

MA4 - příklady na cvičení

Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci následujících posloupností a řad funkcí na daných množinách (případně určete množinu bodové konvergence a co největší množiny stejnoměrné konvergence).
Ve všech případech je $\varepsilon > 0$ a $K > 0$.

- | | |
|---|---|
| <p>(1) $f_n(x) = x^n, \quad (0, 1), (0, 1 - \varepsilon)$</p> <p>(2) $f_n(x) = x^n - x^{n+1}, \quad [0, 1]$</p> <p>(3) $f_n(x) = x^n - x^{2n}, \quad [0, 1]$</p> <p>(4) $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}, \quad \mathbb{R}$</p> <p>(5) $f_n(x) = n\left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x}\right), \quad (0, \infty), [K, \infty)$</p> <p>(6) $f_n(x) = \frac{n^2 x^3}{1 + n^2 x^2}, \quad \mathbb{R}$</p> <p>(7) $f_n(x) = nx(1 - x)^n, \quad [0, 1]$</p> <p>(8) $f_n(x) = e^{- x-1/n n^2}, \quad \mathbb{R}$</p> <p>(9) $f_n(x) = \log x \cdot \frac{\sin x}{n(1 + x^2)}, \quad (0, \infty)$</p> <p>(10) $f_n(x) = e^{-x^2/n}, \quad \mathbb{R}$</p> <p>(11) $f_n(x) = \frac{\operatorname{arctg} nx}{nx}, \quad [K, \infty), K > 0$</p> <p>(12) $f_n(x) = \frac{1}{x + n}, \quad (0, \infty)$</p> <p>(13) $f_n(x) = \frac{nx}{1 + n + x}, \quad [0, 1]$</p> <p>(14) $f_n(x) = \frac{x^n}{1 + x^n}, \quad [0, 1], [1, \infty)$</p> <p>(15) $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}, \quad \mathbb{R}$</p> <p>(16) $f_n(x) = \sin(nx), \quad (-1, 1)$</p> <p>(17) $f_n(x) = \sin\left(\frac{x}{n}\right), \quad \mathbb{R}, [-K, K]$</p> <p>(18) $f_n(x) = \frac{1}{x + \frac{1}{n}}, \quad (0, \infty)$</p> | <p>(19) $f_n(x) = x \operatorname{arctg} nx, \quad \mathbb{R}$</p> <p>(20) $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \quad [-K, K], \mathbb{R}$</p> <p>(21) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n, \quad (0, 1), (0, 1 - \varepsilon)$</p> <p>(22) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{x}}{n^4 + x^2}, \quad (0, \infty)$</p> <p>(23) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n \operatorname{arctg} nx}{n^2 + 1}, \quad [-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon], (0, 1), (-1, 0);$</p> <p>(24) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1 + n^5 x^2}, \quad \mathbb{R}$</p> <p>(25) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}, \quad (-1, 1), [-\delta, \delta] (0 < \delta < 1)$</p> <p>(26) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x}{n^2}, \quad \mathbb{R}$</p> <p>(27) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$</p> <p>(28) $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-7}, \quad (0, 1 - \varepsilon), (0, 1)$</p> <p>(29) $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{x^2}{n \log^2 n}\right), \quad \mathbb{R}, [-K, K]$</p> <p>(30) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2 + n^3}, \quad \mathbb{R}$</p> <p>(31) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n x}, \quad (0, \infty), [\varepsilon, \infty)$</p> |
|---|---|

$$\begin{array}{ll}
(32) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (1-x)x^n, & [0, 1], [0, 1-\varepsilon] \\
(33) \quad \sum_{n=1}^{\infty} x^n \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}, & (-2, 2), [-2+\varepsilon, 2-\varepsilon] \\
(34) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+nx)}{nx^n}, & (1, \infty), (2, \infty) \\
(35) \quad \sum_{n=1}^{\infty} e^{nx} & (-\infty-1), [-1, 0], [0, 1] \\
(36) \quad \sum_{n=1}^{\infty} xe^{nx} & (-\infty-1), [-1, 0], [0, 1] \\
(37) \quad \sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{nx} & (-\infty-1), [-1, 0], [0, 1]
\end{array}$$

Řešení: „ano“... konverguje stejnoměrně

(1) ne, ano; (2) ano; (3) ne; (4) ano; (5) ne, ano; (6) ano; (7) ano; (8) ne; (9) ano; (10) ne; (11) ano; (12) ano; (13) ano; (14) ano, ne; (15) ano; (16) ne; (17) ne, ano; (18) ne; (19) ano; (20) ano, ne; (21) ne, ano; (22) ano; (23) ano, ne, ne (těžké); (24) ano; (25) ne, ano; (26) ano; (27) ano na $[-1, 1]$, v ostatních bodech nekonverguje ani bodově; (28) ano, ne; (29) ne, ano; (30) ano; (31) ne, ano; (32) ne, ano; (33) ne, ano; (34) ne, ano; (35) ano, ne, ne; (36) ano, ne, ne; (37) ano, ano, ne.