MA4 – ZÁPOČTOVÉ ÚLOHY

Úlohy označené hvězdičkou nejsou povinné (nemusí ale být těžší).

$\boxed{1}$ Načrtněte vrstevnice funkce f pro dané hodnoty:

(a) $f(x,y) = -(x-1)^2 - y^2 + 1$; hodnoty $2, 1, 0, -3, -8$;

(b) $f(x,y) = 2y^2 - x + 1$; hodnoty $0, 1, 2$.

$\boxed{2}$ Nechť $f(x,y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ a $g(x,y) = x + 5y + 7$.

(a) Napište rovnici té vrstevnice funkce f, která obsahuje bod $(\sqrt{8}, \sqrt{2})$.

(b) Napište parametrizaci $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ této vrstevnice pomocí funkcí sin a cos.

(c) Napište složení $g \circ \varphi$ a metodami prvního semestru najděte extrémy této funkce na jejím definičním oboru.

$\boxed{3}$ Vyšetřete následující limity (existenci a případnou hodnotu) a své kroky a závěry nezapomeňte stručně vysvětlit.

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \cos \frac{x^2 + y^2}{x + 2y + 3}$;

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;

$*$(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2 - y^2}{x - y}$;

$*$(d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sin(xy)}{x}$.

$\boxed{4}$ Připomeňte si, že spojité první parciální derivace zaručují existenci totálního diferenciálu, a tedy i gradientu. Spojitost vyšetřujeme podobně jako v prvním semestru.

Pomocí zmíněných poznatků *dokažte existenci gradientu* a napište *rovnici tečné nadroviny* následující funkce f v bodě a. Napište v tomto bodě derivace *podle vektoru* v a *ve směru vektoru* v.

(a) $f(x,y) = 50x^2 - 40x + 25y^4 + 10xy$, $a = (1, -1)$, $v = (4, -3)$;

(b) $f(x,y) = e^{x^2+3y^2} \cdot \cos y$, $a = (0, \pi/4)$, $v = (123 \cdot \pi \cdot e, 0)$;

$\boxed{5}$ Pomocí řetízkového pravidla řešte následující úlohy:

(a) Spočtěte $\dfrac{\partial z}{\partial v}$, jestliže $z = x^2 + 2xy$, $x = u\cos v$, $y = u\sin v$.

(b) Jestliže $w = \ln(x^2+y^2+2z)$, $x = r+s$, $y = r-s$, $z = 2rs$, spočtěte $\dfrac{\partial w}{\partial r}$ a $\dfrac{\partial w}{\partial s}$. Správnost výsledku získaného pomocí řetízkového pravidla ověřte výpočtem jinou metodou.

$*$(c) Nechť $w = f(x,y)$ je funkce se spojitými parciálními derivacemi prvního řádu. Uvažujme polární souřadnice $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Spočtěte $\dfrac{\partial w}{\partial r}$ a $\dfrac{\partial w}{\partial \theta}$. V jakém smyslu je w „tu funkcí x, y, tu zase funkcí r, θ“?

$\boxed{6}$ Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x,y) = 27xy^2+14x^3-69x-54y$.

$\boxed{7}$ Nalezněte maximum a minimum funkce f (pokud existují) na množině M, jestliže:

(a) $f(x,y) = 2x+4y, M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon\ \sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y} \leqslant 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$;

$*$(b) $f(x,y) = -y^2 + x^2 + \dfrac{4}{3}x^3, M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon\ x^2+y^2 \leqslant 4, x \leqslant 0\}$.

$\boxed{8}$ Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci následujících posloupností funkcí

$$f_n(x) = nx(1-x)^n \quad \text{na } [0,1].$$

$$g_n(x) = e^{-(nx)^2} \quad \text{na } \mathbb{R}.$$