Písemka z matematické analýzy pro učitele (NMTM202)
2. ročník, letní semestr – 4. termín dne 29. června 2021

Početní část

Příklad 1. Nechť $z = 4e^x \ln y, \quad x = \ln(r\cos\theta), \quad y = r\sin\theta.$ [**15** bodů]

(a) Napište složenou funkci $\tilde{z}(r,\theta) = \ldots$.

(b) Spočtěte parciální derivace $\partial\tilde{z}/\partial r$ a $\partial\tilde{z}/\partial\theta$ přímým výpočtem (tj. bez použití řetízkového pravidla).

(c) Tytéž derivace spočtěte pomocí řetízkového pravidla, tj. bez použití explicitního vyjádření fce $\tilde{z}$.

(d) Napište $\nabla\tilde{z}(2,\pi/4)$.

Příklad 2. Vyšetřete následující limitu:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(2,2)\\ x+y\neq 4}} \frac{x+y-4}{\sqrt{x+y}-2}.$$ [**10** bodů]

Své kroky vysvětlete. Dále vysvětlete, proč se omezujeme na množinu $M = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon\ x+y\neq 4\}$.

Příklad 3. Nalezněte extrémy funkce f na množině M, jestliže

$$f(x,y) = y^2 + 2x^2 \quad \text{a} \quad M = H\Big([1,2]^2\Big).$$ [**10** bodů]

Příklad 4. Na množině $\mathbb{R}$ a na množině $[-K,K]$ (pro $K>0$) vyšetřete stejnoměrnou konvergenci řady funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, kde

$$u_n(x) = \exp\Big(-x^2 + 2nx - n^2 - 2(1-1/n)\Big).$$ [**15** bodů]

Hodnocení:

Nutné podmínky na hodnocení **dobře**:

- dosažení aspoň **16** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **42** bodů.

Nutné podmínky na hodnocení **velmi dobře**:

- dosažení aspoň **21** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **56** bodů.

Nutné podmínky na hodnocení **výborně**:

- dosažení aspoň **26** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **70** bodů.

Písemka z matematické analýzy pro učitele (NMTM202)
2. ročník, letní semestr – 4. termín dne 29. června 2021

Teoretická část

Úloha A.

(a) Definujte totální diferenciál funkce více proměnných. [**2** body]

(b) Napište obecnou definici metrického prostoru. [**2** body]

(c) Definujte stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí. [**2** body]

(d) Zformulujte větu a Lagrangeově multiplikátoru. [**2** body]

(e) Zformulujte nutnou podmínku stejnoměrné konvergence řady funkcí. [**2** body]

Úloha B.

(a) Dokažte, že spojitá funkce na kompaktním metrickém prostoru nabývá extrémů. [**5** bodů]

(b) Nechť G, H jsou otevřené množiny v nějakém metrickém prostoru (M, ρ). Dokažte, že $G \cap H$ je otevřená množina. [**5** bodů]

(c) Pomocí Moore-Osgoodovy věty (zformulujte ji) dokažte, že stejnoměrná limita spojitých funkcí je spojitá. [**6** bodů]

Úloha C.

(a) Buď (M, ρ) metrický prostor, $A \subseteq M$. Nechť $A \neq \overline{A}$. Znamená to, že A je otevřená? Vysvětlete. [**4** body]

(b) Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \rightrightarrows$ na $(0, 3)$ a nechť $u(x)$ je součet této řady. Rozhodněte, zda na $[1, 2]$ funkce u nezbytně nabývá maxima (přes $[1, 2]$) a své tvrzení zdůvodněte. [**4** body]

Úloha D. Vyberte si **jednu** z následujících dvou možností.

(a) Nechť (M, ρ) je metrický prostor a $f : M \to \mathbb{R}$ je funkce. Dokažte, že f je spojitá na M, právě když $f^{-1}(I)$ je otevřená pro každý otevřený interval $I \subseteq \mathbb{R}$. [**16** bodů]

Nebo:

(b) Nechť $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ má v bodě $a \in \mathbb{R}^d$ spojité všechny parciální derivace prvního řádu. Dokažte, že pak f má v bodě a totální diferenciál. Pomocná tvrzení zformulujte bez důkazu. [**16** bodů]

Pokud používáte nějaká pomocná tvrzení, musí být jasně patrné, že znáte jejich znění.