MA4 - příklady na cvičení 01

Funkce více proměnných - základní vlastnosti

Teorie:

- Připomeňte si, že *vrstevnicí* funkce $f\colon G \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ rozumíme libovolnou množinu tvaru $\{x \in \mathbb{R}^d\colon f(x) = c\}$, kde $c \in \mathbb{R}$ je nějaká konstanta („nadmořská výška").

$\boxed{1}$ Pro následující funkce určete *definiční obor* a popište (implicitně, tj. rovnicí) jejich *vrstevnice*.

(a) $f(x,y) = C$, kde $C \in \mathbb{R}$ je konstanta;

(b) $3x+4y-15$, $\quad e^{3x+4y-15}$, $\quad \sin(3x+4y-15)$, $\quad 1/\sqrt{3x+4y-15}$; pomocí rovnic popište vrstevnice těchto funkcí pro hodnoty $0, 1, 2$;

(c) x^2+y^2-25, $\quad e^{x^2+y^2-25}$, $\quad \sin(x^2+y^2-25)$, $\quad 1/\sqrt{x^2+y^2-25}$; popište vrstevnice procházející bodem $\left(\frac{7}{2}, \frac{7\sqrt{3}}{2}\right)$;

(d) $\operatorname{sgn}(x \cdot y)$, $\quad \operatorname{sgn}(\sin x \cdot \sin y)$; (Vrstevnice nemusí být „křivky"!)

$*$(e) $\arcsin(x+y) + \operatorname{arctg}(x+y) - 2x - 2y$;

$*$(f) $\ln(1+y^2-x^2)$, $\quad \log_{10}(xy)$;

Ještě několik funkcí *tří proměnných*. Definiční obory budou tedy podmnožiny $\mathbb{R}^3$ a vrstevnice budou obvykle nějaké „dvojrozměrné plochy" v $\mathbb{R}^3$.

(g) $f(x,y,z) = x+y+z$; $\quad f(x,y,z) = x$;

(h) $x^2+y^2+z^2$, $\quad f(x,y,z) = y^2+z^2$;

$*$(i) Jak by vypadaly vrstevnice v $\mathbb{R}^3$ funkcí z bodů (b) a (c), pokud bychom tyto funkce chápali jako funkce tří proměnných, tj. např. $f(x,y,z) = 3x+4y-5$ atd.?

$\boxed{2}$ Trocha kreslení:

(a) Načrtněte vrstevnice funkce $f(x,y) = \left(\sqrt{x}\right)^4 + \left(\sqrt{y}\right)^4$, pro hodnoty $f = 1, 4, 9, 16$.

$*$(b) Načrtněte vrstevnice $f(x,y) = x+y$ pro hodnoty -2, -1, 0, 1, 2. Do obrázku dále zakreslete trajektorii $\varphi(t) = (\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\sin t)$ a označte na ní body $\varphi(0), \varphi(\pi/2), \varphi(\pi), \varphi(3\pi/2)$. Z obrázku určete, v jakých časech $t \in [0, 2\pi)$ dosahuje složená funkce $f \circ \varphi$ hodnot 2 a -2. Jde o její extremální hodnoty?

$*$(c) Načrtněte, pokud jste tak ještě neučinili, definiční obor funkce $f(x,y) = 1/\sqrt{x^2+y^2-25}$ z předchozí úlohy. Do téhož obrázku zakreslete přímky $p\colon 3x+4y=0$, $q\colon 4x-3y=25$. Jak vypadají jejich průniky s $\mathbb{D}_f$, tj. průniky $p\cap\mathbb{D}_f$ a $q\cap\mathbb{D}_f$?

---

3 Spočtěte $f\circ\varphi$ a $(f\circ\varphi)'$, jestliže:

(a) $f(x,y) = 16y^2 - 4x + 10, \quad \varphi(t) = (0,0) + t\cdot(1,1);$

(b) $f(x,y) = 16y^2 - 4x + 10, \quad \varphi(t) = (4t^2+1, t);$

(c) $\dfrac{\sin(9x^2+y^2)}{9x^2+y^2}, \quad \varphi(t) = (0,0) + t^2\cdot(1,1);$ (O jakou křivku jde?)

(d) $\dfrac{\sin(9x^2+y^2)}{9x^2+y^2}, \quad \varphi(t) = (\cos t, 3\sin t);$ (O jakou křivku jde?)

(e) Vysvětlete (geometricky interpretujte) své závěry v (b) a (d).

---

4 Nechť $f(x,y) = \log_6(4x^2+9y^2)$. Napište rovnici vrstevnice pro hodnotu 2 (neboli její implicitní vyjádření) a najděte parametrické vyjádření $\varphi(t) = (?,?)$ této vrstevnice. Pak napište a upravte složenou funkci $f\circ\varphi$. Výsledek je možno ihned uhodnout z hlavy! $f\circ\varphi = ?$ (Až výsledek uhodnete, ověřte ho výše uvedeným postupem.)

---

5 Nechť $f(x,y,z) = xyz$. Najděte extrém(y) této funkce na přímce zadané parametricky jako $p(t) = (20-t, t, 20)$. Nezapomeňte určit bod(y) na přímce $\langle p\rangle$, kde se extrému nabývá.

---

6 Vyšetřete existenci a hodnotu následujících limit:

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,2)} \left(3x^2 - 2y^2 + 7\right)$

> *Hint:* Funkce je spojitá, tj. „limita je hodnota“.

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(\frac{\pi}{2},0)} \sqrt{x^2+y^2}\sin(x)\cos(xy)$

> *Hint:* Opět použijte spojitost (a zdůvodněte ji).

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2y+xy^2}}{x^2+y^2+1}$

> *Hint:* Funkce je spojitá všude tam, kde je spojitý čitatel i jmenovatel a nedělí se nulou.

(d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(3,2)} \frac{x^2-y^2-y}{(x-y)(x-2)(y+1)}$

> *Hint:* Načrtněte množinu bodů, kde jmenovatel je 0, a „vhodné okolí“ bodu $(3,2)$.

7 Následující limity už obvykle nejdou vyčíslit okamžitým dosazením. Některé z nich mají pod symbolem „lim" uvedeny další podmínky; potom jde o limity vzhledem k nějakým podmnožinám celého prostoru.

(a) $$\lim_{\substack{(x,y)\to(1,-1)\\ x\neq 1,\ y\neq -1}} \frac{(y+1)(x^2-x)}{(x^3-1)(y^2+y)};$$

Hint: Jakého „typu" je tato limita? Rozložte polynomy a zkraťte, co se dá!

(b) Napište definiční obor funkce z (a) a vysvětlete, proč limita neexistuje vzhledem k celému $\mathbb{R}^2$ (tj. proč je potřeba „pod ni" připsat ještě „$x \neq 1$, $y \neq -1$"). Použijte skutečnost, že aby limita funkce f v jistém bodě měla šanci existovat, musí být definovaná na nějakém (byť i jen miniaturním) prstencovém okolí tohoto bodu.

(c) $$\lim_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\ x\neq y}} \frac{x^2-y^2}{x^2-3y+3x-xy}$$

Hint: Opakovaně vytkněte ve jmenovateli, pak zkraťte.

$*$(d) $$\lim_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{(x+y)^2-4}{x+y+2}$$

$*$(e) $$\lim_{\substack{(x,y)\to(1,-3)\\ x+y+2\neq 0}} \frac{(x+y)^2-4}{x+y+2}$$

Hint: Šikovně upravte čitatele. Jsou dva nabízející se způsoby, z nichž jeden nikam nevede!

$*$(f) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}{x^2+y^2}$$

Hint: Standardní trik na rozdíl odmocnin funguje i zde: $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.

$*$(g) $$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\sqrt{x^2+y^2-2x+2}-1}{\sqrt[3]{x^2+y^2-2x+2}-1}$$

Hint: Místo vzorce $a^6-b^6=\dots$ použijte VOLSF s vnitřní funkcí $g(x,y)=\sqrt[6]{x^2+y^2-2x+2}$.

---

8 Následující limity je potřeba počítat poněkud nápaditě. Často lze najít vhodný odhad a použít Lemma o dvou policajtech. Někdy však žádný odhad nepomůže, protože limita neexistuje. Neexistenci limity lze často dokázat pomocí skládání s různými křivkami: jestliže „limita po jedné křivce" je jiná než „limita po jiné křivce", pak limita jako taková neexistuje. Pokud by totiž limita existovala a měla hodnotu L, podle VOLSF by všechny (správně) složené funkce musely mít právě hodnotu L.

(a) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$$

Hint: Použijte $\triangle$-nerovnost a odhad $\frac{a}{b+c} \leqslant \frac{a}{b}$, kdykoliv $a,b,c \geqslant 0$, $a+b \neq 0$.

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$

Hint: Limita neexistuje.

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

∗(d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$

∗(e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$

∗(f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y^2}$

Hint: Zkuste použít polární souřadnice. Jak ale ospravedlnit takový postup?

∗(g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^3+5y^3}{x^2+2y^2}$

Hint: I zde lze použít záměnu souřadnic.

---

9 Tyto limity jsou docela snadné, jakmile vás napadne vhodným způsobem použít VOLSF:

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(2x^2+y^2)}{2x^2+y^2}$

Hint: Stačí si vzpomenout na „známou limitu“.

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(4,-5)} \frac{1-\cos(|x-4|+|y+5|)}{\big(|x-4|+|y+5|\big)^2}$

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(3,0)} \frac{\operatorname{tg}(xy)}{y}$

∗(d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{e^{y(|x|+(y-2)^2)}-1}{|x|+(y-2)^2}$

Hint: Rozšiřte y; „známá limita“. Je toto rozšíření OK? Viz též další příklad.

∗(e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{e^{(x^2+y^2)(y-2)}-1}{x^2+y^2}$

Hint: Zde rozšíření $(y-2)$ způsobí, že funkce náhle není def. na okolí $(0,2)$. Co s tím?

∗(f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(1+\frac{2}{|x|+|y|+|z|}\right)^{|x|+|y|+|z|}$

$\boxed{\textbf{10}}$ Lze následující funkce spojitě rozšířit na $\mathbb{R}^2$?

(a) $f(x,y) = \dfrac{\sin xy}{x^2+y^2}$

(b) $g(x,y) = \dfrac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Další úlohy:

$\boxed{\textbf{11}}$ Vraťme se k funkci $f(x,y) = 1/\sqrt{x^2+y^2-25}$. Známe $\mathbb{D}_f$ a víme, jak vypadají její vrstevnice. Proveďte následující:

(a) Napište vzorec pro $f \circ \varphi(x) = f(\varphi(x))$, kde $\varphi(x) = (x, 0)$.

(b) Složená funkce $g := f \circ \varphi$ má jedinou proměnnou x. Napište $\mathbb{D}_g$.

(c) Načrtněte graf g. Protože g má jedinou proměnnou, je graf $g \subseteq \mathbb{R}^2$.

(d) Nyní ztotožníme $\mathbb{R}^2$ s rovinou xz v $\mathbb{R}^3$, tj. s rovinou $y = 0$. Graf g tedy nyní chápeme jako podmnožinu roviny $y = 0$. Všimněte si, že při této domluvě platí

$$\operatorname{graf} g = \operatorname{graf} f \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon y = 0\}.$$

(e) Použijte znalost vrstevnic funkce f a grafu g k tomu, abyste si představili celý graf f (a ne pouze jeho část obsaženou v rovině xz).

$\boxed{\textbf{1337}}$

$*$(a) Lze funkci $f(x,y) = \frac{\sin x + \sin y}{x+y}$ spojitě dodefinovat na $\mathbb{R}^2$? Nezapomeňte, že bodů nespojitosti je víc!

$*$(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{\sqrt{x^4+y^6}}$

✠(c) Pro které čtveřice $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in (0, \infty)$ existuje $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{|x|^\gamma + |y|^\delta}$?