12. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/, kunck6am@natur.cuni.cz

Teorie

Věta 1 (Nutná podmínka existence extrému)**.** Nechť $n \in \mathbb{N}$, $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $a \in G$ a $i \in \{1, \cdots, n\}$. Nechť funkce $f : G \to \mathbb{R}$ má v bodě a lokální extrém. Potom buď $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ neexistuje nebo $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$.

Věta 2 (Postačující podmínky pro lokální extrém)**.** Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $a \in G$ a nechť $f \in C^2(G)$. Nechť $\operatorname{grad} f(a) = 0$. Pak

1. Je-li kvadratická forma $f''(a)$ positivně definitní, pak funkce f nabývá v bodě a svého ostrého lokálního minima.
2. Je-li kvadratická forma $f''(a)$ negativně definitní, pak funkce f nabývá v bodě a svého ostrého lokálního maxima.
3. Je-li kvadratická forma $f''(a)$ indefinitní, pak funkce f nenabývá v bodě a lokálního extrému.

Poznámka 3 (Sylvesterovo kritérium)**.** Nechť $\mathbf{A}$ je symetrická matice reálných čísel typu (n, n). Označme $\{D_k\}$ posloupnost determinantů levých horních rohů. Pak

1. $\mathbf{A}$ je positivně definitní, právě když všechna $D_k > 0$;
2. $\mathbf{A}$ je negativně definitní, právě když $D_1 < 0$, $D_2 > 0$, $D_3 < 0 \dots$;
3. jestliže všechny hlavní subdeterminanty jsou nenulové a navíc nenastaly předchozí případy, pak $\mathbf{A}$ je indefinitní.

Poznámka 4. Nechť f je spojitá na $\overline{M}$. Pak $\sup f(M) = \sup f(\overline{M})$ a $\inf f(M) = \inf f(\overline{M})$.

Poznámka 5. Nechť K je neprázdní kompaktní množina v metrickém (pod)prostoru X. Nechť navíc $\operatorname{int} K \subset X$. Nechť funkce f je spojitá na K a nechť existuje $x_0 \in \operatorname{int} K$ tak, že

$$x \in \partial K \cup (X \setminus K) \implies f(x) > f(x_0) \qquad (\text{resp.} f(x) < f(x_0)).$$

Pak má funkce f v množině X minimum (resp. maximum) rovné $\min f(K)$ (resp. $\max f(K)$) a všechny body $x \in X \cup K$, v nichž je $f(x) = \min f(K)$ (resp. $f(x) = \max f(K)$), leží v $\operatorname{int} K$.

Algoritmy

Lokální extrémy (v závorce dimenze pro funkci 2 proměnných):

1. Zderivujeme - máme (dvě) parciální derivace.
2. Položíme derivace rovny nule. Vyřešíme soustavu a najdeme podezřelé body.
3. Vytvoříme matici druhých derivací (2x2).
4. Dosadíme podezřelé body. Pro každý dostaneme matici. Vyhodnotíme ji Sylvesterovým kritériem. Tím vyšetříme podezřelé body a získáme lokální extrémy nebo sedla.
5. Pokud je matice semidefinitní, vyšetříme funkci „nějak jinak“.

Globální extrémy:

1. Postupujeme jako u lokálních extrémů - tím získáme lokální maxima nebo minima. Pokud je funkce diferencovatelná, tak jinde extrémy být nemohou.
2. Odhadneme limity v krajích definičního oboru. Např. jak se funkce chová na přímkách $y = 0$, $x = 0$.
3. Pokud to vypadá, že funkce globální extrémy nemá (např. jde někde do nekonečna), tak za pomoci limit najdeme bod, který má vyšší hodnotu, než naše lok. maximum (minimum analogicky).
4. Pokud to vypadá, že v místech lok. extrémů jsou i globální, tak:
   (a) Najdeme kompakt, který obsahuje tyto podezřelé body. Spojitá funkce na kompaktu musí nabývat extrémů.
   (b) Ukážeme, že mimo kompakt je funkce menší než maximum (a větší než minimum). Tady pomůže vhodná volba kompaktu, znalost limit a nějaké ty obvyklé odhady.

Extrémy na omezené množině:

1. Je-li množina uzavřená, tak odůvodníme, že spojitá funkce na kpt. nabývá extrémy.
2. Extrémy mohou být:
   (a) na vnitřku množiny jen v místech s nulovými derivacemi (jejich typ nevyšetřujeme, pokud na to nejsme přímo tázáni);
   (b) v bodech vnitřku, kde neexistuje derivace;
   (c) na hranici: hraniční křivky (nebo plochy) - obvykle lze dosadit a získat funkci 1 proměnné.

(d) na hranici hranice: krajní body, hroty trojúhelníku atp.

3. Všechny podezřelé body sepíšeme a porovnáme jejich funkční hodnoty. Vybereme maximum a minimum.

4. Pokud množina není uzavřená, tak ji prve uzavřeme a vyšetříme jako kompakt. Pokud je extrém na její hranici (mimo množinu), tak funkce tento extrém nemá - ale bude to její sup/inf.

Příklady

1. Najděte lokální extrémy funkcí

   (a) $f(x, y) = 2y^2 - 4xy + x^4 + 3$

   (b) $f(x, y) = y^3 + y^2x - x^2 - 4x$

   (c) $f(x, y) = 2x^3 + 9xy^2 + 15x^2 + 27y^2$

   (d) $f(x, y) = x^2y + xy^2 + x^2 - x$

   (e) $f(x, y) = 5y^2 + 2y^3 + yx^2 + x^2$

   (f) $f(x, y) = e^x(4x^2 + 3y^2 + y^3)$

2. Najděte lokální extrémy funkcí

   (a) $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$

   (b) $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3(xy + xz)$

   (c) $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + \dfrac{z^2}{2} - 3xz - 2y + 2z$

3. Najděte globální extrémy funkcí

   (a) $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$
   Hint: Jak se chová funkce te^{-t}?

   (b) $f(x, y) = (x^2 + 7y^2)e^{-5x^2-2y^2}$
   Hint: Lze se nějakými odhady dostat k funkci te^{-t}?

   (c) $f(x, y) = 3x + \dfrac{4y}{x^2} + \dfrac{27}{y^3}$, $M = (0, \infty)^2$

   (d) Najděte supremum a infimum fukce
   $f(x, y) = (x + y + z)e^{-(x+2y+3z)}$, na $M = (0, \infty)^3$

4. Najděte extrémy funkcí na množině

   (a) $f(x, y) = x^3 - 2x^2y + 3y^3$ na $M = [-1; 1]^2$

   (b) $f(x, y) = x^2 - 3y^2 + xy$ na $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$

   (c) $f(x, y) = x + y$ na $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 \leq 1\}$
   Hint: zobecněné polární souřadnice

   (d) $f(x, y) = x^2 - 3y^2 - x + 18y + 4$ na $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y \leq 4\}$

   (e) $f(x, y) = (x - y)^2 + x^2$ na M,
   kde M je čtverec s vrcholy $A = [2, 0]$, $B = [0, 2]$, $C = [-2, 0]$, $D = [0, -2]$

(f) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ na $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$
Hint: polární souřadnice

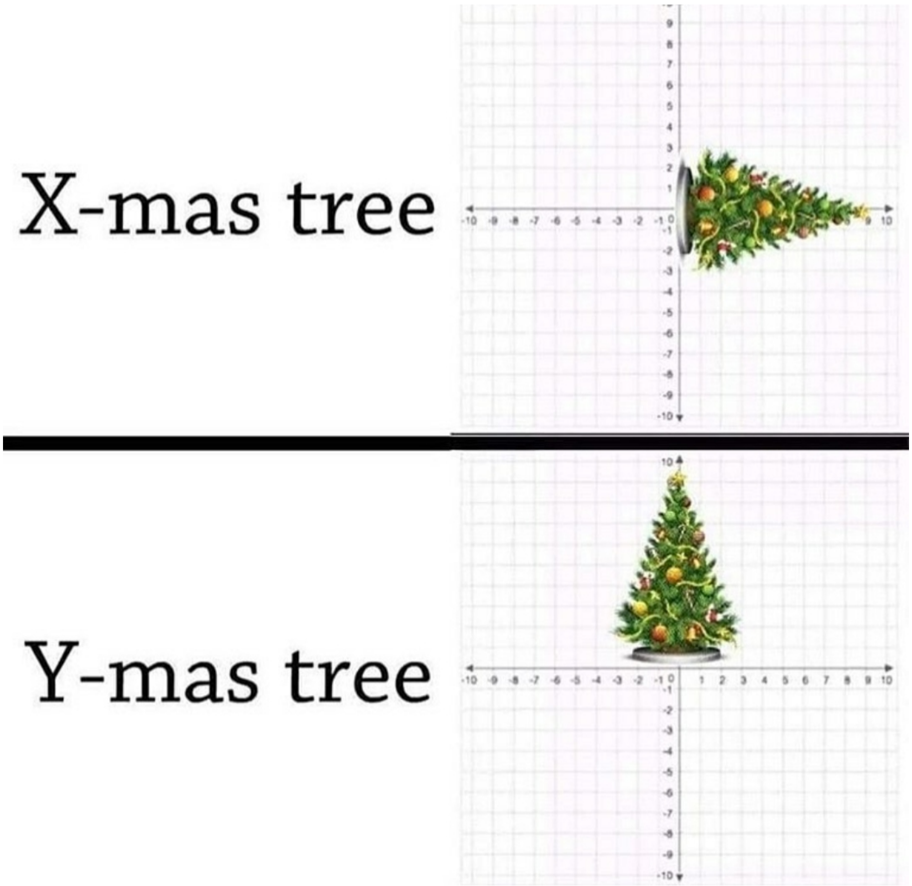

Figure 1: https://www.reddit.com/r/MathJokes/comments/ediuse/happy_christmas/