8. cvičení - Funkce více proměnných - řetízkové pravidlo

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/vyuka.php, kuncova@karlin.mff.cuni.cz

Teorie

Věta 1. Nechť $G \subset \mathbb{R}^s$ a $H \subset \mathbb{R}^r$ jsou otevřené množiny. Nechť funkce $\varphi_1, \dots, \varphi_r \in C^1(G)$ a $f \in C^1(H)$.

Definujme funkci $F : G \to \mathbb{R}$, $F(x) = f(\varphi_1(x), \dots, \varphi_r(x))$. Pak $F \in C^1(G)$.

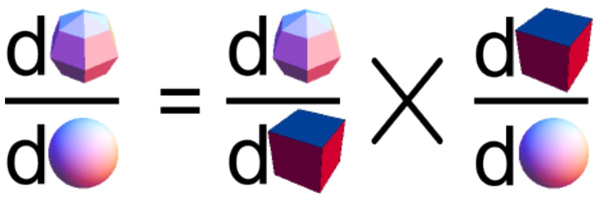
Pro $a \in G$ označme $b = [\varphi_1(a), \dots, \varphi_r(a)]$. Pak pro $j = 1, \dots, s$ platí

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(a) = \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial f}{\partial y_i}(b) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(a).$$

Poznámka 2 (Konkrétně)**.** Je-li funkce $f(x, y, z)$ spojitě diferencovatelná a $x = \phi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, $z = \chi(u, v)$, kde ϕ, ψ, χ jsou spojitě diferencovatelné funkce, pak

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}$$



Source 1: http://mathinsight.org/media/image/image/chain_rule_geometric_objects.png

Příklady

Předpokládejme, že jsou splněny všechny nutné předpoklady (speciálně funkce jsou diferencovatelné a mají záměnné smíšené derivace).

1. Vypočtěte derivace složených funkcí
   (a) $z = u\sqrt{1+v^2}$, kde $u = e^{2x}$ a $v = e^{-x}$
   (b) $z = uv^2w^3$, kde $u = \sin x$, $v = -\cos x$ a $w = e^x$
   (c) $z = \sin u \cos v$, kde $u = (x-y)^2$ a $v = x^2 - y^2$
   (d) $w = yz^2 - x^3$, kde $x = e^{r-t}$, $y = \ln(r + 2s + 3t)$ a $z = \sqrt{rs + t}$
2. Ukažte, že funkce $F(x, y, z) = \frac{xy}{z} \ln x + xf\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$ vyhovuje vztahu $x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} + z\frac{\partial F}{\partial z} = F + \frac{xy}{z}$.
3. Spočtěte parciální derivace $g(x, y) = f(x^2 + y^2)$.

4. Nechť $g(x,y) = f(x+y, x-y)$, spočtěte $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}$ v bodě (a,b).
5. Nechť $f(x,y) = x^2 + 3y^2$. Určete derivace f vzhledem k polárním souřadnicím.
   Polární souřadnice: $x = r\cos\alpha$, $y = r\sin\alpha$.
6. Nechť $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$. Určete derivace f vzhledem k polárním souřadnicím.
7. Ukažte, že funkce $F(x,y) = xf(x+y) + yg(x+y)$ vyhovuje rovnici $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$.
8. Výraz $x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ přetransformujte pro funkci $F(u,v) = f(x,y)$, kde $u = y$ a $v = y/x$.
9. Nechť $u(x,y)$ je funkce splňující $u(x,x^2) = 1$ a $\frac{\partial u}{\partial x}(x,x^2) = x$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Spočtěte $\partial u/\partial y(x,x^2)$.