\,. \tag{7.3}$$

Je-li φ Jordanova křivka v $\mathbb{C}$ taková, že $z_0 \notin \langle\varphi\rangle$, je

$$\int_\varphi H(z)dz = 2\pi i\, a_{-1} \operatorname{ind}(\varphi, z_0)\,.$$

Řada v (7.3) konverguje lokálně stejnoměrně v $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ a tedy stejnoměrně na $\langle\varphi\rangle$. Proto lze zaměnit pořadí integrace a sčítání a tak dostaneme

$$\int_\varphi \Big(\sum_{k=-\infty}^{-1} a_k(z - z_0)^k \Big) dz = \sum_{k=-\infty}^{-1} \int_\varphi a_k(z - z_0)^k dz\,.$$

V řadě oddělíme členy, k jejichž integrandům existuje v $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ primitivní funkce: ty jsou podle Věty 3.4.3 rovny nule. Jediný zbývající člen ještě upravíme a dostaneme tak s přihlédnutím k definici rezidua

$$\int_\varphi H(z)dz = \int_\varphi \frac{a_{-1}dz}{z - z_0} = \operatorname{res}(H, z_0) \int_\varphi \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i \operatorname{res}(H, z_0) \operatorname{ind}(\varphi, z_0)\,.$$

Věta 7.2.5 (reziduová věta; Cauchy 1826). *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je přípustná oblast (viz Úmluvu 5.5.5). Nechť dále f je funkce holomorfní v G všude až na množinu M* izolovanou *v G. Je-li φ uzavřená křivka v $G \setminus M$, je*

$$\int_\varphi f(z)dz = 2\pi i \sum_{z\in M} \operatorname{ind}(\varphi, z) \operatorname{res}(f, z)\,, \tag{7.4}$$

přičemž v součtu vpravo je pouze konečný počet nenulových sčítanců. Speciálně, je-li φ kladně orientovaná Jordanova křivka, je

$$\int_\varphi f(z)dz = 2\pi i \sum_{z\in \operatorname{Int}\varphi \cap M} \operatorname{res}(f,z)\,. \tag{7.5}$$

Poznámka 7.2.6. Než budeme tvrzení dokazovat, připojíme několik objasňujících poznámek.

(1) V příkladech často vystačíme s „integrační křivkou“, jejíž geometrický obraz je sjednocením několika úseček a oblouků kružnic.

(2) Na $\langle\varphi\rangle$ je funkce f spojitá.

(3) Protože M je izolovaná v G a množina $\overline{\operatorname{Int}\varphi} \subset G$ je kompaktní, je množina $M \cap \operatorname{Int}\varphi$ konečná; v ostatních bodech $w \in M$ jsou rezidua $\operatorname{res}(f,w)$ v (7.4) rovna 0.

(4) Často je sama množina M konečná, jako např. v případě, že f je racionální funkce.

Důkaz Věty 7.2.5. Uzávěr $\operatorname{Int}\varphi$ je omezená uzavřená a tedy kompaktní množina. Označme G_1 takové jeho omezené okolí v G, pro něž $\overline{G_1} \subset G$. Potom je $L := M \cap \overline{G_1}$ konečná množina a $G_1 \subset \mathbb{C}$ je omezená oblast, v níž se anuluje integrál z každé holomorfní funkce po každé uzavřené křivce. Existuje tedy $n \in \mathbb{N}$, pro něž množina $L := \{z_j;\, j = 1,\dots,n\}$ obsahuje všechny izolované singularity funkce f ležící v G_1; viz Lemma 7.1.1. Označme tak jako v Lemmatu 7.2.3 pro $j = 1,\dots,n$ symboly H_j hlavní části Laurentových rozvojů f o středech $z_j \in L$ (v jistých prstencových okolích $P(z_j)$ s vnitřním poloměrem 0) a definujme jako v tomto lemmatu funkci g pomocí vzorce (7.1). Podle předpokladu je $\int_\varphi g = 0$, a proto je

$$\begin{aligned}
0 = \int_\varphi g(z)dz &= \int_\varphi f(z)dz - \sum_{j=1}^{n} \int_\varphi H_j(z)dz = \\
&= \int_\varphi f(z)dz - \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=-\infty}^{-1} \int_\varphi a_{jk}(z-z_j)^k dz = \\
&= \int_\varphi f(z)dz - 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \operatorname{ind}(\varphi, z_j)\, \operatorname{res}(f, z_j)\,,
\end{aligned}$$

což již dává (7.4). Poznamenejme, že záměna sumačního symbolu a integrálu je možná, stejně jako v Příkladu 7.2.4, protože řady, jejichž součty jsou funkce H_j, konvergují stejnoměrně na $\langle\varphi\rangle$. Výpočet se pak redukuje pro každé j na úvahu

$$\int_\varphi a_{jk}(z-z_j)^k dz = \begin{cases} 0\,, & \text{pro} \quad k = -2, -3, \dots\,, \\ 2\pi i\, a_{j;-1} \operatorname{ind}(\varphi, z_j)\,, & \text{pro} \quad k = -1\,, \end{cases}$$

kterou jsme již vícekrát dělali; viz Příklad 7.2.4 nebo důkaz Věty 6.3.1. □

7.3 Výpočet reziduí

Nyní popíšeme některé metody výpočtu reziduí. V konkrétních případech nebývá tento výpočet obtížný; existují postupy více či méně vhodné pro různé vyšetřované případy (viz např. [9]). Metody charakterizujeme heslovitými názvy.

(A) Laurentův rozvoj. Někdy snadno určíme *celý Laurentův rozvoj*: Např. je zřejmé, že funkce $f(z) = \exp(z)/z^4$ má v $\mathbb{C}$ jediný izolovaný singulární bod $z = 0$ a že

$$f(z) = z^{-4}\left(1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots\right) = \cdots + \frac{1}{6}z^{-1} + \cdots\,, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\,,$$

takže $\operatorname{res}(f, 0) = 1/6$. Ostatní koeficienty Laurentova rozvoje nepotřebujeme.

(B) Část Laurentova rozvoje. Často určujeme z rozvoje *pouze reziduum.* Jsou-li g a h funkce holomorfní v nějakém $P(w)$, je $f = gh$ rovněž holomorfní v $P(w)$ a Laurentův rozvoj f lze získat „násobením rozvojů". Protože řady v Laurentových rozvojích konvergují v každém bodě prstencového okolí $P(w)$ *absolutně*, lze řady přerovnávat. Rozhodující je spočítat koeficient tohoto rozvoje u mocniny $(z - w)^{-1}$. Např. pro $f(z) = \exp(z)\sin(1/z)$ a bod $w = 0$ tak dostaneme

$$\begin{aligned} f(z) &= \left(1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots\right)\left(z^{-1} - \frac{1}{3!}z^{-3} + \frac{1}{5!}z^{-5} - \cdots\right) = \\ &= \cdots + \left(1 - \frac{1}{2!3!} + \frac{1}{4!5!} - \cdots\right) z^{-1} + \cdots\,, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\,, \end{aligned}$$

a je tedy

$$\operatorname{res}(f, 0) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k)!(2k+1)!}\,.$$

Výpočet *všech koeficientů* hlavní části Laurentova rozvoje by byl pracnější než v předcházejícím případě.

(C) Jednoduchý pól. Jestliže funkce g je holomorfní v bodě $w \in \mathbb{C}$ a funkce h má v bodě w jednoduchý pól, je

$$\operatorname{res}(gh, w) = g(w) \operatorname{res}(h, w)\,.$$

To dostaneme snadno násobením Laurentových rozvojů o středu w v jistém $P(w)$

$$g(z) = g(w) + a_1(z - w) + \cdots\,, \quad h(z) = \frac{\operatorname{res}(h, w)}{z - w} + b_0 + b_1(z - w) + \cdots\,.$$

Speciálně, je-li funkce g holomorfní v bodě w, je

$$\operatorname{res}\Big(\frac{g(z)}{z-w}, w\Big) = g(w)\,.$$

(D) Jednoduchý nulový bod jmenovatele. V případě $f = g/h$, kde g, h jsou holomorfní v bodě w, přičemž h má v bodě w jednoduchý nulový bod, má $1/h$ v bodě w jednoduchý pól a z (C) vyplývá vzorec:

$$\operatorname{res}(f, w) = \frac{g(w)}{h'(w)}\,;$$

v tom případě je totiž $\operatorname{res}(1/h, w) = 1/h'(w)$.

Je-li např. $f(z) = \pi \operatorname{cotg}(\pi z) = \pi \cos(\pi z)/\sin(\pi z)$, má f v bodě 0 (a s ohledem na periodicitu v každém bodě $k \in \mathbb{Z}$) reziduum $\operatorname{res}(f, 0) = 1$, neboť $\pi\cos(\pi z)|_{z=0} = \pi$ a $\sin'(\pi z)|_{z=0} = \pi\cos(\pi z)|_{z=0} = \pi$. Odtud snadno plyne, že $\operatorname{res}(f, 0) = \operatorname{res}(f, k) = \pi/\pi = 1$, $k \in \mathbb{Z}$.

(E) Výpočet pomocí limity. Má-li funkce f v bodě $w \in \mathbb{C}$ pól násobnosti p, je

$$\operatorname{res}(f, w) = \frac{1}{(p-1)!} \lim_{z\to w} \big[(z-w)^p f(z)\big]^{(p-1)}\,. \tag{7.6}$$

Skutečně, v jistém prstencovém okolí $P(w)$ má f rozvoj

$$f(z) = \sum_{k=-p}^{\infty} a_k (z-w)^k\,.$$

Pak však je

$$f(z)(z-w)^p = \sum_{k=-p}^{\infty} a_k (z-w)^{k+p} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k-p}(z-w)^k\,,$$

takže

$$\big(f(z)(z-w)^p\big)^{(p-1)} = \sum_{k=p-1}^{\infty} a_{k-p}\, k(k-1)\cdots(k-p+2)(z-w)^{k-p+1}\,.$$

Odtud limitním přechodem pro $z \to w$ a záměnou pořadí limity a sčítání dostaneme vpravo $(p-1)!\,a_{-1}$, a tedy

$$\operatorname{res}(f, w) = a_{-1} = \frac{1}{(p-1)!} \lim_{z\to w} \big((z-w)^p f(z)\big)^{(p-1)}\,. \tag{7.7}$$

Je-li např. $f(z) = z^2/(z^2+1)^2$, má f v bodě $z_0 = i$ pól řádu 2, a proto

$$\operatorname{res}(f, i) = \lim_{z\to i}\Big(\frac{z^2}{(z+i)^2}\Big)' = \frac{2z(z+i)^2 - 2z^2(z+i)}{(z+i)^4}\Big|_{z=i} = \frac{4i^3}{16i^4} = -\frac{i}{4}\,.$$

Zde je na místě varování: výpočet podle této metody může být značně komplikovaný, a to např. tehdy, když po násobení faktorem $(z-w)^p$ nelze vhodně krátit (pokud vyjádření funkce f neobsahuje *explicitně faktor* $(z-w)^{-p}$). Pokud bychom měli určit $\operatorname{res}(f,\pi i)$, kde $f(z)=(\exp z+1)^{-2}$, má funkce f v bodě πi pól řádu $p=2$ a podle (E) bychom dostali

$$\begin{aligned}\operatorname{res}(f,\pi i) &= \lim_{z\to\pi i}\Big(\frac{(z-\pi i)^2}{(\mathrm{e}^z+1)^2}\Big)' = \lim_{z\to\pi i}\frac{2(z-\pi i)(\mathrm{e}^z+1)^2-2(z-\pi i)^2(e^z+1)\mathrm{e}^z}{(e^z+1)^4} = \\ &= \lim_{z\to\pi i}\frac{2(z-\pi i)(\mathrm{e}^z+1)-2(z-\pi i)^2\mathrm{e}^z}{(e^z+1)^3}\,.\end{aligned}$$

Nyní by nás čekalo trojnásobně opakované užití l'Hospitalova pravidla (a to jsme pracovali pouze s $p=2$). Lepší cestu ukazuje výpočet: za $\mathrm{e}^{\pi i}$ dosadíme do vzorce pro Taylorův rozvoj v bodě $w=\pi i$ a dostaneme

$$\mathrm{e}^z+1 = 0-\frac{(z-\pi i)}{1!}-\frac{(z-\pi i)^2}{2!}+\cdots = -(z-\pi i)\Big(1+\frac{(z-\pi i)}{2!}+\frac{(z-\pi i)^2}{3!}+\cdots\Big)\,,$$

z čehož vyplývá

$$\operatorname{res}(f,\pi i) = \lim_{z\to\pi i}\frac{(z-\pi i)^2}{(\mathrm{e}^z-1)^2} = \lim_{z\to\pi i}\Big(1+\frac{(z-\pi i)}{2!}+\frac{(z-\pi i)^2}{3!}+\cdots\Big)^{-2} = 1\,.$$

Příklad 7.3.1. V Kapitole 8 budeme pro sčítání řad mj. potřebovat rezidua funkcí $z\mapsto(\pi\operatorname{cotg}\pi z)/z^{2r}$ v bodě 0 pro přirozená čísla r. Pokud se omezíme jen na malá r, můžeme použít k určení rozvoje kotangenty „dělení rozvojů“. Je

$$\begin{aligned}&\operatorname{cotg} z=\cos z:\sin z = \\ &\quad=\Big(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\cdots\Big):\Big(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\cdots\Big) = z^{-1}-\frac{z^1}{3}-\frac{z^3}{45}-\cdots\,,\end{aligned}$$

přičemž postupujeme jako při dělení polynomů:

$$\begin{array}{l}\Big(1-\dfrac{z^2}{2}+\dfrac{z^4}{24}-\dfrac{z^6}{720}+\cdots\Big):\Big(z-\dfrac{z^3}{6}+\dfrac{z^5}{120}-\dfrac{z^7}{5040}+\cdots\Big)=\cdots\\ -\Big(1-\dfrac{z^2}{6}+\dfrac{z^4}{120}-\dfrac{z^6}{5040}+\cdots\Big)\\ \quad-\dfrac{z^2}{3}+\dfrac{z^4}{30}-\dfrac{z^6}{840}+\cdots\\ -\Big(-\dfrac{z^2}{3}+\dfrac{z^4}{18}-\dfrac{z^6}{360}+\cdots\Big)\\ \qquad-\dfrac{z^4}{45}+\dfrac{z^6}{630}-\cdots\end{array}$$

Při dostatečné trpělivosti (a statečnosti) tak lze obdržet část Laurentova rozvoje funkce $\operatorname{cotg} z$ v $P(0,\pi)$

$$\operatorname{cotg} z = z^{-1}-\frac{z^1}{3}-\frac{z^3}{45}-\frac{2z^5}{945}-\frac{z^7}{4725}-\frac{2z^9}{93555}-\cdots\,. \tag{7.8}$$

7.4 Výpočet integrálů pomocí reziduové věty

K ilustraci užití reziduové věty k výpočtu některých integrálů uvedeme *několik jednoduchých typových příkladů*; těchto možných typových příkladů je ovšem podstatně více. Metodami, založenými na užití reziduové věty, lze spočítat často jednodušeji hodnoty mnoha integrálů, které známe z teorie funkcí reálné proměnné; umíme tak např. určit hodnotu integrálu z funkce, ke které neumíme vyjádřit primitivní funkci pomocí „elementárních funkcí“. Podrobný systematický výklad lze opět nalézt v [9]. Abychom nemuseli v příkladech opakovat některé odhady, dokážeme nejprve následující tvrzení; s použitým „trikem“ jsme se již setkali v Příkladu 5.4.17.

Lemma 7.4.1 (Jordanovo lemma). *Nechť $r \in \mathbb{R}_+$, nechť $\varphi_r(t) = r\exp(it)$, $t \in [\,0,\pi\,]$, a nechť f je funkce spojitá na $P(\infty) \cap \{z \in \mathbb{C}\,;\, \operatorname{Im} z \geq 0\}$ taková, že pro $A(r) := \sup\{\,|f(re^{it})|\,;\, t \in [\,0,\pi\,]\}$ je $\lim_{r\to\infty} A(r) = 0$. Potom*

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{\varphi_r} f(z)\exp(iz)dz = 0\,. \tag{7.9}$$

Důkaz. Křivkový integrál vyjádříme podle definice

$$\int_{\varphi_r} f(z)\mathrm{e}^{iz}dz = \int_0^\pi f(r\mathrm{e}^{it})\exp(ir\mathrm{e}^{it})ir\mathrm{e}^{it}dt$$

a jeho absolutní hodnotu odhadneme; s využitím odhadu z Poznámky 4.7.1 dostaneme pro všechna dostatečně velká $r \in \mathbb{R}_+$ nerovnost

$$\Big|\int_{\varphi_r} f(z)\mathrm{e}^{iz}dz\Big| \leq r\,A(r)\int_0^\pi \mathrm{e}^{-r\sin t}dt\ .$$

Poslední integrál upravíme a s ohledem na $\sin t \geq 2t/\pi$ pro všechna $t \in [\,0,\pi/2\,]$ odhadneme

$$0 \leq \int_0^\pi \mathrm{e}^{-r\sin t}dt = 2\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-r\sin t}dt \leq 2\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-2rt/\pi}dt <$$
$$< 2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-2rt/\pi}dt = 2\cdot\frac{\pi}{2r}\,[-\exp(-2rt/\pi)]_0^\infty = \frac{\pi}{r}\,,$$

takže pro $r \to +\infty$ je s ohledem na $A(r) \to 0$ je

$$\Big|\int_{\varphi_r} f(z)\mathrm{e}^{iz}dz\Big| \leq rA(r)\frac{\pi}{r} = \pi A(r) \to 0\,.$$

Tím je důkaz vzorce (7.9) dokončen. □

Poznámka 7.4.2. Odhad z předcházejícího lemmatu lze použít např. pro racionální funkci $f = P/Q$, kde stupeň polynomu Q je větší než stupeň polynomu P; pak je ovšem $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$ a je tedy splněn předpoklad $A(r) \to 0$.

Příklad 7.4.3. Vypočteme hodnotu integrálu

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ix)}{x^2+1}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}\,dx + i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2+1}\,dx\ .$$

Snadno nahlédneme, že oba integrály vpravo existují např. jako Newtonovy integrály: integrujeme spojité funkce a v okolí nevlastních bodů $\pm\infty$ lze odhadnout např. $|\sin x|/(x^2+1) \le x^{-2}$. Jelikož je druhý integrál roven 0 (integrand je lichá funkce), poslouží nám následující výpočet k určení prvního z nich. Definujme pro každé $r \in \mathbb{R}_+$ křivku $\varphi = \varphi_1 \dotplus \varphi_2$ (viz Obr. 5.9; závislost na r u křivek φ_k již explicitně nevyznačujeme), kde

$$\varphi_1(t) = t\,, \quad t \in [-r, r]\,, \qquad \varphi_2(r) = re^{it}\,, \quad t \in [0, \pi]\,. \tag{7.10}$$

Funkce $f(z) = \exp(iz)/(z^2+1)$ je holomorfní v $\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$. Protože f má v bodě i jednoduchý pól, je podle (D)

$$\operatorname{res}(f, i) = \frac{e^{iz}}{2z}\Big|_{z=i} = \frac{e^{-1}}{2i}\,.$$

Pro každé $r > 1$ dostaneme podle reziduové věty rovnost

$$\int_{\varphi} f(z)dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{2ei}\,,$$

přičemž

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\varphi_1} f(z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}\,dx\ .$$

Podle předcházejícího Lemmatu 7.4.1 je

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{\varphi_2} f(z)dz = 0\,,$$

takže dostáváme

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{e}\,.$$

Poznámka 7.4.4. Předcházející příklad lze dále zobecnit. Nechť funkce R je racionální funkce, která nemá póly v $\mathbb{R}$ a která nabývá na $\mathbb{R}$ pouze reálných hodnot. Je tedy holomorfní na množině $D := \{z \in \mathbb{C};\ \operatorname{Im} z \ge 0\}$ s výjimkou konečné množiny M ležící *uvnitř* D. Předpokládejme dále, že $\lim_{z\to\infty} R(z) = 0$. Volíme křivku $\varphi = \varphi_1 \dotplus \varphi_2$ stejně jako v (7.10) a předpokládáme, že pro všechny body $w \in M$ je $|w| < r$. Potom podle reziduové věty pro každé takové $r \in \mathbb{R}_+$ dostaneme

$$I := \int_{\varphi} R(z)e^{iz}dz = 2\pi i \sum_{w\in M} \operatorname{res}\left(R(z)\,e^{iz}, w\right).$$

Limitním přechodem pro $r \to +\infty$ odtud dostaneme

$$(\mathcal{N})\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,\mathrm{e}^{ix}\,dx = 2\pi i \sum_{w\in M} \operatorname{res}\left(R(z)\,\mathrm{e}^{iz}, w\right), \tag{7.11}$$

neboť limita integrálu vzhledem k φ_1 je pro $r \to \infty$ zřejmě rovna hodnotě na levé straně rovnice (7.11), zatímco limita integrálu přes φ_2 je podle Lemmatu 7.4.1 rovna 0.

Příklad 7.4.5. Pro $a \in \mathbb{R}_+$ zřejmě platí rovnost

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(a^2+x^2)^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(a^2+x^2)^2}\,dx\,, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{(a^2+x^2)^2}\,dx = 0\,;$$

hodnotu I určíme integrací funkce $f(z) = \exp(iz)/(a^2+z^2)^2$ s dvojnásobnými póly v bodech $\pm ai$, a to opět podél křivky φ z (7.10). Využijeme-li (E) k výpočtu rezidua, je

$$2\pi i \operatorname{res}(f, ai) = 2\pi i \lim_{z\to ai} \frac{\mathrm{e}^{iz}(z-ai)^2}{(z^2+a^2)^2} = 2\pi i \lim_{z\to ai} \Big(\frac{\mathrm{e}^{iz}}{(z+ai)^2}\Big)' =$$
$$= 2\pi i \lim_{z\to ai} \frac{\mathrm{e}^{iz}}{(z+ai)^4}\big(i(z+ai)^2 - 2(z+ai)\big) = \pi \frac{\mathrm{e}^{-a}}{2a^3}\,(a+1)\,.$$

Podle Poznámky 7.4.4 tak dostaneme $I = \pi\mathrm{e}^{-a}(a+1)/4a^3$.

Poznámka 7.4.6. Pro seznámení s principy výpočtů podle reziduové věty jsme zatím použili jediný typ křivek, ty však mohou být v jiných případech rozmanitější. Čtenář jistě tuší, že při absenci faktoru $\exp(iz)$ je nutno metodu popsanou v Poznámce 7.4.4 modifikovat. Nechť R je racionální funkce, $R = P/Q$, kde P, Q jsou polynomy s reálnými koeficienty takové, že stupeň Q je alespoň o 2 větší než stupeň P a Q nemá kořeny na reálné ose. Nechť M je množina všech kořenů polynomu Q, které mají *kladnou* imaginární část. Pak se snadno dokáže vzorec

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx = \lim_{r\to\infty} \int_{\varphi} R(z)dz = 2\pi i \sum_{w\in M} \operatorname{res}(R, w)\,,$$

kde φ je popsána stejně jako v (7.10). Pro důkaz je podstatné, že existují taková $K > 0$ a $P(\infty)$, že v $P(\infty)$ platí odhad $|z^2R(z)| \le K$. Pak totiž pro dostatečně velká $r \in \mathbb{R}_+$ lze provést následující odhad a pro $r \to \infty$ dostaneme

$$\Big|\int_0^{\pi} R(r\mathrm{e}^{it})ri\mathrm{e}^{it}\,dt\Big| \le \pi r\frac{K}{r^2} = \frac{\pi K}{r} \to 0\,.$$

Příklad 7.4.7. Pro $f(z) = (z^4+1)^{-1}$ je podle předcházející poznámky

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} = 2\pi i(\operatorname{res}(f, z_1) + \operatorname{res}(f, z_2))\,,$$

kde $z_1 = (1+i)/\sqrt{2}$ a $z_2 = (-1+i)/\sqrt{2}$. Rezidua určíme poměrně snadno, neboť jmenovatel má v uvažovaných bodech jednoduché nulové body. Užijeme metodu (D) a vypočteme hodnoty $1/(z^4+1)' = 1/4z^3 = z/4z^4$ v bodech z_1, z_2. Tak dostaneme

$$\frac{z}{4z^4}\bigg|_{z=z_1} = \frac{\sqrt{2}(1+i)}{-8}\,, \qquad \frac{z}{4z^4}\bigg|_{z=z_2} = \frac{\sqrt{2}(-1+i)}{-8}\,,$$

z čehož plyne, že $I = 2\pi i\sqrt{2}(-i)/4 = \pi/\sqrt{2}$. Doporučujeme čtenáři porovnat výpočet s Příkladem 8.3.12 z [$\mathbb{V}$], kde se určuje primitivní funkce k f.

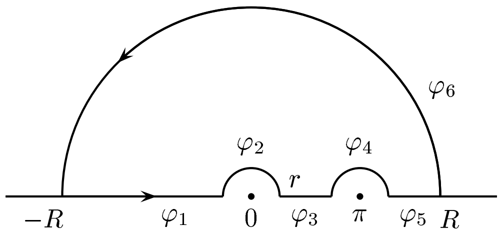
Příklad 7.4.8. V Poznámce 7.4.4 jsme předpokládali, že funkce R nemá póly na $\mathbb{R}$, avšak i případě, že R má póly v $\mathbb{R}$, může integrál z R na intervalu $(-\infty, \infty)$ existovat a lze ho již popsanou metodou *po drobné modifikaci* spočítat. Jde o integrály tvaru

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\cos x\,dx\,, \quad \text{nebo} \quad \int_{-\infty}^{\infty} R(x)\sin x\,dx\,.$$

Aby však takový integrál existoval, musí mít funkce R pouze *jednoduché* póly a tyto navíc musí ležet v množině nulových bodů druhého faktoru integrandu. Vždy však z integrálů $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\cos x\,dx$ a $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\sin x\,dx$ existuje jen jeden. Speciální příklad tohoto typu jsme již spočetli v Příkladu 5.4.17. Podáme návod k řešení dalšího podobného příkladu: ukážeme, jak lze spočítat

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x\,dx}{x(x-\pi)} = -2\,.$$

Dosud užívanou křivku (hranici půlkruhu) nahradíme křivkou znázorněnou na Obr. 7.1. Vyjádříme ji ve tvaru $\varphi = \varphi_1 \dotplus \varphi_2 \dotplus \varphi_3 \dotplus \varphi_4 \dotplus \varphi_5 \dotplus \varphi_6$.



Obr. 7.1: Křivka pro výpočet integrálu z Příkladu 7.4.8

Poznamenejme, že integrand lze spojitě rozšířit do bodů $z = 0$ a $z = \pi$, takže vyšetřovaný integrál zřejmě existuje. Pro křivku φ s $R > \pi$, $r \in (0, \pi/2)$ a funkci $f(z) = \mathrm{e}^{iz}/z(z-\pi)$ je $\int_\varphi f(z)dz = 0$. Poznamenejme, že f však má v bodech 0 a π póly. Limity integrálů přes φ_2 a φ_4 spočteme přímo z definice křivkového integrálu. Snadno lze též dokázat, že jsou rovny $-\pi i \cdot \operatorname{res}(f, w)$ pro $w = 0$ a $w = \pi$; póly funkce f v těchto bodech jsou jednoduché a tak snadno spočteme

$$\operatorname{res}(f, 0) = -1/\pi\,, \quad \operatorname{res}(f, \pi) = -1/\pi\,.$$

Pro imaginární části obou stran rovnosti $\int_\varphi f = 0$ dostaneme po limitním přechodu pro $R \to \infty$ a $r \to 0_+$ hledaný výsledek $I = \operatorname{Im}(\pi i(-2/\pi)) = -2$.

Příklad 7.4.9 (důležitý). Jako ilustraci použití jiné křivky uvažujme případ funkce „racionální v sinu a kosinu". Nechť $R(x,y) = P(x,y)/Q(x,y)$, kde P, Q jsou reálné polynomy v proměnných x a y. Dále předpokládáme, že pro žádný bod $[\,x,y\,]$, pro který $x^2+y^2=1$, není $Q(x,y)=0$. Potom je funkce $R(\sin t, \cos t)$, $t \in \mathbb{R}$, spojitá a existuje integrál

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\,dt \ ;$$

jeho hodnotu lze spočítat takto: snadno nahlédneme, že pro $z = \exp(it)$ je

$$\cos t = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \quad \sin t = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right),$$

a proto pro $\varphi(t) = \mathrm{e}^{it}$, $t \in [\,0, 2\pi\,]$, je podle definice integrálu vpravo v následující rovnosti

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\,dt = \frac{1}{i}\int_\varphi R\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)\frac{dz}{z},$$

přičemž integrand posledního integrálu je nějaká racionální funkce $\widetilde{R}(z)$, která nemá póly na $\langle\varphi\rangle$; proto lze k výpočtu užít reziduovou větu, pokud umíme určit všechna rezidua funkce $\widetilde{R}$, ležící v $\operatorname{Int}(\varphi)$.

Příklad 7.4.10. Klasickým příkladem výpočtu integrálu typu, který jsme popsali v předcházejícím Příkladu 7.4.9, je integrál ($|a| \neq 1$)

$$I := \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 - 2a\cos t + 1} = \frac{1}{i}\int_\varphi \frac{dz}{(1-az)(z-a)},$$

v němž $a \neq \pm 1$ je *reálné* číslo. Pro $a = 0$ je výsledek $I = 2\pi$ zřejmý. Jestliže je $a \neq 0$, má funkce $f(z) = [(1-az)(z-a)]^{-1}$ jednoduché póly v bodech a, $1/a$, přičemž

$$\operatorname{res}(f,a) = \frac{1}{1-a^2}, \quad \operatorname{res}(f,1/a) = \frac{1}{a^2-1}.$$

Uvážíme, že pro $|a| < 1$ je $a \in \operatorname{Int}\varphi$ a pro $|a| > 1$ je $1/a \in \operatorname{Int}\varphi$; hodnoty reziduí se liší pouze znaménkem. Proto dostáváme $I = 2\pi\operatorname{sgn}(|a|-1)/(a^2-1)$.

Při integraci výrazů obsahujících obecnou mocninu nebo logaritmickou funkci je třeba jisté opatrnosti; pracujeme přitom s vhodnou spojitou větví logaritmu. Zde je ilustrativní příklad:

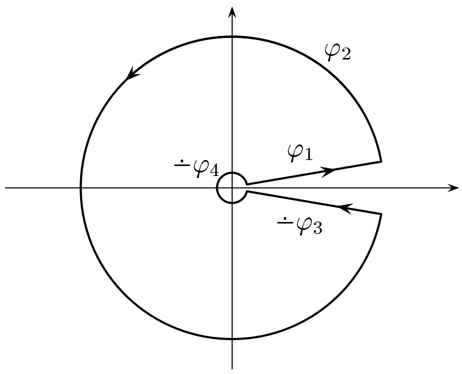
Příklad 7.4.11. Dokažme, že pro každé $a \in (0,1)$ je

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{x+1} = \frac{\pi}{\sin a\pi}\,. \tag{7.12}$$

Integrovaná funkce je spojitá v intervalu $(0,\infty)$. V jeho krajních bodech je srovnatelná s funkcemi x^{a-1} („u 0“) a x^{a-2} („u nekonečna“); hledaný integrál tedy existuje a je konečný. Budeme integrovat funkci

$$f(z) = \frac{\mathrm{e}^{(a-1)\log^* z}}{z+1}\,,$$

kde $\log^*$ je spojitá větev logaritmu s imaginární částí z intervalu $(\,0, 2\pi)$. Integro-



Obr. 7.2: Tvar křivky užité v Příkladu 7.4.11

vaná funkce je holomorfní v $\mathbb{C} \setminus [\,0,\infty)$ s výjimkou bodu $z = -1$. Křivka, podél které budeme integrovat, je $\varphi = \varphi_1 \dot{+} \varphi_2 \dot{-} \varphi_3 \dot{-} \varphi_4$, kde křivky φ_k jsou pro $\varepsilon \in (0, \pi/4)$ a $0 < r < 1 < R < \infty$ definovány předpisy

$$\begin{aligned} &\varphi_1(t) = t\mathrm{e}^{i\varepsilon}\,, \quad \varphi_3(t) = t\mathrm{e}^{-i\varepsilon}\,, \quad t \in [\,r, R\,]\,,\\ &\varphi_2(t) = R\mathrm{e}^{it}\,, \quad \varphi_4(t) = r\mathrm{e}^{-it}\,, \quad t \in [\,\varepsilon, 2\pi - \varepsilon\,]\,, \end{aligned}$$

Tvar křivky φ přibližuje Obr. 7.2. Podle reziduové věty pak je

$$\int_\varphi f(z)dz \, = 2\pi i \operatorname{res}(f, -1)\,.$$

Tak jako v předcházejících příkladech provedeme ještě limitní přechod pro $r \to 0+$ a $R \to \infty$. Integrály přes oblouky kružnic přitom odhadujeme takto: Pro $R \to \infty$ je pro všechna $\varepsilon \in [\,0, \pi/4)$

$$\Big| \int_{\varphi_2} f(z)dz \Big| \le 2\pi R \cdot R^{a-1} \sup\Big\{ \Big|\frac{1}{1+z}\Big|;\ |z| = R \Big\} \le \frac{2\pi R^a}{R-1} \to 0\,,$$

a podobně pro $r \to 0+$ platí pro všechna $\varepsilon \in [\,0, \pi/4)$

$$\Big| \int_{\varphi_4} f(z)dz \Big| \leq 2\pi r^a \sup\Big\{ \Big|\frac{1}{1+z}\Big|;\ |z| = r \Big\} \leq \frac{2\pi r^a}{1-r} \to 0\,;$$

připomeňme, že je $a \in (0,1)$. Dále je

$$\log^* \varphi_1(t) = \log t + i\varepsilon\,, \quad \log^* \varphi_3(t) = \log t + i(2\pi - \varepsilon)\,,$$

takže platí

$$\lim_{\varepsilon \to 0_+} \int_{\varphi_1} f(z)dz = \int_r^R \frac{x^{a-1}dx}{1+x}\,, \quad \lim_{\varepsilon \to 0_+} \int_{\varphi_3} f(z)dz = \mathrm{e}^{2\pi i(a-1)} \int_r^R \frac{x^{a-1}dx}{1+x}\,,$$

z čehož pomocí limitních přechodů pro $r \to 0_+$ a $R \to \infty$ dostaneme

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{1+x} = \frac{2\pi i \operatorname{res}(f,-1)}{1-\mathrm{e}^{2\pi i a}} = \frac{2\pi i \mathrm{e}^{-\pi i a}}{\mathrm{e}^{-\pi i a} - \mathrm{e}^{\pi i a}} \operatorname{res}(f,-1)\,.$$

Integrovaná funkce f má v bodě -1 jednoduchý pól. Podle (C) snadno spočteme

$$\operatorname{res}(f,-1) = \mathrm{e}^{(a-1)\log^*(-1)} = \mathrm{e}^{\pi i(a-1)} = -\mathrm{e}^{\pi i a}\,,$$

z čehož obdržíme dokazovanou rovnost (7.12). Poznamenejme, že k odhadu integrálů podél φ_1, φ_3 lze užít i substituci.

Na závěr této partie uvedeme několik poznámek:

Poznámka 7.4.12. Postup popsaný v předcházejícím Příkladu 7.4.11 lze užít pro případ libovolné racionální funkce $R(x)$ na místě $1/(1+x)$, pokud platí analogicky

$$\Big| \int_{\varphi_2} R(z)z^{a-1}dz \Big| \to 0\,, \quad \Big| \int_{\varphi_4} R(z)z^{a-1}dz \Big| \to 0\,.$$

Lze tak počítat i integrály s jinými hodnotami parametru a, $a \notin \mathbb{Z}$. Tudy vede i cesta k výpočtu integrálů typu

$$\int_0^\infty R(x)dx\,, \quad \int_{-\infty}^0 R(x)dx = \int_0^\infty R(-x)dx$$

s racionální funkcí R, pokud tyto integrály konvergují. Čtenáře odkazujeme např. na [6] a [3].

Poznámka 7.4.13. Shrňme kroky, podle nichž zpravidla při výpočtech integrálů pomocí reziduové věty postupujeme. Zahrnují: (1) pokud je to nutné, vyšetření existence zkoumaného integrálu, existenci integrálu však často zaručuje sama použitá metoda, (2) volbu vhodné funkce, kterou budeme integrovat, (3) volbu vhodné křivky, podél níž budeme integrovat, případně (4) odhady některých integrálů a (5) výpočet potřebných reziduí. Pokud chce čtenář získat větší praxi v užívání metod tohoto typu, doporučujeme mu např. [9], [6], [3] nebo některou specializovanou sbírku příkladů z teorie funkcí komplexní proměnné, např. [16], [4] nebo [9]. K dalším aplikacím reziduové věty se ještě vrátíme.

Historická poznámka 7.4.14. První část kapitoly má obecný charakter a obsahuje tvrzení, která nejsou specifická pro teorii funkcí komplexní proměnné. Jde o tvrzení z topologie roviny, doplňující látku tradičně přednášenou v kontextu metrických prostorů.

Výpočet hodnot integrálů byl pro LOUISE AUGUSTINA CAUCHYHO (1789 – 1857) prvotním motivem pro studium problematiky funkcí komplexní proměnné. V jistém smyslu sahají počátky výpočtu reziduí až ke Cauchyho práci z r. 1814. Reziduum bylo nejprve chápáno jako (nenulová) hodnota integrálu komplexní funkce komplexní proměnné, souvislost s integrálem po uzavřené křivce a se singularitami funkce byla objevována postupně v průběhu vývoje teorie; viz [7].

Cesta k dnešní formě reziduové věty začínala sice výpočtem jednotlivých integrálů, ale počátky *teorie* nalézáme teprve v Cauchyho práci z r. 1826. V ní je reziduum definováno v pólech vcelku stejným způsobem jako v Definici 7.2.1. V této práci Cauchy slibuje využití v mnoha aplikacích, např. pro rozklad racionální funkce, Lagrangeův interpolační vzorec, řešení lineárních diferenciálních a diferenčních rovnic apod. Pro součet reziduí vzhledem k odpovídající množině pólů zavádí název *integrální reziduum.* Zabývá se také metodami výpočtu reziduí. Poznamenejme, že obdobu tvrzení z Lemmatu 7.2.3 dokázal Cauchy již dříve r. 1825.

Je zajímavé, že v práci z r. 1827 se Cauchy zmiňuje poprvé o článku LEONHARDA EULERA (1707 – 1783) z r. 1775. V něm zavádí Euler pojem ekvivalentní reziduu pro *jednoduché póly.* Uvádí se, že na tento pramen Cauchyho patrně upozornil SYLVESTRE-FRANÇOIS LACROIX (1765 – 1843). Teprve o dva roky později, r. 1829, Cauchy poprvé pracuje s *podstatnou singularitou.* V té době se přibližuje velmi blízko problematice, kterou se budeme zabývat v Kapitole 8.

Cauchy dosáhl v období po r. 1825 výrazného pokroku mj. v metodách výpočtu integrálů a určování součtů řad. Pro nás je zajímavé, že v této době využívá výhod polárních souřadnic a že teprve v této době objevuje význam studia integrálů vzhledem k *uzavřeným* křivkám.

Metody výpočtu reziduí nemají standardní názvy a do jisté míry se překrývají. Bylo by chybou se domnívat, že existuje spolehlivý návod, kterou metodu výpočtu si vybrat jako optimální pro daný příklad; zde je patrně nejlepší snažit se získat určitou praxi samostatným počítáním příkladů z vhodné sbírky. Viz např. [4] nebo [9]. Mnoho příkladů lze nalézt i v [2] a [3].

Není bez zajímavosti, že Cauchy prožil nemalou část svého života v exilu v Praze (1833 – 1838) jako vychovatel a učitel syna Karla X. Byl (zahraničním) členem *Královské české společnosti nauk* a ta vydala dvě Cauchyho práce (1835, 1836). Publikoval výsledky často několikrát s různými vylepšeními. Tak např. první výsledky o integrálech s reálnými mezemi jsou z r. 1814, pak r. 1817 pracoval s integrály komplexních funkcí (s reálnými mezemi) a asi od r. 1825 s integrály komplexních funkcí vzhledem ke speciálním křivkám. Po integraci vzhledem ke kružnicím r. 1827 přešel teprve r. 1831 k integraci vzhledem k Jordanovým křivkám. Význam Cauchy-Riemannových podmínek pro diferencovatelnost si plně uvědomil až r. 1851, tedy v roce vydání Riemannovy disertace. Detailnější rozbor Cauchyho výsledků lze nalézt v [8].

Ještě poznámka ke způsobu psaní: Česká verze názvu pro *reziduum* vznikla (rozumně) počeštěním, nikoli překladem; užíváme však stále označení $\operatorname{res}(f, z_0)$ se „s“, nikoli $\operatorname{rez}(f, z_0)$.

Literatura:

[1] Brzezina, M., Netuka, I.: *Vybrané kapitoly z matematické analýzy; příklady z analýzy v komplexním oboru*, MÚ UK MFF, Praha, 1988.

[2] Černý, I.: *Analýza v komplexním oboru*, Academia, Praha, 1983.

[3] Černý, I.: *Foundations of Analysis in the Complex Domain*, Academia, Praha, 1992.

[4] Jevgrafov, M. A. a kol.: *Sbírka úloh z teorie funkcí komplexní proměnné*, SNTL, Praha, 1976, (originál vyšel pod názvem *Sbornik zadač po těorii analitičeskich funkcij*, Nauka, Moskva 1969).

[5] Kopáček, J.: *Matematika pro fyziky V.*, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1990.

[6] Novák, B.: *Funkce komplexní proměnné pro učitelské studium MFF UK*, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1980.

[7] Osgood, W. F.: *Allgemeine Theorie der analytischen Funktionen a) einer und b) mehrerer komplexen Größen*, obsaženo v: *Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften,* Band II., 2. Teil, 1. Heft, B. G. Teubner, Leipzig, 1899 – 1916.

[8] Smithies, F.: *Cauchy and the creation of complex function theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[9] Volkovskij, L. I., Lunc, G. L., Aramanovič, I. G.: *Sbornik zadač po těorii funkcij kompleksnogo pereměnogo*, Nauka, Moskva, 1970.

Kapitola 8

Meromorfní a celé funkce

V této kapitole se seznámíme s dalšími vlastnostmi funkcí komplexní proměnné. Tvrzení, která dokážeme, mají dlouhou historii a jsou velmi důležitá: umožní nám hlubší poznání základních tříd funkcí, které zobecňují polynomy a racionální funkce. Množina všech funkcí meromorfních v oblasti $G \subset \mathbb{S}$ tvoří velmi výhodnou strukturu. Její prvky lze nejen sčítat, odčítat a násobit, ale vcelku jednoduše i dělit. S tím souvisí jak použitá definice, tak i jisté licence. Seznámíme se také se zobecněním věty o rozkladu polynomu na kořenové činitele.

S funkcemi z množiny $M(G)$ všech meromorfních funkcí na otevřené množině $G \subset \mathbb{S}$ je výhodné pracovat v $\mathbb{S}$ a zkoumat je jako zobrazení z $\mathbb{S}$ do $\mathbb{S}$. Proto *v této kapitole funkce nemusí být konečná* a *je spojitá v bodě $z_0 \in \mathbb{S}$ v případě, že $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$, tj. i při $f(z_0) = \infty$*; pracujeme tedy se spojitostí v rozšířeném smyslu.

8.1 Meromorfní funkce

Definice 8.1.1. Nechť $G \subset \mathbb{S}$ je otevřená množina. Budeme říkat, že $f\colon G \to \mathbb{S}$ je **funkce meromorfní v** G, jestliže f je spojité zobrazení G do $\mathbb{S}$ a existuje množina $P(f)$ izolovaná v G tak, že f je holomorfní v $G \setminus P(f)$ a má *pól* v každém bodě množiny $P(f)$ [1]).

Poznámky 8.1.2. 1. Každá funkce f holomorfní v G je současně funkcí meromorfní v G, pro kterou je množina všech pólů $P(f)$ prázdná, tj. $H(G) \subset M(G)$.

2. Připomínáme, že operace s funkcemi chápeme „bodově“, a tak podle uzavřených úmluv nemusí být pro $f, g \in M(G)$ hodnoty funkcí

$$f \pm g\,, \quad fg\,, \quad f/g\,, \tag{8.1}$$

[1]) Název meromorfní funkce opět zavedli, tak jako u holomorfních funkcí, Charles August Albert Briot (1817 – 1882) spolu s Jeanem Clodem Bouquetem (1819 – 1885) již r. 1875.

pro *některá* $w \in G$ definovány. Součet není definován v bodech $w \in G$, pro něž je $f(w) = g(w) = \infty$; množina $P(f) \cup P(g)$ je však izolovaná v G. Součin není definován na množině těch bodů $w \in G$, v nichž $\{f(w), g(w)\} = \{0, \infty\}$, což je opět izolovaná množina. Podíl není definován v bodech w, v nichž je buď $f(w) = g(w) = \infty$, nebo $f(w) = g(w) = 0$; první množina je zřejmě opět izolovaná v G, druhá je izolovaná podle Věty 5.7.1 o jednoznačnosti, pokud g není v žádné komponentě množiny G identicky rovna 0; to však *v dalším všude předpokládáme.*

Ve všech uvedených případech takové body w tvoří pouze izolovanou množinu $D \subset G$ a pro všechna $w \in D$ existuje $\lim_{z \to w} f(z)$ v $\mathbb{S}$. Touto limitou se funkce (8.1) definují pro všechna $w \in G$, v nichž „bodová" definice selhává. Zároveň vidíme, že není podstatné, omezíme-li se v dalším pouze na oblasti G. Ve smyslu této vysvětlující poznámky tvoří systém $M(G)$ všech funkcí meromorfních v oblasti G těleso.

Definice 8.1.3. Prvky $M(\mathbb{C})$ budeme nazývat krátce **meromorfní funkce**; připomeňme, že **celá funkce** je funkce holomorfní v $\mathbb{C}$.

Věta 8.1.4. (A) *Je-li f nekonstantní funkce meromorfní v oblasti G a je-li g meromorfní v oblasti D obsahující $f(G)$, je funkce $g \circ f$ meromorfní v G.*

(B) *Je-li funkce f meromorfní v oblasti G a je-li g holomorfní v oblasti D obsahující $f(G)$, je funkce $g \circ f$ holomorfní v G.*

Důkaz. Funkce $g \circ f$ je složením dvou spojitých funkcí a je proto spojitá; nemůže proto mít podstatné singularity a tak stačí ukázat, že ke každému bodu $z_0 \in G$ existuje $P(z_0, \delta)$, v němž je $g \circ f$ holomorfní.

Protože g je meromorfní v $f(z_0)$, je *holomorfní* v nějakém $P(f(z_0), \varepsilon)$. Ze spojitosti f v bodě z_0 nalezneme $U(z_0, \delta)$ tak, že $f(U(z_0, \delta)) \subset U(f(z_0), \varepsilon))$. Eventuálním zmenšením δ dosáhneme toho, že f je holomorfní v $P(z_0, \delta)$ a nenabývá v této množině hodnoty $f(z_0)$. Pak však je $f(P(z_0, \delta)) \subset P(f(z_0), \varepsilon)$ a $g \circ f$ je funkce holomorfní v $P(z_0, \delta)$.

Předpoklady v části (B) zaručují konečnost $g \circ f$. Pro konstantní f je $g \circ f$ konstantní, pro nekonstantní užijeme dokázané části (A). $\square$

Příklady 8.1.5. 1. Funkce meromorfní v $\mathbb{S}$, pro které je $P(f) = \emptyset$, tedy funkce holomorfní v $\mathbb{S}$, jsou podle Liouvillovy věty konstantní v $\mathbb{S}$, neboť jsou v $\mathbb{S}$ spojité a tedy i omezené. Polynomy stupně alespoň 1 jsou celé funkce, které jsou meromorfní v $\mathbb{S}$ a pro které je $P(f) = \{\infty\}$.

2. Má-li Taylorův rozvoj *celé funkce* f v bodě 0 nekonečně mnoho nenulových koeficientů, je f holomorfní (a meromorfní) v $\mathbb{C}$, avšak f *není* meromorfní v $\mathbb{S}$, protože bod ∞ je pak podstatnou singularitou f; srv. s Definicí 6.4.7. Rozlišujeme, kdy má funkce v Taylorově rozvoji o středu 0 jen konečný počet nenulových koeficientů (pak je to polynom) nebo nekonečný počet nenulových koeficientů (transcendentní funkce).

3. Je-li f transcendentní celá funkce a je-li $w \in \mathbb{S}$, pak existuje posloupnost $\{z_k\}$, $z_k \to \infty$, tak, že $f(z_k) \to w$. To vyplývá z Věty 6.4.6 a ze souvislosti rozvojů f o středech 0 a ∞.

4. Každá racionální funkce f je meromorfní v $\mathbb{S}$. V tom případě je množina $P(f)$ konečná

a je-li $f(z) = g(z)/h(z)$, kde g, h jsou polynomy, je $P(f) \subset \{z \in \mathbb{C}\,; h(z) = 0\}$. Pravdivé je však i obrácené tvrzení; viz Lemma 8.1.6.

Lemma 8.1.6. *Každá funkce f meromorfní v $\mathbb{S}$ je racionální.*

Důkaz. Funkce f je totiž holomorfní v $\mathbb{S} \setminus P(f)$, kde $P(f)$ je množina izolovaná v $\mathbb{S}$ a tedy i konečná. Odečteme-li od f součet H všech hlavních částí jejích Laurentových rozvojů o středech v $P(f) \cap \mathbb{C}$, odečítáme racionální funkci a rozdíl je funkce p holomorfní v $\mathbb{C}$. Protože bod ∞ není podstatnou singularitou p, je p polynom. Funkce $f = H + p$ je tedy racionální. □

Meromorfní funkce v $\mathbb{S}$ jsou tedy právě všechny racionální funkce. Jsou-li g, h polynomy, pak pro racionální funkci $f = g/h$ v $\mathbb{S}$ je $\infty \in P(f)$, právě když pro stupně polynomů g, h platí nerovnost $\operatorname{st}(g) > \operatorname{st}(h)$.

Funkce $\operatorname{cotg}(\pi z) = \cos(\pi z)/\sin(\pi z)$ je funkce meromorfní v $\mathbb{C}$, která *není* racionální. Množina jejích pólů se snadno popíše:

$$P(\operatorname{cotg}(\pi z)) = \{z \in \mathbb{C};\, \sin(\pi z) = 0\} = \mathbb{Z}\,.$$

Je vhodné si povšimnout, že v tomto případě je bod ∞ hromadným bodem $P(f)$.

Protože chceme, aby součet řady meromorfních funkcí byla opět meromorfní funkce, musíme zajistit, aby množina pólů tohoto součtu byla izolovaná v G. Připomeňme v této souvislosti ještě Lemma 1.7.4, které říká, že *lokálně stejnoměrná konvergence v G* je ekvivalentní s *kompaktní konvergencí*, tj. stejnoměrnou konvergencí na každé kompaktní množině $K \subset G$. Konečně ještě připomínáme Úmluvu 1.7.6, v níž jsme zavedli *normální konvergenci*. Nyní definice rozšíříme.

Definice 8.1.7. Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina a funkce f_k jsou meromorfní v G. Budeme říkat, že **řada meromorfních funkcí $\sum f_k$ konverguje kompaktně v** G, jestliže ke každé kompaktní množině $K \subset G$ existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $k \geq n$ pro množinu pólů $P(f_k)$ funkce f_k platí rovnost $P(f_k) \cap K = \emptyset$ a

$$\text{řada } \sum_{k=n}^{\infty} f_k \text{ konverguje stejnoměrně na } K. \tag{8.2}$$

Pokud je místo podmínky (8.2) splněna silnější podmínka

$$\sum_{k=n}^{\infty} \|f_k\|_K := \sum_{k=n}^{\infty} \sup\{|f_k(z)|;\, z \in K\} < \infty\,, \tag{8.3}$$

říkáme, že **řada meromorfních funkcí $\sum f_k$ konverguje normálně v** G.

Věta 8.1.8 (věta o jednoznačnosti). *Nechť $G \subset \mathbb{S}$ je oblast a nechť funkce f je meromorfní v G. Je-li $N := \{z \in G\,; f(z) = 0\}$ a množina N není izolovaná v G, je $f \equiv 0$ v G.*

Důkaz. Označme $P(f)$ množinu všech pólů funkce f v G. Podle předpokladů existuje hromadný bod množiny N ležící v G. Protože f je spojitá v G, nemůže tento bod ležet v $P(f)$. Jelikož $P(f)$ je izolovaná v G, je $G \setminus P(f)$ oblast a tvrzení je důsledkem Věty 5.7.1. □

8.2 Princip argumentu

V této části si ukážeme několik „teoretických" aplikací reziduové věty na zkoumání meromorfních funkcí. Můžeme se inspirovat Cauchyho vzorcem: K výpočtu hodnoty $f(\zeta)$ ve vzorci (5.30) jsme uměle vytvořili meromorfní funkci $f(z)/(z-\zeta)$ s jediným jednoduchým pólem v bodě ζ, na kterou by stačilo aplikovat reziduovou větu. Připomeňme ještě úvahy, které jsme dělali v Kapitole 6 v souvislosti s Větou 6.4.10.

Je-li funkce $f \not\equiv 0$ meromorfní v oblasti $G \subset \mathbb{C}$ a je-li $z_0 \in G$, lze f v nějakém okolí $P(z_0)$ bodu z_0 vyjádřit jako součet Laurentovy řady o středu z_0 s *nejmenším* $p \in \mathbb{Z}$, pro které je $a_p \neq 0$, takže

$$f(z) = \sum_{k=p}^{\infty} a_k (z-z_0)^k = (z-z_0)^p \sum a_{k+p}(z-z_0)^k \,.$$

Označme h funkci, která je součtem řady v předchozí rovnosti vpravo. Ta je již v bodě z_0 holomorfní a $h(z_0) = a_p \neq 0$. V nějakém prstencovém okolí bodu z_0 pak je $f(z) = (z-z_0)^p h(z) \neq 0$, takže $f'(z) = p(z-z_0)^{p-1}h(z) + (z-z_0)^p h'(z)$ pro $p \neq 0$, neboli

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{p}{z-z_0} + \frac{h'(z)}{h(z)}\,,$$

kde h'/h je funkce holomorfní v bodě z_0; je-li sama f holomorfní a nenulová v bodě z_0, je $f = h$ a $p = 0$. Zřejmě $\operatorname{res}(f'/f, z_0) = 0 = p$.

Definice 8.2.1. Právě popsané $p \in \mathbb{Z}$ označíme $\mathrm{m}(f; z_0)$ a funkci $\mathrm{m}(f; \centerdot)$ definovanou na G budeme nazývat **multiplicita**. Položíme ještě

$$\mathrm{n_n}(f; \centerdot) = \mathrm{m}^+(f; \centerdot)\,, \quad \mathrm{n_p}(f; \centerdot) = \mathrm{m}^-(f; \centerdot)\,, \tag{8.4}$$

tj. zavedeme zvláštní označení pro kladnou a zápornou část multiplicity $\mathrm{m}(f; \centerdot)$.

Poznámka 8.2.2. Rozklad v (8.2.1) je přirozený: V případě, že $\mathrm{m}(f; z_0) > 0$ je $\mathrm{m}(f; z_0)$ násobnost nulového bodu z_0 a je $\mathrm{m}(f; z_0) = \mathrm{n_n}(f; z_0)$. Je-li z_0 pólem funkce f, je $\mathrm{m}(f; z_0) < 0$ a $|\,\mathrm{m}(f; z_0)| = \mathrm{m}^-(f; z_0) = \mathrm{n_p}(f; z_0)$ je jeho násobnost. Mimo nulové body a póly funkce $f \not\equiv 0$ je multiplicita rovna nule. Hodnotami funkcí $\mathrm{n_n}(f; z)$ a $\mathrm{n_p}(f; z)$ jsou tedy *násobnosti* nulových bodů nebo pólů v bodě z, pokud v něm f nulový bod resp. pól má.

Věta 8.2.3 (princip argumentu). *Nechť f je funkce meromorfní v přípustné oblasti $G \subset \mathbb{C}$. Nechť φ je kladně orientovaná Jordanova křivka v G, která neprochází žádným nulovým bodem ani pólem funkce f v G. Označme M množinu všech nulových bodů a všech pólů f v $\mathrm{Int}(\varphi)$. Pak je*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{z\in M} m(f;z) = \sum_{z\in M} \mathrm{n_n}(f;z) - \sum_{z\in M} \mathrm{n_p}(f;z)\,. \tag{8.5}$$

Součty vpravo v (8.5) určují počty nulových bodů a pólů f v $\mathrm{Int}(\varphi)$, pokud počítáme každý tolikrát, kolik činí jeho násobnost.

Důkaz. Poznamenejme nejprve, že součty v (8.5) mají smysl, neboť pro množinu M snadno dokážeme pomocí Lemmatu 7.1.1 její konečnost. Pak stačí aplikovat reziduovou větu na funkci f'/f a uvážit, že hodnoty reziduí v bodech množiny M určuje přímo funkce $\mathrm{m}(f;\boldsymbol{.})$. Druhá rovnost v (8.5) je důsledkem Definice 8.2.1. □

Poznámka 8.2.4 (důležitá). Je užitečné si uvědomit, z čeho pochází jméno Věty 8.2.3. Představíme-li si výraz v integrandu integrálu na levé straně vztahu (8.5) ve tvaru $f'(z)/(f(z)-0)$, lze levou stranu (8.5) interpretovat jako index bodu 0 vůči křivce $f\circ\varphi$, tj. jako číslo $\mathrm{ind}(f\circ\varphi,0)$, ve kterém je *argument* „schován“: Pro $\varphi : [\,a,b\,] \to G$ je $\mathrm{ind}(f\circ\varphi,0) = (A(b)-A(a))/2\pi$, kde A je spojitá větev argumentu funkce $f\circ\varphi$.

Věta 8.2.5 (Rouché 1862). *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je přípustná oblast. Nechť φ je kladně orientovaná Jordanova křivka v G. Předpokládejme dále, že f, g jsou funkce meromorfní v G, pro které platí nerovnost*

$$|g(z) - f(z)| < |f(z)| \quad \textit{pro všechna} \quad z \in \langle\varphi\rangle\,. \tag{8.6}$$

Potom je

$$\sum m(f;z) = \sum m(g;z)\,, \tag{8.7}$$

resp.

$$\sum \mathrm{n_n}(f;z) - \sum \mathrm{n_p}(f;z) = \sum \mathrm{n_n}(g;z) - \sum \mathrm{n_p}(g;z)\,. \tag{8.8}$$

Ve všech případech se sčítá přes (konečnou) množinu pólů a nulových bodů obou funkcí f a g v $\mathrm{Int}(\varphi)$.

Důkaz. Všimněme si nejprve, že podle předpokladů je $|f| > 0$ na $\langle\varphi\rangle$ a také $|g| > 0$ na $\langle\varphi\rangle$, protože z $g(\zeta) = 0$ bychom dostali nerovnost $|f(\zeta)| < |f(\zeta)|$. Dostáváme tedy $|\,g(z)/f(z) - 1| < 1$ pro všechna $z \in \langle\varphi\rangle$. Z toho ale plyne, že hodnoty funkce $F(z) := g(z)/f(z)$ meromorfní v G leží v kruhu $U(1,1)$, a tedy $0 \notin \mathrm{Int}(F\circ\varphi)$. Proto je $\mathrm{ind}(F\circ\varphi,0) = 0$. Vzhledem k Poznámce 8.2.4 je $\sum m(F;z) = \sum m(f/g;z) = 0$. Protože však je $m(F;z) = m(f;z) - m(g;z)$ v každém bodě $z \in G$, dostáváme odtud rovnost (8.7). Přitom je zřejmé, že F je holomorfní ve všech bodech G, ve kterých nemá žádná z funkcí f, g nulový bod nebo pól a že množina $(\{z \in G\,;\, f(z) \in \{0,\infty\}\,\} \cup \{z\in G\,;\, g(z) \in \{0,\infty\}\}) \cap \mathrm{Int}(\varphi)$, přes kterou se sčítá, je konečná. □

Poznámky 8.2.6. 1. Předcházející větu lze použít speciálně pro funkce holomorfní v G a tak hledat počet nulových bodů v $\mathrm{Int}(\varphi)$. K tomu se také tzv. *Rouchého věta* často užívá.

2. Pomocí Věty 8.2.5 snadno dokážeme *základní větu algebry.* Je-li P polynom stupně $n \geq 1$, $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$, je

$$\frac{P(z)}{z^n} = 1 + \frac{a_1}{z} + \cdots + \frac{a_n}{z^n}$$

a $\lim_{z\to\infty} P(z)/z^n = 1$. Existuje tedy $r > 0$ tak, že pro $\varphi(t) = re^{it}$, $t \in [\,0, 2\pi\,]$ je

$$\left|\frac{P(z)}{z^n} - 1\right| \leq 1$$

pro všechna $z \in \langle\varphi\rangle$, neboli $|P(z) - z^n| < |z|^n$. Funkce z^n má v 0 n-násobný kořen, z čehož aplikací Rouchého věty na $G = \mathbb{C}$ a funkce $f(z) = z^n$, $g = P$ dostaneme existenci n kořenů polynomu P ležících v $\mathrm{Int}(\varphi)$.

3. Někdy se nepřesně říká, že f a g, které jsou si na $\langle\varphi\rangle$ blízké ve smyslu nerovnosti (8.6), mají v $\mathrm{Int}(\varphi)$ stejný počet nulových bodů, počítáme-li každý včetně jejich násobnosti.

Definice 8.2.7. Budeme říkat, že **funkce f nabývá v bodě $z_0 \in \mathbb{S}$ své hodnoty $w \in \mathbb{S}$ p-násobně**, je-li buď $f(z_0) = \infty$ a bod z_0 je p-násobným pólem f, nebo je $f(z_0) \in \mathbb{C}$ a z_0 je p-násobný nulový bod funkce $f - f(z_0)$.

Poznámka 8.2.8. Někdy se říká, že konstantní funkce nabývá své (jediné) hodnoty v každém bodě nekonečněnásobně. Poznamenejme dále, že funkce f, která v bodě z_0 nabývá své hodnoty p-násobně, je nekonstantní v nějakém okolí $P(z_0)$ a lze ji vyjádřit ve tvaru

$$\begin{aligned}
f(z) &= f(z_0) + (z - z_0)^p g(z)\,, && \text{je-li } z_0 \in \mathbb{C},\ f(z_0) \in \mathbb{C}\,,\\
f(z) &= f(z_0) + z^{-p} g(z)\,, && \text{je-li } z_0 = \infty,\ f(z_0) \in \mathbb{C}\,,\\
f(z) &= (z - z_0)^{-p} g(z)\,, && \text{je-li } z_0 \in \mathbb{C}\,,\ f(z_0) = \infty\,,\\
f(z) &= z^p g(z)\,, && \text{je-li } z_0 = \infty\,,\ f(z_0) = \infty\,,
\end{aligned}$$

přičemž $g(z_0) \neq 0$ a g je funkce holomorfní v bodě z_0.

Z tohoto vyjádření dostáváme souvislost zavedeného pojmu s násobností nulového bodu:

Poznámka 8.2.9. Funkce f nabývá v bodě $z_0 \in \mathbb{S}$ své hodnoty p-násobně, právě když funkce $f(z+z_0)$ resp. $f(1/z)$ nabývá v bodě 0 téže hodnoty p-násobně (podle toho, je-li $z_0 \in \mathbb{C}$ nebo $z_0 = \infty$).

Funkce f nabývá v bodě $z_0 \in \mathbb{S}$ své hodnoty p-násobně, právě když funkce $f - f(z_0)$, resp. $1/f$ (podle toho, je-li $f(z_0) \in \mathbb{C}$ nebo $f(z_0) = \infty$) má v bodě z_0 p-násobný nulový bod.

Odtud vyplývá, že v dalším můžeme bez újmy na obecnosti vždy přejít od obecné funkce, která nabývá své hodnoty (konečné nebo nekonečné) p-násobně, ke speciálnímu případu funkce, která má v bodě 0 nulový bod násobnosti p.

Věta 8.2.10. *Funkce f nabývá p-násobně své hodnoty $f(z_0) \in \mathbb{C}$ v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$, právě když*

$$f'(z_0) = \cdots = f^{(p-1)}(z_0) = 0 \neq f^{(p)}(z_0)\,. \tag{8.9}$$

Důkaz. Stačí uvážit rovnost

$$f(z) - f(z_0) = (z - z_0)^p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(p+k)}(z_0)}{(p+k)!}(z - z_0)^k\,. \tag{8.10}$$

Má-li $f(z) - f(z_0)$ p-násobný nulový bod v z_0, je v řadě vpravo její první člen $f^{(p)}(z_0)/p!$ nenulový; odtud dostáváme (8.9). Obráceně z (8.9) vyplývá pomocí (8.10), že $f(z) - f(z_0)$ má v z_0 p-násobný nulový bod. Zbytek je důsledkem Definice 8.2.7. □

Další věta popisuje chování funkce v okolí bodu, ve kterém funkce nabývá své hodnoty p-násobně. Její důkaz, založený na Rouchého Větě 8.2.5, není obtížný, i když tvrzení je na první pohled komplikované.

Věta 8.2.11. *Nechť $p \in \mathbb{N}$ a nechť meromorfní funkce f nabývá v bodě z_0 své hodnoty $f(z_0) = w_0$ p-násobně. Potom existuje $\varepsilon_0 > 0$ tak, že f nabývá v každém bodě $z \in P(z_0, \varepsilon_0)$ své hodnoty jednonásobně a pro každé $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ existuje $\delta > 0$ tak, že ke každému bodu $w \in P(w_0, \delta)$ existuje právě p různých bodů $z_k \in P(z_0, \varepsilon)$, pro něž $f(z_k) = w$, $k = 1, \ldots, p$.*

Důkaz. Podle Poznámky 8.2.9 se můžeme omezit na případ $z_0 \in \mathbb{C}$, $f(z_0) \in \mathbb{C}$ a funkce f holomorfní v jistém $U(z_0)$. Funkce f je nekonstantní v $U(z_0)$, a proto z_0 nemůže být podle Věty 5.7.1 o jednoznačnosti hromadným bodem množiny $\{z\,; f(z) = w_0\}$. Bod z_0 není ani hromadným bodem množiny $\{z\,; f'(z) = 0\}$, neboť pak by byla v nějakém okolí bodu z_0 derivace f' identicky rovna 0 a f by byla v tomto okolí konstantní. Proto existuje $\varepsilon_0 > 0$ tak, že

$$f(z) \neq w_0\,,\ f'(z) \neq 0 \ \text{ pro všechna } z \in P(z_0, \varepsilon_0)\,. \tag{8.11}$$

Podle Věty 8.2.10 nabývá f v každém bodě množiny $P(z_0, \varepsilon_0)$ své hodnoty jednonásobně. Zároveň z (8.11) plyne, že pro každé $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ je

$$\delta := \inf\{|f(z) - w_0|\,; |z - z_0| = \varepsilon\} > 0\,. \tag{8.12}$$

Zvolme takové $\varepsilon > 0$ a položme $\varphi_\varepsilon(t) = z_0 + \varepsilon \mathrm{e}^{it}$, $t \in [\,0, 2\pi\,]$. Zvolme dále libovolně $w \in P(w_0, \delta)$ s δ určeným (8.12). Potom

$$|(f(z) - w) - (f(z) - w_0)| = |w - w_0| < \delta \leq |f(z) - w_0|\,, \quad z \in \langle \varphi_\varepsilon \rangle\,,$$

a tedy podle Rouchého Věty 8.2.5 (kde za f dosazujeme funkci $f - w_0$ a za g funkci $f - w$) mají funkce $f - w_0$ a $f - w$ pro $w \in P(z_0, \delta)$ stejný počet nulových bodů v $U(z_0, \varepsilon)$, pokud je počítáme včetně jejich násobnosti. Vzhledem k tomu, že hodnoty w_0 funkce f v $U(z_0, \varepsilon)$ nabývá v jediném bodě p-násobně a hodnot $w \in P(z_0, \delta)$ jednonásobně, existuje v $U(z_0, \varepsilon)$ právě p navzájem různých nulových bodů $z_1, \dots, z_p$ funkce $f(z) - w$. □

Důsledek 8.2.12 (o otevřenosti zobrazení). *Je-li f nekonstantní funkce meromorfní v oblasti $G \subset \mathbb{S}$, je obrazem každé otevřené množiny $G_1 \subset G$ otevřená množina. Zobrazení f je otevřené; speciálně $f(G)$ je oblast v $\mathbb{S}$.*

Důkaz. Protože f není konstantní v okolí žádného bodu $z \in G$, lze k libovolnému bodu $z \in G$ nalézt $p \in \mathbb{N}$ tak, že f nabývá p-násobně své hodnoty v bodě z. Je-li $G_1 \subset G$ otevřená a je-li $w \in f(G_1)$, existuje $z \in G_1$ tak, že $f(z) = w$. Podle druhé části Věty 8.2.11 existuje k jistému okolí $U(z, \varepsilon_0) \subset G_1$ tak, že f nabývá v tomto okolí každé hodnoty z $U(f(z), \delta)$. Je tedy $U(w, \delta) \subset f(U(z, \varepsilon)) \subset f(G_1)$. Tím je dokázána otevřenost množiny $f(G_1)$. Zbytek tvrzení je důsledkem již dokázané části věty. □

Násobíme-li za stejných podmínek jako ve Větě 8.2.3 podíl f'/f ještě funkcí g holomorfní v G, dostaneme po integraci vzorec

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} g(z) \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \sum_{z \in M} g(z) m(f; z) = \sum_{z \in M} g(z)\, \mathrm{n_n}(f; z) - \sum_{z \in M} g(z)\, \mathrm{n_p}(f; z)\,.$$

Ačkoli se toto pozorování nezdá významné, lze ho prakticky využít. Myšlenka spočívá v tom, že si „obstaráme“ funkci f s jednoduchými nulovými body např. ve všech bodech množiny $\mathbb{Z}$ a pak vynásobíme podíl f'/f celou funkcí g tak, abychom mohli sečíst „řadu“ $\sum g(n)$ pro $n \in \mathbb{Z}$. Křivku φ přitom vhodně „roztahujeme“, aby v $\mathrm{Int}(\varphi)$ leželo stále více bodů množiny $\mathbb{Z}$. Tento velmi vágně formulovaný postřeh ilustrujme na příkladě, který vše osvětlí.

Příklad 8.2.13. Protože

$$\pi \operatorname{cotg} \pi z = \pi \cos \pi z / \sin \pi z\,, \quad z \in \mathbb{C}\,,$$

a protože nulové body funkce sinus jsou jednoduché, má funkce $\pi \operatorname{cotg} \pi z$ jednoduché póly ve všech nulových bodech funkce $\sin \pi z$, které tvoří právě množinu $\mathbb{Z}$. V těchto bodech jsou rezidua funkce $\pi \operatorname{cotg} \pi z$ rovna 1. Je-li $r \in \mathbb{N}$, pak pro funkci $g_r(z) = 1/z^{2r}$ a křivky $\varphi_n(t) = (n + 1/2)\, \mathrm{e}^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, platí

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_n} g_r(z)\, \pi \operatorname{cotg} \pi z\, dz = \sum_{k \in \mathbb{Z},\, |k| \le n} \operatorname{res}(g_r(z)\, \pi \operatorname{cotg} \pi z, k) =$$

$$= 2 \sum_{k=1}^{n} g_r(k) + \operatorname{res}(g_r(z)\, \pi \operatorname{cotg} \pi z, 0)\,.$$

Funkce $\pi\operatorname{cotg}\pi z$ je omezená na $\bigcup_{n=1}^{\infty}\langle\varphi_n\rangle$. To vyplývá z následující úvahy: Ze vzorce (4.41) dostaneme

$$\pi\operatorname{cotg}\pi z = \pi i\frac{w+1}{w-1} = \pi i\Big(1+\frac{2}{w-1}\Big)\,,\ z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}\,,$$

kde $w = \exp(2\pi i z)$. Z Věty 4.3.4 víme, že $\exp u = 1$, právě když je $u = 2\pi i k$ pro $k\in\mathbb{Z}$. Funkce $g(z) := \exp(2\pi i z)$ má periodu 1 a je prostá pro každé $a\in\mathbb{R}$ na pásu $\{z\in\mathbb{C}\,;\, a\le\operatorname{Re} z < a+1\}$. Tento pás zobrazí na $\mathbb{C}$. Podle Věty 5.8.2 (o otevřeném zobrazení) se $U := U(0,1/4)$ zobrazí na okolí $V = f(U)$ bodu 1 a $\delta := \operatorname{dist}(1,\mathbb{C}\setminus V) > 0$. Z periodicity plyne, že na $\mathbb{C}\setminus\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}U(k,1/4)$ a tedy i na $\bigcup_{n=1}^{\infty}\langle\varphi_n\rangle$ je

$$|\pi\operatorname{cotg}\pi z| \le \pi\Big(1+\frac{2}{\delta}\Big) =: K\,.$$

Pro $r\ge 1$ je

$$\Big|\frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi_n} g_r(z)\,\pi\operatorname{cotg}\pi z\,dz\Big| \le \frac{K(n+1/2)}{n^{2r}} \to 0 \text{ pro } n\to\infty\,,$$

takže po provedení limitního přechodu pro $n\to\infty$ dostaneme

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2r}} = -\frac{1}{2}\operatorname{res}(g_r(z)\pi\operatorname{cotg}\pi z, 0)\,.$$

V Příkladu 7.3.1 jsme odvodili pro kotangentu tvar části Laurentova rozvoje (7.8) funkce cotg. Z něj pro $\pi\operatorname{cotg}\pi z$ obdržíme v $P(0,1)$ vyjádření

$$\pi\operatorname{cotg}\pi z = \frac{1}{z} - \pi\Big(\frac{\pi z}{3}+\frac{\pi^3 z^3}{45}+\frac{2\pi^5 z^5}{945}+\cdots\Big)\,,\quad z\in P(0,1)\,,$$

z něhož dostaneme

$$\sum\frac{1}{(k+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}\,,\quad \sum\frac{1}{(k+1)^4} = \frac{\pi^4}{90}\,,\quad \sum\frac{1}{(k+1)^6} = \frac{\pi^6}{945}\,,\ldots\,.$$

Euler nalezl později i obecný vzorec pro součty tohoto tvaru; vzorec obsahuje Bernoulliho čísla, která jsme zavedli pomocí (5.41). Ta se poprvé objevila v knize *Ars conjectandi* Jacoba Bernoulli (1654 – 1705); viz ještě Historická poznámka na konci této kapitoly.

Poznámka 8.2.14. Podobným způsobem jakým jsme v předcházejícím Příkladu 8.2.13 užili funkci $\pi\operatorname{cotg}\pi z$ lze využít i funkci $\pi/\sin\pi z$. Rozdíl je v tom, že pro všechna $k\in\mathbb{Z}$ platí

$$\operatorname{res}(\pi\operatorname{cotg}\pi z, k) = 1\,,\quad \operatorname{res}(\pi/\sin\pi z, k) = (-1)^k\,.$$

8.3 Mittag-Lefflerova věta

Při důkazu reziduové věty (Lemma 7.2.3) jsme se již zmínili o meromorfní funkci s konečným počtem pólů $z_1,\ldots,z_n$ a hlavními částmi Laurentových rozvojů v $P(z_k,r)$ tvaru

$$P_k\Big(\frac{1}{z-z_k}\Big)\,. \tag{8.13}$$

Nyní se dostáváme k obdobné otázce pro obecnou meromorfní funkci. Předepíšeme-li nekonečnou množinu pólů, seřazených do nekonečné prosté posloupnosti $\{z_k\}$ tak, že $z_k \to \infty$ a $\{|z_k|\}$ je *neklesající* posloupnost, a zároveň předepíšeme polynomy P_k tak, že jsou jimi jako v (8.13) dány hlavní části Laurentových rozvojů, vzniká otázka, zda a jak lze f s takto předepsanými póly sestrojit. Odpověď na tuto otázku plyne z tvrzení, které dokázal GOSTA MITTAG-LEFFLER (1846 – 1927).

Lemma 8.3.1. *Je-li $z_k \neq 0$, existuje polynom $M_k := \sum_{r=1}^{m_k} a_r^k z^r$ tak, že pro funkci z* (8.13) *platí nerovnost*

$$\left|P_k\Big(\frac{1}{z-z_k}\Big) - M_k(z)\right| < \frac{1}{k^2}$$

pro všechna $z \in U(0, |z_k|/2)$.

Důkaz. Protože je $P_k((z-z_k)^{-1})$ funkce holomorfní v $\mathbb{C} \setminus \{z_k\}$, lze ji v $U(0,|z_k|)$ rozvinout v Taylorovu řadu. Ta konverguje stejnoměrně v $\overline{U(0,|z_k|/2)}$, z čehož plyne možnost volby M_k jako m_k-tého částečného součtu řady s dostatečně velkým m_k; tím je lemma dokázáno. □

Věta 8.3.2 (Mittag-Leffler 1884). *Nechť $\{z_k\}$ je nekonečná prostá posloupnost čísel z $\mathbb{C}$, $z_k \to \infty$ a $\{|z_k|\}$ je neklesající posloupnost. Nechť dále $\{P_k\}_{k=1}^{\infty}$ je posloupnost polynomů stupně alespoň 1 a P_0 je libovolný polynom. Nechť konečně M_k, $k \in \mathbb{N}$, jsou určeny pomocí Lemmatu 8.3.1. Potom řada v následujícím vzorci vpravo*

$$f(z) := P_0\Big(\frac{1}{z}\Big) + \sum_{k=1}^{+\infty}\Big[P_k\Big(\frac{1}{z-z_k}\Big) - M_k(z)\Big]$$

konverguje lokálně stejnoměrně v $\mathbb{C}\setminus\{z_k;\, k \in \mathbb{N}\}$ a funkce f je meromorfní funkce. Funkce f má pro všechna k v bodech z_k hlavní části Laurentových rozvojů dány vzorcem (8.13).

Důkaz. Nejprve sestrojíme $P_0(z^{-1})$ a pak podle Lemmatu 8.3.1 polynomy M_k. Řada zřejmě konverguje lokálně stejnoměrně na každém

$$\overline{U(0,R)} \setminus \{z_k;\, k \in \mathbb{N}\} \quad \text{s} \quad R > 0\,,$$

což dává tvrzení. □

Důsledek 8.3.3. *Je-li f libovolná meromorfní funkce (v $\mathbb{C}$), je buď celou funkcí, nebo má nenulový, avšak konečný počet pólů, nebo má nekonečně mnoho pólů. Ve druhém případě je podle Lemmatu 7.2.3*

$$f(z) = g(z) + P_0\Big(\frac{1}{z}\Big) + \sum_{k=1}^{n} P_k\Big(\frac{1}{z-z_k}\Big)\,,$$

kde g je celá funkce a kde $n \in \mathbb{N}$. *Ve třetím případě ji lze zapsat funkci ve tvaru*

$$f(z) := g(z) + P_0\Big(\frac{1}{z}\Big) + \sum_{k=1}^{\infty}\Big[P_k\Big(\frac{1}{z-z_k}\Big) - M_k(z)\Big]$$

kde g je celá funkce; v tomto posledním případě se použité označení shoduje s označením z Věty 8.3.2.

Poznámka 8.3.4. Připomeňme nejprve, že je-li f polynom stupně $n \geq 1$, $f(0) \neq 0$ a $z_1, \ldots, z_n$ jsou všechny jeho kořeny, kde každý je uveden tolikrát, kolik činí jeho násobnost, lze f vyjádřit ve tvaru

$$c\prod_{k=1}^{n}\Big(1 - \frac{z}{z_k}\Big), \tag{8.14}$$

kde $c \neq 0$; srv. s (5.51) z Kapitoly 5.

Jak ukazuje příklad exponenciály, celá nekonstantní funkce *nemusí* mít žádný nulový bod. Množina nulových bodů $N(f)$ celé funkce $f \not\equiv 0$ nemůže mít podle Věty 5.7.1 o jednoznačnosti hromadný bod v $\mathbb{C}$ a je spočetná. Jak v této kapitole ukážeme, je to také jediná podmínka, kterou množina nulových bodů celé funkce $f \not\equiv 0$ musí splňovat. Vzniká přirozená otázka, zda a do jaké míry je funkce f určena posloupností svých nulových bodů $\{z_k\}$, v níž je každý bod uveden tolikrát, kolik činí jeho násobnost. Je-li tato posloupnost nekonečná, je zřejmě $\lim_{k\to+\infty} z_k = \infty$. Vnucuje se představa, že taková funkce by měla být tvaru (8.14), kde horní mez n v součinu by v tomto případě byla rovna ∞. Ukazuje se, že problém je trochu složitější.

Poznámka 8.3.5. Symbol nekonečného součinu není zatím definován; budeme ho definovat tak, abychom dostali výsledky obdobné těm, které známe pro řady. Je-li $\{z_k\}_{k=0}^{\infty}$ posloupnost komplexních čísel, bylo by patrně nejjednodušší definovat nekonečný součin S všech členů této posloupnosti rovností

$$S := \lim_{n\to+\infty} z_0 z_1 \cdots z_n$$

a nazývat ho konvergentním, pokud tato limita existuje a je konečná. Taková definice by však byla *nevhodná*; porovnáme-li situaci s případem definice součtu řady, pak by konvergence součinu *neměla být závislá* na konečném počtu členů posloupnosti $\{z_k\}$, avšak záměna jediného činitele za 0 by změnila libovolný součin na konvergentní. Také bychom neradi obdrželi hodnotu 0 jako nekonečný součin vesměs nenulových činitelů, což by se stalo např. pro $\{z_k\}_{k=0}^{\infty} = \{1/(k+1)\}$. To nás vede k tomu, že samotná definice nekonečného součinu musí být trochu složitější, aby poskytovala uspokojivější výsledky.

8.4 Nekonečné součiny čísel

Označení 8.4.1. Je-li $\{z_k\} = \{z_k\}_{k=0}^{\infty}$ posloupnost komplexních čísel, budeme pro $r, s \in \mathbb{N}_0$, $r \leq s$ užívat označení

$$p_r^s(z_k) := \prod_{k=r}^{s} z_k = z_r \cdots z_s\,, \quad p^s(z_k) := \prod_{k=0}^{s} z_k = z_0 \cdots z_s\,. \tag{8.15}$$

Označení pomocí p s horními a dolními indexy nám umožní snazší zápis některých výrazů, které by jinak v textu působily rušivě.

Definice 8.4.2. Jestliže existuje $r \in \mathbb{N}_0$ tak, že platí $z_k \neq 0$ pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$, $k \geq r$, a současně existuje konečná, nenulová limita

$$p_r(z_k) := \lim_{s \to \infty} p_r^s(z_k)\,,$$

říkáme, že **nekonečný součin**

$$p(z_k) = \prod_{k=0}^{\infty} z_k = \prod z_k \tag{8.16}$$

konverguje, nebo že je **konvergentní**. Jeho hodnotu S definujeme pak rovností

$$S = p(z_k) = p^{r-1}(z_k)\, p_r(z_k)$$

a říkáme, že nekonečný součin (8.16) **má hodnotu** S. Snadno lze nahlédnout, že ani hodnota ani konvergence nekonečného součinu S nezávisí na volbě tohoto čísla r. Pokud vynecháváme meze u součinů jako např. v (8.16), jsou to opět jako u řad pouze meze 0 *nebo* ∞, ve všech ostatních případech je budeme vypisovat.

Pokud součin $p(z_k)$ nekonverguje, říkáme, že **je divergentní**, neboli že **diverguje** [2]). Čísla z_k nazýváme **činitele** nekonečného součinu $p(z_k)$.

Úmluva 8.4.3. Jak je z definice patrno, užíváme stejný symbol pro konvergentní součin i pro jeho hodnotu; je to opět úmluva analogická úmluvě u řad.

Poznámka 8.4.4. 1. Jestliže nekonečný součin *diverguje* k 0, je buď $z_k = 0$ pro nekonečně mnoho $k \in \mathbb{N}$, nebo existuje pouze konečně mnoho takových z_k a pro nějaké $r \in \mathbb{N}_0$ platí $z_k \neq 0$, $k \geq r$, ale $p_r(z_k) = 0$. Nekonečný *konvergentní* součin má tedy hodnotu 0, právě když alespoň jeden člen (ale nejvýše konečně mnoho) z_k je roven 0.

2. Jestliže součin $p(z_k)$ konverguje, existuje $r \in \mathbb{N}_0$ tak, že

$$\lim_{n\to\infty} p_r^n(z_k) = p_r(z_k) = s \neq 0\,, \text{ a tedy } \lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \frac{p_r^n(z_k)}{p_r^{n-1}} = \frac{s}{s} = 1\,,$$

takže činitelé konvergentního nekonečného součinu tvoří posloupnost s limitou 1.

3. Pro nekonečné součiny lze dokázat jednoduchou nutnou a postačující podmínku pro konvergenci. Nebudeme ji potřebovat a přenecháváme ji čtenáři pouze k rozmyšlení:

Lemma 8.4.5 (Bolzano-Cauchyho podmínka). *Nekonečný součin* (8.16) *konverguje, právě když*

$$\forall(\varepsilon > 0)\, \exists(n \in \mathbb{N}_0)\, \forall(r, s \in \mathbb{N}_0)\, ((n \leq r \leq s) \Rightarrow (|1 - p_r^s(z_k)| < \varepsilon))\,. \tag{8.17}$$

---

[2]) V případě, že $z_k \in \mathbb{R}$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$, bylo by možné některým součinům přiřadit jako hodnotu i $+\infty$ nebo $-\infty$. Touto otázkou se nebudeme zabývat.

Příklady 8.4.6. 1. Je-li $a_0 = 0$, $a_k = 1$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$, je $p(a_k) = 0$ a součin *konverguje* k 0.

2. Je-li $a_k = 1 - 1/(k+2)$, $k \in \mathbb{N}_0$, je

$$p^n(a_k) = \Big(\frac{2-1}{2}\Big)\Big(\frac{3-1}{3}\Big)\cdots\Big(\frac{(n+2)-1}{n+2}\Big) = \frac{1}{n+2} \to 0$$

pro $n \to \infty$, a tedy $p(a_k)$ *diverguje* k 0.

3. Je-li $a_k = 1 - 1/(k+2)^2$, $k \in \mathbb{N}_0$, dostaneme s pomocí předešlého příkladu

$$\begin{aligned} p^n(a_k) &= \Big(\frac{2^2-1}{2^2}\Big)\Big(\frac{3^2-1}{3^2}\Big)\cdots\Big(\frac{(n+2)^2-1}{(n+2)^2}\Big) = \\ &= \Big(\frac{2-1}{2}\Big)\Big(\frac{3-1}{3}\Big)\cdots\Big(\frac{(n+2)-1}{n+2}\Big)\cdot \\ &\quad \cdot\Big(\frac{2+1}{2}\Big)\Big(\frac{3+1}{3}\Big)\cdots\Big(\frac{(n+2)+1}{n+2}\Big) = \frac{1}{2}\Big(1+\frac{1}{n+2}\Big) \to \frac{1}{2} \end{aligned}$$

pro $n \to \infty$, takže $p(a_k) = 1/2$.

4. V [$\mathbb{V}$], str. 272 jsme dokázali Wallisův vzorec (viz Historické poznámky k této kapitole)

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \prod_1^n \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)} = p_1\Big(\frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)}\Big).$$

Protože jsou všechny členy vyšetřovaného součinu nenulové, pro převrácenou hodnotu $2/\pi$ dostaneme

$$\frac{2}{\pi} = p_1\Big(\frac{(2k)^2-1}{(2k)^2}\Big) = p_1\Big(1 - \frac{1}{4k^2}\Big).$$

Budeme hledat vztah konvergence nekonečných součinů a nekonečných řad. K tomu je vhodné přejít k modifikovanému označení, při kterém činitele součinu $p(z_k)$ píšeme ve tvaru $z_k = 1 + a_k$, $k \in \mathbb{N}_0$. Pro konvergentní součin $p(1+a_k)$ je pak totiž $a_k \to 0$, což je nutná podmínka pro konvergenci řady $\sum a_k$.

Tvrzení 8.4.7. *Nechť $\{a_k\}$ je posloupnost komplexních čísel. Potom nekonečný součin $p(1+a_k)$ konverguje, právě když existuje $r \in \mathbb{N}_0$ tak, že konverguje řada $\sum_{k=r}^{\infty} \log(1+a_k)$. Označíme-li její součet s, je*

$$p(1+a_k) = e^s\, p^{r-1}(1+a_k). \tag{8.18}$$

Důkaz. Připomeňme nejprve, že symbolem log označujeme hlavní hodnotu logaritmu; viz Definice 4.4.5. Je-li tedy $z \in \mathbb{P}$, je $\log z = \log|z| + i \arg z$, kde $\arg z \in (-\pi, \pi\,]$.

Předpokládejme nejprve, že uvažovaná řada konverguje k $s \in \mathbb{C}$. Protože exponenciála je spojitá v bodě s, je

$$0 \neq \exp(s) = \lim_{n\to\infty} \exp\Big(\sum_{k=r}^{n} \log(1+a_k)\Big) = \lim_{n\to\infty} p_r^n(1+a_k),$$

z čehož plyne, že nekonečný součin konverguje k hodnotě uvedené v (8.18).

Předpokládejme naopak, že pro nějaké $r \in \mathbb{N}_0$ je $\lim_{n\to\infty} p_r^n(1+a_k) = s \neq 0$; bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že pro $k \geq r$ je $|a_k| < 1$. Označme $t = \arg s$ a nechť $\log^*$ je inverzní funkce k exp na pásu $\{z \in \mathbb{C}\,;\ \operatorname{Im} z \in (t-\pi, t+\pi]\}$. Zvolme dále $t_n \in (t-\pi, t+\pi\,]$ tak, že

$$\log^*(p_r^n(1+a_k)) = \log|\,p_r^n(1+a_k)| + it_n\,.$$

Označme ještě $s_n = \sum_r^n \log(1+a_k)$. Pak je

$$\lim_{n\to+\infty} \log^* p_r^n(1+a_k) = \log|\,p_r(1+a_k)| + it = \log(p_r(1+a_k))\,.$$

Protože $\exp(s_n) = p_r^n(1+a_k)$, je $s_n = \log^*(p_r^n(1+a_k)) + 2\pi i c_n$, kde c_n je pro každé $n \geq r$ celé číslo. Avšak

$$\log^*(p_r^n(1+a_k)) - \log^*(p_r^{n-1}(1+a_k)) \to \log(p_r(1+a_k)) - \log(p_r(1+a_k)) = 0\,,$$
$$s_n - s_{n-1} = \log(1+a_n) \to 0\,,$$

a proto i pro posloupnost $\{2\pi i c_n\}$ platí

$$2\pi i c_n - 2\pi i c_{n-1} = 2\pi i(c_n - c_{n-1}) \to 0\,.$$

Protože c_n jsou celá čísla, musí být posloupnost $\{c_n\}$ od jistého indexu stacionární, tj. $c_n = c$, a proto $\lim_{n\to+\infty} s_n = \log(p_r(1+a_k)) + 2\pi i c$. Řada tedy konverguje a důkaz je dokončen. □

Definice 8.4.8. Říkáme, že **nekonečný součin** $p(1+a_k)$ **konverguje absolutně**, jestliže konverguje nekonečný součin $p(1+|a_k|)$.

Kdybychom zavedli absolutní konvergenci nekonečného součinu tak, že $p(z_k)$ konverguje absolutně, právě když konverguje $p(|z_k|)$, nedostali bychom žádnou analogii s tvrzeními o absolutní konvergenci řad: pro $z_k = (-1)^k$ by součin $p(z_k)$ dokonce absolutně konvergoval a zároveň byl divergentní.

Lemma 8.4.9. *Nechť $\{a_k\}$ je posloupnost* nezáporných *čísel. Potom všechny řady*

$$\sum \log(1+a_k)\,, \quad -\sum \log(1-a_k)\,, \quad \sum a_k \tag{8.19}$$

současně konvergují, nebo současně divergují. Jestliže konverguje řada $\sum a_k$, konvergují i nekonečné součiny $p(1+a_k)$ a $p(1-a_k)$.

Důkaz. Členy součtu rovné 0 a činitelé součinu rovné 1 stejně jako změna konečného počtu „sčítanců“ nebo „činitelů“ nemohou ovlivnit konvergenci. Proto můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že je $a_k \in (0,1)$ pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$. Protože

$$\lim_{x\to0+} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x\to0+} \frac{-\log(1-x)}{x} = \lim_{x\to0+} \frac{\log(1+x)}{-\log(1-x)} = 1\,,$$

plyne ze srovnávacího kritéria pro řady, že všechny tři řady (8.19) zároveň konvergují nebo zároveň divergují. Zbytek je důsledkem Tvrzení 8.4.7. □

Lemma 8.4.10. *Absolutně konvergentní nekonečný součin $p(1+a_k)$ konverguje.*

Důkaz. Podle Lemmatu 8.4.9 konverguje i řada $\sum |a_k|$, takže $a_k \to 0$. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $|a_k| < 1/2$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$, neboť počet členů, pro něž to eventuálně neplatí, je konečný. Protože funkce $\log(1+z)$ má v bodě 0 derivaci, platí podle Carathéodoryho podmínky $\log(1+z) = \vartheta(z)z$, kde $\vartheta(z) \to 1$ pro $z \to 0$. Proto podle Bolzano-Cauchyho podmínky *pro řady* platí

$$\Big| \sum_{k=m}^{p} \log(1+a_k) \Big| \le \sum_{k=m}^{p} |a_k|\, |\vartheta(a_k)| \to 0 \quad \text{pro } m, p \to \infty\,.$$

Je tedy splněna podmínka i pro řadu $\sum \log(1+a_k)$ a tvrzení vyplývá z Lemmatu 8.4.7. □

Poznámka 8.4.11. Dá se dokázat, že nekonečný součin $p(1+a_k)$, který nediverguje k 0, konverguje absolutně, právě když konverguje absolutně řada $\sum \log(1+a_k)$. V dalším potřebujeme zacházet s nekonečnými součiny funkcí. Zavedeme pro ně *normální konvergenci*, která opět kombinuje výhody kompaktní (tj. lokálně stejnoměrné) konvergence s konvergencí absolutní. Můžeme z ní také snadno obdržet další informace o absolutní konvergenci součinů *čísel*. Nebudeme však teorii rozvíjet do větší hloubky, neboť si klademe za cíl pouze korektně odvodit tzv. Eulerův vzorec pro sinus.

8.5 Nekonečné součiny funkcí

Tvrzení z celé části 8.5 platí za obecnějších předpokladů: místo otevřené množiny $G \subset \mathbb{C}$ můžeme uvažovat jakýkoli *lokálně kompaktní metrický prostor*, tj. prostor, v němž ke každému bodu existuje okolí, jehož uzávěr je kompaktní.

Definice 8.5.1. Nechť f_k, $k \in \mathbb{N}_0$, jsou funkce definované na otevřené množině $G \subset \mathbb{C}$, $f_k : G \to \mathbb{C}$. Říkáme, že nekonečný součin $p(f_k)$ **konverguje kompaktně** na G, jestliže pro každou kompaktní množinu $K \subset G$ existuje $r = r(K) \in \mathbb{N}$ tak, že pro $n \to \infty$ je $p_r^n(f_k) \rightrightarrows$ na K, přičemž $p_r(f_k) = \lim_{n\to\infty} p_r^n(f_k)$ je všude v K různá od 0. Pro každé $z \in G$ pak definujeme $f(z) := p(f_k(z)) \in \mathbb{C}$.

Poznámka 8.5.2. Z Definice 8.5.1 plyne, že na každém kompaktu $K \subset P$ je

$$f = p(f_k) = f_0\, f_1 \cdots f_{r-1}\; p_r(f_k)\,. \tag{8.20}$$

Připomínáme, že v námi vyšetřovaném případě (a obecněji např. na lokálně kompaktních prostorech) je kompaktní konvergence totéž co lokálně stejnoměrná konvergence; užíváme vyjádření, které je kratší. Budeme opět užívat označení $\|\cdot\|_K$ pro supremovou normu funkcí na K; viz Úmluva 1.7.6.

Věta 8.5.3. *Nechť funkce $f_k : G \to \mathbb{C}$ jsou spojité na oblasti $G \subset \mathbb{C}$ pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$ a nechť existuje $r \in \mathbb{N}_0$ tak, že pro všechna $k \geq r$ existuje spojitá větev logaritmu $\log f_k$ na G. Jestliže $\sum_{k=r}^{\infty} \log f_k$ konverguje kompaktně na G k funkci $s \in \mathcal{C}(G)$, konverguje součin $p(f_k)$ kompaktně na G a je tam roven funkci*

$$f_0 f_1 \cdots f_{r-1} \cdot \exp(s)\,.$$

Důkaz. Označíme-li $s_n := \sum_{k=r}^{n} \log f_k$, vyplývá z kompaktní konvergence $\{s_n\}$ kompaktní konvergence $p_r^n(f_k) = \exp s_n$. Pro $|w| < 1/2$ je totiž

$$|\exp w - 1| \leq |w|\Big(1 + \frac{|w|}{2!} + \cdots\Big) \leq |w|(1 + |w| + |w|^2 + \cdots) \leq 2|w|\,,$$

a tedy z $(\exp \circ s_n - \exp \circ s) = (\exp \circ s)(\exp \circ (s_n - s) - 1)$ dostaneme pro kompakt $K \subset G$ nerovnost

$$\|\exp \circ s_n - \exp \circ s\|_K \leq 2\,\|\exp \circ\, s\|_K \cdot \|s_n - s\|_K\,,$$

jakmile je $\|s_n - s\|_K \leq 1/2$. Jelikož je $\exp s \neq 0$, platí tvrzení věty. □

Definice 8.5.4. Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina a nechť $f_k = 1 + g_k \in \mathcal{C}(G)$ pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$. Budeme říkat, že součin $p(f_k)$ **konverguje normálně** v P, jestliže $\sum g_k$ konverguje normálně v P.

Poznámka 8.5.5. Normální konvergence nekonečného součinu kombinuje výhody plynoucí z lokálně stejnoměrné konvergence a absolutní konvergence: Srovnáním s definicí *absolutní konvergence* součinu vidíme, že nekonečný součin funkcí, který konverguje normálně, konverguje v každém bodě absolutně. Nebudeme dokazovat, že pro absolutně konvergentní součiny platí analogická tvrzení o přerovnávání jako pro absolutně konvergentní řady; tuto vlastnost nebudeme potřebovat. Podmínka, která zaručuje pro vhodné r, že $p_r(f_k)$ je všude v G různá od 0, má při práci s *funkcemi* ještě další podstatnou roli: násobnost nulového bodu w součinu holomorfních funkcí je součtem násobností nulových w činitelů součinu, pokud jeho hodnota není v okolí w identicky rovna 0.

Věta 8.5.6. *Nechť $p(f_k)$ je normálně konvergentní nekonečný součin komplexních funkcí na otevřené množině $G \subset \mathbb{C}$. Potom existuje funkce $f : G \to \mathbb{C}$ tak, že součin $p(f_k)$ kompaktně konverguje na G a rovná se f.*

Důkaz. Pro $w \in U(0,1)$ je $\log(1 + w) = \sum(-1)^k w^{k+1}/(k+1)$. Odtud plyne pro $|w| \leq 1/2$ odhad

$$|\log(1 + w)| \leq |w|(1 + |w| + |w|^2 + \cdots) \leq 2|w|\,.$$

Je-li nyní $K \subset G$ libovolná kompaktní množina a $g_k := f_k - 1$, $k \in \mathbb{N}_0$, existuje $r \in \mathbb{N}_0$ tak, že $\|g_k\|_K \leq 1/2$ pro všechna $k \geq r$. Pro tato k je

$$\log f_k = \sum \frac{(-1)^m}{m+1} g_k^m \in \mathcal{C}(K)$$

a $\|\log f_k\|_K \leq 2\|g_k\|_K$, takže $\sum_{k=r}^{\infty} \|\log f_k\|_K \leq 2\sum_{k=r}^{\infty} \|g_k\|_K < \infty$. Odtud plyne kompaktní konvergence řady $\sum_{k=r}^{\infty} \log f_k$, takže zbytek tvrzení je důsledkem Věty 8.5.3. □

Důsledek 8.5.7. *Jestliže nekonečný součin $p(f_k)$ funkcí f_k holomorfních v G konverguje normálně k funkci f, pak f je funkce holomorfní v G. V bodě $z \in G$, ve kterém $p(f_k(z)) = 0$ platí $f_k(z) = 0$ pro konečně mnoho $k \in \mathbb{N}_0$.*

Připomeňme pojem *logaritmické derivace* funkce f. Nechť f je funkce holomorfní v otevřené množině $G \in \mathbb{C}$ a nechť f nenabývá nikde v G hodnoty 0. Potom je funkce f'/f logaritmickou derivací f. Název je přirozený, neboť $(\log f)' = f'/f$. Je-li $g = f_1 \cdots f_n$, kde f_k jsou funkce holomorfní na G, nenabývající v žádném bodě G hodnoty 0, je

$$(\log g)' = (\log(f_1 \cdots f_n))' = \frac{f_1'}{f_1} + \cdots + \frac{f_n'}{f_n}\,.$$

Tento vzoreček lze zobecnit i pro nekonečné součiny. Platí:

Věta 8.5.8 (o logaritmické derivaci). *Nechť $f = p(f_k)$ je nekonečný součin funkcí f_k holomorfních v otevřené množině $G \subset \mathbb{C}$, který konverguje normálně v G. Potom je řada $\sum f_k'/f_k$ kompaktně konvergentní řadou funkcí meromorfních v G a rovnost*

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum \frac{f_k'(z)}{f_k(z)} \tag{8.21}$$

platí v každém bodě $z \in G$, ve kterém je $f(z) \neq 0$.

Důkaz. Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $f = f_0 f_1 \cdots f_{n-1} s_n$, kde $s_n = p_n(f_k)$. Odtud vyplývá, že

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f_k'(z)}{f_k(z)} + \frac{s_n'}{s_n}\,.$$

Posloupnost funkcí s_n konverguje kompaktně v G k funkci 1, a tedy podle Weierstrassovy věty 5.5.14 derivace s_n' konvergují na G kompaktně k 0. Na každém kruhu U, pro který je $\overline{U} \subset G$, pro všechna dostatečně velká $n \in \mathbb{N}$ je $s_n'/s_n \in H(U)$ a posloupnost těchto funkcí konverguje kompaktně k 0. □

Poznámka 8.5.9. Zřejmě je za předpokladů předchozí věty $f'/f \in M(G)$. Dá se dokázat, že dokonce $\sum f_n'/f_n$ konverguje *normálně* k f'/f, my však tento poznatek nepotřebujeme.

8.6 Eulerův vzorec

Poznámka 8.6.1. Pro důkaz Eulerova vzorce

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right), \tag{8.22}$$

kterým je funkce sin vyjádřena jako nekonečný součin použijeme jednu velmi speciální charakteristiku této funkce; je založena na obratu, který bývá nazýván *Herglotzův trik*. Inspirační základ k němu leží ve vzorci (8.23), který dokážeme v následujícím lemmatu.

Lemma 8.6.2. *Pro $z \neq k/2$, $k \in \mathbb{Z}$, platí vzorec*

$$2\pi \operatorname{cotg}(2\pi z) = \pi \operatorname{cotg} \pi z + \pi \operatorname{cotg} \pi(z + 1/2)\,. \tag{8.23}$$

Důkaz. Dokazovanou rovnost ověříme přímým výpočtem:

$$\begin{aligned} 2\pi \operatorname{cotg} 2\pi z &= 2\pi \frac{\cos 2\pi z}{\sin 2\pi z} = \pi \frac{\cos^2 \pi z - \sin^2 \pi z}{\sin \pi z \cos \pi z} = \\ &= \pi \operatorname{cotg} \pi z - \pi \frac{\sin \pi z}{\cos \pi z} = \pi \operatorname{cotg} \pi z - \pi \frac{-\cos \pi(z + 1/2)}{\sin \pi(z + 1/2)} = \\ &= \pi \operatorname{cotg} \pi z + \pi \operatorname{cotg} \pi(z + 1/2)\,. \end{aligned}$$

□

Lemma 8.6.3 (Herglotz 1931*). *Nechť $r > 1$ a nechť G je oblast obsahující interval $[0, r)$. Je-li h funkce holomorfní v G, která vyhovuje vztahu*

$$2h(2z) = h(z) + h(z + 1/2)\,, \quad \textit{pokud} \quad z,\, z + 1/2,\, 2z \in [0, r)\,, \tag{8.24}$$

je funkce h konstantní v G.

Důkaz. Volme $t \in (1, r)$ a položme $M := \max\{|h'(z)|;\, z \in [0, t]\}$. Z (8.24) plyne derivováním

$$4h'(2z) = h'(z) + h'(z + 1/2)\,, \tag{8.25}$$

přičemž body $z/2$ a $z/2 + 1/2$ leží spolu s bodem z v intervalu $[0, t]$. Do (8.25) dosadíme $z/2$ za z a pomocí trojúhelníkové nerovnosti obdržíme odhad

$$4|h'(z)| \leq |h'(z/2)| + |h'(z/2 + 1/2)| < M + M\,.$$

Odtud plyne $4M \leq 2M$, a tedy $M = 0$. Podle Věty 2.4.3 odtud dále plyne $h' = 0$ v G, takže h je konstantní v G. □

Lemma 8.6.4. *Nechť g je funkce holomorfní v $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, a nechť hlavní část jejího Laurentova rozvoje v prstenci $P(k)$ je pro každé $k \in \mathbb{Z}$ rovna $1/(z - k)$. Nechť je dále funkce g lichá a nechť vyhovuje podmínce (8.24), tj.*

$$2g(2z) = g(z) + g(z + 1/2)\,.$$

Potom je $g(z) = \pi \operatorname{cotg} \pi z$.

Důkaz. Položme $h(z) := g(z) - \pi \operatorname{cotg} \pi z$, $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Funkce g a funkce $\pi \operatorname{cotg} \pi z$ mají v bodech množiny $\mathbb{Z}$ stejné hlavní části, lze tedy h rozšířit spojitě na $\mathbb{C}$. Po tomto rozšíření je h celá funkce, takže Lemma 8.6.3 lze aplikovat s $G = \mathbb{C}$. Funkce h je tedy konstantní. Protože h je lichá funkce, je tedy $h(0) = 0$, takže $h \equiv 0$ a $g(z) = \pi \operatorname{cotg} \pi z$ v $\mathbb{C}$. $\square$

Důsledek 8.6.5 (Eisenstein 1847*). *Platí vzorec*

$$\pi \operatorname{cotg} \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - k^2}\,. \tag{8.26}$$

Důkaz. Vzorec (8.26) je důsledkem Lemmatu 8.6.4. Není obtížné nahlédnout, že řada v (8.26) vpravo konverguje kompaktně v $\mathbb{C}$: označíme-li K_n uzávěr kruhu $U(0,n)$, je k-tý člen řady pro všechna $k > n$ holomorfní funkce v $U(0,n)$, a protože

$$\left|\frac{2z}{z^2 - k^2}\right| \le \frac{2n}{k^2 - n^2}$$

a řada $\sum_{k=n+1}^{\infty} 2n/(k^2 - n^2)$ je zřejmě konvergentní; součtem je proto meromorfní funkce f. Ta vyhovuje předpokladům Lemmatu 8.6.4.

Podmínku dokážeme takto: Označme

$$s_n(z) = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{n} \frac{2z}{z^2 - k^2} = \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{z+k}\,.$$

Pro členy částečných součtů $s_n(z/2)$ a $s_n((z+1)/2)$ dostaneme rovnost

$$\frac{1}{z/2 + k} + \frac{1}{(z+1)/2 + k} = \frac{2}{z + 2k} + \frac{2}{z + 2k + 1}\,,$$

z čehož sečtením rovností pro $k = -n, -n+1, \ldots, n-1, n$ obdržíme

$$s_n\Big(\frac{z}{2}\Big) + s_n\Big(\frac{z+1}{2}\Big) = 2 s_{2n}(z) + \frac{2}{(z+1) + 2n}\,.$$

Limitním přechodem pro $n \to \infty$ dostaneme

$$f\Big(\frac{z}{2}\Big) + f\Big(\frac{z+1}{2}\Big) = 2f(z)\,, \text{ resp. } f(z) + f\Big(z + \frac{1}{2}\Big) = 2f(2z)\,,$$

z čehož již dostaneme požadované tvrzení. $\square$

Historická poznámka 8.6.6. Důsledek 8.6.5 je zároveň jednoduchým příkladem, přibližujícím Mittag-Lefflerovu větu. Užitečnost vyjádření funkce $\pi \operatorname{cotg} \pi z$ ilustruje následující důkaz Eulerova vzorce. Poznamenejme ještě, že Ferdinand Gotthold Max Eisenstein (1823 – 1852) se zabýval funkcemi podobného tvaru a pomocí nich dospěl k významným výsledkům.

Věta 8.6.7 (Euler 1734). *Pro všechna $z \in \mathbb{C}$ platí rovnost*

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{k=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{z^2}{k^2}\Big). \tag{8.27}$$

Důkaz. Protože řada $\sum_{k=1}^{\infty} z^2/k^2$ je normálně konvergentní v $\mathbb{C}$, je funkce na pravé straně vzorce (8.27) holomorfní v $\mathbb{C}$. Položíme-li $f_k(z) := 1 - z^2/k^2$, $k \in \mathbb{N}$, a $f(z) = \pi z p(f_k(z))$, dostaneme pro logaritmické derivace identity

$$\frac{f_k'(z)}{f_k(z)} = \frac{2z}{z^2 - k^2}\,, \quad \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - k^2}\,, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}\,.$$

Funkce $f(z)$ a funkce $g(z) := \sin \pi z$ mají v oblasti $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ stejnou logaritmickou derivaci, rovnou $\pi \operatorname{cotg} \pi z$. Z identity $f'/f = g'/g$ však vyplývá rovnost

$$(f/g)' = (f'g - fg')/g^2 \equiv 0\,,$$

takže funkce f/g je konstantní. Protože

$$\lim_{z \to 0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to 0} \frac{\pi z}{\sin \pi z}\, p_1(f_k(z)) = 1\,,$$

je $f \equiv g$ v G, což dokazuje platnost vzorce (8.27) v této množině. Protože v bodech $z \in \mathbb{Z}$ jsou obě strany (8.27) rovny 0, platí vzorec v celé rovině $\mathbb{C}$. □

Wallisův vzorec z Příkladu 8.4.6 (4) dostaneme z (8.27) dosazením $z = 1/2$. Podobně dosazením $z = 1$ dostaneme vzorec z Příkladu 8.4.6 (3).

Poznámka 8.6.8. Mezi nejdůležitější funkce, se kterými v matematice pracujeme, nesporně patří funkce Γ [3]). Začneme konstatováním, že pokud se čtenář s funkcí Γ již dříve seznámil, pak ví, že tato funkce souvisí s faktoriály, neboť $\Gamma(n+1) = n!$, a že je definována vzorcem (tzv. **Eulerův integrál druhého druhu**)

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\, dt\,, \quad x \in (0, \infty)\,. \tag{8.28}$$

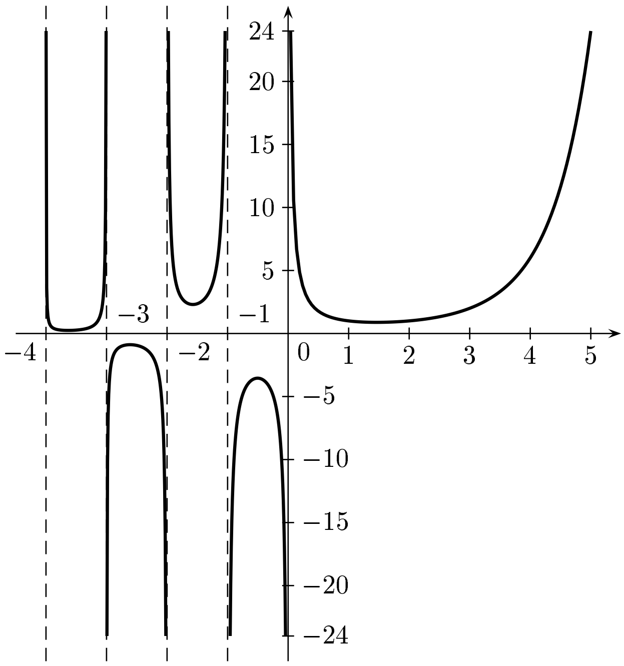
Je těžké tento vzorec „uhodnout"? Dnes se počítá integrál v (8.28) pro $x = n + 1$ při procvičování metody per partes. Euler k němu mohl dospět např. takto: Metoda per partes dává rekurentní vzorec pro výpočet

$$\begin{aligned} I_n = \int_0^1 (-\log x)^n\, dx &= -x(-\log x)^n \Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 x\, n(\log x)^{n-1} \Big(-\frac{1}{x}\Big)\, dx = \\ &= 0 + \int_0^1 (-\log x)^{n-1}\, dx = n I_{n-1} \end{aligned}$$

[3]) Viz např. citát ze [8], str. 460: *Aside from the so-called „elementary functions"..., the special function that occures most frequently in analysis is undoubtedly the Gamma function* (Kromě tzv. „elementárních funkcí"..., funkce, která se objevuje v analýze nejčastěji, je nepochybně funkce gama).

a vzorec pro $I_n = n!$. Podobný výpočet nalezneme u Eulera v práci z r. 1729. Položíme-li ještě $\log x = t$, resp. $x = \exp t$, dostaneme

$$I_n = \int_0^1 (-\log x)^n dx = \int_{-\infty}^0 (-t)^n e^t dt = \int_0^\infty t^n e^{-t} dt$$



Obr. 8.1: Graf funkce $\Gamma(x)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0$.

Pokud bychom nahradili v posledním integrálu parametr $n \in \mathbb{N}$ „spojitým parametrem“ $s \in \mathbb{R}$, (Newtonův) integrál by existoval pro $s > -1$. Položíme-li proto ještě $s = x - 1$, dostaneme vzorec (8.28). V Historických poznámkách na konci kapitoly se čtenář dozví další detaily z historie funkce Γ. Tato poznámka však mj. ukazuje, jak jednoduše pomocí metody per partes dokázat, že funkce Γ vyhovuje podmínce $\Gamma(1) = 1$ a funkcionální rovnici

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)\,, \quad x \in (0, \infty)\,.$$

Lemma 8.6.9. *Označíme-li pro každé $n \in \mathbb{N}$*

$$\Gamma_n(x) := \int_0^n t^{x-1}\Big(1 - \frac{t}{n}\Big)^n dt\,, \quad x \in \mathbb{R}_+\,, \tag{8.29}$$

je $\lim_{n\to\infty} \Gamma_n(x) = \Gamma(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}_+$.

Důkaz. Nejprve dokážeme pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a všechna $t \in [\,0, n\,]$ odhad

$$0 \le \mathrm{e}^{-t} - \Big(1 - \frac{t}{n}\Big)^n \le \frac{t^2}{n}\,\mathrm{e}^{-t}\,. \tag{8.30}$$

Porovnáním členů Taylorových rozvojů dostaneme pro $u \in [0, 1)$

$$1 + u \le 1 + u + \frac{1}{2}u^2 + \cdots = \mathrm{e}^u \le 1 + u + u^2 + \cdots = \frac{1}{1-u}\,,$$

takže platí nerovnosti

$$1 + u \le \mathrm{e}^u \le (1-u)^{-1}, \quad u \in [0, 1)\,.$$

Dosadíme t/n za u a upravíme; obdržíme tak pro $t \in [0, n)$ odhad

$$\Big(1 + \frac{t}{n}\Big)^{-n} \ge e^{-t} \ge \Big(1 - \frac{t}{n}\Big)^n,$$

z něhož již vyplývá (8.30):

$$\begin{aligned}0 \le \mathrm{e}^{-t} - \Big(1 - \frac{t}{n}\Big)^n &= \mathrm{e}^{-t}\Big(1 - \mathrm{e}^t\Big(1 - \frac{t}{n}\Big)^n\Big) \le \mathrm{e}^{-t}\Big(1 - \Big(1 + \frac{t}{n}\Big)^n\Big(1 - \frac{t}{n}\Big)^n\Big) = \\ &= \mathrm{e}^{-t}\Big(1 - \Big(1 - \frac{t^2}{n^2}\Big)^n\Big) \le \frac{t^2}{n}\,e^{-t}\,.\end{aligned}$$

Pro odvození posledně uvedené nerovnosti jsme užili tzv. *Bernoulliho nerovnost* $(1+x)^n \ge 1 + nx$, platnou pro $x \ge -1$, $n \in \mathbb{N}$; viz [$\mathbb{V}$], str. 28. Pro $x = -t^2/n^2 \ge -1$ je totiž $1 - (1+x)^n \le -nx$.

Nyní odhadneme rozdíl

$$\begin{aligned}|\Gamma(x) - \Gamma_n(x)| &\le \Big|\int_0^n \mathrm{e}^{-t}\Big(1 - \mathrm{e}^t\Big(1 - \frac{t}{n}\Big)^n\Big)\,t^{x-1}dt\Big| + \Big|\int_n^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}dt\Big| \le \\ &\le \frac{1}{n}\int_0^n \mathrm{e}^{-t}t^{x+1}dt + \int_n^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}dt < \frac{1}{n}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{x+1}dt + \int_n^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}dt\ ;\end{aligned}$$

poslední dva výrazy pro $n \to \infty$ konvergují k 0, což dokazuje tvrzení. □

Lemma 8.6.10. *Pro každé $x \in \mathbb{R}_+$ je*

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\,n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}\,. \tag{8.31}$$

Důkaz. Integrací per partes dostaneme z identit

$$\Gamma_n(x) = \int_0^n t^{x-1}\Big(1 - \frac{t}{n}\Big)^n dt = \frac{1}{n^n}\int_0^n t^{x-1}(n-t)^n dt$$

postupně identity

$$\frac{1}{n^n}\frac{n}{x}\int_0^n t^x(n-t)^{n-1}dt = \cdots = \frac{1}{n^n}\frac{n(n-1)\cdots 1}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}\int_0^n t^{x+n-1}dt = $$
$$= \frac{n^x}{x}\Big(\frac{1}{x+1}\Big)\Big(\frac{2}{x+2}\Big)\cdots\Big(\frac{n}{x+n}\Big),$$

z čehož již pomocí Lemmatu 8.6.9 plyne (8.31). □

8.7 Weierstrassova funkce

Vyšetříme další funkci, definovanou pomocí nekonečného součinu. V historických poznámkách blíže okomentujeme roli tohoto příkladu ve vývoji poznatků o funkci Γ i o vyjadřování celých funkcí ve tvaru nekonečného součinu.

Lemma 8.7.1. *Nekonečný součin*

$$\prod_{k=1}^{\infty}\Big(1+\frac{z}{k}\Big)\mathrm{e}^{-z/k} \tag{8.32}$$

konverguje normálně v celé Gaussově rovině $\mathbb{C}$.

Důkaz. Tak jako v případě funkce sin stačí vyšetřit speciální kompaktní množiny. Označme $K_n := \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| \le n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Protože

$$\Big(1+\frac{z}{k}\Big)\,\mathrm{e}^{-z/k} = 1 + \Big[\Big(1+\frac{z}{k}\Big)\,\mathrm{e}^{-z/k} - 1\Big],$$

stačí ukázat, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je

$$\sum_{k=n}^{\infty}\Big|1-\Big(1+\frac{z}{k}\Big)\,\mathrm{e}^{-z/k}\Big| < \infty\,.$$

Použijeme odhad vyžadující krátký výpočet; odhad platí pro všechna w, $|w|<1$:

$$|1-(1-w)\,\mathrm{e}^w| = \Big|1-\sum\frac{w^k}{k!}+\sum\frac{w^{k+1}}{k!}\Big| = \Big|\sum\frac{w^{k+1}}{k!}-\sum\frac{w^{k+1}}{(k+1)!}\Big| =$$
$$= \Big|\sum_{k=1}^{\infty}w^{k+1}\Big(\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}\Big)\Big| \le |w|^2\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}\Big) = |w|^2\,.$$

Je-li $|z| \le k$ a položíme-li $w=-z/k$ dostaneme nerovnost

$$\Big|1-\Big(1+\frac{z}{k}\Big)\,\mathrm{e}^{-z/k}\Big| \le \frac{|z|^2}{k^2}\,,$$

takže na K_n je

$$\sum_{k=n}^{\infty} \left|1 + \left(1 - \frac{z}{k}\right) \mathrm{e}^{-z/k}\right| \le n^2 \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty\,.$$

Tím je důkaz normální konvergence součinu (8.32) dokončen. □

Poznámka 8.7.2. Nekonečný součin $p_1(1+z/k)$ diverguje např. v bodě 1, neurčuje tedy celou funkci. Nekonečný součin (8.32) je funkce holomorfní v $\mathbb{C}$. Čtenáře upozorňujeme na to, že *divergentní* nekonečný součin $p_1(1+z/k)$ byl změněn pomocí exponenciálního faktoru $\exp(-z/k)$ na konvergentní. Weierstrass byl schopen rozeznat důležitost tohoto „triku“ a po zobecnění ho rozvinout v celou teorii; viz dále Věta 8.9.4.

Z dokázané normální konvergence součinu vyplývá, že

$$H(z) := zp_1\Big(\Big(1 + \frac{z}{k}\Big)e^{-z/k}\Big) = \lim_{n\to\infty} z\, p_1^n\Big(\Big(1 + \frac{z}{k}\Big)e^{-z/k}\Big)$$

je celá funkce, jejíž nulové body mají násobnost 1 a leží právě v bodech $-n$, kde $n \in \mathbb{N}_0$. Pro H dostáváme pomocí vzorce (8.27)

$$-H(z)\cdot H(-z) = z^2 p_1\left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right) = \frac{z}{\pi}\sin \pi z\,. \tag{8.33}$$

Zhruba řečeno, „$H(z)$ je polovina činitelů Eulerova součinu pro sin“.

Připomeňme, že označení $\gamma := \lim_{n\to\infty}\big(\sum_{k=1}^n 1/k - \log n\big)$ je standardním označením tzv. **Euler-Mascheroniho konstanty**; viz např. [$\mathbb{V}$], str. 162.

Lemma 8.7.3. *Je* $H(1) = \mathrm{e}^{-\gamma}$.

Důkaz. Užitím „teleskopické vlastnosti“ součinu dostaneme

$$p_1^n\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \frac{1+1}{1}\,\frac{2+1}{2}\cdots\frac{n+1}{n} = n+1\,,$$

takže

$$\begin{aligned} H(1) &= \lim_{n\to\infty} p_1^n\left(\Big(1+\frac{1}{k}\Big)\exp\left(-\frac{1}{k}\right)\right) = \\ &= \lim_{n\to\infty} \exp\Big(\log(n+1) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\Big) = \lim_{n\to\infty}\exp\Big(\log n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\Big)\,. \end{aligned}$$

Poslední rovnost plyne z toho, že $\log(n+1) - \log n = \log(1 + 1/n) \to 0$ pro $n \to \infty$. □

Protože $n^z = \exp(z\log n)$, lze vyjádření H upravit:

$$H(z) = zp_1\left(\Big(1+\frac{z}{k}\Big)e^{-z/k}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{n!\,n^z}\exp\Big[z\Big(\log n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\Big)\Big]\,.$$

Odtud již vyplývá vzorec, který čtenáři porovnáním se vzorcem (8.31) napoví, jak budeme postupovat dále:

$$H(z) = e^{-\gamma z} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{n!n^z}\,. \tag{8.34}$$

Definice 8.7.4. **Weierstrassovu funkci** definujeme rovností (srv. se (8.34)):

$$\Delta(z) := e^{\gamma z} H(z)\,, \quad z \in \mathbb{C}\,. \tag{8.35}$$

Poznámka 8.7.5. Funkce Δ má jednoduché nulové body právě v bodech $-n$, $n \in \mathbb{N}_0$. Dále, opět s ohledem na (8.34), je $\overline{\Delta(z)} = \Delta(\overline{z})$, takže $\Delta(z) \in \mathbb{R}$ pro $z \in \mathbb{R}$ a zřejmě $\Delta(z) > 0$ pro všechna $z \in (0,\infty)$. Je též $\Delta(1) = 1$ a

$$\Delta(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{n!n^z}\,, \quad z \in \mathbb{C}\,. \tag{8.36}$$

Odtud snadno spočteme, že pro všechna $z \in \mathbb{C}$ je

$$\begin{aligned} z\Delta(z+1) &= \lim_{n\to\infty} \frac{z(z+1)\cdots(z+n+1)}{n!n^{z+1}} = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{n!n^z} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{z+n+1}{n} = \Delta(z)\,. \end{aligned}$$

Shrňme: Funkce Δ je holomorfní v $\mathbb{C}$, množina jejích (vesměs jednoduchých) nulových bodů je $\{-n;\, n \in \mathbb{N}_0\}$. Funkce Δ vyhovuje podmínce $\Delta(1) = 1$ a splňuje funkcionální rovnici $z\Delta(z+1) = \Delta(z)$, $z \in \mathbb{C}$.

8.8 Funkce Γ v komplexní rovině

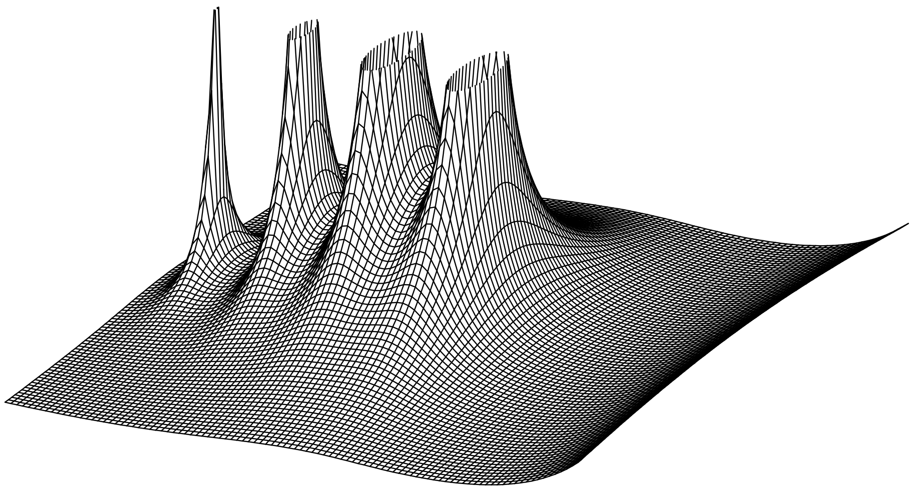
Definice 8.8.1. Definujeme novou funkci vztahem $\Gamma(z) := 1/\Delta(z)$, $z \in \mathbb{C}$, kde Δ je Weierstrassova funkce zavedená v Definici 8.7.4. Ta se nazývá **funkce gamma** nebo též **Γ-funkce**.

Důsledek 8.8.2 (Gaussův vzorec 1811*). *Z Definice 8.7.4 a z* (8.36) *plyne*

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\,n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}\,, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{-n\,;\, n \in \mathbb{N}_0\}\,. \tag{8.37}$$

Poznámka 8.8.3. Definice 8.8.1 je *korektní*, porovnáním s (8.31) snadno nahlédneme, že je rozšířením definice funkce Γ pomocí integrálu, známé z reálného oboru. Toto rozšíření je funkce meromorfní v $\mathbb{C}$, v bodech $-n$, $n \in \mathbb{N}_0$, má Γ póly a lze ji limitou v těchto bodech spojitě rozšířit na $\mathbb{C}$. Snadno též nahlédneme, že toto rozšíření je určeno *jednoznačně*.

Základní vlastnosti funkce Γ plynou snadno z vlastností funkce Δ dokázaných v Poznámce 8.7.5. Shrnuje je následující lemma:



Obr. 8.2: Pohled na část grafu funkce $|\Gamma|$ (výřez)

Lemma 8.8.4. *Funkce Γ je holomorfní funkce v $\mathbb{C}\setminus\{-n\,;\, n\in\mathbb{N}_0\}$ a nenulová ve všech bodech této množiny. Každý bod $-n$, $n\in\mathbb{N}_0$, je jednoduchým pólem funkce Γ a ta vyhovuje funkcionální rovnici*

$$f(z+1) = zf(z)\,, \quad z\in\mathbb{C}\,, \tag{8.38}$$

přičemž $f(1)=1$; pro všechna $z\in\mathbb{C}$ a všechna $n\in\mathbb{N}$ je

$$f(z+2) = (z+1)\,zf(z)\,, \quad f(z+n) = (z+n-1)(z+n-2)\dots(z+1)\,zf(z)\,.$$

Pro každé $z\in\mathbb{C}$ je $\overline{\Gamma(z)} = \Gamma(\overline{z})$, pro každé $x>0$ je $\Gamma(x)>0$. Dále platí odhad

$$|\Gamma(z)| \le \Gamma(x) \text{ pro všechna } z, \text{ pro něž } \operatorname{Re} z = x > 0\,. \tag{8.39}$$

V každém pásu $\{z\in\mathbb{C}\,;\, r\le\operatorname{Re} z\le s\}$, kde $0<r<s<\infty$ je funkce Γ omezená.

Důkaz. Z Definice 8.8.1 a Poznámky 8.7.5 plyne přímým výpočtem, že

$$\Gamma(z+1) = (\Delta(z+1))^{-1} = z/\Delta(z) = z\Gamma(z)\,, \quad z\in\mathbb{C}\,,$$

a z (8.38) indukcí i další rovnice. Z Poznámky 8.7.5 je patrná rovnost $\Gamma(1)=1$ i rovnost $\overline{\Gamma(z)} = \Gamma(\overline{z})$. Protože pro $z=x+iy$ s $x>0$ je $|n^z| = n^x$ a $|z+n|\ge x+n$, plyne z Gaussova vzorce (8.37) odhad (8.39). □

Řešení f rovnice (8.38) mají jednu vlastnost podobnou vlastnostem periodických funkcí: Znalost funkce f např. na intervalu $(0,1\,]$ nám umožňuje určit funkci

f na intervalu $(1, 2]$ a pak dále na intervalu $(2, 3]$ atd. Můžeme též použít vzorec

$$f(x) = \frac{1}{x(x+1)\dots(x+n-1)} f(x+n)\,, \tag{8.40}$$

který ukazuje i možnost „zpětného" výpočtu pro ta $z \in \mathbb{C} \setminus \{-n\,;\, n \in \mathbb{N}_0\}$, pro která je $\operatorname{Re} z \le 0$.

Poznámka 8.8.5. Funkce Γ je opět, stejně jako v případě elementárních funkcí, holomorfním rozšířením čtenáři patrně dříve známé reálné funkce. Poznamenejme, že to není jediný způsob, jak k takovému rozšíření dospět. Integrál v (8.28) má v případě, že do něj dosadíme z za x, smysl pro všechna $z \in \mathbb{C}$, pro něž je $\operatorname{Re} z > 0$. Pak lze užít např. vzorce (8.40) a pomocí něj rozšířit funkci Γ meromorfně na zbývající část Gaussovy roviny.

Na Obr. 8.2 je znázorněn výřez z „trojrozměrného" grafu *absolutní hodnoty* funkce Γ. Seříznuté „komíny" odpovídají zprava doleva pólům funkce v bodech $0, -1, -2, -3$. Porovnáním s Obr. 8.1 snadno nahlédneme, že limity Γ vzhledem k $\mathbb{R}$ v těchto bodech *neexistují*, proto odpovídající obrázky pro $\operatorname{Re}\Gamma$ a $\operatorname{Im}\Gamma$ by nebyly příliš přehledné.

Lemma 8.8.6. *Je-li $n \ge 0$ celé číslo, je*

$$\operatorname{res}(\Gamma, -n) = \frac{(-1)^n}{n!}\,.$$

Vztah funkce Γ k sinu popisuje vzorec

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}\,, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}\,. \tag{8.41}$$

Důkaz. Funkce Δ má *jednoduché* nulové body právě v $M := \{-n; n \in \mathbb{N}_0\}$, takže póly funkce Γ jsou také jednoduché a leží právě v M. Je tedy

$$\begin{aligned}\operatorname{res}(\Gamma, -n) &= \lim_{z\to -n} (z+n)\Gamma(z) = \lim_{z\to -n} \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)} = \\ &= \frac{\Gamma(1)}{(-n)(-n+1)\cdots(-1)} = \frac{(-1)^n}{n!}\,, \quad n \in M\,.\end{aligned} \tag{8.42}$$

Výpočtem spolu s užitím vzorce (8.33) dostaneme vztah k sinu: je

$$\Delta(z)\,\Delta(1-z) = -\frac{1}{z}\Delta(z)\,\Delta(-z) = -\frac{1}{z} H(z)\,H(-z),$$

a tedy $\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \pi/\sin \pi z$, $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. □

8.9 Faktorizační věta

Náš další postup je založen na nahrazení členů eventuálně divergentního nekonečného součinu $p(1 - z/z_k)$ komplikovanějšími funkcemi podobných vlastností. Tzv. „Weierstrassovy faktory", které se k tomu využívají, jsou funkce málo se lišící od 1, které však způsobí, že modifikovaný nekonečný součin již konverguje.

Definice 8.9.1. **Weierstrassovy faktory** $E_m(z)$ jsou pro všechna $z \in \mathbb{C}$ definovány rovnostmi

$$E_0(z) = (1-z)\,,$$
$$E_m(z) = (1-z)\exp\Big(\frac{z}{1} + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^m}{m}\Big)\,, \quad m \in \mathbb{N}\,.$$

Jak vidíme, je do exponenciály na pravé straně rovnosti dosazen m-tý částečný součet mocninné řady funkce $-\log(1-z)$ se středem 0, takže pro $m \to \infty$ je $E_m(z) \to (1-z)\exp(-\log(1-z)) = 1$ pro všechna $z \in U(0,1)$.

Lemma 8.9.2. *Je-li $m \in \mathbb{N}_0$ a $|z| \le 1$, je $|\,1 - E_m(z)\,| \le |z|^{m+1}$.*

Důkaz. Protože pro $m = 0$ je tvrzení zřejmé, předpokládejme, že $m \ge 1$. Jelikož

$$E_m'(z) = \big(-1 + (1-z)(1 + z + \cdots + z^{m-1})\big)\exp\Big(\frac{z}{1} + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^m}{m}\Big) =$$
$$= -z^m \exp\Big(\frac{z}{1} + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^m}{m}\Big)\,,$$

má $E_m'(z)$ v bodě 0 nulový bod násobnosti m. Všimněme si zároveň, že v Taylorově rozvoji funkce $-E_m'(z)$ o středu 0 jsou všechny koeficienty nezáporné. Protože $1 - E_m(0) = 0$ a protože $(1 - E_m(z))' = -E_m'(z)$ má v bodě 0 nulový bod násobnosti m, má funkce $1 - E_m(z)$ v bodě 0 nulový bod násobnosti $(m+1)$. Funkce $(1 - E_m(z))/z^{m+1}$ (definovaná v bodě 0 jako $\lim_{z\to 0}(1 - E_m(z))/z^{m+1}$) je proto celá; její Taylorova řada o středu 0 má, jak již bylo řečeno, všechny koeficienty a_k nezáporné. Protože $\sum a_k = 1 - E_m(1) = 1$, je

$$\Big|\frac{1 - E_m(z)}{z^{m+1}}\Big| \le \sum a_k |z|^k \le \sum a_k = 1\,,$$

pro každé $z \in \overline{U(0,1)}$, z čehož ihned plyne dokazované tvrzení. □

Věta 8.9.3. *Nechť $\{z_k\}$ je libovolná posloupnost komplexních čísel, pro kterou $\lim z_k = \infty$. Nechť $m_k \ge k-1$ pro každé $k \in \mathbb{N}$ a nechť $n \in \mathbb{N}_0$. Pak je*

$$h(z) := z^n\, p_1\Big(E_{m_k}\Big(\frac{z}{z_k}\Big)\Big)\,, \quad z \in \mathbb{C}\,,$$

celá funkce, která má tyto vlastnosti:

(1) *Bod 0 je jejím nulovým bodem násobnosti n, a*

(2) *číslo $w \in \mathbb{P}$ je jejím nulovým bodem násobnosti m, právě tehdy, když má množina $\{k \in \mathbb{N}\,;\, w = z_k\}$ právě m prvků.*

Důkaz. Zvolme $r \in \mathbb{R}_+$ a uvažujme $z \in \overline{U(0,r)}$; zvolme dále $n \in \mathbb{N}$ tak, že $|z_k| > 2r$ pro všechna $k \geq n$. Potom podle Lemmatu 8.9.2 je

$$\left|1 - E_{m_k}\left(\frac{z}{z_k}\right)\right| \leq \left|\frac{z}{z_k}\right|^{1+m_k} \leq \left(\frac{r}{|z_k|}\right)^{1+m_k} \leq \left(\frac{r}{|z_k|}\right)^k \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n . \tag{8.43}$$

Řada $\sum |E_{m_k}(z/z_k) - 1|$ proto konverguje stejnoměrně na $\overline{U(0,r)}$ a s ohledem na to, že úvahu lze provést pro každé $r > 0$, konverguje lokálně stejnoměrně v $\mathbb{C}$. Zbytek je důsledkem Poznámky 8.5.2, (2). $\square$

Ukázali jsme, jak sestrojit celou funkci s předepsanou množinou nulových bodů. Odtud je již pouze krok od rozkladu libovolné celé funkce v nekonečný součin.

Věta 8.9.4 (Weierstrass 1876). *Nechť $f \not\equiv 0$ je celá funkce, pro kterou je počátek nulovým bodem násobnosti $n \in \mathbb{N}_0$. Nechť je dále $\{z_k\}$ posloupnost (konečná nebo nekonečná) jejích zbývajících nulových bodů, které se v posloupnosti vyskytují právě tolikrát, kolik činí jejich násobnost. Potom existuje posloupnost $\{m_k\}$ čísel z $\mathbb{N}_0$ a celá funkce g tak, že*

$$f(z) = \mathrm{e}^{g(z)} z^n \prod_k E_{m_k}(z/z_k)\,, \quad z \in \mathbb{C}\,. \tag{8.44}$$

Důkaz. Pro konečný počet nulových bodů f vyplývá tvrzení z Lemmatu 5.9.6 o faktorizaci; provedeme proto důkaz jen pro nekonečnou posloupnost $\{z_k\}$. Protože $f \not\equiv 0$, nemůže mít $\{z_k\}$ podle Věty 5.7.1 hromadný bod v $\mathbb{C}$, takže $z_k \to \infty$. Nyní podle Věty 8.9.3 zvolíme $m_k \geq k - 1$ a sestrojíme příslušnou celou funkci h s nulovými body z_k (eventuálně s faktorem z^l). Pak však má podíl f/h pouze odstranitelné singularity a je celou funkcí bez nulových bodů. Lze ho proto zapsat podle Důsledku 5.5.8 ve tvaru $f/h = \exp \circ g$. Tím je věta o reprezentaci ve tvaru (8.44) dokázána. $\square$

Poznámka 8.9.5. Často je důležité získat informaci, kdy lze ve vyjádření funkce f za posloupnost $\{m_k\}$ volit konstantní posloupnost $\{m\}$. Je-li např. počet nulových bodů f konečný a f je tedy polynom, lze položit $m_k = m = 0$. O takové možnosti rozhoduje tzv. **řád celé funkce**, který kvantitativně popisuje rychlost „průměrného růstu“ funkce $|f|$ pro $z \to \infty$, nebo jiné veličiny, které s ním souvisejí. Seznámíme se pouze s jednou z nich.

Definice 8.9.6. Nechť $\{w_k\}$ je posloupnost nenulových komplexních čísel, pro kterou je $w_k \to \infty$. Potom **exponentem konvergence** této posloupnosti nazýváme číslo

$$\mu := \inf\left\{r > 0\,;\ \sum_{k=1}^{\infty} |w_k|^{-r} < \infty\right\}.$$

Je $\mu \in [0, +\infty]$. Speciálně: je $\mu = 0$, konvergují-li řady pro všechna $r > 0$, a $\mu = +\infty$, divergují-li řady pro všechna $r > 0$).

Věta 8.9.7. *Nechť $\{z_k\}$ má konečný exponent konvergence μ a nechť m je nezáporné celé číslo větší než $\mu - 1$. Potom je nekonečný součin $p(E_m(z/z_k))$ celá funkce s nulovými body z_k (včetně násobnosti).*

Důkaz. Stejně jako v (8.43) při důkazu Věty 8.9.3 dostaneme

$$\Big|1 - E_m\Big(\frac{z}{z_k}\Big)\Big| \le \Big|\frac{z}{z_k}\Big|^{1+m} \le \Big(\frac{r}{|z_k|}\Big)^{1+m}.$$

Protože je $1+m > \mu$, řada $\sum_{k=1}^{+\infty} 1/|z_k|^{1+m}$ podle předpokladu konverguje. Proto také řada $\sum |E_m(z/z_k) - 1|$ konverguje jako v důkazu Věty 8.9.3 stejnoměrně na každém $\overline{U(0,r)}$; zbytek úvahy je rovněž stejný. □

Historická poznámka 8.9.8. Nekonečné součiny nejsou o mnoho „mladší“ než nekonečné řady. Ani u nich se zprvu otázky konvergence nevyšetřovaly. Již r. 1579 François Viète (1540 – 1603) nalezl pro π toto vyjádření:

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdot \cdots\cdot \tag{8.45}$$

Téměř o 100 let později dospěl John Wallis (1616 – 1703) ve své knize *Arithmetica infinitorum* r. 1655 k nyní známějšímu vzorci

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{k\to\infty} \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdots(2k)(2k)\cdots}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdots(2k-1)(2k+1)\cdots} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)}. \tag{8.46}$$

Wallisův vzorec bývá odvozován v základním kursu matematické analýzy. Připomeňme na tomto místě, že Wallis byl také jedním z prvních matematiků, pro které komplexní čísla nepředstavovala cosi magického (srovnával jejich legitimitu se zápornými čísly). Byl také jedním z prvních, kdo se snažil znázorňovat komplexní čísla pomocí bodů v rovině.

Je zajímavé, že jedna z cest k elementárnímu výpočtu hodnoty Laplaceova integrálu z Příkladu 5.4.15 vede přes nekonečný Wallisův součin (8.46). To objevil již r. 1890 Thomas-Jan Stieltjes (1856 – 1894). Pro integrál

$$I_n := \int_0^{\infty} x^n \mathrm{e}^{-x^2}\,dx$$

se odvodí pomocí metody per partes rekurence

$$2I_n = (n-1)I_{n-2}.$$

Protože $I_1 = 1/2$, dostaneme snadno indukcí

$$2^k I_{2k} = 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)I_0, \quad 2^{k+1}I_{2k+1} = k! \tag{8.47}$$

pro všechna $k \in \mathbb{N}$. Z rovnosti $I_{n+1} + 2tI_n + t^2 I_{n-1} = \int_0^\infty x^{n-1}(x+t)^2 \mathrm{e}^{-x^2}\, dx$, $t \in \mathbb{R}$, dostaneme pro diskriminant

$$I_n^2 < I_{n-1} I_{n+1}\,, \quad \text{a tedy } 2I_n^2 < nI_{n-1}^2\,.$$

Pomocí (8.47) dostaneme

$$\frac{k!}{4k+2} = \frac{2}{2k+1} I_{2k+1}^2 < I_{2k}^2 < I_{2k-1} I_{2k+1} = \frac{k!}{4k}\,.$$

Odtud vyplývá

$$I_{2k}^2 = \frac{(k!)^2}{4k+2}(1+\varepsilon_k)\,, \quad \text{kde } 0 < \varepsilon_k < 1/2k\,.$$

Užijeme-li opět (8.47), dostaneme

$$2I_0^2 = \frac{[2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)]^2}{[1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)]^2 (2k+1)}(1+\varepsilon_k)\,,$$

což s $\varepsilon_k \to 0$ a vzorcem (8.46) dá $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}/2$.

Byl to však teprve LEONHARD EULER (1707 – 1783), kdo se začal nekonečnými součiny systematicky zabývat. Vyjádření sin a cos nekonečnými součiny objevil v letech 1734-5. Námitky JOHANNA BERNOULLIHO (1667 – 1748), že odvození je legitimní jen v případě, že sinus nemá v $\mathbb{C}$ jiné nulové body nežli právě celé násobky čísla π, byly jedním z impulsů, které Eulera dovedly ke vzorci $\exp iz = \cos z + i \sin z$. Pro odůvodnění vzorce (8.22) jsme použili velmi speciální charakteristiku funkce kotangens, založenou na tzv. Herglotzově triku. Objevitel této charakteristiky GUSTAV HERGLOTZ (1881 – 1953) ji užíval ve svých přednáškách, nikdy ji však nepublikoval. Jedním z prvních, kdo Herglotzův trik použil, byl EMIL ARTIN (1898 – 1962), a to v krásné klasické práci [1] z r. 1931. Knižně byla uveřejněn až v r. 1950.

CARL THEODOR WILHELM WEIERSTRASS (1815 – 1897) zavedl funkci z (8.32), její vztah k funkci Γ však lze nalézt již u OSCARA SCHLÖMILCHA (1823 – 1901) v práci z r. 1843. Později, snad nezávisle, se objevuje u F. W. NEWMANA v práci z r. 1848 (viz [6]). Weierstrassovy výsledky o funkci Δ byly odborníky velmi oceňovány. Je známo, že CHARLES HERMITE (1822 – 1901) se v dopise vyjádřil, že by jim měla být věnována větší pozornost. Někdy se funkce z (8.32) užívá jako ilustrace k Weierstrassově faktorizační větě, tu však Weierstrass dokázal později.

Duchovním „otcem“ funkce Γ je nesporně Euler. V r. 1729 dospěl k vyjádření funkce Π pomocí nekonečného součinu a sdělil to dopisem z 13. října 1729 CHRISTIANU GOLDBACHOVI (1690 – 1764).

Integrální vyjádření funkce $\Pi(z) := \Gamma(z+1)$ objevil o rok později a krátce nato dokázal, že obě vyjádření jsou identická. V té době také objev publikoval v práci *De progressionibus transcendentibus* …, kterou lze nalézt ve dílu I_{14} jeho sebraných spisů; je však třeba mít na paměti, že Euler vyšetřoval funkci Γ pouze na $\mathbb{R}_+$. Poznamenejme, že CARL FRIEDRICH GAUSS (1777 – 1855) uvedl vzorec z Důsledku 8.8.2 v korespondenci s FRIEDRICHEM WILHELMEM BESSELEM (1784 – 1846), v dopise z 21. listopadu 1811 (srv. s Historickou poznámkou 4.8.10), ovšem v jiném tvaru pro funkci funkci $\Pi(z)$. V r. 1812 vyšel z této formule při studiu hypergeometrických řad. Je však nesporné, že Euler vzorec uváděl již r. 1776; v poněkud odlišné formě je vzorec obsažen vlastně již v práci z r. 1729. Weierstrass připisuje objev (8.37) Gaussovi, neboť tak jako on Eulerův výsledek neznal. Vzorec (8.41) objevil Euler nejpozději r. 1749.

Existují dvě velmi slavné charakterizační věty pro funkci Γ, které uvedeme alespoň pro informaci; první charakterizuje restrikci funkce Γ na $\mathbb{R}_+$, druhá je charakteristikou komplexní funkce Γ v $\mathbb{C}$.

První větu dokázali v práci z r. 1922 Harald Bohr (1887 – 1925) a Johannes Mollerup (1872 – 1937): *Nechť funkce h má následující vlastnosti:* (i) *vyhovuje funkcionální rovnici $h(x+1) = x\,h(x)$, $x \in (0,\infty)$, platí pro ni* (ii) $h(1) = 1$ *a* (iii) *je na intervalu* $(0,\infty)$ *logaritmicky konvexní, tj. složená funkce* $\log \circ h$ *je konvexní na* $(0,\infty)$. *Potom je funkce h těmito vlastnostmi jednoznačně určena a je $h = \Gamma$.* Jejich důkaz později významně zjednodušil Artin.

Druhá věta je mladší a jejím autorem je Helmut Wielandt (*1910), ač ji nikdy nepublikoval. Její tvrzení pochází z r. 1938, poprvé ho však zveřejnil Konrad Knopp (1882 – 1957): *Nechť f je holomorfní funkce v oblasti $G := \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} z > 0\}$, vyhovuje na G funkcionální rovnici $f(z+1) = zf(z)$, a na pásu*

$$S := \{z \in \mathbb{C}; 1 \leq \operatorname{Re} z < 2\}$$

je omezená. Potom $f = a\Gamma$ na G, kde $a := f(1)$.

Pomocí této věty o jednoznačnosti (je to adekvátní název, neboť hodnotu $a = f(1)$ můžeme specifikovat) lze elegantně odvodit další vlastnosti funkce Γ, je tedy pohodlným nástrojem pro její zkoumání. Viz např. [7].

Poznamenejme, že již r. 1906 vyšly *monografie* Nielse Nielsena (1865 – 1931) cele věnované Γ-funkci. V r. 1965 byly přetištěny v USA v jediné knize [5].

Literatura:

[1] Artin, E.: *Einführung in die Theorie der Gammafunktion*, Teubner, Leipzig – Berlin, 1931.

[2] Davis, P. J.: *Leonhard Euler's integral: A historical profile of the Gamma function*, Amer. Math. Monthly **66** (1959), str. 849 – 868, (též v The Chauvenet Papers: A collection ofprize-winning expository papers in mathematics, Vol II, MAA1978, str. 332 – 351).

[3] Kline, M.: *Mathematical Thoughts from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, New York, 1972, 1990.

[4] Lukeš, J.: *Příklady k teorii Lebesgueova integrálu*, SPN, Praha, 1968.

[5] Nielsen, N.: *Handbuch der Theorie der Gammafunktion*, Chelsea Publishing Company, New York, 1965.

[6] Remmert, R.: *Classical topics in complex function theory*, Springer, New York, 1998.

[7] Remmert, R.: *Wielandt's theorem about the Γ-function*, Amer. Math. Monthly **103** (1996), str. 214 – 220.

[8] Stromberg, K. R.: *An introduction to classical real analysis*, Wadsworth, Inc., Belmont, CA, 1981.

[9] Walter, W.: *Analysis 1*, Springer, Berlin, 1992, (3. vydání).

Kapitola 9

Konformní zobrazení

Při ztotožnění $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R}^2$ lze pomocí komplexních funkcí komplexní proměnné vyšetřovat zobrazení z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$. Přitom je výhodné studovat tyto funkce opět jako (spojitá) zobrazení z $\mathbb{S}$ do $\mathbb{S}$; proto se v této kapitole *neomezujeme na konečné funkce.* Látka této kapitoly je z velké části elementární a její základy lze ovládnout velmi brzo, tj. např. když se čtenář teprve seznamuje s vlastnostmi $\mathbb{C}$ a $\mathbb{S}$; viz např. [1]. Elementární zpracování je voleno i v [2], tam je však výklad založen na názoru. S řadou poznatků se čtenář patrně již setkal v jiné formě v elementární geometrii.

9.1 Základní vlastnosti

Čtenář by si měl připomenout Definici 8.1.1 meromorfní funkce z předcházející kapitoly; podstatnou její částí je spojitost (v rozšířeném smyslu) funkcí z $M(G)$ ve všech bodech otevřené množiny G (tj. i v pólech). Též by se měl znovu přečíst dohodu o operacích s meromorfními funkcemi v Poznámce 8.1.2.

Definice 9.1.1. Nechť $G \subset \mathbb{S}$ je otevřená množina a nechť $f : G \to \mathbb{S}$ je *prostá* meromorfní funkce na G. Potom f nazýváme **konformní zobrazení**. Dále říkáme, že funkce je **meromorfní**, resp. **konformní v bodě** $z_0 \in \mathbb{S}$, je-li meromorfní, resp. konformní v nějakém okolí $U(z_0)$. Množinu všech konformních zobrazení $f : G \to \mathbb{S}$ budeme značit $K(G)$.

Poznámky 9.1.2. 1. Při studiu konformních zobrazení z $\mathbb{S}$ do $\mathbb{S}$ budeme používat vždy proměnnou z v „množině vzorů“ a proměnnou w v „množině obrazů“, což usnadní čtenáři orientaci v textu.

2. Název „konformní zobrazení“ souvisí s tím, že konformní zobrazení „zachovává úhly mezi křivkami“. Viz Věta 9.3.3.

3. Funkce holomorfní v $G \subset \mathbb{S}$, resp. v bodě z_0, je meromorfní v G, resp. v bodě z_0. Funkce f je meromorfní v bodě $z_0 \in \mathbb{S}$, právě když je holomorfní v nějakém $P(z_0)$ a je

spojitá v bodě z_0. Přitom funkce f meromorfní v bodě $z_0 \in \mathbb{S}$ je holomorfní v bodě z_0, právě když je v tomto bodě *konečná*.

Definice 9.1.3. Body, pro které je $f(z_0) = z_0$, budeme nazývat **invariantní body** zobrazení f.

Nejprve se seznámíme se zobrazeními pomocí polynomů prvního stupně. Je-li $a \in \mathbb{P}$, $b \in \mathbb{C}$, je [1])

$$f(z) = az + b\,, \quad z \in \mathbb{S}\,,$$

lineární funkce neboli **lineární zobrazení**. Snadno zjistíme, že f je prosté spojité zobrazení $\mathbb{S}$ na $\mathbb{S}$, $f(\infty) = \infty$ a že $f^{-1}(w) = (w - b)/a$, $w \in \mathbb{S}$. Dále je

$$f(z) = \frac{a}{|a|}\,|a|\,z + b,$$

z čehož plyne možnost vyjádření funkce f ve tvaru $f = f_1 \circ f_2 \circ f_3$, kde

$$f_1(z) = z + b, \quad f_2(z) = \frac{a}{|a|}\,z, \quad f_3(z) = |a|\,z\,, \quad z \in \mathbb{S}\,.$$

Z elementární geometrie je znám geometrický význam zobrazení f_1, f_2 a f_3. Zobrazení f_1 nazýváme **posunutí** (o vektor b). Je-li $b = 0$, je $f_1 : z \mapsto z$, $z \in \mathbb{S}$, **identické zobrazení**, krátce **identita**. Pro identitu jsou všechny body $\mathbb{S}$ invariantní, ve všech ostatních případech kdy $b \neq 0$, má f_1 jediný invariantní bod ∞.

Je-li $a = |a|\mathrm{e}^{i\vartheta}$, je $\vartheta \in \operatorname{Arg} a$ a f_2 je **otočení (kolem počátku)** o úhel ϑ, přičemž úhel ϑ je určen modulo 2π. Speciálními případy pro $\vartheta = 0$ a $\vartheta = \pi$ (modulo 2π) jsou *identita* a **středová symetrie**. V netriviálním případě, kdy f_2 není identita, má toto zobrazení dva invariantní body, 0 a ∞.

Zobrazení f_3 je **stejnolehlost**. Je-li $|a| > 1$, jde o **dilataci**, při $|a| < 1$ jde o **kontrakci** a při $|a| = 1$ o *identitu*. Kromě posledního případu jsou jedinými invariantními body stejnolehlosti opět 0 a ∞.

Každé lineární zobrazení je tedy homeomorfní zobrazení $\mathbb{S}$ na $\mathbb{S}$ a inverzní zobrazení k lineárnímu zobrazení je opět lineární. Je také zřejmé, že složením dvou lineárních zobrazení dostaneme lineární zobrazení. Budeme-li chápat skládání zobrazení jako binární operaci na množině $\mathcal{L}$ všech lineárních zobrazení, tvoří $\mathcal{L}$ s touto operací *grupu*; roli jednotkového prvku hraje identita a roli inverzního prvku inverzní zobrazení. Konečně pro každou otevřenou množinu $G \subset \mathbb{S}$ je restrikce lineární funkce na G konformním zobrazením.

Poznámka 9.1.4. Pokud bychom chtěli studovat *afinní zobrazení* roviny pomocí komplexní symboliky, je jeho obecný popis dán vztahem $w = az + b\overline{z} + c$. Čtenáře odkazujeme na učebnici [6], str. 92. Na lineárních zobrazeních není co blíže zkoumat, mnohem zajímavější jsou „podíly lineárních zobrazení“, kterými se v této kapitole budeme ještě podrobně zabývat.

---

[1]) Případ $a = 0$ není zajímavý, konstantní zobrazení není prosté.

9.2 Meromorfní prosté funkce

Věta 9.2.1. *Funkce f je konformní v bodě $z_0 \in \mathbb{S}$, právě když f je meromorfní v z_0 a nabývá své hodnoty $f(z_0)$ jednonásobně.*

Důkaz. Nechť f nabývá v bodě z_0 hodnoty $f(z_0) = w_0$ jednonásobně. Podle Věty 8.2.11 zvolme číslo $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}_+$ a potom vyberme nějaké $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ a k němu příslušné $\delta > 0$. Ze spojitosti f plyne existence takového okolí $U(z_0) \subset U(z_0, \varepsilon)$, pro které je $f(U(z_0)) \subset U(w_0, \delta)$; je zřejmé, že $f \,|\, U(z_0)$ je prostá funkce. Tato restrikce je konformní v bodě z_0.

Pokud by funkce f nenabývala v bodě z_0 své hodnoty jednonásobně, pak je buď f konstantní v nějakém okolí $U(z_0)$, nebo f není meromorfní v z_0, nebo své hodnoty v bodě y_0 nabývá p-násobně pro $p > 1$. V prvních dvou případech není zřejmě f konformní v z_0 a rovněž tak ve třetím případě, protože pak podle Věty 8.2.11 není v žádném okolí bodu z_0 prostá. $\square$

Věta 9.2.2. *Nechť $G \subset \mathbb{S}$ je otevřená množina, jejíž hranice obsahuje bod z_0 izolovaný v ∂G a nechť f je konformní zobrazení množiny G. Potom je množina $G_1 = G \cup \{z_0\}$ otevřená a existuje právě jedno zobrazení f_1 konformní v G_1 tak, že $f = f_1 | G$.*

Důkaz. Protože z_0 je izolovaným bodem ∂G a protože množina G je otevřená, existuje $P(z_0, r) \subset G$. Je tedy $U(z_0, r) \subset G_1$ a množina G_1 je otevřená.

Zvolme $U(z_1) \in G$ a $r \in \mathbb{R}_+$ tak, že $U(z_1)$ a $P(z_0, r)$ jsou disjunktní. Funkce f je konformní na G a má tedy v G nejvýše jeden pól; číslo r lze proto navíc volit tak, že $f \in H(P(z_0, r))$. Potom pro každé $P(z_0, \rho)$, $0 < \rho < r$, uzávěr množiny $f(P(z_0, \rho))$ neobsahuje $f(z_1)$, protože f je konformní na $P(z_0, \rho) \cup U(z_1)$ a $f(P(z_0, \rho))$, $f(U(z_1))$ jsou tedy disjunktní otevřené podmnožiny $\mathbb{S}$.

Odtud vyplývá, že $\overline{P(z_0, \rho)} \neq \mathbb{S}$ a podle Věty 6.4.6 *není* z_0 podstatnou singularitou f. Proto $\lim_{z \to z_0} f(z)$ podle téže věty existuje a jednoznačně určuje hodnotu $f_1(z_0)$ spojitého rozšíření f_1 funkce f na G_1. Zbývá dokázat, že meromorfní funkce f_1 je na G_1 prostá. K tomu stačí ukázat, že $f_1(z_0) \neq f(z)$ pro všechna $z \in G$.

Zvolme $z \in G$ a v G_1 dvojici *disjunktních okolí* $U(z)$, $U(z_0)$. Protože $f \in M(G)$ je *prostá*, jsou oblasti $f(U(z_0) \setminus \{z_0\})$ a $f(U(z))$ podle Věty 8.2.12 disjunktní. Také $f_1(U(z_0))$ a $f_1(U(z)) = f(U(z))$ jsou otevřené množiny a otevřená množina, která je jejich průnikem, je podmnožinou $\{f_1(z_0)\}$; to ale znamená, že $f_1(U(z_0)) \cap f_1(U(z)) = \emptyset$. Jelikož jsou tyto množiny disjunktní, je $f_1(z_0) \neq f_1(z)$ a f_1 je prostá na G_1, takže $f_1 \in K(G_1)$ a věta je dokázána. $\square$

9.3 Geometrický pohled

Definice 9.3.1 (úhel křivek). Nechť $\varphi \colon [\,a, b\,] \to \mathbb{C}$, $\psi \colon [\,c, d\,] \to \mathbb{C}$ jsou dvě křivky se společným počátečním bodem $z_0 = \varphi(a) = \psi(c)$, a nechť dále existují *nenulové* jednostranné derivace $\varphi'_+(a)$, $\psi'_+(c)$. Zvolme

$$\lambda \in \operatorname{Arg}(\varphi'_+(a)), \quad \mu \in \operatorname{Arg}(\psi'_+(c));$$

pak říkáme, že **křivky φ, ψ svírají ve svém počátečním bodě** úhel $\omega = \lambda - \mu$.

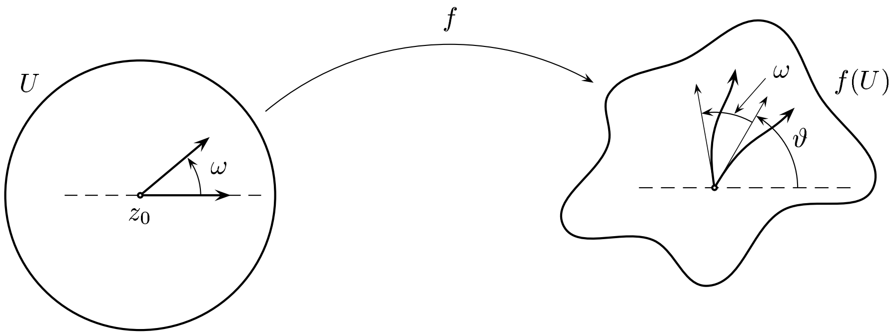
Poznámka 9.3.2. Protože λ, μ z Definice 9.3.1 jsou určeny modulo 2π, platí totéž pro úhel ω obou křivek φ, ψ. Čtenář by si měl povšimnout, že pokud zaměníme pořadí křivek, jejich úhel „změní znaménko“.

Definujeme-li přirozeným způsobem **polopřímky**

$$p_\lambda(z_0) = \{z_0 + t\,\mathrm{e}^{i\lambda};\ t \in [0,\infty)\}, \quad p_\mu(z_0) = \{z_0 + t\,\mathrm{e}^{i\mu};\ t \in [0,\infty)\},$$

odpovídá přijatá definice našim názorným představám: úhel $\lambda - \mu$ je (modulo 2π) úhlem polopřímek, které jsou polotečnami zprava křivek φ, ψ.

Věta 9.3.3. *Nechť f je funkce holomorfní v okolí $U(z_0)$ bodu $z_0 \in \mathbb{C}$ a nechť $f'(z_0) \neq 0$. Jsou-li $\varphi\colon [a,b] \to U(z_0)$, $\psi\colon [c,d] \to U(z_0)$ křivky s počátečním bodem z_0, svírající v něm úhel ω, svírají křivky $f \circ \varphi$, $f \circ \psi$ ve svém počátečním bodě rovněž úhel ω.*



Obr. 9.1: Zachovávání úhlů – schema

Důkaz. Podle předpokladů existují $\varphi'_+(a)$, $\psi'_+(c)$. Položme např. $\lambda := \arg(\varphi'_+(a))$, $\mu := \arg(\psi'_+(c))$. Je-li $f'(z_0) = |f'(z_0)|\,\mathrm{e}^{i\vartheta}$, dostaneme pro křivky $f \circ \varphi$, $f \circ \psi$ rovnosti

$$(f \circ \varphi)'_+(a) = |f'(\varphi(a))|.|\varphi'_+(a)|\,\mathrm{e}^{i(\vartheta+\lambda)},$$
$$(f \circ \psi)'_+(c) = |f'(\psi(c))|.|\psi'_+(c)|\,\mathrm{e}^{i(\vartheta+\mu)},$$

přičemž $\lambda - \mu = (\lambda + \vartheta) - (\mu + \vartheta)$; zhruba řečeno, „sevřený úhel se otočí o úhel ϑ“. Viz Obr. 9.1. $\square$

Jak již bylo řečeno, konformní zobrazení má mnoho praktických aplikací. Terminologie užívaná v této kapitole odráží proto často geometrické nebo fyzikální pojetí: hovoříme o přímkách, parabolách apod. jako o křivkách v rovině komplexních čísel, ač jsou pouze *lokálně* geometrickým obrazem křivek v námi užívaném smyslu. Chceme tuto partii popsat pouze informativně, bez budování *jiného aparátu*. To ovšem předpokládá na straně čtenáře ochotu spolupracovat a některé věci si samostatně promýšlet.

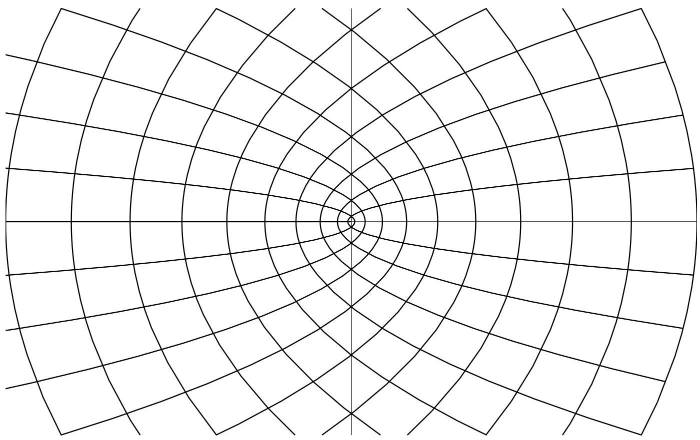
Poznámka 9.3.4. Nebudeme detailněji zkoumat „geometrický charakter“ konformních zobrazení. Uvedené minimum nám posloužilo pouze k objasnění, proč konformní zobrazení bylo ve starších učebnicích označováno jako *úhlojevné*. Pokud je funkce f definována v $U(z_0)$ a pro všechna $z \in U(z_0)$ je $f(z) \neq f(z_0)$, souvisí limita (pokud existuje v $\mathbb{C}$)

$$\lim_{r \to 0+} \frac{f(z_0 + r\mathrm{e}^{i\vartheta}) - f(z_0)}{r\mathrm{e}^{i\vartheta}} \tag{9.1}$$

s polotečnou křivky, která je obrazem polopřímky s počátkem z_0, určené „směrem“ $\mathrm{e}^{i\vartheta}$. Jestliže vlastní limita v (9.1) existuje a nezávisí na ϑ, říkáme, že f **zachovává úhly v bodě** z_0.

Dá se ukázat, že pokud f zachovává úhly *v každém bodě* oblasti G, je funkce f „skoro holomorfní“ v následujícím smyslu: buď je $f = f_1 + i f_2$ funkce holomorfní v G a $f'(z) \neq 0$ všude v G, nebo je v G holomorfní funkce $\overline{f} = f_1 - i f_2$ a $\left(\overline{f}\right)'(z) \neq 0$ všude v G. Pokud se ještě vhodně zavede pojem *zachovávání orientace*, je $f \in H(G)$, $f'(z) \neq 0$, všude v G, právě když f zachovává úhly i jejich orientaci.

Úmluva 9.3.5. Svírají-li křivky úhel $\omega = \pm\pi/2$ modulo 2π, říkáme, že jsou navzájem kolmé neboli **ortogonální**.



Obr. 9.2: Zobrazení $z \mapsto z^2$

Příklady 9.3.6. 1. Exponenciála má všude v $\mathbb{C}$ nenulovou derivaci, je však periodická a tudíž není prostá. Její restrikce f na pás $P := \{z \in \mathbb{C}\,;\, \operatorname{Im} z \in (-\pi, \pi)\}$ je však konformní. Pokud zobrazíme pomocí $f \mid P$ navzájem kolmé systémy přímek p_r o rovnicích $\operatorname{Im} z = r$, $r \in (-\pi, \pi)$, a k nim kolmých „otevřených úseček" bez koncových bodů $q_s \subset P$ (jsou to části přímek o rovnicích $\operatorname{Re} z = s$, $s \in \mathbb{R}$), zobrazí se na systém oblouků kružnic a polopřímek (bez počátečního bodu 0), které jsou opět navzájem kolmé.

2. Funkce $f(z) = z^2$ není konformní na $\mathbb{C}$. V bodě $z_0 = 0$ má f totiž dvojnásobný kořen, a není tedy prostá na žádném okolí $U(0)$; čtenář by si měl povšimnout, že *obrazy* dvou ortogonálních polopřímek $\overline{\mathbf{R}_0}$ a $\overline{\mathbf{R}_{\pi/2}}$ *nejsou v* 0 *ortogonální.*

Omezíme-li se však na polorovinu $G := \{z \in \mathbb{C}\,;\, \operatorname{Im} z > 0\}$, je restrikce $f \mid G$ konformním zobrazením G na $\mathbb{P} \setminus \mathbf{R}_+$. Funkce $f(z) = z^2$, $z \in G$, má inverzní funkci, která je konformním zobrazením $\mathbb{P} \setminus \mathbf{R}_+$ na G. Protože zachovávání úhlů má lokální charakter, systémy navzájem ortogonálních přímek rovnoběžných s osami, tj. přímek o rovnicích $\operatorname{Re} z = r$, $\operatorname{Im} z = s$, kde $r, s \in \mathbb{R}$, $rs \neq 0$, se zobrazí funkcí $f(z) = z^2$ na systémy navzájem ortogonálních parabol; viz Obr. 9.2, který zachycuje obraz části „ortogonální sítě" těchto přímek.

9.4 Lineární lomená funkce

Definice 9.4.1. Zobrazení meromorfní funkcí $f : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$, pro něž existují čísla $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ taková, že
$$ad - bc \neq 0\,, \tag{9.2}$$
pro která
$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}\,, \text{ je-li } z \in \mathbb{C}\,, \quad f(\infty) = \frac{a}{c}\,, \tag{9.3}$$
se nazývá **Möbiova funkce** nebo též **lineární lomené zobrazení**.

Poznámka 9.4.2 (důležitá). Jsou-li dána čtyři čísla a, b, c, d splňující (9.2), je jimi jednoznačně určena funkce f z (9.3). Pro stručnost budeme o této funkci v dalším mluvit jako o „funkci $(az + b)/(cz + d)$".

Zřejmě je $f(\infty) = a/c$ i v případě $c = 0$. Dále je $f(-d/c) = \infty$, neboť podmínka (9.2) vylučuje možnost společného nulového bodu čitatele a jmenovatele zlomku v (9.3) a pro každé $\alpha \in \mathbb{P}$ jsme definovali $\alpha/0 = \infty$. Je též $\lim_{z\to\infty} f(z) = a/c = f(\infty)$ a zobrazení f definované pomocí (9.3) je spojité v $\mathbb{S}$.

Poznámka 9.4.3. Lineární lomené zobrazení lze také, podobně jako lineární funkci, složit z jednodušších zobrazení. Pro $c \neq 0$ je

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} + \left(\frac{az + b}{cz + d} - \frac{a}{c}\right) = \frac{a}{c} + \frac{-(ad - bc)}{c(cz + d)}\,. \tag{9.4}$$

Z (9.4) vyplývá $f = f_1 \circ f_2 \circ f_3$, kde

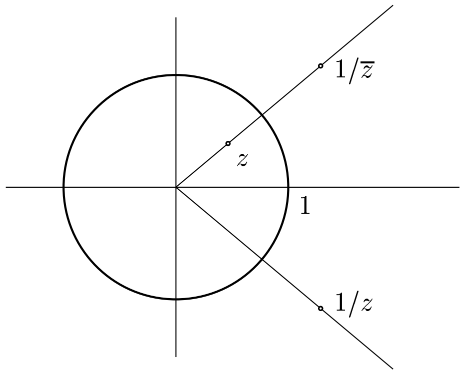
$$f_1(z) = \frac{a}{c} + z\,, \quad f_2(z) = \frac{1}{z}\,, \quad f_3(z) = -\frac{c(cz+d)}{ad-bc}\,. \tag{9.5}$$

Zobrazení f_1 a f_3 jsou lineární a tedy prostá a spojitá na $\mathbb{S}$. Zobrazení f_2 se nazývá **inverze**; poznamenejme, že zobrazení $g(z) = 1/\,\overline{z}$, $z \in \mathbb{P}$, zobrazuje bod z na bod, ležící symetricky k bodu $1/z$ vzhledem k přímce $\operatorname{Re} z = z$. Viz Obr. 9.3.

Poznámka 9.4.4. Všimněme si elementárních vlastností inverze f_2. Je $|z| < 1$, právě když je $1/|z| > 1$, takže inverze zobrazuje $P(0,1)$ na $P(\infty,1)$ a $P(\infty,1)$ na $P(0,1)$. Je $f_2(0) = \infty$ a $f_2(\infty) = 0$. Obecněji pro $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ je $f_2(U(0,\varepsilon)) = U(\infty,\varepsilon)$ a $f_2(U(\infty,\varepsilon)) = U(0,\varepsilon)$. Jednotková kružnice se zobrazí na jednotkovou kružnici, přičemž jedinými invariantními body inverze jsou body 1 a -1. Pro $z_1, z_2 \in \mathbb{P}$, $z_1 \neq z_2$, je

$$\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2} = \frac{z_1 - z_2}{z_1\, z_2} \neq 0\,.$$

Z těchto vlastností f_2 vyplývá, že i f_2 je prostým spojitým zobrazením $\mathbb{S}$ na $\mathbb{S}$.



Obr. 9.3: Schéma inverze a symetrie vzhledem k jednotkové kružnici

Věta 9.4.5. *Každá Möbiova funkce je prostým spojitým zobrazením $\mathbb{S}$ na $\mathbb{S}$.*

Důkaz. Nechť f je popsána pomocí (9.3). Podmínka (9.2) vylučuje jednak případ, kdy $c = d = 0$ a také případ konstantní funkce f, která není prostá. Pro $c = 0$ je $d \neq 0$, takže f je lineární, a je tedy prostá a spojitá v $\mathbb{S}$. Pokud je $c \neq 0$, je Möbiova funkce f složením zobrazení z (9.5), z nichž f_1 a f_3 jsou lineární. Protože podle Poznámky 9.4.4 je i f_2 prosté spojité zobrazení, plyne odtud tvrzení věty. $\square$

Poznámka 9.4.6. Pro $c = 0$ je Möbiova funkce (9.3) lineárním zobrazením $\mathbb{S}$ na $\mathbb{S}$, přičemž

$$f(z) = \frac{a}{d}\,z + \frac{b}{d}\,. \tag{9.6}$$

Vyjádříme nyní inverzní zobrazení k funkci f z (9.3). Jestliže $c = 0$, potom je $f^{-1}(w) = (dw - b)/a$ a f i f^{-1} jsou lineární. Pro $c \neq 0$ je podle definice $f^{-1}(a/c) = \infty$, $f^{-1}(\infty) = -d/c$. Z rovnosti

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \tag{9.7}$$

vypočteme z pro každé $w \in \mathbb{S} \setminus \{a/c, \infty\}$. Odtud obdržíme jako důsledek:

Důsledek 9.4.7. *Pro $c \neq 0$ je inverzní funkcí k Möbiově funkci* (9.3) *na $\mathbb{S}$ opět Möbiova funkce*

$$f^{-1}(w) = \frac{-dw + b}{cw - a}\,, \text{ je-li } w \in \mathbb{C}\,, \quad f^{-1}(\infty) = -\frac{d}{c}\,. \tag{9.8}$$

Poznámka 9.4.8. Čtenář by si měl povšimnout, že pokud funkci f definujeme pomocí (9.3), je rovněž

$$f(z) = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}\,, \text{ je-li } z \in \mathbb{C}\,, \quad f(\infty) = \frac{a_1}{c_1}\,,$$

právě když je vektor (a_1, b_1, c_1, d_1) násobkem vektoru (a, b, c, d) číslem $\alpha \in \mathbb{P}$. Proto nejsou čísla a, b, c, d ve vyjádření Möbiovy funkce f *určena jednoznačně.* Möbiova funkce z Definice 9.4.1 je jistou „třídou funkcí $(az + b)/(cz + d)$“ z Poznámky 9.4.2. Möbiova funkce je určena *třemi* komplexními parametry a, b, c, d: žádáme-li např. aby $ad - bc = 1$, lze odtud jeden z parametrů spočítat.

Z racionálních funkcí typu (9.3) „vybírá“ podmínka (9.2) Möbiovy funkce, které jsou navíc v $\mathbb{S}$ *prosté.* Jinými slovy, podmínka (9.2) způsobuje, že se omezujeme na případ konformních zobrazení $\mathbb{S}$ na $\mathbb{S}$. Zajímavé je to, co ukazuje Věta 9.4.9 : jsou to totiž *všechna konformní zobrazení $\mathbb{S}$ na $\mathbb{S}$.*

Věta 9.4.9. *Funkce f je konformním zobrazením $\mathbb{S}$ na $\mathbb{S}$, právě když je Möbiovou funkcí.*

Důkaz. Již jsme ukázali, že každá Möbiova funkce je prvkem $K(\mathbb{S})$; stačí proto dokázat, že každá funkce z $K(\mathbb{S})$ je Möbiova funkce. Z Lemmatu 8.1.6 vyplývá, že meromorfní funkce f je racionální a je tedy podílem nějakých nesoudělných polynomů P, Q, tj. $f(z) = P(z)/Q(z)$.

Pokud by byl $\mathrm{st}(P) > 1$, měl by P alespoň dva různé kořeny nebo jeden alespoň dvojnásobný kořen, avšak v tom případě by funkce f nebyla prostá; viz Větu 8.2.11. Podobně v případě, že $\mathrm{st}(Q) > 1$, měla by f alespoň dva různé póly nebo alespoň jeden pól násobnosti > 2, a opět by nebyla prostá. Proto jsou stupně P a Q nejvýše rovny 1 a existují $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tak, že $P(z) = az + b$, $Q(z) = cz + d$. Podmínka $ad - bc \neq 0$ je splněna, neboť zobrazení f je prosté. Tím je věta dokázána. $\square$

Věta 9.4.10. *Je-li $K \subset \mathbb{S}$ konečná množina a $f\colon (\mathbb{S} \setminus K) \to \mathbb{S}$ je konformní, je f restrikcí Möbiovy funkce (definované v $\mathbb{S}$) na $\mathbb{S} \setminus K$.*

Důkaz. Tvrzení je důsledkem Věty 9.2.2, kterou postupně aplikujeme tolikrát, kolik je prvků K. Jestliže $K = \{z_1, \dots, z_n\}$, položíme $G_0 := \mathbb{S} \setminus K$, a dále $G_r := (\mathbb{S} \setminus K) \cup \bigcup_{k=1}^{r} \{z_k\}$, $r = 1, \dots, n$. Rozšíříme nejprve f „konformně“ z G_0 na $f_1 \in K(G_1)$, pak f_1 z G_1 na $f_2 \in K(G_2)$, atd. Tak po konečně mnoha krocích dostaneme rozšíření $f_n \in K(\mathbb{S})$ funkce f_0 z G_0 na $\mathbb{S}$, což je podle Věty 9.4.9 Möbiova funkce; zbytek je zřejmý. □

Poznámka 9.4.11 (důležitá). Je zřejmé, že obrazem množiny $\mathbb{S} \setminus K$ z předcházející Věty 9.4.10 je množina $\mathbb{S} \setminus L$. Množina $L \subset \mathbb{S}$ má stejný počet prvků jako K. To vyplyne z toho, že rozšíření f_n funkce f z $\mathbb{S} \setminus K$ na $\mathbb{S}$ z Věty 9.4.10 je konformní a tedy prosté na $\mathbb{S}$. V dalším výkladu využíváme *podstatně* toho, že o konečné množiny se při práci *s Möbiovými funkcemi* nemusíme starat, což nám umožní některé úvahy zjednodušit.

Protože f_n je Möbiova funkce, mají f_n i f inverzní funkce, které jsou konformní. To však platí i v podstatně obecnějším případě, kterým se budeme dále zabývat.

Lemma 9.4.12. *Je-li f konformní zobrazení oblasti $G \subset \mathbb{S}$, platí pro derivaci inverzního zobrazení f^{-1} vzorec*

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))} \tag{9.9}$$

pro všechna $w \in f(G)$, pro něž je $w \neq \infty \neq f^{-1}(w)$. Zobrazení f je homeomorfní.

Důkaz. Jelikož f je nekonstantní meromorfní funkce v G, je podle Věty 8.2.12 otevřeným zobrazením, a je tedy homeomorfním zobrazením. Navíc je f prostá funkce, neboť $f \in K(G)$. Potom $f'(z) \neq 0$ všude v G, je-li $z \neq \infty \neq f(z)$ a pro odpovídající hodnoty w platí (9.9) podle Věty 5.8.3. □

Příklad 9.4.13. Přímým výpočtem dostaneme pro f z (9.3) $f'(z) = (ad-bc)/(cz-d)^2$, $z \neq d/c$, takže pro $w \neq a/c$ a $w \neq \infty$ je podle (9.9)

$$(f^{-1})'(w) = \frac{\big[c(-dw+b)/(cw-a) - d\big]^2}{ad-bc} = \frac{ad-bc}{(cw-a)^2}$$

což ovšem dostaneme pohodlněji derivováním z (9.8). Je zřejmé, že vzorec (9.9) v tomto případě „funguje“.

Věta 9.4.14. *Je-li $f\colon G \to \mathbb{S}$ konformní zobrazení, je inverzní zobrazení f^{-1} konformním zobrazením $f(G)$ na G.*

Důkaz. Zobrazení f je otevřené, takže f^{-1} je spojité na otevřené množině $f(G)$. Vzorec (9.9) platí všude v $f(G)$ až na (nejvýše dvoubodovou) konečnou množinu.

Funkce f^{-1} je tedy holomorfní v $f(G)$ všude až na konečnou množinu, je spojitá (v rozšířeném smyslu) a leží proto v $M(f(G))$. Jelikož je prostá v $f(G)$, leží též v $K(G)$, čímž je důkaz dokončen. □

Definice 9.4.15 (konformně ekvivalentní oblasti). Je-li f konformní v oblasti $G \subset S$ a zobrazuje G *na* oblast $D \subset S$, nazýváme G a D **konformně ekvivalentní**.

Poznámka 9.4.16. Termín *konformně ekvivalentní oblasti* [2]) popisuje relaci ekvivalence na oblastech v $\mathbb{S}$. Identické zobrazení ukazuje její reflexivitu, Věta 9.4.14 symetrii a Věta 8.1.4 spolu s tím, že konformní zobrazení je prosté, dává tranzitivitu. Vzhledem ke konformní ekvivalenci se oblasti v $\mathbb{S}$ rozpadají na třídy ekvivalence.

Tak např. jedna z těchto tříd obsahuje jedinou množinu $\mathbb{S}$, jinou tvoří právě všechny množiny tvaru $\mathbb{S}\setminus\{z_0\}$, $z_0 \in \mathbb{S}$. To plyne z Poznámky 9.4.11. Poznamenejme pro úplnost, že množinu $\mathbb{C}$ zobrazíme konformně identitou na $\mathbb{C} = \mathbb{S} \setminus \{\infty\}$ a funkcí $f(z) = 1/z + z_0$ na $\mathbb{S} \setminus \{z_0\}$, $z_0 \in \mathbb{C}$.

Zobrazování určitých podmnožin $G \subset \mathbb{C}$ nám umožní lépe chápat způsob, jímž konformní zobrazení z $K(G)$ zobrazují G nebo některé části G. Vraťme se nejprve k vyšetřování vlastností obecných Möbiových funkcí.

Definice 9.4.17. Při obvyklém ztotožnění $\mathbb{C}$ s $\mathbb{R}^2$ položíme pro $z = x + iy$ a *reálná* čísla $\alpha, \beta_1, \beta_2, \gamma$

$$K := \{z \in \mathbb{C}\,;\, \alpha(x^2 + y^2) - 2\beta_1 x - 2\beta_2 y + \gamma = 0\,,\ \beta_1^2 + \beta_2^2 - \alpha\gamma > 0\}\,. \qquad (9.10)$$

Množinu $K^* := \overline{K}$, kde uzávěr chápeme v $\mathbb{S}$, nazýváme **zobecněná kružnice**.

Poznámka 9.4.18. Z analytické geometrie je patrný význam předcházející definice. Pokud $\alpha = 0$, je rovnice v (9.10) *lineární* rovnicí v x a y a popisuje tedy přímku v $\mathbb{R}^2$. Pokud je $\alpha \neq 0$, lze rovnici v (9.10) upravit na tvar

$$\alpha\Big[\Big(x - \frac{\beta_1}{\alpha}\Big)^2 + \Big(y - \frac{\beta_2}{\alpha}\Big)^2\Big] = \frac{\beta_1^2 + \beta_2^2 - \alpha\gamma}{\alpha}\,.$$

Tato rovnice popisuje v $\mathbb{R}^2$ kružnici, pokud v rovnici na pravé straně je v čitateli zlomku *kladné* číslo. Kružnice má střed $[\,\beta_1/\alpha, \beta_2/\alpha\,]$ a kladný poloměr r, pro který platí rovnost $r^2 = (\beta_1^2 + \beta_2^2 - \alpha\gamma)/\alpha^2$. Zobecněná kružnice je tedy buďto kružnice, nebo (uzavřená) přímka, tj. přímka, k níž je „přidán“ bod ∞. Je vhodné si uvědomit, že je-li $\overline{K} = \overline{K \cap \mathbb{P}}$, množina $K \cap \mathbb{P}$ se skládá právě ze všech bodů $z \in \mathbb{P}$, pro které $\operatorname{Re} z = x$ a $\operatorname{Im} z = y$. Toho při práci s inverzí dále využíváme.

Přepisem pomocí komplexní proměnné z dospějeme k popisu množiny K z (9.10) pomocí reálných čísel α, γ a komplexního čísla β $(= \beta_1 + i\beta_2)$

$$K = \{z \in \mathbb{C}\,;\, \alpha z\overline{z} - \overline{\beta}z - \beta\,\overline{z} + \gamma = 0\,;\, \beta\overline{\beta} > \alpha\gamma\}\,, \qquad (9.10^*)$$

[2]) Konformní ekvivalenci otevřených množin nebudeme potřebovat, její případné zavedení je zřejmé.

kde $\alpha = 0$ odpovídá přímkám a $\alpha \neq 0$ kružnicím. Lineární zobrazení převádí kružnice v kružnice a přímky v přímky, a tedy zobecněné kružnice ve zobecněné kružnice.

Lemma 9.4.19. *Inverze $f(z) = 1/z$ převádí zobecněné kružnice ve zobecněné kružnice.*

Důkaz. Omezíme-li se v (9.10*) na $z \in \mathbb{P}$, K^* se nezmění. Dosazením $1/z$ za z pro $z \in \mathbb{P}$ do rovnice

$$\alpha z\overline{z} - \overline{\beta}z - \beta\,\overline{z} + \gamma = 0 \tag{9.11}$$

dostaneme po úpravě rovnici

$$\alpha - \overline{\beta}\,\overline{z} - \beta\,z + \gamma z\overline{z} = 0\,,$$

což je rovnice stejného typu; pomocí ní popíšeme $f(K^*)$ analogicky jako v (9.10*), avšak až na konečnou množinu; uzávěr pak dá $f(K^*)$. □

Za povšimnutí stojí fakt, že pro inverzi $f(z) = 1/z$ obraz zobecněné kružnice K^* obsahuje bod ∞ (a je tedy uzavřenou přímkou), právě když K^* prochází bodem 0. Je-li K^* uzavřená přímka, je $f(K^*)$ „obyčejná“ kružnice procházející počátkem, právě když K^* neprochází počátkem. Je-li K^* „obyčejná“ kružnice, je $f(K^*)$ uzavřená přímka, právě když $0 \in K^*$. Pro uzavřené přímky K^* procházející počátkem je $f(K^*) = K^*$, avšak pouze dva jejich body jsou invariantní!

Položme si otázku, kolik existuje invariantních bodů Möbiovy funkce; pracujeme opět s její zvolenou reprezentací tvaru (9.3). V triviálním případě identity f ($b = c = 0$, $a = d$ nenulové) je každý bod $\mathbb{S}$ invariantní. Není-li f identita a $c = 0$, jsou jedinými možnými invariantními body 0 a ∞ (při $b = 0$ oba, pro $b \neq 0$ pouze ∞). Pro $c \neq 0$ obdržíme jednoduchou úpravou z rovnice $z = (az + b)/(cz + d)$ kvadratickou rovnici

$$c\,z^2 - (a - d)\,z - b = 0\,.$$

Odtud vyplývá, že v netriviálním případě existují *nejvýše dva* invariantní body. Má-li tedy Möbiova funkce alespoň tři různé invariantní body, je identitou. Nyní dokážeme, že Möbiova funkce f je určena informací o zobrazení tří různých bodů kompaktifikované roviny $\mathbb{S}$.

Poznámka 9.4.20. Čtenář snadno spočítá, že složením dvou Möbiových funkcí dostaneme opět Möbiovu funkci; pro jejich reprezentace

$$f(z) = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}\,, \quad g(z) = \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}\,, \quad \text{je} \quad f(g(z)) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\,,$$

a dále platí

$$\alpha = a_1a_2 + b_1c_2\,,\ \beta = a_1b_2 + b_1d_2\,,\ \gamma = c_1a_2 + d_1c_2\,,\ \delta = c_1b_2 + d_1d_2\,,$$
$$\alpha\delta - \beta\gamma = (a_1d_1 - b_1c_1)(a_2d_2 - b_2c_2)\,.$$

Odtud plyne, že Möbiovy funkce tvoří vzhledem k operaci skládání *grupu*, ve které jednotkovým prvkem je identita a inverzní prvek k (9.3) je popsán pomocí (9.8). Každá Möbiova funkce je homeomorfním zobrazením $\mathbb{S}$ na $\mathbb{S}$. Všechny Möbiovy funkce tvoří speciální podgrupu grupy homeomorfismů $\mathbb{S}$ na $\mathbb{S}$.

Věta 9.4.21. *Existuje nejvýše jedna Möbiova funkce f, která zobrazí navzájem různé body $z_k \in \mathbb{S}$ na navzájem různé body $w_k \in \mathbb{S}$ tak, že $w_k = f(z_k)$, $k = 2, 3, 4$.*

Důkaz. Nechť Möbiovy funkce f, g zobrazují $z_k \mapsto w_k$, $k = 2, 3, 4$ (důvod číslování indexy $2, 3, 4$ bude zřejmý z dalšího výkladu). Potom složená (Möbiova) funkce $h = f^{-1} \circ g$ má tři různé invariantní body z_2, z_3, z_4 a je proto identickým zobrazením. Z $f^{-1}(g(z)) = z$, $z \in \mathbb{S}$ vyplývá dalším složením s funkcí f rovnost $f(f^{-1}(g(z))) = g(z) = f(z)$ pro všechny body $z \in \mathbb{S}$. Tím je jednoznačnost f dokázána. $\square$

Zobecněná kružnice K^* je jednoznačně určena kterýmikoli svými třemi různými body z_2, z_3, z_4: Leží-li tyto body na přímce (což se stane např. tehdy, když je jeden z nich roven ∞), je K^* touto (uzavřenou) přímkou; neleží-li body z_2, z_3, z_4 na žádné přímce, určují jednoznačně kružnici a leží všechny v $\mathbb{C}$.

Lemma 9.4.22. *Nechť z_2, z_3, z_4 jsou navzájem různé body z $\mathbb{C}$. Potom existuje právě jedna Möbiova funkce*

$$f(z) = \frac{(z - z_3)(z_2 - z_4)}{(z - z_4)(z_2 - z_3)} = \frac{(z - z_3)}{(z - z_4)} : \frac{(z_2 - z_3)}{(z_2 - z_4)}\,, \tag{9.12}$$

která zobrazuje body z_2, z_3, z_4 takto:

$$f(z_2) = 1\,, \quad f(z_3) = 0\,, \quad f(z_4) = \infty\,. \tag{9.13}$$

Důkaz. Jednoznačnost f plyne z Věty 9.4.21. Určíme alespoň jednu reprezentaci f tvaru „$(az + b)/(cz + d)$“. Z druhé podmínky v (9.13) dostaneme, že čitatel je tvaru $a(z - z_3)$. Ze třetí podmínky plyne, že jmenovatel je tvaru $c(z - z_4)$. Konečně z první podmínky v (9.13) dostaneme dosazením

$$1 = f(z_2) = \frac{a(z_2 - z_3)}{c(z_2 - z_4)}\,,$$

z čehož obdržíme $a/c = (z_2 - z_4)/(z_2 - z_3)$. Odtud již plyne (9.12). $\square$

Věta 9.4.23. *Existuje právě jedna Möbiova funkce f, která zobrazí navzájem různé body $z_k \in \mathbb{S}$ na navzájem různé body $w_k \in \mathbb{S}$ tak, že $w_k = f(z_k)$, $k = 2, 3, 4$.*

Důkaz. Pro $z_0 \neq z_k$, $k = 2,3,4$, zobrazí Möbiova funkce $z \mapsto z_0 + 1/z$ bod ∞ do bodu z_0 a body z_k, $k = 2,3,4$, na body ležící v $\mathbb{C}$. Můžeme tedy bez újmy na obecnosti předpokládat, že body z_k i w_k, $k = 2,3,4$, leží v $\mathbb{C}$.

Hledané zobrazení f dostaneme složením dvou Möbiových funkcí: g, pro kterou je $g(z_2) = 1$, $g(z_3) = 0$, $g(z_4) = \infty$, a h^{-1}, pro kterou je $h(w_2) = 1$, $h(w_3) = 0$, $h(w_4) = \infty$. $\square$

Poznámka 9.4.24. Reprezentaci Möbiovy funkce f z Věty 9.4.23 lze určit tak, že spočítáme w v závislosti na z, a to z rovnice

$$\frac{w - w_3}{w - w_4} \cdot \frac{w_2 - w_4}{w_2 - w_3} = \frac{z - z_3}{z - z_4} \cdot \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3}\,.$$

Důsledek 9.4.25. *Möbiova funkce z Věty 9.4.23 zobrazuje zobecněnou kružnici K_1^* určenou body z_2, z_3, z_4 na zobecněnou kružnici K_2^*, určenou body w_2, w_3, w_4.*

Poznámka 9.4.26. Komponenty množiny $\mathbb{S} \setminus K_1^*$ se Möbiovou funkcí z Věty 9.4.23 zobrazí na komponenty množiny $\mathbb{S} \setminus K_2^*$. Ve zvolené komponentě množiny $\mathbb{S} \setminus K_1^*$ pak stačí zvolit bod a zjistit, do které komponenty množiny $\mathbb{S}\setminus K_2^*$ se zobrazí. Další prostředky k určení korespondence komponent poskytuje Věta 9.4.37.

Definice 9.4.27. Výraz na pravé straně poslední rovnosti v (9.12)) budeme nazývat **dvojpoměr** bodů z, z_2, z_3, z_4 a jeho hodnota je definována *hodnotou Möbiovy funkce f určené pomocí* (9.12). Výraz i jeho hodnotu (je to prvek $\mathbb{S}$) značíme $[\,z, z_2, z_3, z_4\,]$. Pokud jsou z_2, z_3, z_4 navzájem různé body z $\mathbb{C}$, klademe tedy pro všechna $z_1 \in \mathbb{S}$

$$[\,z_1, z_2, z_3, z_4\,] = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} : \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}\,;$$

odtud je zřejmý i původ názvu. Poznamenejme, že pro $z_1 = z_4$ platí zřejmě $[\,z_1, z_2, z_3, z_4\,] = \infty$ a pro $z_1 = \infty$ ze spojitosti Möbiovy funkce určující příslušný dvojpoměr dostaneme $[\,\infty, z_2, z_3, z_4\,] = (z_2 - z_4)/(z_2 - z_3)$.

Je-li jeden z bodů z_k, $k = 2,3,4$, nevlastní, postupujeme obdobně: definujeme hodnotu $[\,z_1, z_2, z_3, z_4\,]$ pomocí limity. Např. pro $z_2 = \infty$ klademe (s využitím příslušné Möbiovy funkce) pro všechna $z_1 \in \mathbb{S}$

$$[\,z_1, \infty, z_3, z_4\,] := \lim_{z_2 \to \infty} \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} : \frac{1 - z_3/z_2}{1 - z_4/z_2} = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4}\,.$$

Podobně klademe

$$[\,z_1, z_2, \infty, z_4\,] := \frac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4}\,, \quad [\,z_1, z_2, z_3, \infty\,] := \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}\,.$$

Snadno nahlédneme, že $z = [\,z, 1, 0, \infty\,]$, $z \in \mathbb{S}$, což je často využívané vyjádření identity ve tvaru dvojpoměru.

Důsledek 9.4.28. *Jsou-li w_2, w_3, w_4 tři různé body z $\mathbb{S}$ a je-li g taková Möbiova funkce, že $g(w_2) = 1$, $g(w_3) = 0$, $g(w_4) = \infty$, je $z = [\,z, g(w_2), g(w_3), g(w_4)\,]$, tj. funkce $f(z) := [\,z, g(w_2), g(w_3), g(w_4)\,]$ je identita.*

Poznámka 9.4.29. Pro dvojpoměr lze dokázat řadu jednoduchých užitečných tvrzení; viz např. Cvičení za Kap. 14 v [5]. Znovu zdůrazňujeme, že pro nás jeho role spočívá ve snadném zápisu Möbiových funkcí, přičemž využíváme Poznámku 9.4.2 a Větu 9.4.10. Položíme-li pro navzájem různé body $z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$

$$\alpha = [z, z_2, z_3, z_4] = \frac{z - z_3}{z - z_4} \cdot \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3}\,, \tag{9.14}$$

stačí zřejmě volit

$$a = z_2 - z_4\,,\ b = z_3(z_2 - z_4)\,,\ c = z_2 - z_3\,,\ d = z_4(z_2 - z_3) \tag{9.15}$$

a po dosazení obdržíme rovnost

$$\alpha = \frac{az + b}{cz + d}\,, \tag{9.16}$$

přičemž je $ad - bc = -(z_2 - z_3)(z_2 - z_4)(z_3 - z_4)$. Z vlastností Möbiových funkcí je patrné, že jsou-li z_2, z_3, z_4 navzájem různé body, lze k libovolnému $\alpha \in \mathbb{S}$ volit čtvrtý bod z tak, aby platilo

$$\alpha = [z, z_1, z_2, z_3]\,.$$

Existují-li $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tak, že Möbiova funkce f je dána vzorcem (9.3), je zřejmě obraz $f(\mathbb{R}^*)$ uzavřené reálné osy $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ opět množina $\mathbb{R}^*$. Je-li naopak $f(\mathbb{R}^*) = \mathbb{R}^*$, jsou vzory z_2, z_3, z_4 bodů $1, 0, \infty$ rovněž z $\mathbb{R}^*$ a vypočteme-li pomocí nich a, b, c, d, jsou to čísla z $\mathbb{R}$. Möbiova funkce f zobrazuje tedy $\mathbb{R}^*$ na $\mathbb{R}^*$, právě když pro ni existuje vyjádření ve tvaru $f(z) = (az + b)/(cz + d)$ s reálnými koeficienty a, b, c, d.

Lemma 9.4.30. *Pro každou Möbiovu funkci f a každé tři navzájem různé body $z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{S}$ platí pro všechna $z_1 \in \mathbb{S}$ rovnost*

$$[\,f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)\,] = [\,z_1, z_2, z_3, z_4\,]\,. \tag{9.17}$$

Důkaz. Je-li $g(z) := [\,z, z_2, z_3, z_4\,]$, $z \in \mathbb{S}$, je g Möbiova funkce. Nechť $h = g \circ f^{-1}$; potom $h \circ f = g \circ f^{-1} \circ f = g$, a tedy

$$h(f(z_2)) = 1\,,\ \ h(f(z_3)) = 0\,,\ \ h(f(z_4)) = \infty\,;$$

z Důsledku 9.4.28 plyne, že $[z, f(z_2), f(z_3), f(z_4)] = g(f^{-1}(z))$ je identita. Pro $z = f(z_1)$ dostaneme odtud

$$[\,z_1, z_2, z_3, z_4\,] = g(z_1) = g(f^{-1}(f(z_1))) = [\,f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)\,]\,,$$

což je dokazovaná rovnost (9.17). □

Důsledek 9.4.31. *Navzájem různé body $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{S}$ leží na zobecněné kružnici, právě když $[z_1, z_2, z_3, z_4] \in \mathbb{R}$.*

Důkaz. Möbiova funkce f, pro kterou $f(z_2) = 1$, $f(z_3) = 0$ a $f(z_4) = \infty$ zobrazí bod z_1 zobecněné kružnice určené body z_2, z_3, z_4 do $\mathbb{R}$, a proto

$$[\, z_1, z_2, z_3, z_4 \,] = [\, f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4) \,] \in \mathbb{R}\,.$$

Zobrazení f^{-1} přitom přiřadí každému $\alpha \in \mathbb{R}$ nebo $\alpha = \infty$ právě jeden bod zobecněné kružnice určené body z_2, z_3, z_4. □

Poznámka 9.4.32. Jestliže z rovnice (9.11) vypočteme z, dostaneme rovnost

$$z = \frac{\beta\,\overline{z} - \gamma}{\alpha\,\overline{z} - \overline{\beta}}\,. \tag{9.18}$$

Z předpokladu $\beta\overline{\beta} > \alpha\gamma$ plyne, že zlomek vpravo v (9.18) určuje Möbiovu funkci v proměnné $\overline{z}$; označme ji h. Bod z tedy leží v množině K z (9.10), právě když $z = h(\overline{z})$, neboli právě když $g(z) := h(\overline{z}) = z$. Odtud plyne tvrzení:

Věta 9.4.33. *Je-li K^* zobecněná kružnice popsaná pomocí* (9.10)*, existuje právě jedna Möbiova funkce h tak, že $z \in K$, právě když $z = h(\overline{z})$. Pro $g(z) := h(\overline{z})$ je $g(z) = z$, právě když $z \in K$ a platí $g = g^{-1}$, neboli $g \circ g$ je identita.*

Důkaz. Pokud by existovaly Möbiovy funkce h_1 a h_2 popisující K ve smyslu Věty 9.4.33, pak dostaneme $g_1(\overline{z}) = g_2(\overline{z})$ pro všechna $z \in K$, z čehož dostáváme $g_1 = g_2$. Pokud g je zobrazení z Věty 9.4.33, je $g(g(z)) = g(z) = z$, $z \in \mathbb{C}$, takže $g = g^{-1}$. □

Poznámka 9.4.34. Zobrazení

$$f(z) = \frac{a\overline{z} + b}{c\overline{z} + d}\,, \text{ je-li } z \in \mathbb{C}\,, \quad f(\infty) = \frac{a}{c}\,, \tag{9.19}$$

která vyhovují podmínce $ad - bc \neq 0$, zachovávají stejně jako Möbiovy funkce zobecněné kružnice; to vyplývá z toho, že zobrazení $g(z) := \overline{z}$ zobrazuje přímky na přímky a kružnice na kružnice. Někdy se pro ně užívá název *zobrazení zachovávající zobecněné kružnice druhého druhu.* Věnujeme jim několik poznámek.

I když nejsou tato zobrazení diferencovatelná, zachovávají úhly. Na rozdíl od netriviálních Möbiových funkcí mohou mít nekonečně mnoho invariantních bodů. Hodí se velmi dobře k popisu zrcadlení vzhledem k zobecněným kružnicím a dají se elegantně popisovat pomocí dvojpoměru.

Definice 9.4.35. Nechť g je zobrazení z Věty 9.4.33. Pak říkáme, že body z, z^* jsou **symetrické vzhledem ke** K^*, pokud platí $z^* = g(z)$.

Vztah z^*a z je skutečně symetrický: ze $z^* = g(z)$ vyplývá $g(z^*) = g(g(z)) = z$. Zvolíme-li libovolně tři navzájem různé body $z_2, z_3, z_4 \in K$, lze zobrazení g a symetrické body„spočítat“ z rovnosti

$$[\,z^*, z_2, z_3, z_4\,] = [\,\overline{z}\,, \overline{z_2}\,, \overline{z_3}\,, \overline{z_4}\,] = \overline{[\,z, z_2, z_3, z_4\,]}\,. \tag{9.20}$$

Bod z^* závisí přitom pouze na z a ne na volbě $z_2, z_3, z_4 \in K$. Připomeňme, že podle Důsledku 9.4.31 je $[\,z, z_2, z_3, z_4\,] \in \mathbb{R}^*$, právě když $z \in K$. Odtud plyne, že $z^* = z$, právě když je $z \in K$. Prozkoumáme vztah z^* a z blíže.

Poznámka 9.4.36. Nechť $K^* = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z - z_0| = r\}$ s $r \in \mathbb{R}_+$. Pokud je $z^* = g(z)$, plyne z (9.18) při $\alpha \neq 0$

$$z^* = \frac{\beta\,\overline{z} - \gamma}{\alpha\,\overline{z} - \overline{\beta}} = \frac{\beta}{\alpha} + \Big(\frac{\beta\,\overline{z} - \gamma}{\alpha\,\overline{z} - \overline{\beta}} - \frac{\beta}{\alpha}\Big) = \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\beta\overline{\beta} - \alpha\gamma}{\alpha^2}\Big(\overline{z} - \frac{\overline{\beta}}{\alpha}\Big)^{-1}. \tag{9.21}$$

Protože podle Poznámky 9.4.18 bod $z_0 := \beta/\alpha$ je střed K a $(\beta\overline{\beta} - \alpha\gamma)/\alpha^2$ je čtverec poloměru r kružnice K, plyne z (9.18) rovnost $(z^* - z_0)(\overline{z} - \overline{z_0}) = r^2$, z níž plyne $z^* = z_0 + r^2/(\overline{z} - \overline{z_0})$. Pak však je

$$\frac{z^* - z_0}{z - z_0} = \frac{r^2}{|z - z_0|^2} > 0\,,$$

takže z^* leží na polopřímce $\{z_0 + t(z - z_0)\,;\, t \in [0, \infty)\}$ s počátečním bodem z_0 a procházející bodem z. Dále je

$$\big|z^* - z_0\big| \cdot \big|\overline{z - z_0}\big| = r^2\,,$$

a také $|z - z_0||z^* - z_0| = r^2$. Viz též Obr. 9.3. Symetrickými body vzhledem ke kružnici K^* jsou též body z_0 a ∞. To plyne z definice dvojpoměru pomocí Möbiovy funkce spojité v $\mathbb{S}$ a odvozených vztahů limitním přechodem pro $z \to \infty$.

V případě (uzavřené) přímky užijeme vyjádření pomocí dvojpoměru: zvolíme-li přitom $z_4 = \infty$, bude mít (9.20) tvar

$$\frac{z^* - z_3}{z_2 - z_3} = \frac{\overline{z} - \overline{z_3}}{\overline{z_2} - \overline{z_3}}\,,$$

ze kterého plyne $|z^* - z_3| = |z - z_3|$. Bod z_3 lze volit libovolně na K^*, jsou tedy z^* i z stejně vzdáleny od kteréhokoli bodu $K^* \cap \mathbb{P}$. Dále je

$$\operatorname{Im}\frac{z^* - z_3}{z_2 - z_3} = \operatorname{Im}\frac{\overline{z} - \overline{z_3}}{\overline{z_2} - \overline{z_3}} = -\operatorname{Im}\frac{z - z_3}{z_2 - z_3}\,.$$

Pokud tedy $z \notin K^*$, leží z a z^* v různých polorovinách určených K^* a úsečka spojující z, z^* je kolmá na K^*.

Věta 9.4.37 (princip symetrie). *Jestliže Möbiova funkce f zobrazuje zobecněnou kružnici K_1^* na zobecněnou kružnici K_2^*, pak se každá dvojice bodů symetrických vzhledem ke K_1^* zobrazí na dvojici bodů symetrických vzhledem ke K_2^*.*

Důkaz. Nechť z_2, z_3, z_4 jsou navzájem různé body K_1^* a nechť z a z^* jsou symetrické vzhledem ke K_1^*; potom

$$\begin{aligned}[\,f(z^*), f(z_2), f(z_3), f(z_4)\,] &= [\,z^*, z_2, z_3, z_4\,] = \\ &= \overline{[\,z, z_2, z_3, z_4\,]} = \overline{[\,f(z), f(z_2), f(z_3), f(z_4)\,]}\,,\end{aligned}$$

takže body $f(z^*)$ a $f(z)$ jsou symetrické vzhledem k $f(K_1^*) = K_2^*$. □

Pro zobecněné kružnice lze zavést orientaci, užitečnou při vyšetřování konformních zobrazení.

Definice 9.4.38. Nechť $K^* \subset \mathbb{S}$ je zobecněná kružnice. Uspořádanou trojici navzájem různých bodů $\{z_2, z_3, z_4\}$ z K^* nazýváme **orientací zobecněné kružnice** K^*. **Pravou stranou** K^* vzhledem k orientaci $\{z_2, z_3, z_4\}$ nazýváme množinu

$$\{z \in \mathbb{S}\,;\, \operatorname{Im}[\,z, z_2, z_3, z_4\,] > 0\}\,;$$

podobně **levou stranou** K^* vzhledem k orientaci $\{z_2, z_3, z_4\}$ nazýváme množinu

$$\{z \in \mathbb{S}\,;\, \operatorname{Im}[\,z, z_2, z_3, z_4\,] < 0\}\,.$$

Poznámka 9.4.39. Čtenář si může samostatně ověřit, že při cyklické záměně bodů z_2, z_3, z_4 v dvojpoměru se jeho znaménko nezmění a při ostatních záměnách se mění na opačné. Odtud vyplývá, že trojice různých bodů kružnice určuje v závislosti na pořadí dvě různé orientace. Kružnicí určený kruh $\{z \in \mathbb{C}\,;\, |z - z_0| < r\}$ při jedné leží vpravo a při druhé vlevo od K^*.

Poznámka 9.4.40. Pro $K^* = \mathbb{R}^*$ a navzájem různé body $z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{R}^*$ definujme Möbiovu funkci $f(z) := [\,z, z_2, z_3, z_4\,]$. Potom $f(\mathbb{R}^*) = \mathbb{R}^*$ a podle Poznámky 9.4.29 lze volit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tak, že $f(z) = (az + b)/(cz + d)$. Dále je

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{(az + b)(c\bar{z} + d)}{|cz + d|^2} = \frac{ac|z|^2 + bd + bc\bar{z} + adz}{|cz + d|^2}\,.$$

Rozkladem na reálnou a imaginární část odtud dostaneme

$$\operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im}[\,z, z_2, z_3, z_4\,] = \frac{ad - bc}{|cz + d|^2}\operatorname{Im} z\,.$$

Množina $\{z \in \mathbb{S}\,;\, \operatorname{Im}[\,z, z_2, z_3, z_4\,] > 0\}$ je tedy „horní“ nebo „dolní“ polorovinou, v závislosti na znaménku „determinantu“ $ad - bc$ Möbiovy funkce.

Je-li nyní K^* zobecněná kružnice s orientací určenou trojicí $\{z_2, z_3, z_4\}$, pak pro libovolnou Möbiovu funkci g dostaneme podle Lemmatu 9.4.30

$$\begin{aligned}\{z \in \mathbb{S}\,;\, \operatorname{Im}[\,z, z_2, z_3, z_4\,] > 0\} &= \{z \in \mathbb{S}\,;\, \operatorname{Im}[\,g(z), g(z_2), g(z_3), g(z_4)\,] > 0\} = \\ &= g^{-1}(\{z \in \mathbb{S}\,;\, \operatorname{Im}[\,g(z), g(z_2), g(z_3), g(z_4)\,] > 0\})\,.\end{aligned}$$

Zobrazuje-li g zobecněnou kružnici K^* na $\mathbb{R}^*$, je

$$\{z \in \mathbb{S}\,;\, \operatorname{Im}[\,z, z_2, z_3, z_4\,] > 0\}$$

množinou $g^{-1}(\{z \in \mathbb{S}\,;\, \operatorname{Im} z > 0\})$, nebo množinou $g^{-1}(\{z \in \mathbb{S}\,;\, \operatorname{Im} z < 0\})$.

Terminologie je tedy „přirozená“: je-li $\{1, 0, \infty\}$ orientace $\mathbb{R}^*$, je $z = [z, 1, 0, \infty]$, a tak je pravou stranou $\mathbb{R}^*$ při orientaci $\{1, 0, \infty\}$ („jdeme od 1 přes 0 do ∞“) polorovina $\{z \in \mathbb{S}\,;\, \operatorname{Im} z > 0\}$, což je ve shodě s naší intuicí.

Věta 9.4.41 (princip zachování orientace). *Nechť K_1^*, K_2^* jsou zobecněné kružnice v $\mathbb{S}$ a nechť f je Möbiova funkce, pro kterou $f(K_1^*) = K_2^*$. Je-li $\{z_2, z_3, z_4\}$ orientace K_1^*, zobrazuje f levou stranu K_1^* na levou stranu K_2^* a pravou stranu K_1^* na pravou stranu K_2^*, pokud orientujeme K_2^* pomocí $\{f(z_2), f(z_3), f(z_4)\}$.*

Důkaz. Označme g, h Möbiovy funkce, pro něž

$$\begin{aligned} &g(z_2) = 1\,, && g(z_3) = 0\,, && g(z_4) = \infty\,,\\ &h(f(z_2)) = 1\,, && h(f(z_3)) = 0\,, && h(f(z_4)) = \infty\,. \end{aligned}$$

Potom $f = g \circ h^{-1}$ a funkce g zobrazí podle Poznámky 9.4.40 pravou stranu K_1^* a funkce h pravou stranu K_2^* na pravou stranu (horní polorovinu) vzhledem k $\mathbb{R}^*$, z čehož již plyne tvrzení pro pravé strany. Analogicky dostaneme druhou část tvrzení. □

9.5 Konformní zobrazení

Poznámka 9.5.1. Je-li $f : G \to G_1$ prostá funkce holomorfní na otevřené množině $G \subset \mathbb{C}$ a $f(G) = G_1 \subset \mathbb{C}$, plyne z Lemmatu 9.4.12, že $f^{-1} : G_1 \to G$ je rovněž holomorfní zobrazení. Taková zobrazení se vyskytují v souvislosti s konformní ekvivalencí oblastí v $\mathbb{C}$. Někdy se pro ně užívá název **biholomorfní zobrazení** G **na** G_1. Je zřejmé, že např. Möbiovy funkce dávají řadu příkladů konformních zobrazení jednotkového kruhu $D := U(0, 1)$ na obecný kruh. Vzniká problém, zda existuje ke *každé oblasti* $G \subset \mathbb{C}$ konformní zobrazení f, které zobrazí D na G. Tento problém je však dost složitý, omezíme se proto pouze na několik s ním souvisejících jednodušších výsledků. Následující věta je v literatuře uváděna zpravidla pod názvem **Schwarzovo lemma** a má pro studium konformních zobrazení zásadní význam.

Věta 9.5.2 (Schwarz 1869*). *Nechť $f : U(0,1) \to U(0,1)$ je holomorfní funkce, $f(0) = 0$. Potom je*

$$|f(z)| \le |z|, \quad z \in U(0,1) \quad a \quad |f'(0)| \le 1\,. \tag{9.22}$$

Existuje-li $w \in U(0,1) \setminus \{0\}$ tak, že

$$|f(w)| = |w|\,, \quad nebo \quad |f'(0)| = 1\,, \tag{9.23}$$

pak existuje takové $\vartheta \in \mathbb{R}$, pro něž $f(z) = z\,\mathrm{e}^{i\vartheta}$, $z \in U(0,1)$.

Důkaz. Pro konstantní funkci f plyne z $f(0) = 0$, že $f \equiv 0$ na $U(0,1)$, z čehož plyne (9.22). Můžeme proto tvrzení dokazovat jen pro případ nekonstantní funkce f. Označme $U := U(0,1)$. Z rovnosti $f(0) = 0$ plyne, že funkce

$$g(z) := f(z)/z\,, \quad z \in U \setminus \{0\}\,, \quad g(0) := f'(0)$$

je holomorfní v U. Z předpokladů Věty 9.5.2 plyne, že pro všechna $z \in U$ platí $|f(z)| < 1$, takže je

$$|g(z)| < \frac{1}{|z|}, \quad z \in U \setminus \{0\}.$$

Odtud vyplývá, že pro všechna $r \in (0,1)$ platí

$$\sup\{|g(z)|;\ |z| = r\} \le \frac{1}{r}.$$

Z Věty 5.9.1 o maximu modulu dostáváme pro všechna $r \in (0,1)$

$$|g(z)| \le \frac{1}{r}, \quad z \in U(0,r).$$

Pro $r \to 1-$ dostaneme odhad $|g(z)| \le 1$, a tedy $|f(z)| \le |z|$, $z \in U$. Zároveň je $|f'(0)| = |g(0)| \le 1$. Z první podmínky v (9.23) dostáváme existenci bodu $w \in U \setminus \{0\}$, pro který $|f(w)/w| = |g(w)| = 1$. Pokud je $w = 0$, je i $f(w) = 0$ a druhá podmínka z (9.23) dá rovnost $|g(0)| = 1$. V obou případech funkce $|g|$ nabývá maxima v U a podle Tvrzení 5.9.2 je $|g(z)| = 1$ všude v U. Z Důsledku 3.4.7 vyplývá, že i g je konstantní v U a existuje tedy $\vartheta \in \mathbb{R}$ tak, že $g(z) = \mathrm{e}^{i\vartheta}$, neboli $f(z) = z\,\mathrm{e}^{i\vartheta}$, $z \in U$. □

Věta 9.5.3. *Je-li $z_0 \in \mathbb{C}$, existuje právě jedno konformní zobrazení $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ splňující podmínky*[3])

$$f(z_0) = 0, \quad f'(0) = 1; \tag{9.24}$$

je to lineární funkce $f(z) = z - z_0$.

Důkaz. Podle Věty 9.4.10 je f restrikce Möbiovy funkce $f_1\colon \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ na $\mathbb{C}$, a je $f_1(\infty) = \infty$. Proto je f_1 lineární funkce, tj. je tvaru $f_1(z) = az + b$. Z podmínky (9.24) plyne $a = 1$ a $b = -z_0$, čímž je důkaz dokončen. □

Věta 9.5.4. *Je-li $r \in \mathbb{R}_+$ a f konformní zobrazení $U(0,r)$ na $U(0,r)$, pro něž $f(0) = 0$, je f otočení kolem počátku.*

Důkaz. Položme $g(z) := f(rz)/r$. Funkce g zobrazuje konformně $U(0,1)$ na $U(0,1)$ a $g(0) = 0$. Na g i na inverzní funkci g^{-1} použijeme Schwarzovo lemma. Obdržíme tak nerovnosti

$$|g(z)| \le |z|, \ \ z \in U(0,1), \quad |g^{-1}(w)| \le |w|, \ \ w \in U(0,1),$$

a do druhé z nich dosadíme $w = g(z)$; pak ještě užijeme první nerovnost a dostaneme celkově $|z| \le |g^{-1}(g(z))| \le |g(z)| \le |z|$, $z \in U(0,1)$. Podle Schwarzova lemmatu je tedy g otočení a pro nějaké $\vartheta \in \mathbb{R}$ je $g(u) = u\,\mathrm{e}^{i\vartheta}$, $u \in U(0,1)$. Odtud plyne $f(ru) = rg(u) = ru\mathrm{e}^{i\vartheta}$, $u \in U(0,1)$, neboli $f(z) = z\mathrm{e}^{i\vartheta}$, $z \in U(0,r)$. □

[3]) Čtenář by si měl všimnout, že se *nepředpokládá*, že zobrazení je *na* $\mathbb{C}$.

Věta 9.5.5. *Každé dvě z množin* $\mathbb{S}$*,* $\mathbb{C}$ *a* $U(0,1)$ nejsou *konformně ekvivalentní.*

Důkaz. Konformní zobrazení $\mathbb{S}$ nebo $\mathbb{C}$ na libovolnou *omezenou* oblast neexistuje podle Liouvillovy věty, neboť omezená funkce holomorfní v $\mathbb{S}$ nebo v $\mathbb{C}$ je konstantní. Zbytek tvrzení je důsledkem Poznámky 9.4.11. □

Příklad 9.5.6. Pomocí Poznámky 9.4.26 můžeme nalézt Möbiovu funkci h, pro niž je $h\,|\,G$ s $G := \{z \in \mathbb{C}\,;\, \operatorname{Im} z > 0\}$ konformním zobrazením G na $D := U(0,1)$. Takovou funkcí je např. tzv. **Cayleyova funkce** h_C

$$h_C = \frac{z-i}{z+i}\,, \tag{9.25}$$

pro kterou je $h_C(0) = -1$, $h_C(1) = -i$, $h_C(\infty) = 1$, takže pro $K_1^* := \mathbb{R}^*$ je $h_C(K_1^*) = K_2^* := \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| = 1\}$ a $h_C(i) = 0 \in D$. Použijeme-li orientace zobecněných kružnic, pak G je levou stranou K_1^* vzhledem k orientaci $\{0,1,\infty\}$ a proto $h_C(G)$ musí být levou stranou K_2^* vzhledem k orientaci

$$\{h_C(0), h_C(1), h_C(\infty)\} = \{-1, -i, 1\}\,;$$

tou je právě oblast D. Snadno spočteme i inverzní zobrazení k h_C: je to Cayleyova funkce $h_{C'} = i(1+z)/(1-z)$.

Příklad 9.5.7. S předcházejícím Příkladem 9.5.6 souvisí složitější otázka určení *všech* Möbiových funkcí f takových, že při zavedeném označení pro $h := f\,|\,G$ je $h(G) = D$. Je-li f Möbiova funkce tvaru

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c}\cdot\frac{z-(-b/a)}{z-(-d/c)}\,, \tag{9.26}$$

pak pro f a inverzní funkci $g = f^{-1}$ je $f(K_1^*) = K_2^*$ a $g(K_2^*) = K_1$. Jelikož 0 a ∞ jsou symetrické body vzhledem ke K_2^*, musí být $g(0)$ a $g(\infty)$ symetrické vzhledem ke $g(K_2^*) = K_1^* = \mathbb{R}^*$, tj. čísla komplexně sdružená.

Dále je $0 \in K_1^*$, takže $f(0) \in K_2^*$ a tedy $|f(0)| = 1$. Tedy pro $\alpha := -b/a$ je $\overline{\alpha} = -d/c$ a jelikož $|\alpha/\,\overline{\alpha}| = 1$, je $|f(0)| = |a/c| = 1$, a tedy $a/c = \mathrm{e}^{i\vartheta}$, $\vartheta \in \mathbb{R}$. Konečně pro $z = \alpha$ je $f(z) = 0 \in D$, takže musí platit $\operatorname{Im}\alpha > 0$.

Každé zobrazení f závisí na třech reálných parametrech $\vartheta, \operatorname{Re}\alpha \in \mathbb{R}$ a $\operatorname{Im}\alpha > 0$, přičemž je tvaru

$$f(z) = \mathrm{e}^{i\vartheta}\,\frac{z-\alpha}{z-\overline{\alpha}}\,;$$

čtenář by si měl povšimnout, že to odpovídá při pevně zvolené trojici $\{z_2, z_3, z_4\}$ bodů z $\mathbb{R}^*$ volbě tří bodů $w_2, w_3, w_4 \in K_2^*$.

Příklad 9.5.8. Podobně lze odvodit, že všechny Möbiovy funkce f, pro které platí při označení z Příkladu 9.5.6 rovnost $f(G) = D$, jsou tvaru (9.26) s $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ a $ad-bc > 0$.

Věta 9.5.9. *Je-li $G \subset \mathbb{S}$ oblast a je-li $\vartheta \in \mathbb{R}$ a $z_0 \in G \cap \mathbb{C}$, existuje nejvýše jedno konformní zobrazení f oblasti G na kruh $D := U(0,1)$, vyhovující podmínkám*

$$f(z_0) = 0\,, \quad \vartheta \in \operatorname{Arg} f'(z_0)\,. \tag{9.27}$$

Důkaz. Nechť f, g je dvojice funkcí vyhovujících podmínkám v (9.27). Potom $h = g \circ f^{-1}$ zobrazuje D na D a $h(0) = 0$. Podle Věty 9.5.4 je $h(z) = z\mathrm{e}^{i\beta}$ s nějakým $\beta \in \mathbb{R}$. Protože $f = h^{-1} \circ g$, je podle věty o derivování složené funkce $f'(z_0) = (h^{-1})'(0)g'(z_0) = \mathrm{e}^{-i\beta}g'(z_0)$ a tak $\vartheta \in \operatorname{Arg} f'(z_0) \cap \operatorname{Arg} g'(z_0)$. Odtud dostáváme $\beta = 0$ modulo 2π, takže h je identita a $f = g$, což jsme chtěli dokázat. □

Věta 9.5.10. *Každé konformní zobrazení $D := U(0,1)$ na D je tvaru $f \,|\, D$, kde f je Möbiova funkce závislá na parametrech $\vartheta \in \mathbb{R}$, $\alpha \in D$, tvaru*

$$f(z) = \mathrm{e}^{i\vartheta}\,\frac{z-\alpha}{1-z\overline{\alpha}}\,, \quad z \in D\,. \tag{9.28}$$

Funkce přitom vyhovuje podmínkám $f(\alpha) = 0$, $\vartheta \in \operatorname{Arg} f'(\alpha)$.

Důkaz. Ukažme nejprve, že pro každé $\alpha \in D$ funkce

$$g(z) := \frac{z-\alpha}{1-z\overline{\alpha}}\,, \quad z \in D\,, \tag{9.29}$$

zobrazuje D na D. Výpočtem se přesvědčíme, že $g'(0) = 1 - |\alpha|^2 > 0$, takže funkce g je nekonstantní. Zároveň vidíme, že g je restrikcí Möbiovy funkce g_1 a ta zobrazuje jednotkovou kružnici K na nějakou zobecněnou kružnici. Body K jsou tvaru e^{it}, $t \in \mathbb{R}$. Je

$$|g_1(\mathrm{e}^{it})| = \left|\frac{\mathrm{e}^{it}-\alpha}{1-\mathrm{e}^{it}\,\overline{\alpha}}\right| = \left|\frac{\mathrm{e}^{it}-\alpha}{1-\mathrm{e}^{it}\,\overline{\alpha}}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^{-it}}\right| = \left|\frac{\mathrm{e}^{it}-\alpha}{\overline{\mathrm{e}^{it}-\alpha}}\right| = 1\,.$$

Odtud plyne, že $g_1(K) = K$ a protože $g_1(\alpha) = 0$, je $g_1(D) = g(D) = D$.

Je-li h libovolné konformní zobrazení D na D, existuje právě jeden bod $\alpha \in D$ tak, že $h(\alpha) = 0$; v bodě α je $h'(\alpha) \neq 0$. Zvolme $\vartheta \in \operatorname{Arg} h'(\alpha)$ a definujme f pomocí (9.28). Zřejmě je $f(D) = D$. Výpočtem ověříme, že je $f(\alpha) = 0$, $\vartheta \in \operatorname{Arg} f'(\alpha)$, z čehož užitím Věty 9.5.9 vyplývá, že $f = h$; tím je důkaz dokončen. □

Věta 9.5.11 (Study 1914*). *Nechť $D_r := U(0,r)$, $0 < r \le 1$, a nechť f je konformní zobrazení D_1 na oblast G. Potom platí:*

(1) *Je-li G konvexní, jsou také oblasti $G_r := f(D_r)$, $0 < r < 1$, konvexní.*

(2) *Je-li G hvězdovitá vzhledem k bodu $f(0)$, jsou také hvězdovité všechny oblasti $G_r = f(D_r)$, $0 < r < 1$.*

Důkaz. Protože místo funkce f stačí vyšetřit funkci $f - f(0)$, lze předpokládat, že $f(0) = 0$, jinak bychom uvažovali funkci $f(z) - f(z_0)$, $z \in D_1$. Nechť $0 < r < 1$, $0 < t < 1$, nechť w_1, w_2 jsou dva různé body z G_r a nechť $w = tw_1 + (1-t)w_2$. Máme dokázat, že i $w \in G_r$.

Body $z_k := f^{-1}(w_k)$, $k = 1, 2$, leží v D_r. Lze předpokládat, že $|z_1| \le |z_2|$, jinak lze body vyměnit. Protože $z_1 \ne z_2$, je $z_2 \ne 0$; je tedy $|z_1/z_2| \le 1$, takže pro každé $z \in D_1$ je $zz_1/z_2 \in D_1$, a proto je $f(zz_1/z_2) \in G$. Množina G je konvexní a proto leží všechny hodnoty funkce

$$g(z) := tf(zz_1/z_2) + (1-t)f(z)\,, \quad z \in D_1\,,$$

v G. Platí rovnost $f(0) = 0$, tedy též $g(0) = 0$ a konečně i $h(0) = 0$. Ze Schwarzova lemmatu plyne $|h(z)| \le |z|$ pro každé $z \in D_1$, a tedy i $|h(z_2)| \le |z_2| < r$ (protože $z_2 \in D_r$). Protože

$$g(z_2) = tf(z_1) + (1-t)f(z_2) = tw_1 + (1-t)w_2 = w\,,$$

je $|f^{-1}(w)| = |f^{-1}(g(z_2))| \le |z_2| < r$, tj. $f^{-1}(w) \in D_r$. Z toho plyne, že $w \in G_r$, což jsme měli dokázat.

Ve druhém tvrzení lze předpokládat, že oblast je hvězdovitá vzhledem k bodu $0 = f(0)$; postupuje se pak analogicky, jen se místo libovolných bodů $w_1, w_2 \in G_r$ volí např. $w_1 = 0$. $\square$

9.6 Příklady

Uvedeme na závěr ještě několik dalších jednoduchých příkladů ilustrujících užití zavedených pojmů. I když pro praxi jsou důležité podstatně složitější příklady, jednoduché příklady umožní seznámení s metodami práce.

Příklad 9.6.1. Funkce $z \mapsto z^2$ zobrazuje „první kvadrant“, tedy otevřenou množinu $G_1 = \{z \in \mathbb{C}\,;\ \operatorname{Re} z > 0\,, \operatorname{Im} z > 0\}$ konformně na „horní polorovinu“ G. Zároveň funkce f zobrazuje oblast G na oblast $\mathbb{P} \setminus \mathbf{R}_0 = \mathbb{P} \setminus \mathbb{R}_+$.

Příklad 9.6.2. Funkce

$$g(z) = \frac{1+z}{1-z} \tag{9.30}$$

je reálná na $\mathbb{R}$ a zobrazuje úsečku K_1 s krajními body $-1, 1$ a obsahující bod 0 na oblouk $L_1 \subset \mathbb{R}$ s krajními body $g(-1) = 0$, $g(1) = \infty$, obsahující bod $g(0) = 1$, takže L_1 je polopřímka vycházející z bodu 0 a obsahující bod 1. Dosazením ověříme, že $g(i) = i$; oblouk K_2 jednotkové kružnice s krajními body $-1, 1$, obsahující bod i, se funkcí g tedy zobrazí na oblouk L_2 s krajními body 0 a ∞ obsahující bod i, tj. na polopřímku imaginární osy.

Množina $K_1 \cup K_2$ je hranicí „půlkruhu“ $G_2 = G \cap U(0,1)$, $L_1 \cup L_2$ je hranicí prvního kvadrantu, který jsme označili G_1. Množina $\mathbb{S} \setminus (K_1 \cup K_2)$ je sjednocením dvou disjunktních oblastí, z nichž jedna je G_2. Podobně $\mathbb{S} \setminus (L_1 \cup L_2)$ je sjednocením dvou disjunktních oblastí, z nichž jedna je G_1; druhou označme G_3. Protože g je homeomorfní zobrazení $\mathbb{S}$ na $\mathbb{S}$ a $g(K_1 \cup K_2) = L_1 \cup L_2$, je buď $g(G_2) = G_1$, nebo $g(G_2) = G_3$. Jelikož např. bod $i/2 \in G_2$ má obraz $g(i/2) = 3 + 2i/5 \in G_1$, je $g(G_2) = G_1$. Funkce g zobrazuje tedy půlkruh G_2 na první kvadrant G_1.

Příklad 9.6.3 (obtékání překážky). Při studiu rovinného proudění je vhodné znát konformní zobrazení $g\colon G_1 \to G$, kde G_1 je horní polorovina G „s vyříznutou úsečkou“ $\langle\varphi\rangle$, a $\varphi(t) := tia$, $t \in [\,0,1\,]$ s $a > 0$.

Toto zobrazení obdržíme složením jednodušších zobrazení: $f_1\colon z \mapsto z^2$, $z \in G_1$, zobrazí G_1 na $G_2 := \mathbb{C} \setminus \langle\psi\rangle$, kde $\psi(t) := -a^2 + t$, $t \in [0, \infty)$; dále posunutí $f_2\colon z \mapsto z + a^2$ zobrazí oblast G_2 na $G_3 := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$. Konečně jednoznačná větev $M_{1/2}$ v G_3 (zobrazení f_3 inverzní k zobrazení f z Příkladu 9.6.1) zobrazí G_3 na G. Hledané zobrazení je $g = f_3 \circ f_2 \circ f_1$.

Zobrazení g se v příručkách někdy popisuje vztahem $g(z) = \sqrt{z^2 + a^2}$; uvědomte si, že bez přesnějšího popisu významu užité odmocniny nemá tento zápis rozumný smysl.

Poznámka 9.6.4. Základním poznatkem z této oblasti je tvrzení, které dokázal Georg Friedrich Bernhard Riemamnn (1826 – 1866). To říká, že *každou* neprázdnou jednoduše souvislou oblast $G \subset \mathbb{C}$, $G \neq \mathbb{C}$ lze konformně zobrazit na jednotkový kruh $U(0,1)$. Riemannův důkaz tohoto tvrzení nebyl zcela korektní, ale právě snaha postavit Riemannovy výsledky na pevný základ přispěla k zájmu předních matematiků o tuto teorii. Důkazové metody Riemannovy věty zahrnují i partie teorie potenciálu, o níž částečně pojednává Kapitola 11. Dnes bývá Riemannova věta často formulována v následujícím tvaru:

Věta 9.6.5 (Riemann 1851*). *Každou neprázdnou jednoduše souvislou oblast v $\mathbb{S}$ lze konformně zobrazit na právě jednu ze tří oblastí: $\mathbb{S}$, $\mathbb{C}$, nebo $U(0,1)$.*

Důsledek 9.6.6. *Každé dvě neprázdné jednoduše souvislé oblasti v $\mathbb{C}$, jejichž komplement v $\mathbb{C}$ je alespoň dvoubodová množina, jsou konformně ekvivalentní.*

Historická poznámka 9.6.7. Zobrazení zachovávající úhly studoval jako první Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855) v práci z r. 1825. Dospěl dokonce k poznatku z Poznámky 9.3.4 o vztahu zachovávání úhlů a holomorfnosti funkcí f nebo $\overline{f}$ (používal samozřejmě jiný aparát, nikoli teorii funkcí komplexní proměnné).

V Riemannových pracích je zachovávání úhlů jen zmíněno a pojem, s nímž pracuje („podobnost v malých částech“) je ekvivalentní zachovávání úhlů včetně orientace. Jeho důležitý výsledek, tzv. *Riemannovu větu* o konformní ekvivalenci, jsme bez důkazu uvedli výše. Věta pochází z Riemannovy disertace z r. 1851. Důkaz, který je v práci spíše jen načrtnut, se týká pouze omezených oblastí s po částech hladkou hranicí; je založen na řešení *Dirichletovy úlohy* (viz Kapitolu 11 o harmonických funkcích) pomocí tzv. *Dirichletova principu.* Konformní zobrazení má četné aplikace při studiu proudění a poskytuje velmi užitečný nástroj k navrhování lopatek turbin, profilů křídel apod.

Poznamenejme, že jsme ukázali, že (neprázdné) jednoduše souvislé oblasti v $\mathbb{S}$ se rozpadají na třídy dle konformní ekvivalence. V jedné leží jediná množina $\mathbb{S}$, ve druhé oblasti $\mathbb{S} \setminus \{z_0\}$ (speciálně $\mathbb{C}$), v dalších např. jednotkový kruh D. O konformních zobrazeních kruhu D něco málo již víme, nedokázali jsme však fundamentální Riemannovu větu, podle které skutečně všechny zbývající neprázdné jednoduše souvislé oblasti jsou konformně ekvivalentní s D (a tudíž i všechny mezi sebou). Umíme popsat i některá zobrazení: v prvních dvou třídách jsou to právě Möbiovy funkce, resp. jejich restrikce.

Problém konformní ekvivalence je velmi zajímavý. Čtenáře může napadnout, jaké výsledky jsou známy pro vícenásobně souvislé oblasti. Ukazuje se, že není např. obtížné dokázat, že prstence, tj. nejjednodušší dvojnásobně souvislé oblasti, vytvářejí daleko více konformně ekvivalentních tříd. Oblasti $P(z, r_1, R_1)$ a $P(z, r_2, R_2)$ s $0 < r_k < R_k < \infty$, $k = 1, 2$, jsou konformně ekvivalentní, právě když $R_1/r_1 = R_2/r_2$. Viz např. [5], Věta 14.22.

Augustus Ferdinand Möbius (1790 – 1868) je známý jako objevitel nejznámější „jednostranné plochy“, nazývané po něm *Möbiův list*. Je též jedním ze zakladatelů projektivní geometrie. Relativně vyčerpávající zkoumání Möbiových funkcí lze nalézt v prvním dílu monografie [1].

Větu 9.5.2 v jiném znění publikoval Hermann Amandus Schwarz (1843 – 1923) v Zürichu ve školním roce 1869/70 a použil ji k důkazu Riemannovy věty. Její varianta, kterou uvádíme, a její jednoduchý, nyní všeobecně užívaný důkaz publikoval Constantin Carathéodory (1873 – 1950); ten též rozeznal eminentní důležitost Schwarzova lemmatu pro komplexní analýzu. Carathéodory však připisuje ideu důkazu Erhardu Schmidtovi (1876 – 1959). Větu 9.5.11 dokázal Eduard Study (1862 – 1930) r. 1914. Prezentovaný důkaz Studyho věty pochází od Tibora Radó (1895 – 1965).

Další příklady na užití elementárních transformací lze nalézt např. v [3]. Tak např. Žukovského funkce souvisí se zmíněným tvarem křídel či turbinových lopatek.

Literatura:

[1] Carathéodory, C.: *Funktionentheorie I, II*, Birkhäuser, Basel, 1950.

[2] Courant, R.: *Theory of functions of a complex variable*, New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York, 1948. (Notes by A. A. Blank).

[3] Černý, I.: *Analýza v komplexním oboru*, Academia, Praha, 1983.

[4] Knopp, K.: *Theorie und Anwendungen der unendlichen Reihen*, Springer, Berlin, 1924.

[5] Rudin, W.: *Analýza v reálném a komplexním oboru*, Academia, Praha, 1977.

[6] Sekanina, M., Boček, L., Kočandrle, M., Šedivý, J.: *Geometrie II.*, SPN, Praha, 1988.

Kapitola 10

Cauchyho věta: zobecnění

Až dosud jsme se při aplikacích Cauchyho věty omezili na konvexní nebo hvězdovité oblasti v $\mathbb{C}$. Jsou to jediné přípustné oblasti, které zatím známe. Je proto přirozené ptát se, do jaké míry lze Cauchyho větu užívat pro složitější množiny. Bude vhodné zavést přirozeným způsobem zobecnění řady pojmů, které známe pro (uzavřené) křivky. Všechny souvisejí s integrací vzhledem ke složitějším objektům, které budeme nazývat cykly. Nebudeme se totiž při integraci omezovat na jednotlivé křivky a budeme uvažovat konečné posloupnosti „navzájem nezávislých“ křivek; upustíme přitom od podmínky, že tyto křivky na sebe „navazují“.

10.1 Cykly

Definice 10.1.1. Konečnou posloupnost $\Gamma = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ uzavřených křivek v $\mathbb{C}$ budeme nazývat **cykl**. **Geometrickým obrazem cyklu** Γ nazveme množinu $\langle \Gamma \rangle := \bigcup_{k=1}^{n} \langle \varphi_k \rangle$. Je-li $\langle \Gamma \rangle \subset G$, říkáme že Γ je **cyklus v** G.

V definici se nepředpokládá, že křivky φ_k jsou navzájem různé; nezáleží ani na tom, zda-li se geometrické obrazy $\langle \varphi_k \rangle$ protínají nebo ne.

Další definice *nebudeme formalizovat* a uvedeme výčet těch pojmů, které zobecňujeme a které budeme dále potřebovat. Není-li řečeno něco jiného, je dále $\Gamma = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$. Nejdůležitějším pojmem je pro nás integrace přes cyklus: pro každou $f \in \mathcal{C}(\langle \Gamma \rangle)$ definujeme

$$\int_\Gamma f(z) dz := \sum_{k=1}^{n} \int_{\varphi_k} f(z) dz \ .$$

Dále definujeme **délku** $L(\Gamma)$ **cyklu** Γ jako součet délek $\sum_{k=1}^{n} L(\varphi_k)$. Konečně

$$\operatorname{ind}(\Gamma, \zeta) := \sum_{k=1}^{n} \operatorname{ind}(\varphi_k, \zeta) \,, \quad \zeta \in \mathbb{S} \setminus \Gamma \,,$$

je **index bodu ζ vzhledem k cyklu Γ**. Zřejmě je

$$\operatorname{ind}(\Gamma,\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{dz}{z-\zeta}\,.$$

Definujme též **opačně orientovaný cyklus** $\dot{-}\,\Gamma := \{\dot{-}\,\varphi_1,\dots,\dot{-}\,\varphi_n\}$ a pro dva cykly $\Gamma_1 := \{\varphi_1,\dots,\varphi_n\}$, $\Gamma_2 := \{\psi_1,\dots,\psi_m\}$ klademe

$$\Gamma_1 \dot{+} \Gamma_2 := \{\varphi_1,\dots,\varphi_n,\psi_1,\dots,\psi_m\}\,,\quad \Gamma_1 \dot{-} \Gamma_2 := \Gamma_1 \dot{+} (\dot{-}\Gamma_2)\,.$$

Pro cyklus Γ definujeme

$$\operatorname{Int}\Gamma = \{z\in\mathbb{C}\,;\,\operatorname{ind}(\Gamma,z)\neq 0\}\,,\quad \operatorname{Ext}\Gamma = \{z\in\mathbb{S}\,;\,\operatorname{ind}(\Gamma,z)=0\}\,,$$

a množinu $\operatorname{Int}\Gamma$ nazýváme **vnitřek** Γ, množinu $\operatorname{Ext}\Gamma$ **vnějšek** Γ. Poznamenejme, že užitečnost cyklů se však *plně projeví* teprve při důkazech hlubších vět, které přesahují rámec tohoto výkladu.

V dalším budeme potřebovat ještě jedno tvrzení o křivkových integrálech. Rozšíříme nejprve naše znalosti o křivkovém integrálu o tvrzení typu Fubiniho věty.

Tvrzení 10.1.2. *Nechť f je komplexní funkce spojitá na $\langle\varphi\rangle\times\langle\psi\rangle$, kde φ,ψ jsou křivky v $\mathbb{C}$. Potom je:*

$$\int_\varphi\Big(\int_\psi f(z,\zeta)dz\Big)d\zeta = \int_\psi\Big(\int_\varphi f(z,\zeta)d\zeta\Big)dz\,. \tag{10.1}$$

Důkaz. Podle Poznámky 1.6.15 se můžeme omezit pouze na regulární křivky $\varphi:[\,a,b\,]\to\mathbb{C}$ a $\psi:[\,c,d\,]\to\mathbb{C}$. Toho nyní využijeme: Podle definice křivkového integrálu je rovnost (10.1) ekvivalentní s rovností

$$\int_a^b\Big(\int_c^d f(\psi(u),\varphi(t))\,\psi'(t)dt\Big)\varphi'(u)du = \int_c^d\Big(\int_a^b f(\psi(u),\varphi(t))\,\varphi'(u)du\Big)\psi'(t)dt\,,$$

která vyplývá z Fubiniho věty pro spojitou funkci na kompaktním intervalu v $\mathbb{R}^2$. □

Poznámka 10.1.3. Důkaz Věty 10.1.2 nezávislý na znalostech o vícerozměrném Riemannově integrálu lze vést přes aproximaci „dvojnásobného křivkového integrálu“ konečnými součty; viz např. [2]. K $\varepsilon>0$ se naleznou dělení $D=\{a=u_0<u_1<\dots<u_n=b\}$ a $D'=\{a=t_0<t_1<\dots<t_m=b\}$ tak, že

$$\Big|\int_a^b\Big(\int_c^d f(\psi(t),\varphi(u))\psi'(t)dt\Big)\varphi'(u)du - \\ -\sum_{r=1}^n\sum_{s=1}^m f(\psi(t_r),\varphi(u_s))(\psi(t_r)-\psi(t_{r-1})(\varphi(u_s)-\varphi(u_{s-1})\Big| \le \varepsilon L(\varphi)L(\psi)$$

a využije se komutativity konečných součtů.

Důsledek 10.1.4. *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina a φ je křivka v $\mathbb{C}$. Je-li f spojitá funkce na $G \times \langle\varphi\rangle$, pro kterou je $f(\centerdot, \zeta)$ funkcí holomorfní v G pro každé $\zeta \in \langle\varphi\rangle$, je*

$$F(z) = \int_\varphi f(z,\zeta)d\zeta$$

funkce holomorfní v G.

Důkaz. Zvolme libovolně $z \in G$ a okolí $U(z) \subset G$ Podle (5.5.9) stačí ukázat, že se křivkový integrál z F anuluje po křivce $(\triangle)$ pro každý trojúhelník $\triangle \subset U(z)$. Avšak

$$\int_{(\triangle)} F(w)dw = \int_{(\triangle)} \Big(\int_\varphi f(w,\zeta)d\zeta\Big)dw = \int_\varphi \Big(\int_{(\triangle)} f(w,\zeta)dw\Big)d\zeta = 0\,,$$

neboť $f(\centerdot, \zeta) \in H(G)$ pro všechna $\zeta \in \langle\varphi\rangle$ a tudíž v posledním „dvojnásobném“ integrálu je vnitřní integrál roven 0 pro všechna $\zeta \in \langle\varphi\rangle$. □

10.2 Zobecnění Cauchyho věty

Věta 10.2.1 (Cauchyho věta a Cauchyho vzorec). (A) *Nechť Γ je cykl v $\mathbb{C}$ a nechť f je funkce holomorfní v nějaké otevřené množině $G \subset \mathbb{C}$ obsahující průnik $\langle\Gamma\rangle \cup \operatorname{Int}\Gamma$.*
(A) *Potom*

$$\int_\Gamma f(z)dz = 0\,. \tag{10.2}$$

a pro každé $\zeta \in G \setminus \langle\Gamma\rangle$ platí rovnost

$$f(\zeta)\operatorname{ind}(\Gamma,\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-\zeta}dz\,. \tag{10.3}$$

(B) *Je-li přitom $\Gamma = \Gamma_1 \dot{-} \Gamma_2$ a Γ_1, Γ_2 jsou cykly, pro něž* $\operatorname{ind}(\Gamma_1,\zeta) = \operatorname{ind}(\Gamma_2,\zeta)$ *pro všechna $\zeta \notin G$, pak*

$$\int_{\Gamma_1} f(z)dz = \int_{\Gamma_2} f(z)dz\,.$$

Poznámka 10.2.2. Poznamenejme, že cykly Γ_1, Γ_2 v otevřené množině $G \subset \mathbb{S}$ se nazývají **homologické v** G, jestliže $\operatorname{ind}(\Gamma_1,\zeta) = \operatorname{ind}(\Gamma_2,\zeta)$ pro všechna $\zeta \in \mathbb{S} \setminus G$. Cykl Γ je **homologický s 0 v** G, je-li $\operatorname{ind}(\Gamma,\zeta) = 0$ pro všechna $\zeta \in \mathbb{S} \setminus G$. Proto se část (B) Věty 10.2.1 někdy nazývá **homologická verze Cauchyho věty.** Je-li φ křivka a ztotožníme-li cykl $\{\varphi\}$ s φ, jsou uzavřené (po částech regulární) křivky speciálním případem cyklů. Proto se tato terminologie užívá analogicky i pro uzavřené křivky.

Důkaz Věty 10.2.1. Definujme funkci $g\colon G \times G \to \mathbb{C}$ vztahy

$$g(z,w) := \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,, \text{ je-li } z \neq w\,, \quad g(z,z) := f'(z)\,,$$

a dokažme, že je spojitá na $G \times G$. Spojitost g v bodech $[\,z,w\,]$, $z \neq w$, je zřejmá; zvolme tedy libovolně bod $v \in G$ a dokažme spojitost g v bodě $[\,v,v\,]$. Protože $f \in H(G)$, je f' spojitá v bodě v a pro každé $\varepsilon > 0$ existuje okolí $U(v)$ tak, že $|f'(u) - f'(v)| = |g(u,u) - g(v,v)| < \varepsilon$ pro všechna $u \in U(v)$. Jsou-li body $z, w \in U(v)$, $z \neq w$, a položíme-li $\varphi := [\,z;w\,]$, tj. $\varphi(t) := z + t(w-z)$, $t \in [\,0,1\,]$, je $\langle\varphi\rangle \subset U(v)$ a

$$f(w)-f(z) = \int_{[\,z;w\,]} f'(u)du = \int_0^1 f'(\varphi(t))(w-z)dt\; = (w-z)\int_0^1 f'(\varphi(t))dt\;.$$

Z toho plyne, že

$$|g(z,w)-g(v,v)| = \Big|\int_0^1 f'(\varphi(t))dt - f'(v)\Big| = \Big|\int_0^1 (f'(\varphi(t))-f'(v))dt\Big| \leq \varepsilon\,, \quad (10.4)$$

kde poslední nerovnost v (10.4) plyne z volby $U(v)$ a z Důsledku 1.6.5. Z ní však plyne, že g je spojitá v bodě $[\,v,v\,]$ a tedy i ve všech bodech $[\,w,w\,]$, $w \in G$.

Je zřejmé, že funkce $g(\centerdot,w) \in H(G)$ pro všechna $w \in G$ a $g(z,\centerdot) \in H(G)$ pro všechna $z \in G$. Můžeme tedy definovat

$$h(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma g(z,w)dw\;, \quad z \in G\,.$$

Pro $z \in G \setminus \langle\Gamma\rangle$ je Cauchyho vzorec (10.3) zřejmě ekvivalentní s tvrzením

$$h(z) = 0 \text{ pro každé } z \in G\,. \quad (10.5)$$

Abychom dokázali (10.5), dokážeme nejdříve, že $h \in H(G)$. Funkce h je spojitá, protože pro libovolné $z_0 \in G$ a $U(z_0) \subset \overline{U(z_0)} \subset G$ je g stejnoměrně spojitá na kompaktní množině $\overline{U(z_0)} \times \langle\Gamma\rangle \subset G \times G$, a tedy pro $z_n \in U(z_0)$, $z_n \to z_0$ je $g(z_n,\centerdot) \rightrightarrows g(z_0,\centerdot)$ na $\langle\Gamma\rangle$. Odtud plyne z Věty5.5.14, že $h(z_n) \to h(z_0)$ a spojitost h na G je dokázána.

Pomocí Důsledku 5.5.9 dokážeme, že funkce h je holomorfní na G. To však stačí ověřit pouze lokálně v G. Zvolme tedy $U(v) \subset G$ a nechť $\triangle$ je libovolný trojúhelník v $U(v)$. Pomocí Poznámky 1.6.8 změníme eventuálně parametrizace všech křivek vystupujících ve Γ a křivky $(\triangle)$ tak, abychom dostali *regulární* křivky.

Potom je

$$\int_{(\triangle)} h(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\triangle)}\Big(\int_\Gamma g(z,w)dw\Big)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\Big(\int_{(\triangle)} g(z,w)dz\Big)dw\,; \quad (10.6)$$

k záměně pořadí integrace používáme Tvrzení 10.1.2. Pro každé $w \in G$ je tedy funkce $z \mapsto g(z, w)$ holomorfní v G. Vnitřní integrál na pravé straně rovnosti (10.6) je proto roven 0 pro všechna $w \in \langle\Gamma\rangle$. Podle Důsledku 5.5.9 dostáváme $h \in H(U(v))$ a tedy i $h \in H(G)$.

Nechť dále $G_1 = \operatorname{Ext} \Gamma$. Definujme pro $z \in G_1$ funkci

$$h_1(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z} dw \,.$$

Je-li $z \in G \cap G_1$, je z definice G_1 zřejmá rovnost $h_1(z) = h(z)$. Existuje tedy funkce $\omega \in H(G \cup G_1)$, tak, že pro restrikce ω je

$$\omega \,|\, G = h \quad \text{a} \quad \omega \,|\, G_1 = h_1 \,.$$

Množina G_1 obsahuje doplněk množiny G, a proto je ω celá funkce. Obsahuje zároveň i neomezenou komponentu doplňku množiny $\langle\Gamma\rangle$, neboť na této komponentě je $\operatorname{ind}(\Gamma, \centerdot) = 0$. Proto

$$\lim_{z\to\infty} \omega(z) = \lim_{z\to\infty} h_1(z) = 0 \,.$$

Z Liouvillovy věty plyne, že $\omega(z) = 0$ pro všechna z, což dá (10.5) a tedy i (10.3).

Zvolíme-li libovolně $w \in G \setminus \langle\Gamma\rangle$ a definujme-li $f_1(z) = (z-w)f(z)$, je podle toho, co jsme již dokázali

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f_1(z)}{z-w} dz = f_1(w) \operatorname{ind}(\Gamma, w) = 0 \,,$$

protože $f_1(w) = 0$. Je tedy $\int_\Gamma f(z) dz = 0$.

Tvrzení z části (B) plyne z rovnosti indexů $\operatorname{ind}(\Gamma_1, \zeta) = \operatorname{ind}(\Gamma_2, \zeta)$, jestliže aplikujeme (10.3) na cykl $\Gamma = \Gamma_2 - \Gamma_1$. Tím je důkaz věty dokončen. □

Poznámka 10.2.3. Je-li $\Gamma = \{\varphi\}$, kde φ je *uzavřená křivka* v konvexní oblasti G a $\zeta \notin G$, aplikací Cauchyho Věty 5.2.4 pro konvexní množinu na funkci $f(z) = (z-\zeta)^{-1}$ dostáváme $\operatorname{ind}(\varphi, \zeta) = 0$. Odtud dostaneme $\operatorname{ind}(\Gamma, \zeta) = 0$ pro všechna $\zeta \notin G$, a každý cykl Γ v G. Proto je předcházející Věta 10.2.1 zobecněním Věty 5.2.4 a Věty 5.5.2. Obecněji, je-li G otevřená množina a $\mathbb{S} \setminus G$ je souvislá, je $\operatorname{ind}(\Gamma, \centerdot) = 0$ všude v $\mathbb{S} \setminus G$ a $\int_\Gamma f(z) dz = 0$ pro každou funkci f holomorfní v G a každý cykl Γ v G. Cauchyho věta tedy platí nejen pro konvexní oblasti, ale i pro všechny jednoduše souvislé oblasti v $\mathbb{C}$.

10.3 Homotopie

Topologický pojem, na kterém je založen další výklad, lze vyšetřovat daleko obecněji. Umožňuje jeden z mnoha možných popisů množin, které souvisejí s Cauchyho větou.

Poznámka 10.3.1 (důležitá). V této části používáme *obecnější křivky*, tj. spojitá zobrazení kompaktních intervalů v $\mathbb{R}$ do $\mathbb{C}$. Křivka tedy obecně *není po částech regulární* jako v předchozím výkladu.

Lemma 10.3.2. *Nechť $I = [\,a, b\,]$ a $\varphi : I \to \mathbb{C}$, $\psi : I \to \mathbb{C}$ jsou uzavřené křivky. Je-li $\zeta \in \mathbb{C}$ takový bod, že pro všechna $t \in I$ platí nerovnost*

$$|\psi(t) - \varphi(t)| < |\zeta - \varphi(t)|\,, \tag{10.7}$$

je $\operatorname{ind}(\psi, \zeta) = \operatorname{ind}(\varphi, \zeta)$.

Poznámka 10.3.3. Pokud bychom pracovali s po částech regulárními křivkami, je k dispozici patrně snazší důkaz, založený na definici indexu pomocí integrálu; viz [3], str. 118, odst. III. 2. 8.

Důkaz. Použijeme postup, který jsme aplikovali při důkazu existence spojité větve logaritmu v Lemmatu 4.4.14. Protože je $\varphi([\,a, b\,])$ kompaktní množina a ζ neleží podle (10.7) na φ, je vzdálenost $d := \operatorname{dist}(\zeta, \langle\varphi\rangle)$ kladná. Z nerovnosti (10.7) dále plyne nerovnost $2\delta := d - \min\{|\varphi(t) - \psi(t)|;\, t \in I\} > 0$. Funkce φ je *stejnoměrně* spojitá na $[\,a, b\,]$. Zvolíme dělení $D \in \mathcal{D}([\,a, b\,])$, $D = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ jako v Lemmatu 4.4.14 tak, že obrazy dělících intervalů $\varphi([\,t_{k-1}, t_k\,])$ mají pro všechna $k = 1, \ldots, n$ průměr menší než $\delta/2$. Označme ještě

$$\varphi_k := \varphi\,|\,[\,t_{k-1}, t_k\,]\,, \quad \psi_k := \psi\,|\,[\,t_{k-1}, t_k\,]\,, \quad k = 1, \ldots, n\,.$$

Pak je $\langle\varphi_k\rangle \subset U_k := U(\varphi(t_{k-1}), \delta)$ pro $k = 1, \ldots, n$ a z (10.7) plyne, že

$$|\psi(t) - \varphi(t_{k-1})| < |\psi(t) - \varphi(t)| + |\varphi(t) - \varphi(t_{k-1})| < \delta\,,$$

pro každé $t \in [\,t_{k-1}, t_k\,]$, takže i i $\psi([\,t_{k-1}, t_k\,]) \subset U_k$.

Položme $\mu_k := [\,\varphi(t_k); \psi(t_k)\,]$ pro $k = 0, 1, \ldots, n$; vzhledem k tomu, že krajní body úseček μ_{k-1} a μ_k leží v (konvexní) množině U_k, je $\langle\mu_{k-1}\rangle \cup \langle\mu_k\rangle \subset U_k$, takže

$$\nu_k := \varphi_k \dotplus \mu_k \dot{-} \psi_k \dot{-} \mu_{k-1}$$

je uzavřená křivka v U_k.

Podle Lemmatu 4.4.13 existuje pro každé $k = 1, \ldots, n$ funkce l_k, která je spojitou větví logaritmu v U_k. Její přírůstek podél (uzavřené) křivky ν_k je ovšem nulový. Sečteme-li všechny tuto přírůstky, dostaneme rovnost

$$0 = \sum_{k=1}^{n} \bigl(l_k(\varphi_k(t_k)) - l_k(\varphi_k(t_{k-1})\bigr) - \sum_{k=1}^{n} \bigl(l_k(\psi_k(t_k)) - l_k(\psi_k(t_{k-1})\bigr)\,,$$

protože přírůstky podél křivek $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}, \mu_n = \mu_0$ se zruší s přírůstky podél křivek $\dot{-}\,\mu_0, \ldots, \dot{-}\,\mu_{n-1}$. Dělíme-li číslem $2\pi i$, dostaneme požadovanou rovnost $0 = \operatorname{ind}(\varphi, \zeta) - \operatorname{ind}(\psi, \zeta)$, čímž je důkaz dokončen. $\square$

Definice 10.3.4. Nechť G je oblast v $\mathbb{C}$, $I = [\,a, b\,]$ a nechť $\varphi : I \to G$ a $\psi : I \to G$ jsou uzavřené křivky. Říkáme, že φ a ψ jsou **homotopické v** G nebo také, že jsou G-**homotopické**, existuje-li spojité zobrazení *hom* kompaktu $J = I \times [\,0, 1\,]$ do G takové, že pro všechna $t \in I$ a $s \in [\,0, 1\,]$ je

$$hom\,(t, 0) = \varphi(t), \quad hom\,(t, 1) = \psi(t), \quad hom\,(a, s) = hom\,(b, s)\,.$$

Poznámka 10.3.5. Položíme-li $\varphi_s(t) = hom\,(t, s)$, je pomocí hom definován *jednoparametrický systém uzavřených křivek* φ_s *v* G, který jistým způsobem *spojuje* φ a ψ. Interpretujeme-li s jako čas, můžeme si představit, že $\psi = \varphi_1$ vznikla z $\varphi = \varphi_0$ spojitou deformací, v jejíž každé fázi je křivka φ_s uzavřená a $\langle\varphi_s\rangle \subset G$.

Jsou-li φ a ψ po částech regulární křivky, jsou $\varphi_s : I \to G$, $s \in (0, 1)$, obecně pouze spojitá zobrazení, tedy „obecné“ uzavřené křivky; avšak i pro ně máme definován index. Založíme další postup na této myšlence: Je-li $\zeta \in \mathbb{S} \setminus hom\ (I \times [\,0, 1\,])$, je $\mathrm{ind}(\varphi_s, \zeta)$ konstantní funkcí parametru $s \in I$, neboť jeho malou změnou se index nemění, a je tedy spojitou funkcí s nabývající na souvislé množině (intervalu) pouze celočíselných hodnot. Speciálně dostaneme rovnost

$$\mathrm{ind}(\varphi, \zeta) = \mathrm{ind}(\psi, \zeta)\,. \tag{10.8}$$

Definice 10.3.6. Je-li φ křivka, která je v oblasti G homotopická s *konstantním zobrazením* ψ (tj. $\langle\psi\rangle$ je jednobodová množina), říkáme, že φ je **homotopická s 0 v** G. Je-li G taková oblast v $\mathbb{C}$, v níž je každá uzavřená křivka homotopická s 0 v G, říkáme, že oblast G je **homotopicky jednoduše souvislá**.

Příklad 10.3.7. Dokažme, že např. každá hvězdovitá (a tím spíše každá konvexní) oblast G je homotopicky jednoduše souvislá. Nechť oblast G je hvězdovitá vůči bodu z_0. Je-li $\varphi\colon [\,a, b\,] \to G$ uzavřená křivka a položíme-li

$$hom\,(t, s) := (1 - s)\varphi(t) + s z_0\,, \quad 0 \le s \le 1,\ a \le t \le b\,,$$

je zřejmé, že *hom* je spojitá funkce s hodnotami v G a že funkce $hom\,(\,\boldsymbol{.}\,, 1) = z_0$ je konstantní. Tím je tvrzení dokázáno.

Čtenář by si měl povšimnout, že zobrazení *hom* vzniklo tím, že jsme ve funkci

$$h(z, s) := (1 - s)z + s z_0 = z + (z_0 - z)s\,, \quad z \in G,\ s \in [\,0, 1\,]\,,$$

položili $z = \varphi(t)$, $t \in [\,a, b\,]$. Funkce h popisuje spojitou kontrakci G na jednobodovou množinu $\{z_0\}$. Je $h(z, \boldsymbol{.}) = [\,z; z_0\,] \subset G$. V průběhu této kontrakce se pro každou křivku φ v G stává z $\langle\varphi\rangle$ jednobodová množina, tj. křivka φ se deformuje na křivku konstantní.

Protože $\mathrm{ind}(\varphi_s, \zeta)$, kde $\zeta \in \mathbb{S} \setminus G$, se v průběhu takové kontrakce nemění a protože index vzhledem ke konstantní křivce je nulový, plyne z toho, že pro každou uzavřenou křivku φ ve hvězdovité oblasti $G \subset \mathbb{C}$ je $\mathrm{ind}(\varphi, \zeta) = 0$ pro každý bod $\zeta \notin G$.

Zatímco s homotopií je spojena vágní představa spojité deformace jedné křivky v druhou, zde jde o spojité „smrsknutí“ do jednoho bodu (někdy se mluví o kontrakci do jednoho bodu a kontraktibilitě křivek). Z Věty 10.3.8 vyplyne, že podmínka (10.8), která vystupuje ve Větě 10.2.1, platí pro libovolné dvě G-homotopické uzavřené cesty. Poznamenáváme, že odtud speciálně plyne, že podmínka z Věty 10.2.1, že $\mathrm{ind}(\Gamma, \zeta) = 0$ pro všechna $\zeta \notin G$, platí pro každou uzavřenou křivku φ v G, pokud je G homotopicky jednoduše souvislá.

Věta 10.3.8. *Nechť φ, ψ jsou uzavřené křivky homotopické v oblasti G. Je-li $\zeta \notin G$, potom*

$$\operatorname{ind}(\varphi, \zeta) = \operatorname{ind}(\psi, \zeta)\,.$$

Důkaz. Poznamenejme, že tvrzení zřejmě platí pro $\zeta = \infty$. Z Definice 10.3.4 plyne existence spojitého zobrazení *hom* s popsanými vlastnostmi. Protože J je kompaktní množina, je *hom* stejnoměrně spojité na J a $H(J)$ je také kompaktní. Proto existuje $\delta \in \mathbb{R}_0$ tak, že $\operatorname{dist}(\zeta, hom(J)) > \delta$. Ze stejnoměrné spojitosti *hom* plyne existence dělení $D \in \mathcal{D}([0,1])$, $D = \{0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = 1\}$, pro které platí $|\,hom(t, s_{k-1}) - hom(t, s_k)| < \delta$ pro všechna uvažovaná k. Podle Lemmatu 10.3.2 jsou si rovny indexy bodu ζ vzhledem k „sousedním“ křivkám

$$hom(t, s_{k-1})\,,\ \ t \in [\,a, b\,]\,, \quad hom(t, s_k)\,,\ \ t \in [\,a, b\,]\,,$$

pro všechna $k = 1, \ldots, n$, a tedy i pro křivky $\varphi = hom(\,\boldsymbol{.}\,, s_0)$ a $\psi = hom(\,\boldsymbol{.}\,, s_n)$. Platí tedy $\operatorname{ind}(\varphi, \zeta) = \operatorname{ind}(\psi, \zeta)$. □

Poznámka 10.3.9. Předcházející věta říká, že homotopické křivky v G jsou také homologické v G. Nepřekvapuje tudíž, že existuje též **homotopická verze Cauchyho věty**.

Důsledek 10.3.10 (Cauchyho věta). *Nechť f je funkce holomorfní v otevřené množině $G \subset \mathbb{C}$ a nechť φ, ψ jsou uzavřené křivky homotopické v G. Potom platí*

$$\int_\varphi f(z)dz = \int_\psi f(z)dz\ .$$

Poznámka 10.3.11. Poznali jsme řadu podmínek souvisejících s aplikabilitou Cauchyho věty: víme např. že integrál nezávisí na křivce v oblasti $G \subset \mathbb{C}$, pokud je G konvexní nebo hvězdovitá, nebo jsou-li všechny cykly v G homologické, nebo jsou-li homotopické s 0 v G. Ukazuje se, že platí řada ekvivalentních podmínek, charakterizujících *jednoduše souvislé oblasti* v $\mathbb{S}$. V [1] jich čtenář ve Větě 4.65 nalezne 8, v [5] je jich ve Větě 13.11 uvedeno 9 a [2] jich uvádí ve Větě 12.3.4 dokonce 17.

Uvedeme některé z nich bez důkazu ekvivalence v následující větě; některé lehčí části důkazu ekvivalence jsme již provedli.

Věta 10.3.12. *Nechť $G \neq \emptyset$ je oblast v $\mathbb{C}$. Potom jsou následující podmínky ekvivalentní:*

(1) *Existuje homeomorfní zobrazení oblasti G na $\mathbb{C}$;*

(2) *oblast G je (homotopicky) jednoduše souvislá, tj. každá uzavřená křivka φ v G je homotopická s 0;*

(3) *oblast G je (homologicky) jednoduše souvislá, tj. pro každou uzavřenou křivku φ v G a každé $\zeta \in \mathbb{S} \setminus G$ platí* $\operatorname{ind}(\varphi, \zeta) = 0$;

(4) *množina $\mathbb{S} \setminus G$ je souvislá;*

(5) *pro každou $f \in H(G)$ a každou uzavřenou křivku φ v G platí $\int_\varphi f(z)dz = 0$;*

(6) *pro každou $f \in H(G)$ a každou uzavřenou křivku φ v G platí*

$$f(\zeta)\,\mathrm{ind}(\varphi,\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{f(z)}{z-\zeta}\,dz\ , \quad \zeta \in G \setminus \langle\varphi\rangle\ ;$$

(7) *pro každou $f \in H(G)$ existuje funkce $F \in H(G)$ tak, že je $F' = f$;*

(8) *jsou-li $f, 1/f \in H(G)$, pak existuje $g \in H(G)$ tak, že $f = \exp g$, tj. existuje spojitá větev logaritmu f ;*

(9) *jsou-li $f, 1/f \in H(G)$, pak existuje $h \in H(G)$ tak, že $f = h^2$.*

Upozorňujeme čtenáře na „hraniční charakter tvrzení“: stýkají se v něm podmínky z různých matematických disciplín; některé mají ryze topologický charakter (jednoduchá souvislost), jiné analytický (Cauchyho vzorec) a jiné algebraický (existence odmocniny). Právě to činí tvrzení velice zajímavým, ale v plné obecnosti poněkud obtížným.

Historická poznámka 10.3.13. Tvrzení dnes označovaná Cauchyho věta a Cauchyho vzorec nesou jméno po jejich objeviteli: patrně nejdůležitější práce Louise Augustina Cauchyho (1789 – 1857), která je jim věnována, je z r. 1825. Práce má zajímavou historii. Byla velmi rychle rozebrána a k jejímu dalšímu otištění došlo až r. 1874-75, dlouho potom, co Georg Friedrich Bernhard Riemamnn (1826 – 1866) a Carl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815 – 1897) publikovali své příspěvky k teorii funkcí komplexní proměnné. Výsledky této Cauchyho práce mají pro teorii funkcí komplexní proměnné zásadní důležitost (viz např. hodnocení historiografa Clauda Alphonse Valsona (1826 – 1901) citované v [4], str. 196, řadící tyto výsledky k největším matematickým objevům vůbec). V [6] je práci a pracím s ní obsahově souvisejícím je věnována obsáhlá Kapitola 4. Je zajímavé, že v Cauchyho sebraných spisech vydávaných v letech 1882 – 1974 byla tato práce otištěna ve zkrácené verzi r. 1958 a v plné verzi dokonce až r. 1974.

Původní Cauchyho důkaz „integrální věty“ byl založen na variačních metodách a dnes se neužívá. Větu patrně znal r. 1811 Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855), zmiňuje se o ni v korespondenci. Následující výrok Leopolda Kroneckera (1823 – 1891) citujeme z [4]: *Nicméně je však velký rozdíl mezi někým, kdo publikuje matematický poznatek s plným důkazem a popíše podrobně jeho využití a někým, kdo ho náhodně sdělí v korespondenci příteli. Proto je věta oprávněně nazývána* Cauchyho větou.

Tato kapitola je ve velké míře inspirována výkladem z [5]. V dnešní době existuje celá řada důkazů Cauchyho věty. Již dříve jsme se zmínili o Alfredu Pringsheimovi (1850 – 1941), kterému vděčíme za popularizaci „trojúhelníkové techniky“; ta vede k jednoduchému důkazu pro hvězdovité oblasti, lze ji však použít k důkazu věty v daleko obecnějším tvaru. Jeho práce o Cauchyho větě byla publikována r. 1901; obsahuje mj. podstatné zjednodušení Goursatova postupu. Dnes užívané důkazy Cauchyho věty jsou založeny na rozdílných metodách a jsou různého stupně obtížnosti. Po mnoho let byl hledán co nejjednodušší důkaz: intuitivně vyplývá platnost věty pro φ z inkluze $\mathrm{Int}\,\varphi \subset G$. Takový jednoduchý důkaz nalezl r. 1971 John Douglas Dixon (*1937).

Poznamenejme ještě, že stupeň obecnosti Cauchyho věty určuje stupeň obecnosti Cauchyho vzorce. Pro řadu aplikací však stačí mít Cauchyho vzorec např. pro kružnici. Cauchy vzorec objevil v exilu r. 1831, obecně však byl dostupný teprve až po jeho publikování r. 1841 v Paříži.

Literatura :

[1] Burckel, R. B.: *An introduction to classical complex analysis, Vol. I*, Birkhäuser, Basel and Stuttgart, 1979.

[2] Černý, I.: *Analýza v komplexním oboru*, Academia, Praha, 1983.

[3] Novák, B.: *Funkce komplexní proměnné pro učitelské studium MFF UK*, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1980.

[4] Remmert, R.: *Theory of complex functions*, Springer, New York, 1991.

[5] Rudin, W.: *Analýza v reálném a komplexním oboru*, Academia, Praha, 1977.

[6] Smithies, F.: *Cauchy and the creation of complex function theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

Kapitola 11

Harmonické funkce

11.1 Úvod

V této kapitole se vracíme k *reálným funkcím* několika proměnných, které mají (spojité) derivace druhého řádu a vyhovují tzv. Laplaceově diferenciální rovnici. Reálné harmonické funkce dvou proměnných a holomorfní funkce mají řadu podobných vlastností a jejich příbuznost nám umožní snadný přístup ke studiu harmonických funkcí. Z tohoto důvodu se omezíme na $\mathbb{R}^2$. Tak jako dříve využíváme ztotožnění $\mathbb{C}$ s $\mathbb{R}^2$.

Je-li f funkce holomorfní na otevřené množině $G \subset \mathbb{C}$, mají obě její složky $f_1(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$, $f_2(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$ spojité parciální derivace všech řádů. Odtud plyne, že smíšené derivace druhého řádu jsou záměnné ve všech bodech $[\,x; y\,] = x + iy \in G$ a z Cauchy-Riemannových podmínek obdržíme

$$D_1 f_1 = D_2 f_2\,, \quad D_2 f_1 = -D_1 f_2\,.$$

Odtud plynou dalším derivováním a jednoduchou úpravou rovnice

$$D_{11} f_1 + D_{22} f_1 = D_{11} f_2 + D_{22} f_2 = 0\,,$$

To se zkráceně zapisuje ve tvaru $\Delta f_1 = 0$, resp. $\Delta f_2 = 0$, kde $\Delta := (D_{11} + D_{22})$. Reálné funkce f_1, f_2 vyhovují tedy všude v G rovnici

$$(D_{11} + D_{22})\, f_j(x, y) = 0\,, \quad j = 1, 2\,. \tag{11.1}$$

Definice 11.1.1. Označme

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_m^2}$$

diferenciální operátor v $\mathbb{R}^m$, kde souřadnice bodů značíme (podobně jako se to dělá např. ve fyzice) x_k, $k = 1, \ldots, m$. Tento operátor se nazývá **Laplaceův operátor** a rovnice $\Delta u = 0$ se nazývá **Laplaceova rovnice**.

Nechť $G \subset \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, je otevřená množina a nechť $h\colon G \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce, která má všude v G druhé parciální derivace podle všech m proměnných a vyhovuje rovnici

$$\Delta h(x) = 0\,, \quad x \in G\,. \tag{11.2}$$

Potom říkáme, že h je **funkce harmonická** na G [1]); systém všech funkcí harmonických na G značíme $\mathcal{H}(G)$.

Definice 11.1.2. Jsou-li f_1, f_2 funkce harmonické na $G \subset \mathbb{R}^2$, říkáme, že f_2 je **harmonicky sdružená** s f_1, jestliže $f_1 + if_2$ je holomorfní funkce na G.

Poznámka 11.1.3. Je-li $f = f_1 + if_2 \in H(G)$, je i $(-i)f = f_2 + i(-f_1) \in H(G)$. Odtud plyne, že je-li f_2 harmonicky sdružená s f_1, je $-f_1$ harmonicky sdružená s f_2.

Příklady 11.1.4. 1. V $\mathbb{R}^1$ má rovnice (11.2) tvar $u''(x) = 0$ a její řešení jsou právě všechny lineární funkce tvaru $h(x) = ax + b$, kde a, b jsou reálná čísla. Pro obecnou otevřenou množinu $G \subset \mathbb{R}^1$ jsou prvky $\mathcal{H}(G)$ všechny takové funkce h, které jsou lineární na každém otevřeném intervalu $I \subset G$.

2. Při $z = x + iy \in \mathbb{R}^2$ je $\exp z = \exp x \cos y + i \exp x \sin y$ a složky f_1 a f_2 funkce exp

$$f_1(z) = \mathrm{e}^x \cos y \quad \text{a} \quad f_2(z) = \mathrm{e}^x \sin y$$

jsou funkce harmonické na $\mathbb{R}^2$. Také lineární funkce $h(x, y) = ax + by + c$, $[\,x, y\,] \in \mathbb{R}^2$, jsou pro všechna $a, b, c \in \mathbb{R}$ funkce harmonické v $\mathbb{R}^2$.

3. Vzniká přirozená otázka, zda *každá* funkce harmonická v otevřené množině $G \subset \mathbb{R}^2$ je reálnou nebo imaginární složkou nějaké funkce holomorfní v G. Odpověď je bohužel záporná: Snadno ověříme, že

$$h(x, y) := \log \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

je funkce harmonická v $\mathbb{P}$, která je např. v $G := \{z; |z - 1| < 1\}$ reálnou složkou funkce $f(z) = -\log z$. Funkci h však zřejmě nelze holomorfně rozšířit např. na $\mathbb{P}$, ač je h harmonická funkce na $\mathbb{P}$. Tento příklad ukazuje, že k dané funkci f_1 harmonické na oblasti $G \subset \mathbb{R}^2$ nemusí obecně na G existovat harmonicky sdružená funkce f_2. V Důsledku 11.2.4 dokážeme, že každá harmonická funkce je „lokálně“ reálnou částí nějaké holomorfní funkce.

Lemma 11.1.5. *Systém $\mathcal{H}(G)$ všech funkcí harmonických na otevřené množině $G \subset \mathbb{R}^2$ tvoří lineární podprostor prostoru $\mathcal{C}(G)$ všech funkcí spojitých v G, netvoří však algebru, neboť součin harmonických funkcí nemusí být harmonická funkce.*

Důkaz. Verifikace první části tvrzení je triviální a provede se přímým výpočtem. Pro druhou stačí uvážit, že součin funkcí $h_1(x, y) = h_2(x, y) = x$, $[\,x, y\,] \in \mathbb{R}^2$, *není* harmonická funkce v $\mathbb{R}^2$. $\square$

[1]) Nebo též: Funkce h je harmonická *v* G.

11.2 Poissonův integrál

K jedné z nejstarších částí matematické analýzy patří **teorie potenciálu**. Ve své klasické podobě se zabývá zejména studiem harmonických funkcí. K zavedení základních nástrojů teorie potenciálu užijeme poznatků o holomorfních funkcích. Pro následující úvahu doporučujeme čtenáři připomenout si poznatky o integrálech Cauchyho typu v Kapitole 5, částech 5.3 a 5.5. Budeme pro stručnost psát $f(z)$ místo $f(x,y)$, kde $z = x + iy$, i pro reálné funkce f na $G \subset \mathbb{R}^2$.

Věta 11.2.1. *Je-li $r \in \mathbb{R}_+$ a f je funkce holomorfní v nějakém okolí množiny $\overline{U(0,r)}$, je*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r\mathrm{e}^{it})\,\mathrm{Re}\Big(\frac{r\mathrm{e}^{it}+z}{re^{it}-z}\Big)\,dt\,, \tag{11.3}$$

pro každé $z \in U(0,r)$.

Důkaz. Označíme-li $\varphi(t) := r\mathrm{e}^{it}$, $t \in [\,0, 2\pi\,]$, je podle Cauchyho vzorce

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_\varphi f(w)\,\frac{w}{w-z}\,\frac{dw}{w}\,, \tag{11.4}$$

pro každé $z \in U(0,r)$, přičemž integrál vpravo je funkce holomorfní v $\mathbb{C} \setminus \langle\varphi\rangle$ (pro *každou* funkci f spojitou na $\langle\varphi\rangle$). V $\mathrm{Ext}(\varphi)$ je ovšem tato funkce rovna 0.

Označíme-li $z^* := r^2/\overline{z}$ bod symetrický k z vzhledem ke kružnici $\langle\varphi\rangle$, je $z^* \in \mathrm{Ext}\,\varphi$ pro každé $z \in U(0,r)$, takže $\mathrm{ind}(\varphi, z^*) = 0$. Je tedy

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_\varphi f(w)\frac{w}{w-z^*}\,\frac{dw}{w}\,. \tag{11.5}$$

Z rovností (11.4) a (11.5) dostaneme „odečtením" vyjádření pro $f(z)$, které je však třeba upravit. Je-li $w \neq 0$, je $w\overline{w} = r^2$, takže

$$\frac{w}{w-z^*} = \frac{r^2/\overline{w}}{r^2/\overline{w} - r^2/\overline{z}} = \frac{1/\overline{w}}{(\overline{z}-\overline{w})/\,\overline{z w}} = \frac{-\overline{z}}{\overline{w}-\overline{z}}\,,$$

a tedy pro bod $z \in U(0,r)$ dostáváme

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\varphi f(w)\Big(\frac{w}{w-z} + \frac{\overline{z}}{\overline{w}-\overline{z}}\Big)\,\frac{dw}{w}\,. \tag{11.6}$$

Upravíme-li ještě

$$\frac{w}{w-z} + \frac{\overline{z}}{\overline{w}-\overline{z}} = \frac{w\overline{w} - z\overline{z}}{|w-z|^2} = \frac{|w|^2 - |z|^2}{|w-z|^2}\,,$$

dostaneme vyjádření integrálem

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\varphi f(w)\frac{|w|^2-|z|^2}{|w-z|^2}\,\frac{dw}{w}\,. \tag{11.7}$$

Vyjádříme křivkový integrál podle Definice 1.6.4: dosadíme $w = r\mathrm{e}^{it}$, $dw = ir\mathrm{e}^{it}\,dt$, a dostaneme vyjádření integrálem s „reálným jádrem“

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r\mathrm{e}^{it})\frac{r^2 - |z|^2}{|r\mathrm{e}^{it} - z|^2}\,dt\ ,$$

což je již vyjádření shodné s tvarem integrálu (11.3). To je vidět z úpravy, která je sama o sobě zajímavá. Položíme-li v (11.3) $z = \rho\mathrm{e}^{i\theta}$ a zlomek rozšíříme číslem ve jmenovateli, obdržíme

$$\operatorname{Re}\left(\frac{r\mathrm{e}^{it} + z}{r\mathrm{e}^{it} - z}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{r\mathrm{e}^{it} + \rho\mathrm{e}^{i\theta}}{r\mathrm{e}^{it} - \rho\mathrm{e}^{i\theta}}\right) = \frac{r^2 - \rho^2}{r^2 - 2r\rho\cos(\theta - t) + \rho^2}\,. \tag{11.8}$$

Pro vyloučený případ $z = 0$ se vzorec (11.3) redukuje na větu o průměru pro holomorfní funkce. Tím je důkaz Věty 11.2.1 dokončen. □

Důsledek 11.2.2. *Pro obecnou funkci f spojitou na hranici $\langle\varphi\rangle = \partial U(0,r)$ je integrál ve vzorci* (11.6) *na pravé straně funkcí holomorfní v $U(0,r)$, protože jsme v $U(0,r)$ sčítali dva Cauchyho integrály, z nichž druhý v (11.5) byl dokonce roven nule.*

Poznámka 11.2.3. Pro obecný případ množiny $U(w,r)$ dostaneme odpovídající vzorec posunutím. Obdržíme tak vyjádření funkce f holomorfní v nějakém okolí uzávěru $\overline{U(w,r)}$ v kruhu $U(w,r)$ ve tvaru analogickém k (11.6):

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(w + r\mathrm{e}^{it})\frac{r^2 - |z - w|^2}{|r\mathrm{e}^{it} - z|^2}\,dt\ , \tag{11.9}$$

kde $z \in U(w,r)$ a $\varphi(t) = w + r\mathrm{e}^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Důsledek 11.2.4. *Je-li h harmonická v okolí množiny $\overline{U(0,r)}$, je*

$$h(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(r\mathrm{e}^{it})\operatorname{Re}\left(\frac{r\mathrm{e}^{it} + z}{r\mathrm{e}^{it} - z}\right)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(r\mathrm{e}^{it})\frac{r^2 - |z|^2}{|r\mathrm{e}^{it} - z|^2}\,dt$$

pro všechna $z \in U(0,r)$. Funkce h je v $U(0,r)$ reálnou částí holomorfní funkce

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(r\mathrm{e}^{it})\frac{r\mathrm{e}^{it} + z}{r\mathrm{e}^{it} - z}\,dt\ . \tag{11.10}$$

Analogický výsledek platí pro obecný kruh $U(w,r)$, takže harmonická funkce h je lokálně reálnou částí holomorfní funkce.

Důkaz. Podle Důsledku 11.2.2 je

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(r\mathrm{e}^{it})\frac{r\mathrm{e}^{it} + z}{r\mathrm{e}^{it} - z}\,dt$$

holomorfní v $U(0,r)$. Dále stačí uvážit rozklad holomorfní funkce f na složky a povšimnout si, že jádro integrálu v (11.3) je reálná funkce. Odtud plyne první část tvrzení. Pro druhou stačí uvážit, že integrovaná funkce v (11.10) je pro každé $t \in [0,2\pi]$ holomorfní funkcí v proměnné z a použít Důsledku 10.1.4. Podle něj je f holomorfní v $U(0,r)$ a zřejmě je $h = \mathrm{Re}(f + ia)$ pro každé $a \in \mathbb{R}$; poslední část tvrzení dostaneme opět pomocí posunutí. □

Úmluva 11.2.5. Je-li $\varphi(t) = re^{it}$, $t \in [0,2\pi]$, a je-li f (spojitá) reálná funkce na množině $\langle\varphi\rangle = \partial U(0,r)$, nazýváme funkci

$$h(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\mathrm{r}e^{it})\,\mathrm{Re}\Big(\frac{\mathrm{r}e^{it}+z}{re^{it}-z}\Big)\,dt$$

Poissonův integrál funkce f. Reálnou funkci z (11.8) nazýváme obvykle **Poissonovo jádro**.

Věta 11.2.6 (vlastnost průměru). *Nechť h je funkce harmonická v otevřené množině $G \subset \mathbb{R}^2$. Potom pro všechna $z \in G$ a všechna kladná čísla r taková, že $\overline{U(z,r)} \subset G$, je*

$$h(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(z + re^{it})dt\,. \tag{11.11}$$

Důkaz. Použijeme lokálního vyjádření h ve tvaru $\mathrm{Re}\,f$, kde f je holomorfní na $U(z,R)$: tak lze pro každé $z \in G$ a $0 < r < R$ obdržet vzorec (5.34) z Věty 5.6.1 o průměru, tj.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z + re^{it})dt\,,$$

z něhož vyplyne (11.11) přechodem k reálné části. □

Poznámka 11.2.7. Je-li f_1 funkce harmonická na G a $f_1(z) = f_1(x,y)$, kde $z = x+iy$, je funkce f_2 k ní harmonicky sdružená svázána s f_1 Cauchy-Riemannovými podmínkami. Je-li $z_0 \in G$ pevně zvolený bod a $\varphi_z\colon [a,b] \to G$ je křivka s počátečním bodem $z_0 \in G$ a koncovým bodem z, vede to k vyjádření

$$f_2(z) = \int_{\varphi_z} -\frac{\partial f_1}{\partial y}dx + \frac{\partial f_1}{\partial x}dy = \int_a^b \Big(-\frac{\partial f_1(\varphi(t))}{\partial y}\,\varphi_1'(t) + \frac{\partial f_2(\varphi(t))}{\partial x}\,\varphi_2'(t)\Big)dt\,.$$

Funkce f_2 je tímto způsobem korektně definována *pouze v případě*, že křivkový integrál podél φ_z závisí pouze na volbě koncového bodu z. Existence harmonicky sdružené funkce v G k dané funkci f_1 závisí proto obecně na vlastnostech množiny G; viz Příklad 11.1.4 (3).

Průměrovou vlastnost analogickou (11.11) lze dokázat i pro harmonické funkce v $\mathbb{R}^m$, kde $m > 2$, metodami reálné analýzy; viz např. [4], díl II. Vlastnost průměru vzhledem ke sférám lze dokonce použít k charakterizaci harmonických funkcí.

Podobně jako u holomorfních funkcí hraje v případě harmonických funkcí důležitou roli princip maxima. U komplexních funkcí jsme mohli pracovat pouze s absolutní hodnotou uvažované funkce, v případě harmonických funkcí lze porovnávat přímo jejich hodnoty.

Lemma 11.2.8. *Pokud funkce h harmonická na oblasti $G \subset \mathbb{R}^2$ nabývá svého maxima v bodě $w \in G$, je konstantní v G.*

Důkaz. Nechť podle předpokladu je $h(w) \geq h(z)$ pro všechna $z \in G$, a nechť $U(w, r)$ leží i se svým uzávěrem v G. Podle Věty 11.2.6 platí rovnost

$$h(w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(w + \rho \mathrm{e}^{it}) dt$$

pro všechna dostatečně malá $\rho \in (0, r)$. Pokud by v nějakém bodě $\zeta \in K_\rho$, kde $K_\rho := \{z; |z-w| = \rho\}$, platila nerovnost $h(\zeta) < h(w)$, dostali bychom ze spojitosti h na K_ρ spor:

$$h(w) > \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(w + \rho \mathrm{e}^{it}) dt \ .$$

Ten dokazuje, že $h(z) = h(w)$ pro všechna $z \in K_\rho$, $0 < \rho < r$. Je tedy $h(z) = h(w)$ pro všechna $z \in P(w, r)$. Protože pro $z = w$ je rovnost triviální, je $h(z) = h(w)$ v celém okolí $U(w, r)$.

Množina

$$M := \{z \in G\,;\, h(z) = h(w)\}$$

těch bodů, v nichž se nabývá maximální hodnoty $h(w)$, je tedy neprázdná a otevřená v G. Ze spojitosti funkce h vyplývá, že M je rovněž uzavřená v G. Z toho však již plyne, že je $M = G$. □

Pro další výklad budeme potřebovat jinou verzi principu maxima, kterou dokážeme v následující větě:

Věta 11.2.9. *Nechť $G \subset \mathbb{R}^2$ je neprázdná omezená oblast a nechť h je funkce spojitá na $\overline{G}$ a harmonická v G. Potom je*

$$\max h(\overline{G}) = \max h(\partial G)\,. \tag{11.12}$$

Důkaz. Protože obě množiny $\overline{G}$ i ∂G jsou kompaktní, maxima existují a platí nerovnost $\max h(\partial G) \leq \max h(\overline{G}) =: A$. Kdyby bylo $\max h(\partial G) < A$, nabývala by h maxima A v nějakém vnitřním bodě G a podle Lemmatu 11.2.8 by byla konstantní v G. Ze spojitosti h vyplývá, že h by nabývala hodnoty A všude i na ∂G, což je zřejmě spor. Viz též hezký přístupný článek [1]. □

Poznámka 11.2.10 (důležitá). Jedním z nejdůležitějších problémů v teorii potenciálu je tzv. **Dirichletova úloha**: k dané (reálné) funkci $v \in \mathcal{C}(\partial G)$ máme nalézt funkci h spojitou na $\overline{G}$ a harmonickou v G tak, že

$$h\,|\partial G = v\,, \quad h|\,G \in \mathcal{H}(G)\,.$$

Funkce v se zpravidla nazývá **okrajová podmínka**. Dokážeme nejprve, že řešení je určeno jednoznačně.

Věta 11.2.11. *Existuje nejvýše jedno řešení Dirichletovy úlohy pro omezenou oblast $G \subset \mathbb{R}^2$.*

Důkaz. Nechť h_1, h_2 jsou dvě taková řešení. Potom je rozdíl $h = h_1 - h_2$ identicky roven nule na ∂G. Z principu maxima pak plyne, že $h_1 - h_2 \le 0$ na G; podobně pro $-h$ dostáváme $h_2 - h_1 \le 0$ na G, neboli $h_1 = h_2$ na G. □

11.3 Dirichletova úloha pro kruh

Jak se ukáže, v případě kruhu lze řešení Dirichletovy úlohy explicitně vyjádřit pomocí Poissonova integrálu. Prozkoumáme podrobněji jeho vlastnosti.

Poissonův integrál pro obecný kruh $U(w,r)$ a $r \in (0,\infty)$ lze zapsat v „trigonometrickém tvaru“ a dostat tak pro funkci h harmonickou na nějakém okolí uzávěru $U(w,r)$ identitu

$$h(w + \rho \mathrm{e}^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^2 - \rho^2}{r^2 - 2r\rho\cos(\theta - t) + \rho^2}\, h(w + r\mathrm{e}^{it})\, dt \tag{11.13}$$

pro každé $\rho \in (0,r)$ a každé $\theta \in \mathbb{R}$.

Definice 11.3.1. Pro každé $r \in [0,\infty)$ položme

$$P_r(\rho,t) := \frac{r^2 - \rho^2}{r^2 - 2r\rho\cos t + \rho^2}\,, \quad \rho \in (0,r)\,,\ t \in \mathbb{R}_+\,. \tag{11.14}$$

S takto vyjádřeným Poissonovým jádrem lze vzorec (11.13) zapsat ve tvaru

$$h(w + \rho \mathrm{e}^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\rho, \theta - t)\, h(w + r\mathrm{e}^{it}) dt\ .$$

Je-li $0 < \rho < r$, je $0 < \rho/r < 1$; dělením čitatele i jmenovatele zlomku v (11.14) dostaneme podobný zlomek, ale jen v „proměnné“ ρ/r. Z toho plyne, že stačí odvozovat tvrzení o Poissonově integrálu, resp. jeho jádru jen ve speciálním případě, kdy $U(0,r)$ je jednotkový kruh. V obecném případě stačí ve výsledku nahradit číslo $\rho \in (0,1)$ číslem ρ/r.

V tomto speciálním případě píšeme

$$P_\rho(t) = \frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos t+\rho^2} = \mathrm{Re}\left(\frac{1+\rho e^{it}}{1-\rho e^{it}}\right). \tag{11.15}$$

Poznámka 11.3.2. Jiné zajímavé vyjádření Poissonova jádra dostaneme pomocí rozvoje v řadu. Je-li $z = \rho \mathrm{e}^{it}$, $0 \le \rho < 1$, je

$$\frac{1+\rho\mathrm{e}^{it}}{1-\rho\mathrm{e}^{it}} = \frac{1+z}{1-z} = (1+z)(1+z+z^2+\dots) = 1+2\sum_{k=1}^{\infty} z^k = 1+2\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k\mathrm{e}^{ikt}.$$

Přechodem k reálné části dostaneme pro $\rho \in [0,1)$

$$P_\rho(t) = \mathrm{Re}\left(\frac{1+\rho e^{it}}{1-\rho\mathrm{e}^{it}}\right) = 1+2\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k\cos kt = 1+\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k(\mathrm{e}^{ikt}+\mathrm{e}^{-ikt}). \tag{11.16}$$

Lemma 11.3.3. *Pro Poissonovo jádro P_ρ platí:*

(1) *Jádro P_ρ je kladná sudá a 2π-periodická funkce, tj. pro všechna $t \in \mathbb{R}$ je*

$$P_\rho(t) > 0,\ P_\rho(-t) = P_\rho(t)\ \text{ a } P_\rho(t+2\pi) = P_\rho(t).$$

(2) *Je*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_\rho(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_\rho(t)dt = 1.$$

(3) *Je-li $0 < \delta < |t| \le \pi$, je $P_\rho(t) < P_\rho(\delta)$.*

(4) *Pro každé $\delta > 0$ je $\lim_{\rho\to 1_-} P_\rho(t) = 0$ stejnoměrně na množině $\{t\,;\,\delta \le |t| \le \pi\}$.*

Důkaz. Jednoduchou úpravou, kterou jsme již jednou použili, dostaneme z první rovnosti v (11.16)

$$P_\rho(t) = \mathrm{Re}\left(\frac{(1+\rho\mathrm{e}^{it})(1-\rho\mathrm{e}^{-it})}{(1-\rho\mathrm{e}^{it})(1-\rho\mathrm{e}^{-it})}\right) = \frac{1-\rho^2}{|1-\rho\mathrm{e}^{it}|^2} > 0,$$

neboť $0 \le \rho < 1$.

Z vyjádření (11.16) plynou lehce i zbývající vlastnosti P_ρ uvedené v (1). Integrovat můžeme např. přes $[-\pi,\pi]$. Protože pro pevně zvolené ρ, $\rho \in [0,1)$, konverguje řada v (11.16) stejnoměrně v t, lze integrovat „člen po členu“ a tak dostaneme (2):

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_\rho(t)dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\rho^{|k|}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{ikt}dt = 1.$$

Je-li $0 < \delta \le t \le \pi$, položme $f(u) = P_\rho(u)$, $u \in [\delta, t]$. Z (11.16) dostaneme výpočtem $f'(u) < 0$, takže $f(t) > f(\delta)$, čímž jsme dokázali (3).

Konečně tvrzení z (4) dostaneme tak, že dokážeme

$$\lim_{r\to 1_-} \sup\{P_\rho(t)\,;\, \delta \le |t| \le \pi\} = 0.$$

Podle (3) však stačí dokázat, že $\lim_{\rho\to 1_-} P_\rho(\delta) = 0$, což plyne lehce např. z vyjádření (11.15). □

Věta 11.3.4. *Nechť $v \in \mathcal{C}(\partial U(w,r))$. Potom existuje řešení h Dirichletovy úlohy pro kruh $U(w,r)$ s okrajovou podmínkou v a je pro $\rho \in [0,1)$, $\theta \in \mathbb{R}$ dáno vzorcem*

$$h(w+\rho e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{r^2-\rho^2}{r^2-2r\rho\cos(\theta-t)+\rho^2}\, v(w+r e^{it})dt\ ,\quad 0<\rho<1\,,\ \theta\in\mathbb{R}\,,$$

přičemž samozřejmě $h(\zeta) = v(\zeta)$ pro všechna $\zeta \in \partial U(w,r)$.

Důkaz. Tvrzení stačí dokázat pro kruh $U := U(0,1)$. Z Důsledku 11.2.4 vyplývá, že funkce h je harmonická v U a zbývá tedy dokázat její spojitost vzhledem k uzávěru U v bodech hranice ∂U. V integrálu lze integrovat přes jakýkoli interval délky 2π, např. přes interval $(\theta-\pi, \theta+\pi)$. Ze symetrie vyplývá, že tvrzení lze dokázat jen pro jedno pevně zvolené θ. Tomu odpovídá důkaz spojitosti h v jediném bodě hranice ∂U; zvolíme bod $\zeta = 1$, jemuž odpovídá $\theta = 0$ a $r = 1$.

Z vlastnosti (2) z Lemmatu 11.3.3 plyne, že pro konstantní v tvrzení platí. Stačí tedy dokázat, že tvrzení platí pro případ funkce $v - v(1)$, nebo ekvivalentně pro funkci v, pro kterou $v(1) = 0$.

Z našich předpokladů vyplývá, že k každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta \in (0,\pi)$, tak že $|v(e^{it})| < \varepsilon/3$ pro všechna t, $|t| < \delta$. Označme dále $M := \max\{|v(\zeta)|\,;\, \zeta \in \partial U\}$. S ohledem na vlastnost (4) existuje $\rho_1 \in (0,1)$ tak, že $P_\rho(\theta) < \varepsilon/3M$ pro všechna ρ, pro něž $\rho_1 < \rho < 1$, a všechna t, pro která $|t| > \delta/2$. Je

$$h(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|<\delta} P_\rho(\theta-t)v(e^{it})\,dt + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|\ge\delta} P_\rho(\theta-t)v(e^{it})\,dt\ .$$

Jestliže $|t| \ge \delta$ a $|\theta| < \delta/2$, je $|t-\theta| \ge \delta/2$ a lze provést odhad v předchozí rovnosti: dostaneme tak

$$|h(re^{i\theta})| \le \varepsilon/3 + 2M(\varepsilon/3M) = \varepsilon\,.$$

Tím je dokázána spojitost funkce h bodě $\zeta = 1$. □

Historická poznámka 11.3.5. Teorie potenciálu má své kořeny ve fyzice. Její počátky sahají do r. 1828, kdy George Green (1793 – 1841) vydal knihu [3]. O její přerod v matematickou teorii se zasloužil Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855) prací [2] z r. 1840. Na budování teorie potenciálu se podílelo mnoho špičkových matematiků.

Laplaceovu rovnici studoval v polárních souřadnicích jako první patrně Leonhard Euler (1707 – 1783) již r. 1752 a asi o třicet let později i Pierre Simon Laplace (1749 – 1827); ten ji také po r. 1787 začal studovat v kartézských souřadnicích.

Poissonův integrál se objevil poprvé patrně r. 1820. První korektní důkaz toho, že řešení Dirichletovy úlohy pro kouli je dáno Poissonovým integrálem, podal Hermann Amandus Schwarz (1843 – 1923) r. 1870. Před tím však ještě Bernhard Riemann (1826 – 1866) založil svoji teorii komplexních funkcí komplexní proměnné právě na „samozřejmém“ faktu, že Dirichletova úloha má vždy řešení. Tento postup podrobil kritice Carl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815 – 1897), což iniciovalo snahu mnoha matematiků řešit Dirichletův problém. Ukázalo se že existují množiny a okrajové podmínky, pro něž neexistuje řešení Dirichletovy úlohy. To dokázal jako první Stanislav Zaremba (1863 – 1942) r. 1909, a to pro množinu $P(0,0,1) = U(0,1) \setminus \{0\}$ a okrajovou podmínku $v(\mathrm{e}^{it}) = 0$, $t \in [\,0, 2\pi\,]$, $v(0) = 1$. Příklad byl patrně inspirován Riemannovou větou o odstranitelné singularitě. Taková množina se nazývá **iregulární**, zatímco množiny, pro které je Dirichletova úloha řešitelná pro každou (spojitou) okrajovou podmínku, jsou **regulární**. O málo později, r. 1912, Henri Louis Lebesgue (1875 – 1941) sestrojil v $\mathbb{R}^3$ iregulární množinu, která je homeomorfní s koulí.

Poissonův integrál je klíčem k mnoha dalším poznatkům o harmonických funkcích. Pomocí něj lze např. dokázat, že hodnoty kladných harmonických funkcí na oblasti $G \subset \mathbb{R}^m$ jsou vzájemně vázány v následujícím smyslu: *Je-li $K \subset G$ kompaktní množina, existují $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_+$ tak, že pro všechny body $x, y \in K$ a všechny kladné funkce harmonické na G je $c_1 \le h(x)/h(y) \le c_2$.*

Zájemce o teorii harmonických funkcí, resp. obecněji o teorii potenciálu, odkazujeme např. na skripta [4].

Literatura :

[1] Burckel, R. B.: *A strong converse to Gauss's mean-value theorem*, Amer. Math. Monthly **87** (1980), str. 819–820.

[2] Gauss, C. F.: *Algemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrtem Verhältnisse des Quadrats der Entfernung Wirkenden Anziehungs–und Abstossungs–Kräfte, 1840, Werke, 5. Band*, Göttingen, 1877.

[3] Green, G.: *An essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism*, Nottingham, 1828.

[4] Král, J., Netuka, I., Veselý, J.: *Teorie potenciálu I.-IV.*, SPN, Praha, 1965, 1972, 1976, 1977.

Věcný rejstřík

Jmenný rejstřík

Některá označení

$\mathbb{N}$	přirozená čísla, 11
$\mathbb{N}_0$	celá nezáporná čísla, 11
$\mathbb{Z}$	celá čísla, 11
$\mathbb{Q}$	čísla racionální, 11
$\mathbb{R}$	reálná čísla, 11
$\mathbb{R}_+$	reálná kladná čísla, 11
i	číslo i, 12
$U(z,\varepsilon)$	okolí, 15
$U_\varepsilon(z)$	okolí, 15
$P_\varepsilon(z)$	prstencové okolí, 15
$P(z,\varepsilon)$	prstencové okolí, 15
$\lim z_n$	limita posloupnosti, 15
$\sum z_k$	řada $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$, 15
$\sum z_k$	součet řady $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$, 15
(P,τ)	topologický prostor, 16
∞	nevlastní bod $\mathbb{C}$, 16
$\mathbb{S}$	kompaktifikovaná rovina $\mathbb{C}$, 16
$U(\infty,\varepsilon)$	okolí bodu ∞, 16
$P(\infty,\varepsilon)$	prstencové okolí ∞, 16
$+\infty$	nevlastní bod $\mathbb{R}$, 17
$\mathbb{P}$	označení $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, 18
$\mathcal{C}^{(1)}([\,a,b\,])$	prostor „hladkých“ funkcí, 23
m_{-k}	k-tá odmocnina, 24
$o(h)$	„malá“ funkce, 26
e^{it}	popis kružnice, 28
$\langle\varphi\rangle$	geometrický obraz křivky φ, 28
$[\,z;w\,]$	orientovaná úsečka, 28
$[\,z_0;\dots;z_n\,]$	polygonální křivka, 36
Int	vnitřek uzavřené křivky, 36
Ext	vnějšek uzavřené křivky, 36
$\rightrightarrows$	stejnoměrná konvergence, 36
$\rightrightarrows_{\mathrm{loc}}$	lokálně stejnoměrná konvergence, 37
$D_k f$	parciální derivace, 53
$H(G)$	prostor funkcí holomorfních v G, 56
$f^{(k)}$	k-tá derivace, 55
sin	„reálný“ sinus, 61
cos	„reálný“ kosinus, 61
exp	„reálná“ exponenciála, 61
exp	komplexní exponenciála, 63
$\mathrm{per}(f)$	množina všech period funkce f, 64
cosh	komplexní hyperbolický kosinus, 64
sinh	komplexní hyperbolický sinus, 64
cos	komplexní kosinus, 66
sin	komplexní sinus, 66
Log	množina hodnot logaritmu, 71
log	hlavní hodnota logaritmu, 71
arg	hlavní hodnota argumentu, 71
Arg	množina hodnot argumentu, 71
$\mathbf{R}_\pi$	rovina s „výřezem“, 72
m_α	α-tá mocnina, 76
M_α	hodnoty α-té mocnina, 76
cotg	komplexní kotangens, 77
π	číslo π, 80
$\triangle$	trojúhelník, 87
$(\triangle)$	křivka ohraničující trojúhelník, 87
Q	obdélník, 87
(Q)	křivka ohraničující obdélník, 87

$\mathrm{ind}(\varphi,\zeta)$	index bodu ζ vzhledem k φ, 95
$P(z_0,r_1,r_2)$	prstenec, mezikruží, 125
$M(G)$	funkce meromorfní v G, 161
$P(f)$	množina všech pólů f, 161
$\prod z_k$	označení nekonečného součinu, 172
$p(z_k)$	označení nekonečného součinu, 172
Γ_n	aproximace Γ, 181
Δ	Weierstrassova funkce, 185
$K(G)$	konformní zobrazení G, 193
K^*	zobecněná kružnice, 202
$\mathbb{R}^*$	množina $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, 206
z^*	symetrický bod k z, 207
H	homotopie, 221
$\mathcal{H}(G)$	prostor funkcí harmonických v G, 228

KOMPLEXNÍ ANALÝZA PRO UČITELE

Doc. RNDr. Jiří Veselý, CSc.

Lektorovali: Prof. RNDr. Ilja Černý, Dr.Sc.
doc. RNDr. Zdeněk Vlášek, CSc.

Vydala Univerzita Karlova v Praze
Nakladatelství Karolinum, Praha 1, Ovocný trh 3
jako učební text pro posluchače Matematicko-fyzikální fakulty UK
Praha 2000
Obálku navrhla Kamila Schüllerová
Dáno do tisku: prosinec 2000
Vytiskla Nová tiskárna Pelhřimov, s. r. o.
AA 13,50 - VA 13,74 - 1. vydání - Náklad 400 výtisků
382-150-00 17/31
Cena Kč 250,-
Publikace neprošla jazykovou ani redakční úpravou nakladatelství