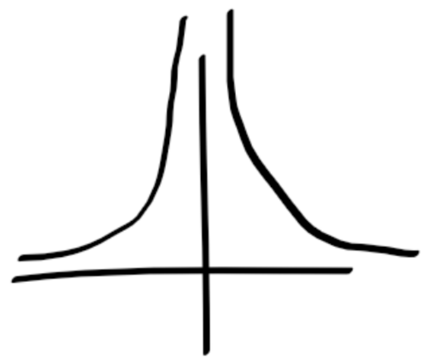
Připomenutí: f má v bodě z_0 IS, pokud $\exists r>0: f \in \mathcal{H}(P(z_0,r)) \wedge$ $\wedge$ neexistuje $f'(z_0)$.

- Odstranitelná IS f lze rozšířit v z_0 na $F \in \mathcal{H}(B(z_0,r))$.

[**Pozn.** MA1: $f: [a,b) \to \mathbb{R}$ je zprava spoj. v bodě $\underline{a}$ a existuje f' na (a,b), pak $f'_+(a) = \lim_{x \to a_+} f'(x)$ má-li PSS.]

- IS je pól, pokud [v $\mathbb{R}$: $\frac{1}{x^2} \cdot x^2$ ]

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty \wedge \exists p \in \mathbb{N}:$$

$$\lim_{z \to z_0} f(z) \cdot (z - z_0)^p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Rozvoj fce kolem pólu.

Věta: Buď z_0 IS fce f. Pak z_0 je pól násobnosti p fce f $\iff \exists r>0:$

$$f(z) = \left[\frac{a_{-p}}{(z-z_0)^p} + \frac{a_{-p+1}}{(z-z_0)^{p-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-z_0}\right] +$$

$$\left[+ a_0 + a_1(z-z_0) + \dots + \underbrace{a_n}(z-z_0)^n + \dots\right].$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

Příklad: $f(z) = \sin \frac{1}{z}$ nemá v bodě 0 ani OS ani pól, protože neexistuje $\lim_{z \to 0} f(z)$.

$(z \in \mathbb{R})$ .... ani tato neexistuje

Definice: IS fce f je podstatná, není-li OS ani pól.

Věta: (Casorati–Weierstrass, Picard)

z_0 IS fce f. NVJE

(i) z_0 je PS fce f

(ii) $\lim_{z \to z_0} f(z)$ neexistuje v $\mathbb{S}$

(iii) $\forall r > 0$: $\underbrace{f(P(z_0, r))}$ je hustá v $\mathbb{C}$

(iv) Dokonce: vynechá nejvýše 1 bod.

Holomorfní fce na mezikruží, Laurentovy řady, RV.

Značení: $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 \le r < R \le +\infty$, pak

$$P(z_0,r,R) = \{ z\in \mathbb{C} : r < |z-z_0| < R \}$$

Definice: nechť $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$, pak

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \underbrace{\overbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}}^{K \text{ pro } z \notin B(z_0,r)}}_{\text{hlavní část}} + \underbrace{\overbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n}^{K \text{ pro } z \in B(z_0,R)}}_{\text{regulární část}}$$

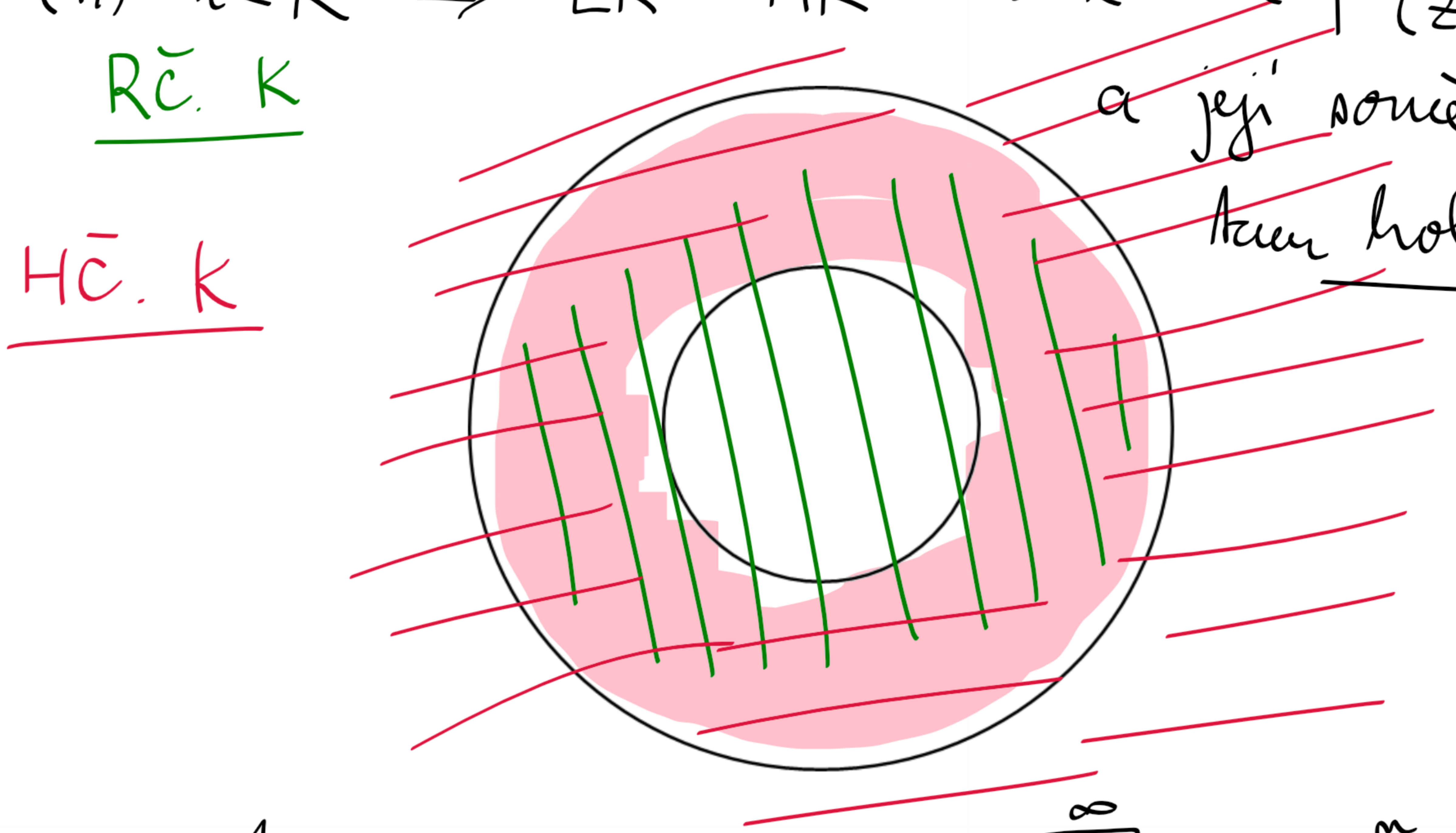
je Laurentova řada. LR konverguje, jestliže HČ i RČ konvergují.

Věta: (O k. LŘ)

(i) ke každé LŘ ex. jediná čísla $r, R \in [0,\infty]$ že r.č. AK a lokálně stejnoměrně k. $B(z_0,R)$, a D. pro $|z-z_0| > R$. Dále

[h.č. AK a LSK na $\{z : |z-z_0| > r\}$ a D na $B(z_0,r)$.]

(ii) $r < R \Rightarrow$ LŘ AK & LSK na $P(z_0,r,R)$ a její součet je tam holomorfní.



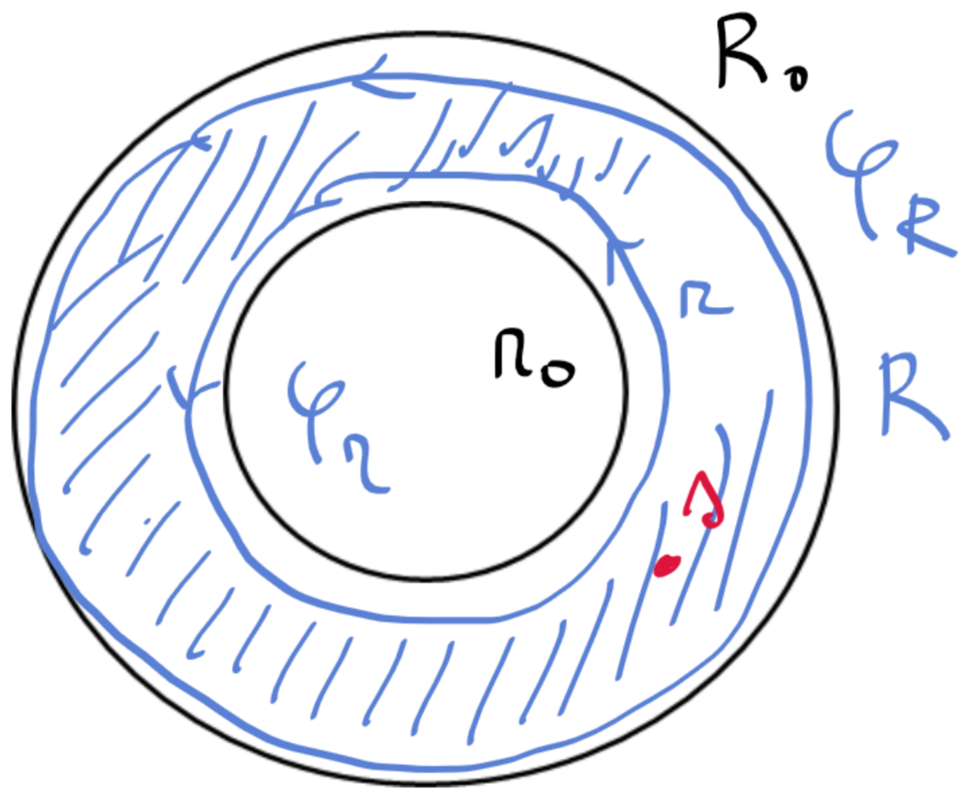
Dk: $\frac{1}{r} :=$ pol. konvergence $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} s^n$ ☒

Věta (CV na mezikruží) Buď $f \in \mathcal{H}(P(z_0, r_0, R_0))$, nechť $r_0 < r < R < R_0$, $s \in P(z_0, r, R)$.

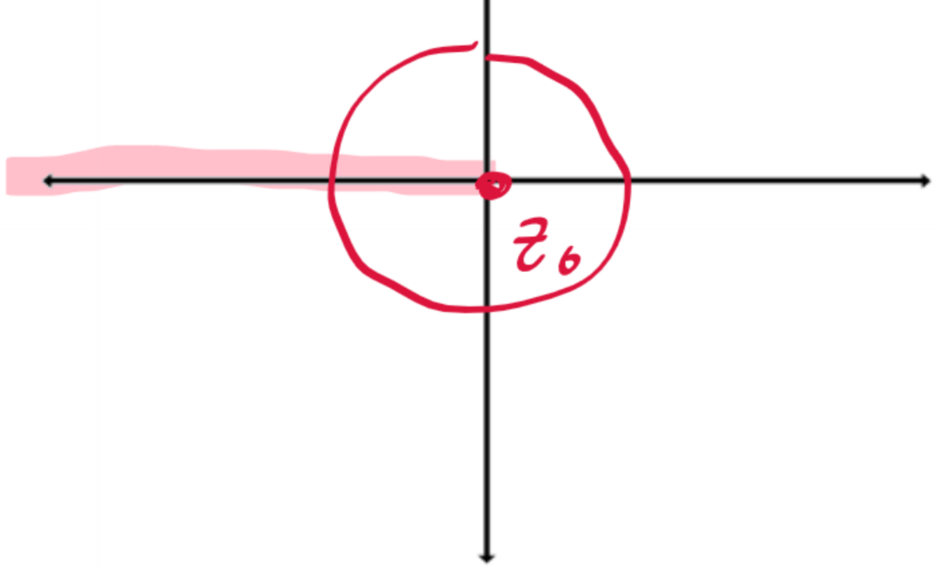
Pak
$$f(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi_R} \frac{f(z)}{z-s}\,dz - \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi_r} \frac{f(z)}{z-s}}\,,$$

kde $\varphi_R(t) = z_0 + Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$

$\varphi_r(t) = z_0 + re^{it}$ — " — .



$$(\log(z-z_0))' = \frac{1}{(z-z_0)^{1}}$$

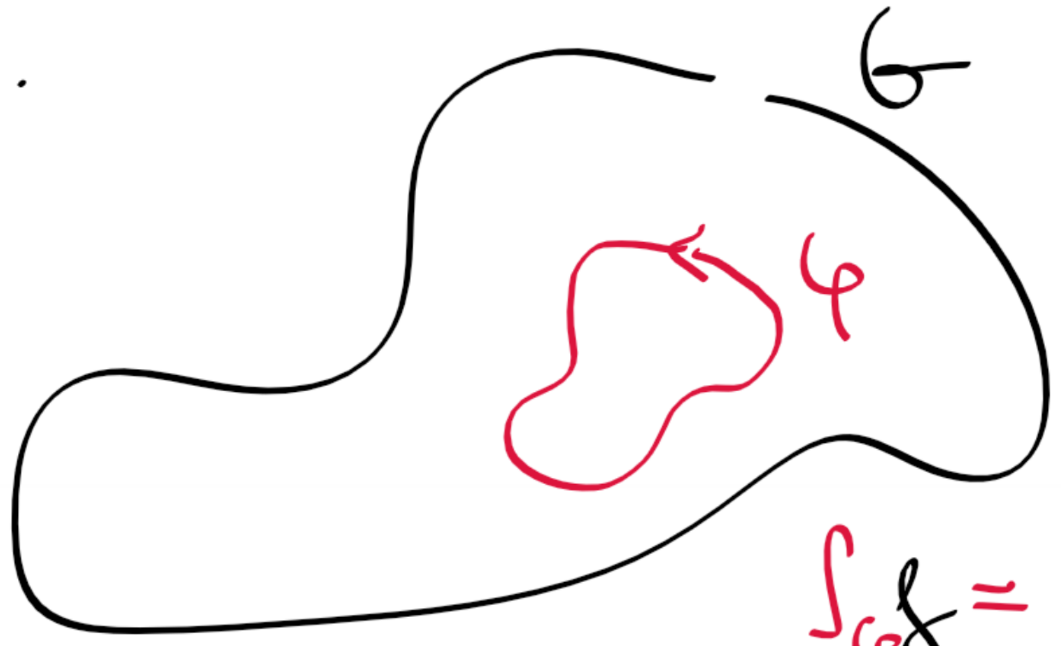


Dk: Podobný jako pro (CV) na kruhu.

(vezmi $h(z) = \dfrac{f(z)-f(s)}{z-s}$ … počítej $\int_{\varphi_R} h$)

Věta: Buď $f \in \mathcal{H}(\underbrace{P(z_0, r, R)})$. Pak $\exists!$ LŘ se součtem f na $\longrightarrow$.

f má PF na G



$\int_\varphi f = 0$

Důkaz: Rovnou vynecháme jednoznačnost:

Je-li $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$; $n \in \mathbb{Z}$.

$$g(z) = \frac{f(z)}{(z-z_0)^{m+1}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-z_0)^{k-m-1}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi_\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{m+1}}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi_\rho} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-z_0)^{k-m-1}\,dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\int_{\varphi_\rho} \frac{a_k}{(z-z_0)^{m+1-k}}\,dz}_{=0 \text{ pro } m+1-k \neq 1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi_\rho} \frac{a_m}{z-z_0} = a_m$$

$m+1-k = 1 \iff k = m$

Věta: (Rozvoj kolem PS) Buď z_0 IS fce f. Pak z_0 je PS $f \iff \exists r>0$:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad z \in P(z_0, r),$$

kde $a_n \neq 0$ pro nekonečně mnoho záporných indexů.

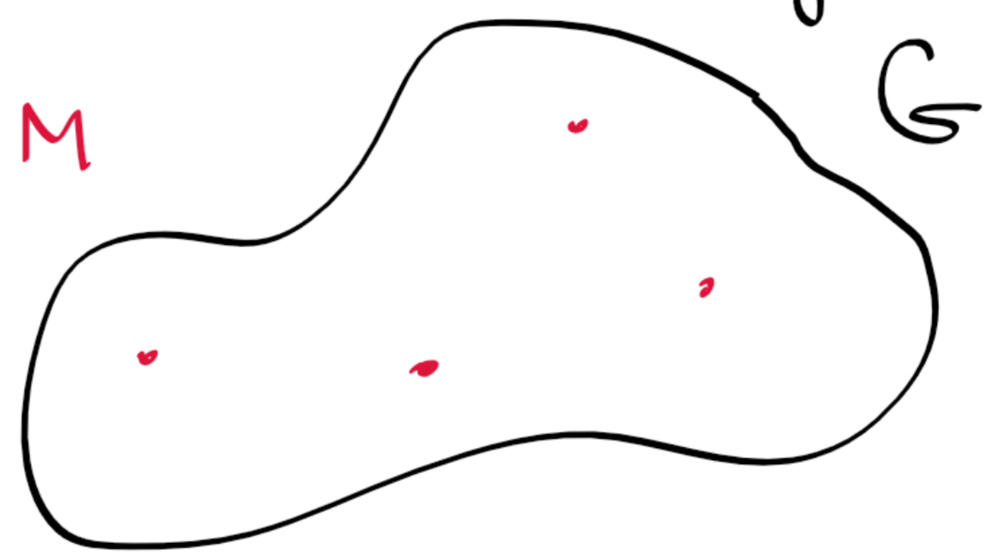
Dk.: Kdyby jich bylo konečně mnoho, jednalo by se o pól (případně OS). ⊠

Definice (Reziduum) Buď $z_0 \in \mathbb{C}$ IS fce f.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \text{na } P(z_0, r).$$

Pak residuem fce f v bodě z_0 myslíme

$$a_{-1} =: \operatorname{res}(f, z_0).$$



Lemma: nechť $G \subseteq \mathbb{C}$ je otevřená, $M \subseteq G$ konečná, $f \in \mathcal{H}(G \setminus M)$. Pro $s \in M$ označíme H_s HČ LŘ fce f v bodě s. Pak $\exists!\, h \in \mathcal{H}(G)$:

$$\boxed{f = h + \sum_{s \in M} H_s} \quad \text{na } G \setminus M.$$

Důkaz: nechť $s_0 \in M$. Pak ex. $r>0$, že

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-s_0)^n, \quad z \in P(s_0, r)$$
$$= H_{s_0}(z) + R_{s_0}(z).$$

Pak zřejmě $R_{s_0} \in \mathcal{H}(B(s_0, r))$,
$H_{s_0} \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{s_0\})$.

Proto $$\tilde{h} := \underbrace{f}_{\in \mathcal{H}(G \setminus M)} - \sum_{s \in M} \underbrace{H_s}_{\in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{s\})} \in \mathcal{H}(G \setminus M)$$

Platí $\forall s \in M$: s je OS $\tilde{h}$ $\Longrightarrow$ dodef. na $h \in \mathcal{H}(G)$. ■

Věta (RV): Nechť $G \subseteq \mathbb{C}$ je hvězdovitá, $M \subseteq G$ konečná, $f \in \mathcal{H}(G \setminus M)$. Dále φ uz. regulární křivka, $\langle \varphi \rangle \subseteq G \setminus M$. Pak

$$\int_\varphi f = 2\pi i \sum_{s \in M} \operatorname{res}(f, s) \operatorname{ind}_\varphi s .$$

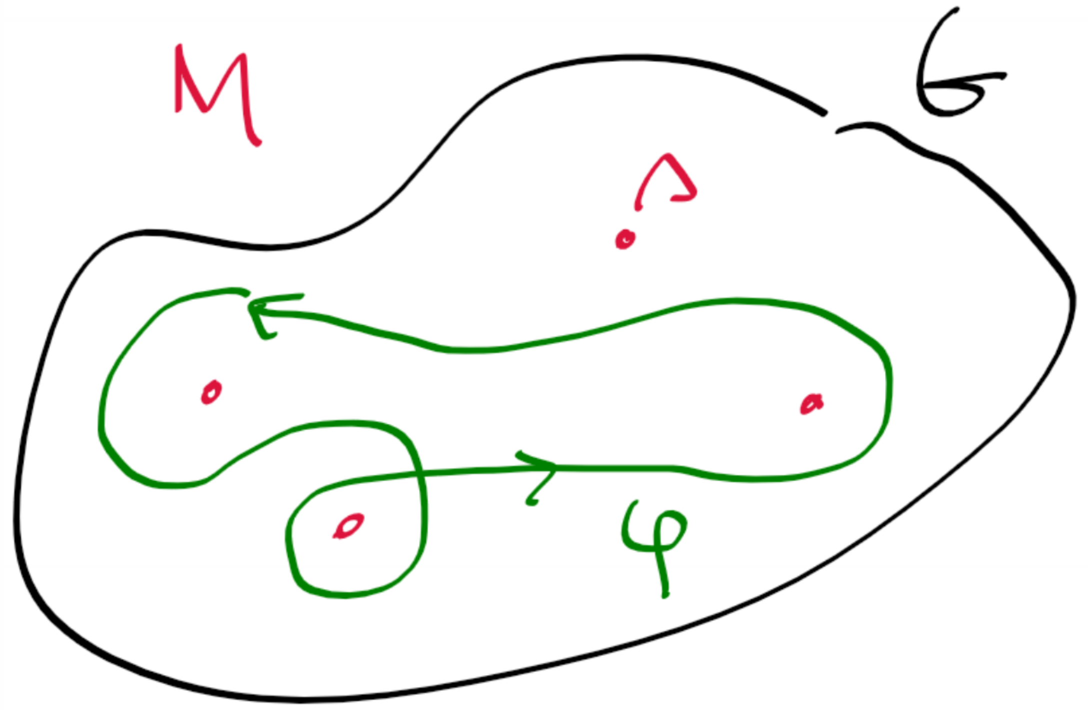
Důkaz: Ex. $h \in \mathcal{H}(G)$: $f = \sum_{s \in M} H_s + h$ (podle předchozí V.) na $G \setminus M$. Pak

$$\int_\varphi f = \sum_{s \in M} \int_\varphi H_s + \underbrace{\int_\varphi h}_{\text{C.V.} \to \, = 0} = \sum_{s \in M} \boxed{\int_\varphi H_s} .$$

Ovšem pro $s \in M$ je

$$\boxed{\int_\varphi H_s} = \int_\varphi \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \frac{1}{(z-s)^n} \, dz \overset{\text{lok. stejn. k.}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \int_\varphi \frac{a_{-n}}{(z-s)^n} \, dz = \int_\varphi \frac{a_{-1}}{z-s} \, dz =$$

Ostatní integrály jsou nulové, protože $\frac{1}{(z-s)^n}$, $n > 1$, má PF na $\mathbb{C} \setminus \{s\}$, přičemž $\langle \varphi \rangle \not\ni s$.



$$= a_{-1} \int_\varphi \frac{1}{z-s} \, dz =$$

$$= \boxed{\overset{\operatorname{res}(f,s)}{\overset{\|}{a_{-1}}} \operatorname{ind}_\varphi (s)} \quad \text{(podle definice indexu).}$$

Závěr: $\int_\varphi f = \sum_{s \in M} \int_\varphi H_s =$

$$= \sum_{s \in M} \operatorname{res}(f, s) \cdot \operatorname{ind}_\varphi (s) .$$

☒

Výpočet residua: $\operatorname{res}(\ , s)$

- Je-li $f \in \mathcal{H}(B(s,r))$, g má v s 1-pól, pak $\operatorname{res}(f \cdot g, s) = f(s) \cdot \operatorname{res}(g, s)$

Příklad: $g(z) = \dfrac{1}{z-s}$ $= a_{-1}$ $\Rightarrow \operatorname{res}(g, s) = 1$

- Jsou-li $f, g \in \mathcal{H}(B(s,r))$, $g(s) = 0$, $g'(s) \neq 0$. Pak $\operatorname{res}\left(\frac{f}{g}, s\right) = \dfrac{f(s)}{g'(s)}$

- Má-li f v bodě s pól nás. $m \in \mathbb{N}$, pak
$$\operatorname{res}(f, s) = \lim_{z \to s} \frac{1}{(m-1)!}\left((z-s)^m f(z)\right)^{(m-1)}$$

Dk: Cvičení na rozvoje.

Idea je následující: má LŘ $f(z)$

$$\cancel{\dots + \frac{a_{-2}}{(z-s)^2}} + \frac{\overbrace{a_{-1}}^{\operatorname{res}(f,s)}}{z-s} + a_0 + a_1(z-s) + \dots$$

Pak $(z-s) f(z) =$

$$\cancel{\dots + \frac{a_{-2}}{z-s}} + a_{-1} + a_0(z-s) + a_1(z-s)^2 + \dots$$

hatmolna neg. části v s

Je-li s pól násobnosti 1, pak:

$$\operatorname{res}(f, s) = \lim_{z \to s} \underbrace{(z-s)}_{\to 0} \underbrace{f(s)}_{\to \infty}$$

Příklad: $I = \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx} =$

$$= [\operatorname{arctg} x]_{-\infty}^{\infty} = \lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x - \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x$$

$$= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

$$\int_\psi \frac{dz}{1+z^2} = \int_\psi \frac{dz}{(z+i)(z-i)} =$$

$$= \underbrace{\boxed{\int_{[-R;R]} \frac{dz}{1+z^2}}}_{I} + \int_{\varphi_R^+} \frac{dz}{1+z^2}$$

$$\Vert$$

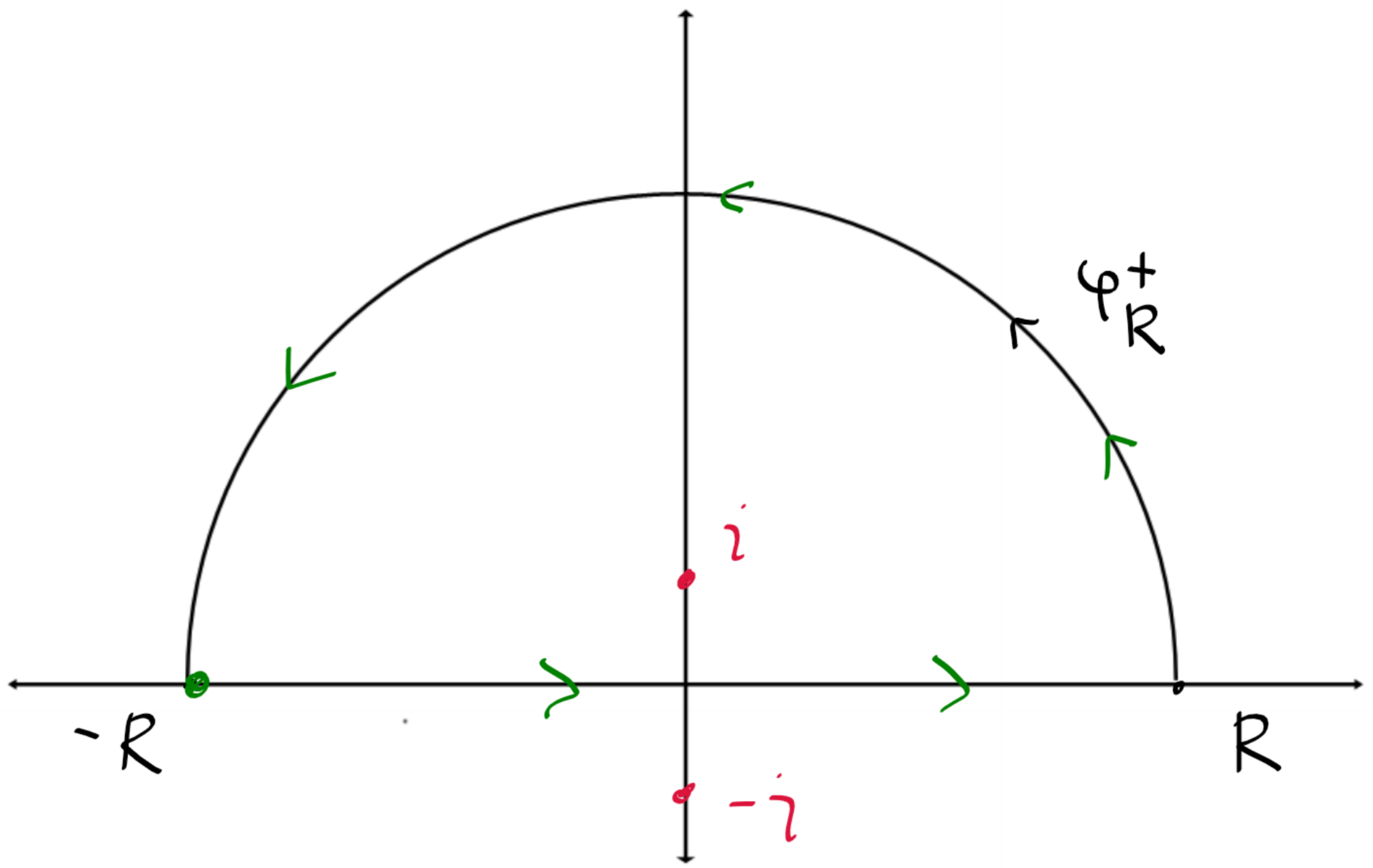
$$\int_{-R}^{R} \frac{1}{1+t^2}\,dt$$ podle definice křivkového integrálu.

$$\left[\ \int_\varphi f \overset{def.}{=} \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.\ \right]$$

$[-R;R] : [-R,R] \to \mathbb{C}$

$t \mapsto t$

$$\int_\psi \frac{dz}{1+z^2} = 2\pi i \operatorname{res}(f, i) = 2\pi i \operatorname{res}\left(\frac{1}{z-i}, i\right) \cdot \frac{1}{i+i} = \frac{2\pi i}{2i} = \pi$$



$\varphi_R^+(t) = R \cdot e^{it}$, $t \in [0, \pi]$

$\psi(t) = [-R;R] \dotplus \varphi_R^+$ je uzavřená křivka.

$$\int_{\psi} \frac{1}{1+z^2}\,dz = 2\pi i \cdot \operatorname{res}(f, i) = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi$$

$$\int_{\psi} \frac{1}{1+z^2}\,dz = \underbrace{\int_{-R}^{R} \frac{1}{1+t^2}\,dt}_{\xrightarrow{R\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt = I} + \underbrace{\int_{\varphi_R^+} \frac{1}{1+z^2}\,dz}_{\to\, 0}$$

PROČ:

$$\left| \int_{\varphi_R^+} \frac{1}{1+z^2}\,dz \right| \le L(\varphi_R^+) \cdot \sup_{z \in \langle \varphi_R^+ \rangle} \left| \frac{1}{1+z^2} \right|$$

$$= \pi \cdot R \cdot \sup_{z \in \langle \varphi_R^+ \rangle} \left| \frac{1}{1+z^2} \right| \le \frac{\pi R}{R^2 - 1} \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

$$\left[\left| \frac{1}{1+z^2} \right| = \frac{1}{|1+z^2|} \le \frac{1}{|z^2| - 1} \right]$$

Tedy $\displaystyle\int_{-R}^{R} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int_{\psi} \frac{1}{1+z^2}\,dz - \int_{\varphi_R^+} \frac{1}{1+z^2}\,dz$

Čili $\displaystyle\int_{-R}^{R} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \pi - \int_{\varphi_R^+} \frac{1}{1+z^2}\,dz$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \pi - \lim_{R\to\infty} \int_{\varphi_R^+} \frac{1}{1+z^2}\,dz$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \pi - 0.$$

Věta: (Integrály typu $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,dx$)

Buďte P, Q polynomy, že $Q \neq 0$ na $\mathbb{R}$, $\operatorname{st} Q \ge \operatorname{st} P + 2$. Položme $R := \frac{P}{Q}$ (rac. fce). Pak $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,dx = 2\pi i \cdot \sum \operatorname{res}(R, s)$, kde sčítáme přes s: $Q(s) = 0$, $\operatorname{Im} s > 0$.

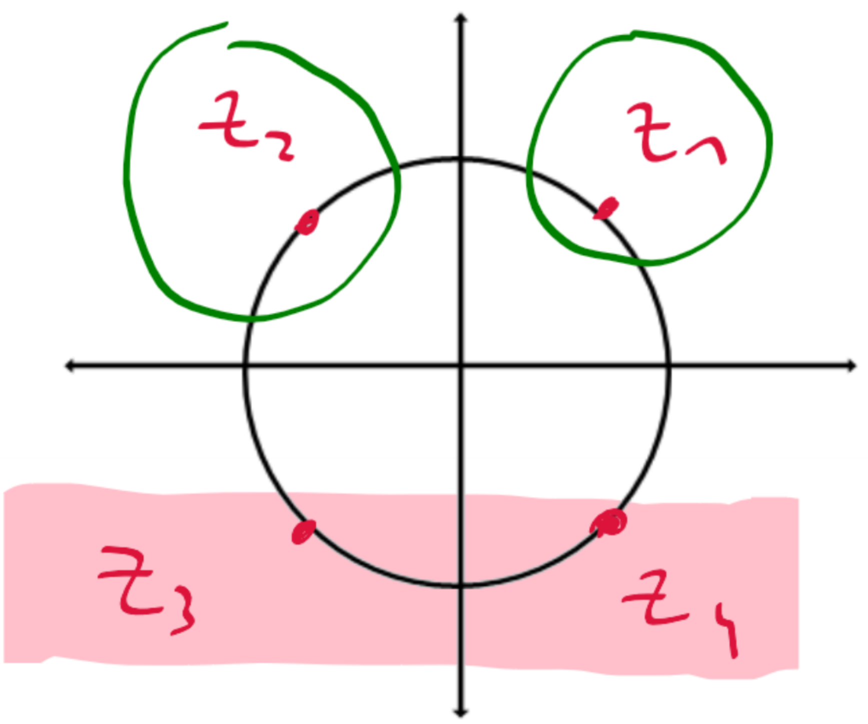
Příklad: $\int_0^\infty \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx$

$= \frac{1}{2}\cdot 2\pi i\left(\sum_{s\in M} \operatorname{res}(f,s)\right) =$ $f(z) = \frac{z^2+1}{z^4+1}$

Kde jsou singularity? $z^4+1=0$

$z^4 = -1$

$z = \sqrt[4]{-1}$



nezajímají nás

$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ $z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)$

$\left[\operatorname{res}\left(\frac{f}{g}, s\right) = \frac{f(s)}{g'(s)}, \text{ kde } g(s)=0 \wedge g'(s)\neq 0\right]$

$= \pi i\left(\frac{z_1^2+1}{4z_1^3} + \frac{z_2^2+1}{4z_2^3}\right) =$

$= \pi i\left(\frac{i+1}{\frac{4}{\sqrt{2}}(-1+i)} + \frac{-i+1}{\frac{4}{\sqrt{2}}(1+i)}\right) =$

$-(1-i)^2$

$= \pi i\left(\frac{(i+1)^2\cdot\frac{4}{\sqrt{2}} + (-1+i)(-i+1)\cdot\frac{4}{\sqrt{2}}}{8(-1-1)}\right) =$

$= \pi i \cdot \frac{-1}{4\sqrt{2}}\cdot\left(\cancel{-1}+2i+\cancel{1}-(\cancel{1}-2i\cancel{-1})\right) =$

$= \frac{-\pi i}{4\sqrt{2}}\cdot(4i) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

Příklad: (Trigonometrické integrály)

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a+\cos t} = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}} = \qquad \boxed{a>1}$$

$$= \frac{1}{i}\int_0^{2\pi} \frac{\overbrace{i e^{it}}^{\varphi'(t)}\, dt}{\left(a+\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)\cdot e^{it}} \overset{def.}{=} \frac{1}{i}\int_\varphi \frac{dz}{\left(a+\frac{z+z^{-1}}{2}\right)\cdot z} =$$

$$\boxed{\varphi(t) = e^{it}, \quad t\in[0,2\pi]}$$

$$\int_\varphi f(z)\,dz \overset{def}{=} \int_0^{2\pi} f(e^{it})\cdot i\cdot e^{it}\,dt$$

$$= \frac{1}{i}\int_\varphi \frac{dz}{\frac{z^2}{2}+az+\frac{1}{2}} = \frac{2}{i}\int_\varphi \frac{dz}{z^2+2az+1} \overset{RV.}{=}$$

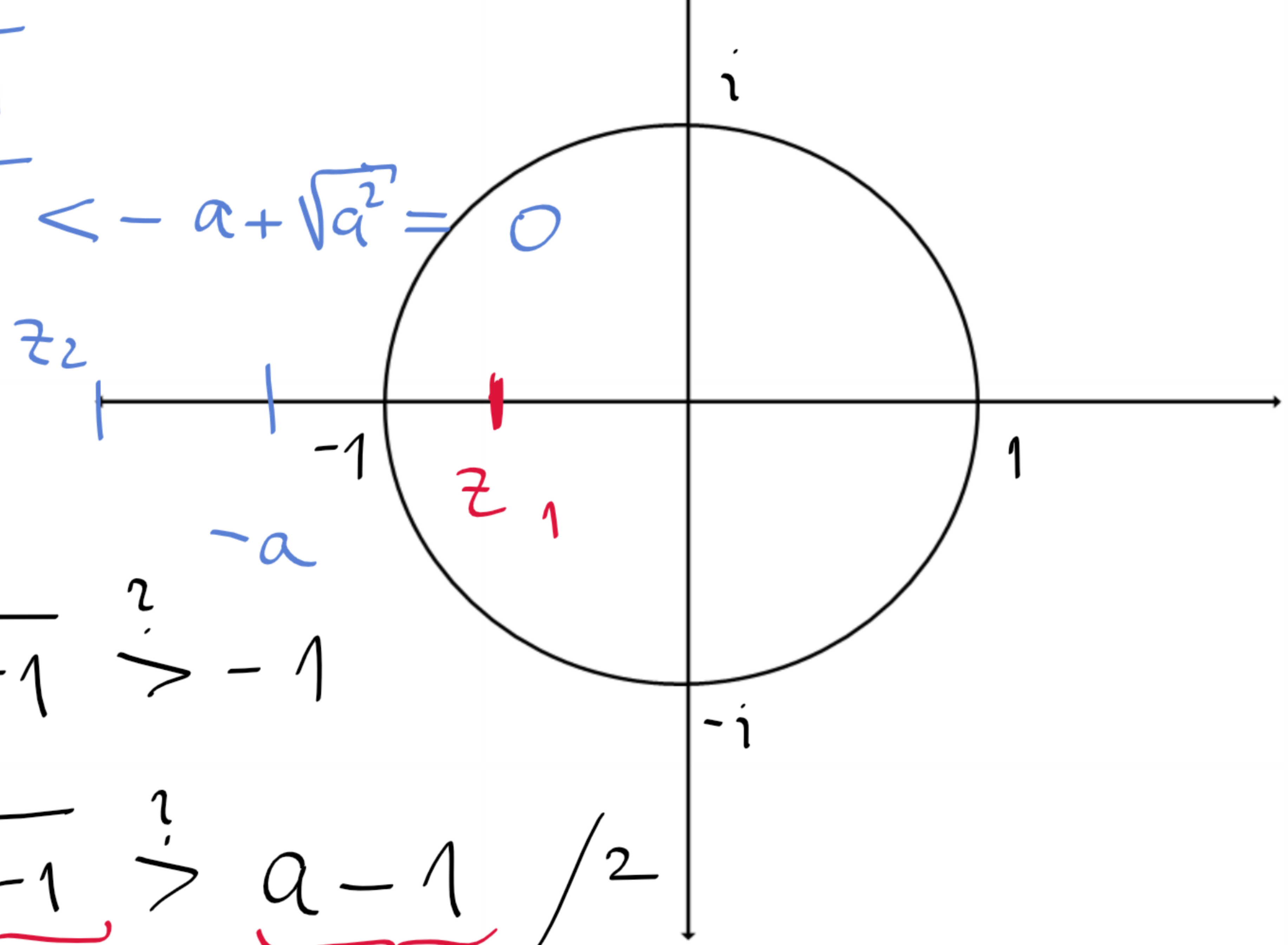
$$\overset{RV}{=} \frac{2}{\cancel{i}}\cdot 2\pi \cancel{i}\cdot \frac{1}{2\sqrt{a^2-1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$$

SINGULARITY:

$$z_{1,2} = \frac{-2a\pm\sqrt{4a^2-4}}{2} = -a\pm\sqrt{a^2-1}$$

$z_2 = -a-\sqrt{a^2-1}$

$z_1 = -a+\sqrt{a^2-1} < -a+\sqrt{a^2} = 0$



$$z_1 = -a+\sqrt{a^2-1} \overset{?}{>} -1$$

$$\underbrace{\sqrt{a^2-1}}_{>0} \overset{?}{>} \underbrace{a-1}_{>0} \quad /^2$$

$$\cancel{a^2}-1 \overset{?}{>} \cancel{a^2}-2a+1$$

$$2a > 2$$

$a > 1$ ✓ podle předp. $\boxed{a>1}$

Platí:

$z_1 \in (-1,0)$

$$\operatorname{res}\left(\frac{1}{z^2+2az+1}, z_1\right) = \operatorname{res}\left(\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}, z_1\right)$$

holomorfní na okolí z_1

$$= \frac{1}{z_1-z_2}\cdot \underbrace{\operatorname{res}\left(\frac{\overset{a_{-1}}{1}}{z-z_1}, z_1\right)}_{1} = \frac{1}{2\sqrt{a^2-1}}$$

$$x^4+1 = \underline{x^4} - 2x^2 + \underline{2x^2+1} =$$

$$= (x^2-1)^2 + 2x^2$$

$$= (x^2+1)^2 - 2x^2 =$$

$$= (x^2+1-\sqrt{2}x)(x^2+1+\sqrt{2}x)$$

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{Ax+B}{x^2+1-\sqrt{2}x} + \frac{Cx+D}{x^2+1+\sqrt{2}x}$$

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) \qquad z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)$$

$$\operatorname{res}\left(\frac{1}{z^4+1}, z_1\right) = \frac{1}{4z_1^3} = \frac{1}{4z_2}$$

$$\operatorname{res}\left(\frac{1}{z^4+1}, z_2\right) = \frac{1}{4z_2^3} = \frac{1}{4z_1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx = 2\pi i\left(\frac{1}{4z_2} + \frac{1}{4z_1}\right) \doteq \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Podle věty o $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,dx$

Jeden předp. je že $R = \frac{P}{Q}$, $Q \neq 0$ na $\mathbb{R}$