# Matematická analýza IV (NMTM201)[1]

Martin Rmoutil

19. června 2023

[1]Tvorba tohoto materiálu byla podpořena z Fondu vzdělávací politiky MŠMT na rok 2023, projekt *Podpora zkvalitnění přípravy učitelů matematiky, fyziky a informatiky na MFF UK.*

# Obsah


**Předmluva** **ii**

**1 Funkce více proměnných** **1**

1.1 Úvod . . . 1
1.2 Parciální derivace . . . 17
1.3 $\mathbb{R}^d$ jako metrický prostor . . . 19
1.4 Lokální extrémy . . . 22
1.4.1 Vsuvka o kvadratických formách . . . 26
1.4.2 Podmínky 2. řádu pro lokální extrémy . . . 32
1.5 Limita a spojitost . . . 33
1.5.1 Limity pomocí polárních souřadnic . . . 42
1.6 Derivace funkcí více proměnných . . . 42
1.6.1 Totální diferenciál . . . 45
1.6.2 Derivace podle vektoru . . . 51
1.6.3 Derivace složené funkce více proměnných . . . 54
1.7 Vázané extrémy . . . 55

**2 Metrické prostory** **56**

2.1 Definice a příklady MP . . . 56
2.2 Základní pojmy v MP . . . 61
2.3 Spojitá zobrazení mezi MP . . . 70
2.4 Kompaktnost . . . 73
2.4.1 Nabývání extrémů . . . 74
2.4.2 Rozpoznání kompaktů v $\mathbb{R}^d$ . . . 75
2.4.3 Praktické důkazy kompaktnosti . . . 79

**3 Posloupnosti a řady funkcí** **81**

# Předmluva

Předložený text si klade za cíl shrnout poznatky z přednášky Matematická analýza IV pro učitele (NMTM202), nemá ovšem ambici stát se samostatnou učebnicí. Vysvětlení probíraných konceptů v tomto textu tedy budou výrazně stručnější, čekejte méně poznámek, odboček atd.

Předmět MA IV pro učitele zahrnuje tři hlavní témata:

1) Funkce více proměnných;

2) metrické prostory;

3) stejnoměrná konvergence posloupností funkcí.

Všechna tři uvedená témata představují důležité základní znalosti z matematické analýzy, svým charakterem se ale, jak bude vidět, výrazně liší. Nejvíce speciálním případem je teorie metrických prostorů, tedy abstraktních množin vybavených možností měřit vzdálenost mezi prvky. V této části výkladu poodhalíme matematický svět s vyšší mírou abstrakce (a z toho důvodu také vyšší mírou jasnosti).

Protože tento text bude vznikat víceméně souběžně s přednáškou, budu rád, když mě budete upozorňovat na jeho nedostatky. Je snad jasné, že úvodní (neúplné) verze bude lépe číst pouze v elektronické formě a tisk na papír bude vhodný až v závěru semestru. Budu se nicméně snažit o konzistentní číslování.

# Kapitola 1

# Funkce více proměnných

## 1.1 Úvod

V tomto stručném úvodním oddílu chci neformálně představit základní koncepty teorie funkcí více proměnných, a to společně s příslušným značením. Pro větší přehlednost dělím text úvodu do několika odstavců.

**1) Nezávisle proměnná vs. závisle proměnná:** Možná si vzpomenete, že i u funkcí tvaru $y = f(x)$, například $y = x^2 + 1$, jsme občas použili tyto pojmy: $x$ je *nezávisle* proměnná (můžeme dosadit „co chceme“), zatímco $y$ je *závisle* proměnná (její hodnota závisí na $x$). Je celkem přirozené, že nějaká veličina může v běžných situacích (v životě) záviset na více než jen jediné proměnné: může být funkcí více nezávisle proměnných.

Například funkce $V(x, y, z) = x \cdot y \cdot z$ pro $x, y, z > 0$ lze chápat jako vyjádření závislosti objemu kvádru na délkách jeho vzájemně kolmých stran. Objem kvádru zde tedy představuje závisle proměnnou, a to závislou na třech (nezávisle) proměnných $x, y, z$. Pro větší geometrickou názornost se můžeme, ale nemusíme, omezit požadavkem $x, y, z > 0$; funkční předpis ovšem dává smysl i pro nekladné hodnoty proměnných. Jistě by pro vás nebyl problém přijít s dalšími přirozenými příklady funkcí více proměnných.

Naproti tomu můžeme také uvažovat „funkce“ jediné nezávisle proměnné (řekněme proměnné $t$, kterou můžeme interpretovat jako čas), které nicméně mají více závisle proměnných: více veličin se mění v závislosti na hodnotě jedné nezávislé veličiny (tou může být například čas). Takovou situaci lze obvykle přirozeně chápat jako parametrizaci křivky v prostoru, jehož dimenze odpovídá počtu závisle proměnných.

Tak třeba funkce $x(t) = t$ a $y(t) = 100 - t^2$ můžeme sdružit do uspořádané dvojice

$$\varphi(t) = \big(x(t), y(t)\big) = \big(t, 100 - t^2\big).$$

Zde tedy $\varphi$ značí zobrazení, které každému číslu $t \in \mathbb{R}$ přiřadí dvojici $(t, 100 - t^2) \in \mathbb{R}^2$, a jedná se tedy o zobrazení $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, přičemž $x$, $y$ jsou závisle proměnné a nezávisle proměnná je pouze $t$. V běžné terminologii používané v analýze se proto nejedná o *funkci* (ta by měla mít hodnoty v $\mathbb{R}$ popřípadě v $\mathbb{C}$), nýbrž o *zobrazení*.[1]

My se i v průběhu tohoto stručného úvodu setkáme s řadou podobných zobrazení, která budeme chápat souhrnně jako křivky, a to křivky parametricky vyjádřené. Smysl této terminologie tkví v tom, že $t$ (čas) chápeme jako proměnnou („parametr“), jejíž každé hodnotě odpovídá nějaký bod v $\mathbb{R}^2$ (resp. v obecném případě bod v $\mathbb{R}^d$, kde $d > 1$ je dimenze prostoru, v němž křivku máme). Parametricky zadanou křivku tedy můžeme chápat jako pohyb bodu v rovině (prostoru), přičemž v každém čase si (podle předpisu) můžeme vypočítat jeho „aktuální polohu“. Je proto rozumné rozlišovat mezi *křivkou* (ta obsahuje informaci o aktuální poloze pro každý čas) a *trajektorií*, která je pouze množinou všech pozic, které pohyblivý bod navštívil.

**2) Typy funkcí (zobrazení) a jejich značení:** Obecně můžeme mít více nezávisle proměnných nebo více závisle proměnných (popř. obojí). Obvykle jejich počet budeme značit $d$, tj. $d \in \mathbb{N}$ a $d > 1$, v některých situacích ale můžeme použít i jiné písmenko. Je dobré si už teď uvědomit, že připouštíme i situaci $d > 3$, dokonce $d > 1000$, takže obecně nemusí stačit písmenka abecedy k označení všech proměnných. Pro obecné $d$ tedy jednotlivé proměnné obvykle odlišujeme pomocí indexů:

$$x_1, x_2, \dots, x_{d-1}, x_d.$$

Funkci $f$, která má $d$ nezávisle proměnných budeme chápat jako funkci definovanou na $\mathbb{R}^d$ nebo na nějaké podmnožině $\mathbb{R}^d$. O definičním oboru se podrobněji zmíním v pozdějším odstavci, nyní předpokládejme, že neexistuje žádné omezení na žádnou z nezávisle proměnných, a funkce je tedy definována na celém $\mathbb{R}^d$. V takovém případě píšeme

$$f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \quad \text{a} \quad f(x_1, x_2, \dots, x_d) := f\big((x_1, x_2, \dots, x_d)\big), \tag{1.1}$$

kde druhou uvedenou rovností míním to, že následující dvě možná vnímání „charakteru“ funkce $f$ jsou rovnocenná:

(a) $f$ lze vnímat jako funkci, do které dosadíme $d$ čísel $x_1, x_2, \dots, x_d$ (a ona nám dá výsledek), nebo

(b) $f$ lze vnímat jako funkci, která libovolnému bodu $\mathbb{R}^d$ přiřazuje nějaké číslo.

Mezi oběma přístupy (z nichž první odpovídá levé straně a druhý pravé straně diskutované rovnosti výše) je samozřejmě pouze kosmetický rozdíl, považuji však za účelné na něj už teď upozornit.

[1] V analýze a dalších běžných matematických disciplínách je skutečně zvykem pojmy „funkce“ a „zobrazení“ rozlišovat, ale v teorii množin, která je obvykle považována za základ moderní matematiky, se jedná o synonyma. My se zde samozřejmě budeme držet běžného způsobu vyjadřování a oba termíny budeme rozlišovat s tím, že funkce je speciální případ zobrazení, ale ne každé zobrazení je funkce.

Obecnou (parametricky zadanou) křivku $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ chápeme prostě jako $d$-tici obyčejných funkcí $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Píšeme

$$\varphi = \big(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_d\big), \quad \text{kde} \quad \varphi_i\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ i = 1, 2, \ldots, d.$$

Dosadit do této $d$-tice funkcí hodnotu proměnné $t$ pak pochopitelně znamená dosadit $t$ do každé z těchto $d$ funkcí, čímž obdržíme $d$-tici reálných čísel:

$$\varphi(t) = \big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_d(t)\big) \in \mathbb{R}^d.$$

Pojďme se podívat na jiný příklad křivky v $\mathbb{R}^2$. Položíme $\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$. Je dobře známo už ze střední školy, kde se pomocí tohoto faktu funkce $\sin, \cos$ přímo definují, že pro libovolné $t$ (které lze v tomto případě chápat také jako úhel) je $\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$ prvek jednotkové kružnice se středem v počátku. Když $t$ probíhá všechny možné úhly, $\varphi(t)$ probíhá jednotkovou kružnici, přičemž každý interval délky $2\pi$, který $t$ proběhne, představuje jeden oběh celé kružnice kolem dokola.

Protože souřadnice v $\mathbb{R}^2$ běžně označujeme $x$ a $y$ (místo $x_1$ a $x_2$), lze první složku křivky $\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$ chápat jako „$x$-ovou složku“, druhou jako „$y$-ovou složku“. V souladu s tím je další běžné značení křivek, které následuje:

$$\varphi : \left[\begin{array}{l} x = \cos t \\ y = \sin t \end{array}\right., \quad \text{popřípadě} \quad \varphi : \left[\begin{array}{l} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{array}\right. .$$

Přirozeně můžeme uvažovat i křivky v $\mathbb{R}^3$; ty mají tři složky. Zde je několik dalších (souvisejících) příkladů křivek, z nichž první dva jsou křivky v $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \big(\cos t, \sin t, 0\big), \\ \mu(t) &= \big(\cos t, \sin t, t\big), \\ \sigma(t) &= \big(t \cos t, t \sin t\big). \end{aligned}$$

Rychlá úvaha odhalí, že $\psi$ je kružnice v prostoru, která má střed v počátku a leží v rovině $z = 0$. Křivka $\mu$ je nekonečná šroubovice (s konstantním poloměrem) „obtočená“ kolem osy $z$. Konečně $\sigma$ je spirála vycházející z počátku v $\mathbb{R}^2$.

Vzpomeneme-li si, že třetí souřadnice v $\mathbb{R}^3$ se běžně jmenuje $z$, pak následující zápisy křivek $\psi$, $\mu$, $\sigma$ jistě nepřekvapí:

$$\psi : \left[\begin{array}{c} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \\ z(t) = 0 \end{array}\right., \qquad \mu : \left[\begin{array}{c} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \\ z(t) = t \end{array}\right., \qquad \nu : \left[\begin{array}{c} x(t) = t \cos t \\ y(t) = t \sin t \end{array}\right. .$$

Posledním typem zobrazení, o kterém se chci zmínit, zahrnuje předchozí dva (tedy funkce více nezávisle proměnných a křivky) jako speciální případy: můžeme totiž uvažovat obecná zobrazení mezi eukleidovskými prostory $F\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$, kde $d, k \in \mathbb{N}$. Pak pochopitelně

$$F = \big(F_1, F_2, \ldots, F_k\big), \quad \text{kde} \quad F_i\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R},\ i = 1, 2, \ldots, k,$$

tj. $F$ lze chápat jednoduše jako $k$-tici funkcí (značíme je $F_i$), z nichž každá má stejných $d$ (nezávisle) proměnných. To znamená, že

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_d) = \big(F_1(x_1, x_2, \ldots, x_d), F_2(x_1, x_2, \ldots, x_d), \ldots, F_k(x_1, x_2, \ldots, x_d)\big) \in \mathbb{R}^k.$$

**3) Dále k značení a terminologii:**

- Běžné funkce typu z $\mathbb{R}^d$ do $\mathbb{R}$ značíme obvykle malými písmeny, typicky $f, g, h$ apod.
- Křivky obvykle značíme malými řeckými písmeny $\varphi$, $\psi$, $\sigma$, $\eta$ atd.
- Obecná zobrazení z $\mathbb{R}^d$ do $\mathbb{R}^k$ pro $d, k > 1$ značíváme velkými písmeny $F$, $G$, $H$ apod.

Eukleidovské prostory $\mathbb{R}^d$ chápeme současně jako vektorové prostory, takže jejich prvky můžeme označovat jako „body“ nebo jako „vektory“; tato slova pro nás tedy nesou stejný význam. I my se ale budeme pro jeden nebo druhý termín rozhodovat v závislosti na kontextu, přičemž platí, že často jedno slovo lépe vystihuje podstatu věci než druhé. Snad není potřeba moc podrobně vysvětlovat pojem bodu; příslušný vektor si pak představujeme jako šipku vycházející z počátku a končící právě v tom bodě. Často může být účelné představovat si vektory posunuté z počátku do jiných bodů prostoru, tato představa však pro nás bude čistě heuristická, bez zachycení v našem formalismu. Formálně vzato jest

$$\mathbb{R}^d := \big\{(x_1, x_2, \ldots, x_d)\colon\ x_1, x_2, \ldots, x_d \in \mathbb{R}\big\},$$

prvky jsou tedy prostě uspořádané $d$-tice reálných čísel.

Bude pro nás běžné používat *vektorový zápis*, tj. zapisovat vektory pomocí jediného (tučného) písmene, přičemž můžeme, ale nemusíme, toto písmeno opatřit šipkou běžně značící vektory třeba ve fyzice. Jsme tak oprávněni psát jak

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= (x_1, x_2, \ldots, x_d), \quad \text{tak i} \\ \vec{\boldsymbol{x}} &= (x_1, x_2, \ldots, x_d). \end{aligned}$$

Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^d$ můžeme pracovat s tzv. *kanonickou bází* sestávající z vektorů

$$\boldsymbol{e}^1 = (1, 0, 0, \ldots), \quad \boldsymbol{e}^2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \quad \ldots, \quad \boldsymbol{e}^d = (0, 0, \ldots, 0, 1).$$

Tedy $\boldsymbol{e}^i$ je vektor který má na všech pozicích 0 s výjimkou pozice $i$-té, kde má 1. Je známé (a zřejmé) že těchto $d$ vektorů tvoří bázi $\mathbb{R}^d$.

Pro $d = 2$ máme $\boldsymbol{e}^1 = (1, 0)$ a $\boldsymbol{e}^2 = (0, 1)$. Pokud jsme v dimenzi 3, tytéž symboly značí jiné vektory; z kontextu ale bude vždy jasné, o čem je řeč, a k omylu nedojde (samozřejmě má smysl uvažovat libovolné $d > 1$). Pro $d = 3$, neboli v $\mathbb{R}^3$, máme:

$$\boldsymbol{e}^1 = (1, 0, 0), \quad \boldsymbol{e}^2 = (0, 1, 0), \quad \boldsymbol{e}^3 = (0, 0, 1).$$

Rád bych uvedl ještě jednu poznámku formálního charakteru. Formálně vzato je rozdíl mezi $\mathbb{R}^{d+k}$ a $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^k$, ačkoliv prvky jedné i druhé množiny jsou určeny přesně $d + k$ reálnými čísly v pevném pořadí. Proč tomu tak je, se stane srozumitelnějším, připomeneme-li definici kartézského součinu: jsou-li $A$, $B$ libovolné množiny, pak

$$A \times B = \big\{(a, b) \colon\ a \in A, b \in B\big\},$$

kde symbolem $(a, b)$ rozumíme uspořádanou dvojici (prvků $a$ a $b$). Z této základní definice vyplývá, že

$$\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^k = \big\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \colon\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^k\big\} = \Big\{\big((x_1, x_2, \dots, x_d), (y_1, y_2, \dots, y_k)\big) \colon\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^k\Big\}.$$

Vidíme tedy, že prvky $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^k$ jsou tedy, alespoň striktně formálně vzato, *uspořádanými dvojicemi* (přičemž první složka vždy obsahuje nějakou $d$-tici a druhá složka nějakou $k$-tici reálných čísel). Nejde tedy o stejné objekty, jako jsou prvky množiny $\mathbb{R}^{d+k}$, což jsou uspořádané $(d + k)$-tice reálných čísel.

My ovšem učiníme úmluvu, že tento drobný rozdíl budeme zanedbávat, a příslušné objekty ztotožňovat. Neformálně řečeno u prvků $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^k$ budeme „ignorovat vnitřní závorky“ a uplatňovat tímto domluvenou rovnost

$$\big((x_1, x_2, \dots, x_d), (y_1, y_2, \dots, y_k)\big) = (x_1, x_2, \dots, x_d, y_1, y_2, \dots, y_k)$$

Podobná poznámka se týká také značení pro hodnotu funkce $f$ v bodě $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d)$; viz (1.1). Protože $\boldsymbol{x}$ ve své definici zahrnuje závorku sdružující jednotlivé složky do uspořádané $d$-tice, měli bychom tuto závorku opsat i při dosazení za $\boldsymbol{x}$, tj. psát

$$f(\boldsymbol{x}) = f\big((x_1, x_2, \dots, x_d)\big).$$

Je to formálně správné prostě proto, že striktně formálně vzato má funkce $f \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ jedinou proměnnou, a to $\boldsymbol{x}$, za které můžeme dosadit libovolný prvek $\mathbb{R}^d$. Tento pohled na věc ale není příliš praktický, je lepší funkci $f$ vnímat jako funkci s $d$ proměnnými, z nichž za každou smíme dosadit reálné číslo; tomu odpovídá zápis $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_d)$. Aby byla tato možná formální námitka uvedena na pravou míru, dohodněme se na definici

$$f(x_1, x_2, \dots x_d) := f\big((x_1, x_2, \dots, x_d)\big).$$

Jinými slovy jsme se domluvili, že i v tomto případě smíme a budeme „zanedbávat vnitřní závorky“.

**4) Definiční obor, graf a obor hodnot funkce:** Definiční obor často není a priori jasný a je potřeba se zamyslet, ve kterých bodech je funkce definována a ve kterých ne. Při formulaci obecného tvrzení však obvykle předpokládáme, že definiční obor je nám znám (už jsme ho určili). Skutečnost, že funkce $f$ je definována na nějaké podmnožině $U \subseteq \mathbb{R}^d$ budeme zapisovat takto:

$$f : U \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}.$$

Tento zápis tedy neznamená, že by funkce $f$ byla definována na celém $\mathbb{R}^d$; místo toho máme na mysli, že $\mathbb{D}_f = U$ a $U \subseteq \mathbb{R}^d$. Pochopitelně máme také možnost definiční obor označit jiným písmenkem, například $f : G \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ apod.

Chceme-li specifikovat pouze počet proměnných funkce a nikoliv definiční obor, můžeme také použít termín *reálná funkce d proměnných* pro libovolnou funkci $f$ z $\mathbb{R}^d$ do $\mathbb{R}$.[2]

Mějme funkci $f$ z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}$; připomeňme, že použití předložek „z“, resp. „do“, znamená, že $\mathbb{D}_f \subseteq \mathbb{R}^2$, resp. $\mathbb{H}_f \subseteq \mathbb{R}$. V tomto případě je tedy definiční obor podmnožina roviny, a spotřebujeme tedy obě dimenze běžného papíru či tabule jen na to, abychom načrtli samotný definiční obor, *nikoliv graf*. Zatímco v prvním semestru, kdy jsme probírali funkce jediné proměnné, jsme si k nakreslení grafu vystačili s obrázky dimenze 2, nyní bychom k načrtnutí grafu potřebovali dimenzi 3 (pro funkci 2 proměnných).

Připomeňme si nyní definici grafu funkce:

$$\mathbb{G}_f = \operatorname{graf}(f) := \big\{(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x}))\colon \boldsymbol{x} \in \mathbb{D}_f\big\}.$$

Je dobré si všimnout, že tato definice funguje jak pro případ funkce jediné proměnné, tak i pro funkce, které mají proměnných více; jediný rozdíl je v tom, že v prvním případě chápeme $\boldsymbol{x}$ jako proměnnou zastupující jediné číslo, zatímco v případě, že $f$ má $d$-proměnných, je nutno $\boldsymbol{x}$ chápat jako $d$-tici reálných čísel, jde tedy o vektorový zápis. Budeme-li chtít vektorový zápis rozepsat podrobně po složkách, pro funkci $f : U \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ dostaneme

$$\mathbb{G}_f = \big\{(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x}))\colon \boldsymbol{x} \in \mathbb{D}_f\big\} = \Big\{\big(x_1, x_2, \dots, x_d, f(x_1, x_2, \dots, x_d)\big)\colon \boldsymbol{x} \in \mathbb{D}_f\Big\}.$$

Všimněte si, že $\big(x_1, x_2, \dots, x_d, f(x_1, x_2, \dots, x_d)\big)$ je uspořádaná $(d+1)$-tice reálných čísel, takže jde o element $\mathbb{R}^{d+1}$. Vidíme tedy, že pro libovolné $d \in \mathbb{N}$, graf funkce $d$ proměnných je podmnožina $\mathbb{R}^{d+1}$, tj. prostoru dimenze o jedničku větší, než je počet proměnných.

Právě z toho důvodu je těžké kreslit grafy funkcí více proměnných; v případě pouhých dvou proměnných nám pomůže počítač, který vykreslí velmi hezké projekce takových grafů na dvojrozměrnou plochu (například monitor), v případě většího počtu proměnných si však musíme pomáhat různými jinými znázorněními, které nám pomáhají věc pochopit „po částech“. Naštěstí ale praxe ukazuje, že velkou část (početních) metod souvisejících s funkcemi více proměnných stačí pořádně pochopit pro nižší dimenzi (v níž se můžeme opřít o spolehlivou geometrickou intuici) a pak je lze úspěšně aplikovat analogicky i v případech, kdy už naše geometrické chápání selhává.

[2]Připomínám standardní terminologii, podle níž při použití spojky „z“ nemíníme tvrdit, že by funkce byla definována na celém $\mathbb{R}^d$; myslí se tím přesně to, že $\mathbb{D}_f \subseteq \mathbb{R}^d$. (Podobně spojka „do“ značí, že $\mathbb{H}_f \subseteq \mathbb{R}$; neznamená totéž co spojka „na“, kterou je míněna rovnost, tj. $\mathbb{H}_f = \mathbb{R}$.)

Poslední poznámka se týká oboru hodnot. Můžeme opět použít definici z prvního semestru:

$$\mathbb{H}_f := \big\{ f(\boldsymbol{x})\colon\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{D}_f \big\}.$$

I zde můžeme „$\boldsymbol{x}$“ chápat jako číslo nebo jako vektor v $\mathbb{R}^d$ podle toho, jestli $f$ má jednu proměnnou, nebo víc. V každém případě však platí, že $f(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$, neboť uvažujeme funkce, které jsou „do $\mathbb{R}$“. Je tedy $\mathbb{H}_f \subseteq \mathbb{R}$.

Podíváme-li se na obecnější situaci zobrazení $F\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$, pak ovšem $\mathbb{H}_F \subseteq \mathbb{R}^k$.

**5) Způsoby zadání křivek:** Smyslem tohoto úvodu je i navození určitých představ a podpoření vaší intuice ve vyšší dimenzi. K tomu nám poslouží i porovnání různých způsobů zadání „křivek“. Slovo „křivka“ přitom dávám do uvozovek, protože a priori není jasné, co bychom jím měli nebo chtěli rozumět; možných pojetí je celá řada a i dnes, kdy už má matematika za sebou spoustu slepých uliček a v mnoha směrech našla optimální přístupy, existují různé (rozumné a obhajitelné) definice pojmu křivky. Tři základní přístupy, které si představíme, souvisí se způsobem zadání.

(a) *Parametrické* zadání křivky: Křivku v $\mathbb{R}^d$ chápeme prostě jako $d$-tici funkcí (viz výše), tj. prostě, křivka je zobrazení $\varphi\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ (kde $I \subseteq \mathbb{R}$ je nějaký interval) a

$$\varphi(t) = \big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_d(t)\big) \in \mathbb{R}^d, \quad t \in I.$$

Obecně není potřeba, aby interval $I$ byl roven $\mathbb{R}$, ale tuto možnost nevylučujeme. Terminologie ale kolísá ve věci požadavků, které je potřeba naložit na jednotlivé složky $\varphi_i$ ($i = 1, 2, \ldots d$). Obvykle se nicméně požaduje přinejmenším jejich spojitost, což garantuje, že trajektorie takové křivky bude „souvislá množina“, tj. nebude se skládat ze dvou nebo více „oddělených“ částí. Často se ale (z dobrých důvodů) požaduje splnění silnějších předpokladů, například $\varphi_i \in C^1(I)$, $i = 1, 2, \ldots, d$ apod.

(b) *Implicitní* zadání křivky: Křivku chápeme jako množinu bodů v prostoru $\mathbb{R}^d$, které splňují vhodné rovnice. Obecně pro křivku v $\mathbb{R}^d$ je typicky potřeba $d - 1$ rovnic tvaru

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_d) &= 0, \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_d) &= 0, \\ &\cdots \\ f_{d-1}(x_1, x_2, \ldots, x_d) &= 0. \end{aligned}$$

To je velmi obecný popis, ke kterému by navíc bylo potřeba přidat dodatečné předpoklady, aby bylo zajištěno, že množina bodů splňujících tuto soustavu rovnic skutečně „vypadá“ jako to, co si představujeme pod pojmem „křivka“.

Možná lépe pochopitelné budou konkrétní příklady. Pro $d = 2$ je podle výše uvedeného potřeba zadat jedinou rovnici. Například

$$3x + 2y = -2 \qquad \text{nebo} \qquad x^2 + y^2 = 4.$$

První rovnice je, jak známo už na SŠ, rovnicí přímky v rovině. Snadno lze z této rovnice vyjádřit $y = -\frac{1}{2}(3x + 2)$, a dostat tak onu přímku jako graf této lineární funkce. Druhá rovnice je také známá už na SŠ, popisuje kružnici se středem v počátku a poloměrem 2.[3]

Příklad pro $d = 3$ vyžaduje, abychom zadali $d - 1 = 2$ rovnice. Mějme následující dvě (lineárně nezávislé) lineární rovnice:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0, \\ 3x - 4y - z &= 5. \end{aligned}$$

Jak známo, jde o obecné rovnice roviny v prostoru $\mathbb{R}^3$. Pokud tyto roviny nejsou rovnoběžné (to tyto nejsou), je jejich průnikem nějaká přímka v prostoru, která je množinou právě všech bodů $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ splňujících danou soustavu. Skutečně tedy tyto dvě rovnice určují nějakou „křivku", v tomto případě přímku.[4]

Další příklad je následující soustava, která také dává dobře představitelný výsledek:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 9. \end{aligned}$$

První rovnice odpovídá rovině s normálovým vektorem $(1, 1, 1)$ procházející počátkem $\mathbb{R}^3$, druhá rovnice odpovídá sféře (povrchu koule) se středem v počátku a poloměrem 3. Průnik těchto dvou ploch je samozřejmě kružnice. Sami si představte, jak tato kružnice vypadá a jak je umístěna v prostoru.

Z uvedených příkladů se dá vytušit, že každá jednotlivá rovnice sama o sobě typicky určuje množinu dimenze $d - 1$, tj. o 1 menší než dimenze celého prostoru. Soustavu rovnic pak řeší body ležící v průniku těchto množin příslušných rovnicím v soustavě, přičemž mám-li 2 takové množiny (tj. soustava má 2 rovnice), lze očekávat dimenzi průniku $d-2$, pro průnik 3 takových množin (tj. pro 3 rovnice) čekáme dimenzi $d - 3$ atd. Zadáním každé další rovnice dimenze řešení klesá o 1. Ze systému bodů, které naši soustavu splňují, se zadáním každé další rovnice ztrácí další „stupeň volnosti", tj. dimenze klesá. Je tak přirozené, že k zadání křivky (tedy objektu dimenze 1) v $\mathbb{R}^5$ jsou typicky potřeba 4 rovnice a podobně.[5]

[3] To si lze snadno rozmyslet pomocí Pýthagorovy věty, protože podle ní výraz $\sqrt{x^2 + y^2}$ odpovídá vzdálenosti bodu $(x, y)$ od počátku. Tedy $x^2 + y^2$ je druhá mocnina vzdálenosti od počátku, a ta je podle naší rovnice 4.

[4] Přímku považujeme za speciální případ křivky.

[5] Úvahy o dimenzi řešení soustavy rovnic platí v „rozumných případech". Z toho se vymyká například situace,

Podstatný rozdíl oproti parametrickému zadání křivky mj. je, že a priori nemusí být žádný „časový průběh" křivkou; není žádný parametr $t \in I$ (čas), jehož každé hodnotě by odpovídal nějaký bod křivky.

(c) *Explicitní* zadání křivky: Křivku lze zadat také prostě jako graf funkce $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Takto samozřejmě dostaneme pouze některé křivky v $\mathbb{R}^2$. Je-li $g : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, tj. $g$ je funkce dvou proměnných, pak graf $g$ je nějaká plocha v $\mathbb{R}^3$ (nikoliv křivka).

**1.1 Příklad** (Přímka)**.** Pojďme v rychlosti porovnat různé způsoby zadání přímky. *Parametrické* zadání přímky v $\mathbb{R}^d$ se může pohodlně zapsat ve vektorovém tvaru takto:

$$p\colon\ t \mapsto \boldsymbol{a} + t \cdot \vec{\boldsymbol{v}},$$

kde $t$ je parametr probíhající $\mathbb{R}$, $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_d) \in \mathbb{R}^d$ je libovolný „výchozí" bod (prostě nějaký bod na té přímce) a $\vec{\boldsymbol{v}} = (v_1, v_2, \ldots, v_d) \in \mathbb{R}^d$ je směrový vektor. Tutéž přímku tak můžeme zapsat také po složkách:

$$p(t) = \big(a_1 + tv_1, a_2 + tv_2, \ldots, a_d + tv_d\big).$$

Oba zápisy jsou zjevně ekvivalentní a samozřejmě oba fungují tak, že každé hodnotě parametru $t$ (tj. nějakému „bodu v čase") přiřadí jistý bod přímky, přičemž času $t = 0$ odpovídá přímo bod $\boldsymbol{a}$, neboli $p(0) = \boldsymbol{a}$, jak je ihned patrné z předpisů. Další body přímky se od $\boldsymbol{a}$ liší o různé násobky směrového vektoru.

Pokud bychom nyní chtěli tutéž přímku vyjádřit *implicitně*, museli bychom najít $d - 1$ vektorů kolmých na $\vec{\boldsymbol{v}}$, které společně s $\vec{\boldsymbol{v}}$ tvoří bázi $\mathbb{R}^d$ (tj. jinak řečeno, tyto vektory chceme mít lineárně nezávislé). Jim potom už snadno přiřadíme obecné rovnice nadrovin v $\mathbb{R}^d$, jejichž průnikem je naše přímka.

Podívejme se na konkrétní případ pro $d = 3$; uvažujme třeba přímku

$$p\colon\ t \mapsto (1, 1, -1) + t \cdot (-2, 1, 0),$$

tj. výchozí bod je $\boldsymbol{a} = (1, 1, -1)$ a směrový vektor je $\vec{\boldsymbol{v}} = (-2, 1, 0)$. Je zřejmé, že $\vec{\boldsymbol{u}} = (0, 0, 1)$ a $\vec{\boldsymbol{w}} = (1, 2, 0)$ jsou kolmé na $\vec{\boldsymbol{v}}$, a věřím, že byste tyto vektory snadno sami vymysleli.[6]

kdy máme 3 (lineární) rovnice rovin v $\mathbb{R}^3$, které nejsou lineárně nezávislé. V ten moment řešení není jednoznačně určeno, a dimenze řešení je větší než $d - 3 = 3 - 3 = 0$. Konkrétněji, pokud zadám jednu (netriviální) lineární rovnici a další dvě z ní odvodím tak, že vezmu dvojnásobek a trojnásobek té první, je jasné, že soustava všech tří těchto rovnic nese stejnou informaci, jako samotná první rovnice. Dimenze řešení tak bude $d - 1 = 3 - 1 = 2$. Přesněji se touto problematikou zabývat nebudeme.

[6] V případě, že by všechny složky $\vec{\boldsymbol{v}}$ byly nenulové, situace by byla malinko složitější, i tak byste si ale snadno poradili pomocí rovnice $v_1x + v_2y + v_3z = 0$. Její řešení jsou právě všechny vektory $\vec{\boldsymbol{u}} = (x, y, z)$, pro které $\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}} = 0$ (skalární součin), tj. právě všechny vektory splňující $\vec{\boldsymbol{u}} \perp \vec{\boldsymbol{v}}$ (kolmé na $\vec{\boldsymbol{v}}$). Snadno byste mezi nimi vybrali dva lineárně nezávislé.

Hledané rovnice rovin, jejichž průnikem je $\langle p \rangle$, jsou tedy tvaru

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{u}} \cdot (x, y, z) &= A, \\ \vec{\boldsymbol{w}} \cdot (x, y, z) &= B, \end{aligned}$$

Kde „·“ značí v tomto případě skalární součin vektorů.[7] To jest, jde o rovnice

$$\begin{aligned} z &= A, \\ x + 2y &= B \end{aligned}$$

a zbývá najít hodnoty „neurčitých koeficientů“ $A$, $B$. To provedeme dosazením některého známého bodu $p$. Obecně lze použít kterýkoliv bod (třeba ten, který odpovídá hodnotě $t = 729$), ale nejpřirozenější je pochopitelně použít přímo bod $\boldsymbol{a} = (1, 1, -1)$; dosaďme ho tedy do obou rovnic. Dostaneme $A = -1$ a $B = 3$. Implicitní vyjádření přímky $p$ je tedy následující soustava lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} z &= -1 \\ x + 2y &= 3 \end{aligned}$$

Kdybychom se o tom chtěli přesvědčit „zkouškou“, není nic jednoduššího než dosadit dva různé body přímky $p$, třeba pro hodnoty parametru $t = 0$ a $t = 7$, do těchto rovnic a ověřit, že jsou splněny. Pro $t = 0$ je to zřejmé přímo z výpočtu, podívejme se tedy na $t = 7$. Jest $p(7) = (1, 1, -1) + 7 \cdot (-2, 1, 0) = (-13, 8, -1)$. Dosazením vidíme, že skutečně obě rovnice v tomto bodě platí. Ony dvě rovnice tedy popisují nějakou přímku, která má nejméně dva body společné s přímkou $p$, a jedná se tedy skutečně o jednu a tu samou přímku.

Pochopitelně se může stát, že máme dáno implicitní vyjádření přímky a naším cílem je najít nějaké její vyjádření parametrické. Nebudu zde podrobně rozebírat příklad na přechod mezi oběma vyjádřeními v tomto směru, pouze podotknu, že v lineární algebře jste se tomu nemohli vyhnout, neboť řešení soustavy dvou lineárně nezávislých rovnic se třemi neznámými přirozeně obsahuje jeden parametr a letmý pohled prozradí, že jde de facto o parametrické vyjádření přímky. $\triangle$

**1.2 Příklad** (Kružnice)**.** Zmíním se ještě stručně o případu kružnice v $\mathbb{R}^2$. Uvažujme kružnici zadanou parametricky

$$k: \left[ \begin{aligned} x(t) &= \cos t \\ y(t) &= \sin t \end{aligned} \right.$$

Protože $\sin^2 + \cos^2 \equiv 1$, je $x^2(t) + y^2(t) = 1$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$. Jinak řečeno všechny body

[7] Později budeme z praktických důvodů používat pro skalární vektorů $\vec{\boldsymbol{u}}$ a $\vec{\boldsymbol{v}}$ symbol $\langle \vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}} \rangle$, přičemž už nebudeme používat šipek pro označení vektorů. V tuto chvíli si vystačíme s označením skalárního součinu pomocí tečky.

$k(t) = (\cos t, \sin t) \in \mathbb{R}^2$ splňují (implicitní) rovnici kružnice

$$x^2 + y^2 = 1. \tag{1.2}$$

*Explicitní* vyjádření celé kružnice pomocí jediné funkce není možné, protože kružnice není grafem žádné funkce (existují totiž svislé přímky, které tato křivka protíná ve dvou různých bodech). Můžeme ale explicitně vyjádřit „horní“ a „dolní“ půlkružnici tak, že prostě vyřešíme implicitní rovnici pro neznámou $y$ (a „parametr“ $x$); dostaneme

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2}.$$

Použijeme-li znaménko „+“, jde o kladnou funkci, a její graf je horní půlkružnice; znaménku „−“ odpovídá dolní půlkružnice.

Je možná dobré si všimnout, že v rovnici (1.2) není a priori žádný rozdíl mezi „rolemi“ proměnných $x$ a $y$. Analogicky jako výše $y$ bychom tedy z této rovnice mohli vyjádřit $x$, a dostat tak

$$x = \pm\sqrt{1 - y^2},$$

kde znaménku „+“ odpovídá pravá půlkružnice a znaménku „−“ levá půlkružnice. △

**1.3 Příklad** (Hyperbola)**.** Další známá rovnice křivky v rovině je

$$x^2 - y^2 = 1, \tag{1.3}$$

přičemž mnoha lidem je známo, že se jedná o rovnici hyperboly v rovině, jejíž asymptoty jsou přímky $y = x$ a $y = -x$ a která má levou a pravou větev (nikoliv horní a dolní), jak si lze snadno rozmyslet například dosazením $x = 0$: je vidět, že rovnice pak nemá řešení, křivka tedy neprotíná osu $y$ (ta má rovnici $x = 0$).

Co je možná méně známé, je skutečnost, že tuto křivku lze elegantně parametrizovat pomocí tzv. hyperbolických funkcí, zejména *hyperbolický sinus* a *hyperbolický kosinus*. S těmi už jsme se letmo setkali například při výpočtech primitivních funkcí, pro jistotu ale jejich definice zopakuji:

$$\operatorname{ch} x = \cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{sh} x = \sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Lze si všimnout, že $\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x$, přičemž ch je sudá a sh je lichá; někdy se proto říká, že ch je sudá část exponenciály a sh je lichá část exponenciály. Jednoduchý výpočet také prozradí, že

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{2+2}{4} = 1,$$

tj. $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$. Položíme-li tedy

$$\varphi\colon \left[\begin{array}{l} x(t) = \operatorname{ch} t \\ y(t) = \operatorname{sh} t \end{array}\right.,$$

pak $\varphi(t) = (x(t), y(t))$ splňuje rovnici hyperboly (1.3) pro všechna $t \in \mathbb{R}$. Po zamyšlení je patrné, že $x(t) > 0$ pro všechna $t$, a $\varphi$ je tedy parametrizace pouze pravé větve hyperboly. Levou větev lze parametrizovat jako $\psi(t) = (-\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t)$. $\triangle$

**6) Skládání funkcí více proměnných:** Mějme dvě obecná zobrazení mezi eukleidovskými prostory dimenzí $k, l, m, n \in \mathbb{N}$

$$F\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l, \quad G\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n.$$

Jedná se o velmi obecnou situaci, která zahrnuje všechny námi uvažované případy. Kdy je možné obě zobrazení složit? Jsou dvě možná pořadí skládání: $F \circ G$ a $G \circ F$; podívejme se na první možnost. Zobrazení $F \circ G$ (pokud existuje, čili toto složení je možné) funguje tak, že bodu $\boldsymbol{x}$ z definičního oboru $G$ přiřadí

$$F \circ G(\boldsymbol{x}) = F(G(\boldsymbol{x})).$$

Tj. nejprve najdeme obraz $\boldsymbol{x}$ při $G$, a ten pak opět zobrazíme pomocí $F$. Poněkud neformálně, ale přehledně, to můžeme znázornit takto:

$$F \circ G\colon x \overset{G}{\mapsto} G(\boldsymbol{x}) \overset{F}{\mapsto} F(G(\boldsymbol{x}))$$
$$F \circ G\colon \mathbb{R}^m \overset{G}{\to} \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \overset{F}{\to} \mathbb{R}^l.$$

Z druhého řádku je jasně patrné, co musí být splněno, aby složení $F \circ G$ dávalo smysl: je k tomu potřeba $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k$, neboli musí platit $n = k$: dimenze cílového prostoru prvního zobrazení (tj. $G$) musí být rovna dimenzi výchozího prostoru druhého zobrazení (tj. $F$).

Nyní by mělo být jasné, že k tomu, aby dávalo smysl složení obou zobrazení v opačném pořadí $G \circ F$, je nutné, aby $l = m$.

Uvažujme nyní speciální případ vyložené obecné situace, kdy vnitřní zobrazení bude křivka a vnější zobrazení bude funkce:

- vnitřní křivka $\varphi\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$;
- vnější funkce $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$.

Jak si lze představit složení $f \circ \varphi$? Zkusme to na konkrétním případě, kdy $f = V_{\text{ČR}}$ je funkce popisující závislost nadmořské výšky na území České republiky na souřadnicích vyjádřených pomocí zeměpisné délky (proměnná $x$) a šířky (proměnná $y$). Například souřadnice Karlínské budovy MFF (Sokolovská 83) jsou zhruba $x = 14,4505°$ (východní délky) a $x = 50.0939°$ (severní šířky), přičemž nadmořská výška hlavního vchodu je 186 metrů. Je tedy (desetinnou čárku zde ze zřejmého důvodu výjimečně značím tečkou):

$$V_{\text{ČR}}(14.4505,\ 50.0939) = 186 \quad \text{a podobně například}$$
$$V_{\text{ČR}}(15.7396,\ 50.7359) = 1603 \quad \text{(vrchol Sněžky).}$$

Funkci $V_{\text{ČR}}$ můžeme složit s křivkou $\varphi\colon [8{:}00, 17{:}00] \to \mathbb{R}^2$, která reprezentuje časový průběh našeho výletu, který začal v 8 hodin ráno a skončil v 5 odpoledne. Představme si, že šlo o výlet z Pece pod Sněžkou na Sněžku, jejíhož vrcholu jsme dosáhli ve 13:00. Pak platí

$$\varphi(8{:}00) = \text{„souřadnice v Peci p. S.“} \quad \text{a} \quad V_{\text{ČR}}\big(\varphi(8{:}00)\big) = 769$$
$$\varphi(13{:}00) = (15.7396,\ 50.7359) \quad \text{a} \quad V_{\text{ČR}}\big(\varphi(13{:}00)\big) = 1603.$$

Na tomto příkladě je snad jasně patrné, že $V_{\text{ČR}} \circ \varphi$ je funkce jediné proměnné (času, který je v tomto případě v intervalu [8:00, 17:00]), která udává závislost nadmořské výšky na čase v průběhu našeho výletu. Jinak řečeno dosazením času $t$ dostaneme nadmořskou výšku $V_{\text{ČR}}\big(\varphi(t)\big)$ toho místa, na kterém jsme se v čase $t$ nacházeli.

**1.4 Příklad.** Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je dána předpisem $f(x, y) = xy$ a množina $M \subseteq \mathbb{R}^2$ je definována jako $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon\ x^2 + y^2 = 4\}$. Najděte extrémy funkce $f$ vzhledem k množině $M$.

*Řešení.* Teorii k extrémům funkce vzhledem k množině probereme později (Oddíl 1.7). V tuto chvíli si představme, že definiční obor funkce $f$ omezíme pouze na $M$, tj. uvažujeme restrikci $f|_M$, a následně hledáme extrémy pouze této restrikce. Jinými slovy nás zajímají největší a nejmenší hodnoty, kterých $f$ nabývá na množině $M$.

Víme, že $M$ je kružnice se středem v počátku a poloměrem 2; jde tedy o jistou křivku. Lze si snadno představit, že $M$ představuje trajektorii našeho výletu v jisté bizarní krajině, kde nadmořská výška v bodě $(x, y)$ je dána jednoduchým vzorcem $x \cdot y$. Chceme určit nejvyšší a nejnižší body takového výletu.

Oproti předchozím úvahám s výletem na Sněžku, při kterých jsme měli k dispozici přesný časový průběh našeho výletu $\varphi$, neboli vlastně *parametrizaci* té křivky (výletu), nyní máme křivku $M$ zadánu *implicitně*. Nic nám ovšem nebrání použít geometrického názoru a přejít od implicitního vyjádření k parametrickému:

$$\varphi\colon \left[\begin{array}{l} x(t) = 2\cos t \\ y(t) = 2\sin t \end{array}\right. , \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Je zřejmé, že $\varphi\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ je parametrizací kružnice se středem v počátku a poloměrem 2; tj. ovšem přesně množina $M$. Jinak řečeno $\langle\varphi\rangle = M$.

Uvažujme nyní funkci $g := f \circ \varphi$, tj. pro $t \in [0, 2\pi]$ jest $g(t) = f(\varphi(t))$ hodnota funkce $f$ v bodě $\varphi(t)$ naší kružnice. Pokud bychom $\varphi$ chápali jako časový průběh našeho výletu po kružnici $M$ (který probíhá „v krajině $f$“), pak $g$ zřejmě popisuje závislost naší nadmořské výšky na čase. Doufám, že tak není úplně neviditelné, že nám v podstatě stačí určit extrémy $g$ (a pak tyto výsledky správně interpretovat).

Pojďme se tedy podívat na funkci $g$ konkrétně; jest

$$g(t) = f\big(\varphi(t)\big) = f(2\cos t, 2\sin t) = 2\cos t \cdot 2\sin t = 4\cos t \sin t = 2\sin 2t.$$

Hledáme tedy extrémy funkce $g(t) = 4\cos t \sin t$ na intervalu $[0, 2\pi]$, což je úloha na metody prvního semestru. Jest

$$g'(t) = (2\sin 2t)' = 4\cos 2t.$$

Tedy $g'(t) = 0$, právě když $\cos 2t = 0$, což je (pro $t \in [0, 2\pi]$ čili $2t \in [0, 4\pi]$) ekvivalentní

$$\begin{aligned} 2t &\in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right\}, \qquad \text{neboli} \\ t &\in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}, \end{aligned}$$

jak je snadno vidět třeba z grafu funkce cos. Máme tedy stacionární body funkce $g$ na $[0, 2\pi]$. Mezi body „podezřelé z extrému“ bychom striktně vzato měli zahrnout ještě krajní body definičního oboru, tedy 0 a $2\pi$.[8] Uvedené hodnoty $t$ odpovídají následujícím bodům $\varphi(t) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} &\varphi(0) = (2, 0), &&\varphi\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right), &&\varphi\left(\tfrac{3\pi}{4}\right) = \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right), \\ &\varphi(2\pi) = (2, 0), &&\varphi\left(\tfrac{5\pi}{4}\right) = \left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right), &&\varphi\left(\tfrac{7\pi}{4}\right) = \left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right). \end{aligned}$$

Nyní ihned vidíme, že např. $f\Big(\varphi\big(\tfrac{3\pi}{4}\big)\Big) = f\big(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\big) = \big(-\sqrt{2}\big) \cdot \sqrt{2} = -2$ atd. Je tedy vidět, že $f$ nabývá na množině $M$ maxima s hodnotou 2 v bodech $\big(\sqrt{2}, \sqrt{2}\big)$ a $\big(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\big)$. Dále nabývá minima s hodnotou $-2$ v bodech $\big(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\big)$ a $\big(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\big)$.

Než tento příklad docela opustím, chci vás ještě upozornit na další přirozený způsob řešení, který ovšem pouze naznačím a detailní výpočet si můžete provést samostatně. Kromě parametrického vyjádření kružnice $M$ totiž můžeme využít i vyjádření explicitního, tj. množinu $M$ popsat jako sjednocení grafů (dvou) funkcí:

$$k_1(x) = \sqrt{4 - x^2} \quad \text{a} \quad k_2(x) = -\sqrt{4 - x^2}.$$

Zaměřme se nejprve na $k_1$, analogické kroky lze později provést i pro druhou funkci. Je důležité si všimnout, že do funkce $f$, která má dvě proměnné, nemůžeme dosazovat přímo *hodnoty*

[8] Z periodicity $g$ je ovšem celkem snadno vidět, že o body extrému nejde. Tato úvaha je však asi přece jen složitější, než prostě 0 a $2\pi$ do funkce $g$ dosadit, a přesvědčit se tak nade vší pochybnost, že se v nich extrémních hodnot nenabývá.

funkce $k_1$, protože to jsou reálná čísla, nikoliv body v rovině. Nás zajímají extrémy funkce $f$ na kružnici $M$, musíme tedy do $f$ dosazovat body této kružnice – tj. body *grafu* funkce $k_1$. Ovšem graf funkce $k_1$ je

$$\mathbb{G}_{k_1} = \big\{(x, k_1(x)) \colon\ x \in [-2, 2]\big\}.$$

Do funkce $f$ tedy dosazujeme body tvaru $(x, k_1(x))$; tím vznikne funkce jediné proměnné $x$ a my opět můžeme metodami 1. semestru vyšetřit její extrémy:

$$g_1(x) := f\big((x, k_1(x)\big) = f(x, k_1(x)) = f\big(x, \sqrt{4 - x^2}\big) = x \cdot \sqrt{4 - x^2}.$$

Zbytek řešení zvládnete sami, jen nezapomeňte na dolní půlkružnici. △

**7) Parciální funkce:** Výše jsme skládali funkci $f \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ s křivkou $\varphi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$. Při řešení Příkladu 1.4, kde jsme měli $f(x, y) = xy$ a $\varphi$ byla parametrizace kružnice, jsme pak složenou funkci $f \circ \varphi$ derivovali, abychom našli extrémy její, a tedy i extrémy funkce $f$ na oné kružnici.

Nyní se zaměříme na (ještě jednodušší) případ, kdy do nějaké funkce $f$ dosadíme parametricky zadanou přímku $\varphi$. Není těžké si uvědomit, co tím dostaneme: trajektorie křivky $\varphi$, tj. množina $\langle\varphi\rangle$, je prostě nějaká přímka v definičním oboru $f$ a my si v podstatě můžeme představovat, že funkci $f$ restringujeme (uměle omezíme definiční obor) na tuto přímku (tj. body $\mathbb{D}_f$ ležící mimo $\langle\varphi\rangle$ přestaneme vnímat).

Mějme tedy parametricky zadanou přímku $\varphi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ definovanou takto:

$$\varphi \colon t \mapsto \boldsymbol{a} + t \cdot \vec{\boldsymbol{v}},$$

kde $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^d$ je výchozí bod a $\vec{\boldsymbol{v}} = (v_1, v_2, \dots, v_d) \in \mathbb{R}^d$ je směrový vektor přímky. Zápis téže křivky $\varphi$ „po složkách“ je

$$\varphi(t) = \big(\underbrace{a_1 + t \cdot v_1}_{\text{1. složka } \varphi},\ \underbrace{a_2 + t \cdot v_2}_{\text{2. složka } \varphi},\ \dots,\ \underbrace{a_d + t \cdot v_d}_{d\text{-tá složka } \varphi}\big)$$

Toto je obecná situace, my se ovšem zaměříme pouze na speciální případ, kdy vektor $\vec{\boldsymbol{v}}$ je rovnoběžný s některou souřadnicovou osou. V případě, že $\vec{\boldsymbol{v}} = (1, 0, 0, \dots, 0)$, tj. $\vec{\boldsymbol{v}}$ je první vektor kanonické báze $\mathbb{R}^d$, vypadá zobrazení $\varphi$ takto (a my ho označíme $\varphi^1$):

$$\varphi^1(t) := \varphi(t) = \big(\underbrace{a_1 + t}_{\text{nekonst. složka } \varphi},\ a_2,\ a_3,\ \dots,\ a_d\big)$$

Pokud $\vec{\boldsymbol{v}} = (0, 1, 0, \dots, 0)$ (tj. druhý vektor kanonické báze), pak

$$\varphi^2(t) := \varphi(t) = \big(a_1,\ \underbrace{a_2 + t}_{\text{nekonst. složka } \varphi},\ a_3,\ \dots,\ a_d\big)$$

a tak dále; podobně definujeme $\varphi^i$ pro všechna $i = 1, 2, \ldots, d$, tj. $\varphi^i$ odpovídá $i$-tému vektoru kanonické báze $\mathbb{R}^d$.

Jak vypadá složení $f \circ \varphi^i$? Protože $\varphi^i$ umíme rozepsat po složkách, není nic jednoduššího než dosadit:

$$f_i(t) := f\big(\varphi^i(t)\big) = f\big(a_1, \ldots, a_{i-1},\ a_i + t,\ a_{i+1}, \ldots, a_d\big). \tag{1.4}$$

To je ovšem funkce jediné proměnné $t \in \mathbb{R}$. Ano, do funkce $f$ je sice potřeba dosadit celkem $d$ hodnot, všechny až na jednu (a to tu $i$-tou) jsou ale zafixovány na pevné hodnotě ($j$-tá pozice je obsazena pevným číslem $a_j$ pro $j \neq i$). Jediná proměnná je nicméně $t$.

**1.5 Definice** (Parciální funkce)**.** Je-li $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^d$ a $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$, pak funkci $f_i$ definovanou rovnicí (1.4) nazýváme *$i$-tou parciální funkcí funkce $f$ v bodě $\boldsymbol{a}$*.

**1.6 Poznámka.** (a) Původní $f$ je funkce $d$ proměnných, ovšem libovolná parciální funkce má proměnnou jednu.

(b) Parciální funkce $f_i$ závisí (kromě proměnné $t$) také na volbě parametrů $a_i$ pro $i = 1, 2, \ldots, d$, tj. má $d$ parametrů, jejichž jinou volbou můžeme dostat jinou parciální funkci (byť v „tomtéž směru“). Z výše uvedeného by mělo být jasné, že parciální funkci uvažujeme vzhledem k jisté přímce, která má výchozí bod $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_d)$ a je rovnoběžná s některou souřadnicovou osou. Je jasné, že když budeme uvažovat jiný výchozí bod, můžeme dostat jinou parciální funkci.

(c) Z důvodu předchozí poznámky značení $f_i$ není příliš přesné, protože obsahuje informaci pouze o směru, ve kterém se z nějakého výchozího bodu vydáme (totiž rovnoběžně s $i$-tou souřadnicovou osou), ale neobsahuje informaci o tomto výchozím bodě. Tento nedostatek se dá snadno odstranit zavedením značení

$$f_i^{(a_1,a_2,\ldots,a_d)} = f_i^{\boldsymbol{a}} := f_i, \qquad \text{pokud } f_i \text{ odpovídá volbě parametrů } (a_1, a_2, \ldots, a_d).$$

Toto značení je však poněkud krkolomné a nebudeme jej používat; místo toho se vždy ujistíme, že jsou jasně stanoveny hodnoty parametrů $a_i$, takže nehrozí nedorozumění.[9]

Derivováním parciálních funkcí podle nám dávno známých pravidel derivování funkcí jediné proměnné dostáváme *parciální derivace* původní funkce. Parciální derivaci $f$ podle $i$-té proměnné definujeme jako derivaci $i$-té parciální funkce $f_i$; není snad příliš těžké nahlédnout, že popisuje rychlost růstu $f$ na přímce $\langle \varphi^i \rangle$ ve směru $i$-té souřadnicové osy. Všimněte si ještě, že $\varphi^i(0) = \boldsymbol{a} + 0 \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{a}$, takže $f\big(\varphi^i(0)\big) = f(\boldsymbol{a})$. Pokud tedy derivuji $f \circ \varphi^i$ v bodě $t = 0$, odpovídá to rychlosti růstu funkce $f$ v bodě $\boldsymbol{a}$ (ve směru $i$-té osy). Parciální derivace jsou tématem pro následující oddíl.

[9] Podobná poznámka o nejednoznačnosti značení se vztahuje i na přímky $\varphi^i$: k jejich plnému určení nestačí znát směr (ten je dán indexem souřadnicové osy, se kterou je přímka rovnoběžná), i zde je potřeba určit výchozí bod.

## 1.2 Parciální derivace

Připomínám, že pojmem *reálná funkce* $d$ *(reálných) proměnných* máme na mysli funkci z $\mathbb{R}^d$ do $\mathbb{R}$, tedy takovou, která je definována na nějaké podmnožině $\mathbb{R}^d$.[10]

Nechť $f$ je reálná funkce $d$ proměnných. Chování $f$ v blízkosti bodu $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \dots, a_d)$ v $\mathbb{R}^d$ můžeme zkoumat následujícím způsobem. Zvolíme jednu proměnnou, například první, a budeme se dívat, jak se mění hodnoty funkce $f$, když měníme pouze tuto proměnnou a ostatní souřadnice zůstávají rovny příslušným souřadnicím bodu $\boldsymbol{a}$. (To odpovídá první parciální funkci – viz výše v úvodu.) Přírůstek funkční hodnoty pak porovnáme se změnou první souřadnice, tj. zkoumáme výraz

$$\frac{f(x_1, \overbrace{a_2, \dots, a_d}^{\text{pevné hodnoty}}) - f(a_1, a_2, \dots, a_d)}{x_1 - a_1},$$

který lze vektorově zapsat též jako

$$\frac{f(\boldsymbol{a} + (x_1 - a_1)\boldsymbol{e}^1) - f(\boldsymbol{a})}{x_1 - a_1} = \frac{f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{e}^1) - f(\boldsymbol{a})}{t},$$

kde $t = (x_1 - a_1)$ je stručnější zápis za změnu první souřadnice, kterou jsme provedli tím, že jsme se posunuli z původní hodnoty $a_1$ na hodnotu $x_1$. Ukazuje se, že tento stručnější zápis je v mnoha případech přehlednější, a proto ho použijeme i v následující definici, ke které nás tyto úvahy přivedly.

**1.7 Definice** (Parciální derivace)**.** Nechť $f$ je reálná funkce $d$ proměnných, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^d$ a $i \in \{1, \dots, d\}$. Pak *parciální derivaci funkce* $f$ *v bodě* $\boldsymbol{a}$ *podle* $i$*-té proměnné* definujeme předpisem

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{e}^i) - f(\boldsymbol{a})}{t}. \tag{1.5}$$

Symbolem $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ označujeme parciální derivaci funkce $f$ podle $i$-té proměnné, tj. funkci z $\mathbb{R}^d$ do $\mathbb{R}$ definovanou předpisem

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : \boldsymbol{x} \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}).$$

V některých případech se používá místo symbolu $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a})$ i značení $\partial_i f(\boldsymbol{a})$ a podobně. V případě, že $d \leqslant 3$, je zvykem proměnné značit postupně $x$, $y$, $z$ místo $x_1$, $x_2$, $x_3$; pak můžeme pro stručnost psát $f_x(\boldsymbol{a})$ místo $\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{a})$.

**1.8 Poznámka.** (a) Parciální derivace je definována jako jistá limita a ta samozřejmě z různých důvodů nemusí existovat. Například zcela jistě nebude existovat, pokud $\boldsymbol{a} \notin \mathbb{D}_f$; může se ale stát, že limita onoho výrazu neexistuje kvůli tomu, že výraz „osciluje“, případně existují různé jednostranné limity apod. V případě, že limita existuje a je konečná,

[10] Samozřejmě připouštíme i celé $\mathbb{R}^d$, neboť každá množina je sama sobě podmnožinou.

hovoříme o *vlastní* parciální derivaci. Pokud je nekonečná, jedná se o *nevlastní* parciální derivaci.[11]

(b) Vzhledem k tomu, že parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a})$ můžeme (zkoušet) počítat v libovolném bodě $\boldsymbol{a}$, lze $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ chápat jako funkci z $\mathbb{R}^d$ do $\mathbb{R}$, jak je ostatně vysvětleno přímo v definici. To znamená, že „proces parciálního derivování podle $i$-té proměnné“ vytvořil z původní funkce $f$ novou funkci $\frac{\partial f}{\partial x_i}$. Symbol $\frac{\partial}{\partial x_i}$ lze tedy chápat jako zobrazení, které každé funkci $g$ z $\mathbb{R}^d$ do $\mathbb{R}$ přiřadí novou takovou funkci, a to $\frac{\partial g}{\partial x_i}$. Takovým zobrazením někdy říkáme operátory.

(c) Stejně jako u funkcí jediné proměnné i zde je jasné, že se nemusíme zastavit hned po prvním derivování. Zderivovanou funkci můžeme opět derivovat, a to třeba i podle jiné proměnné. V řeči předchozí poznámky to znamená postupně na $f$ aplikovat různé operátory tvaru $\frac{\partial}{\partial x_i}$ (můžeme volit libovolná $i$). Je tak zcela zřejmé, co je míněno kupříkladu zápisem
$$\frac{\partial}{\partial x_2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big).$$
Funkci $f$ nejprve derivujeme podle $x_1$, čímž dostaneme novou funkci $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, která má stejných $d$ proměnných jako $f$. Tuto novou funkci posléze derivujeme podle podle $x_2$. Výslednou funkci, tedy $f$ derivovanou nejprve podle první a pak podle druhé proměnné, značíme
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}.$$

**1.9 Značení** (Parciální derivace vyšších řádů)**.** Budiž $f$ reálná funkce $d$ proměnných. Jak už bylo naznačeno v předchozí poznámce, $f$ lze v principu „parciálně derivovat“ opakovaně, a to v každém kroku podle libovolné proměnné. Popíšeme používané značení druhých parciálních derivací s tím, že značení derivací vyšších řádů nám už bude zřejmé.

Pokud funkci $f$ derivuji nejprve podle $i$-té a posléze podle $j$-té proměnné, obdržím funkci
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} := \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big).$$
V případě, že $i = j$, neboli derivuji dvakrát podle proměnné $x_i$, používá se též značení
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} := \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big).$$
Je důležité všimnout si pořadí indexů: symbol $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ znamená, že jsme funkci $f$ derivovali

[11] Pro jistotu poznamenám, že nekonečnou derivaci připouštíme jako výjimku ve speciálním bodě, ale nepřipouštíme nekonečnou hodnotu funkce $\frac{\partial f}{\partial x_i}$. V bodech $\boldsymbol{a}$, pro něž $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) = \pm\infty$, funkci $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ nepovažujeme za definovanou. Důvodem je, že u žádné funkce (a tedy ani u funkce $\frac{\partial f}{\partial x_i}$) nepřipouštíme nekonečné hodnoty; jedná se o funkce do $\mathbb{R}$, tj. všechny hodnoty jsou prvky $\mathbb{R}$, a tedy jsou to konečná čísla.

nejprve podle $x_i$ a *až potom* podle $x_j$. Způsob, jakým jsme k uvedenému značení dospěli, snad činí důvody pro tento fakt zřejmými.

**1.10 Příklad** (Praktické výpočty parciálních derivací)**.** Praktické počítání parciálních derivací se jen málo liší od výpočtů derivací funkcí jediné proměnné. Pokud totiž máme třeba funkci $f(x, y)$ a chceme počítat její parciální derivaci podle $x$, stačí považovat proměnnou $y$ za fixovanou neboli za konstantu. V případě derivace podle $y$ bude zafixováno naopak $x$. Proto například

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2y + y^3 + xy^2 + x + 5) = 2xy + 0 + y^2 + 1 + 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2y + y^3 + xy^2 + x + 5) = x^2 + 3y^2 + x2y + 0 + 0.$$

Derivování polynomů je obecně jednoduché a vyžaduje skutečně jen základní znalost. Známe-li však vzorce pro derivaci součinu, podílu a složené funkce pro funkce jedné proměnné, můžeme je aplikovat i ve vyšší dimenzi. Uvedu ještě jeden příklad.

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(e^{x^2+xy} \cdot \sin\big(x + y^2\big) + \ln x\Big) = e^{x^2+xy}(2x + y) \cdot \sin\big(x + y^2\big) + e^{x^2+xy} \cdot \cos\big(x + y^2\big) + \frac{1}{x}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(e^{x^2+xy} \cdot \sin\big(x + y^2\big) + \ln x\Big) = e^{x^2+xy}x \cdot \sin\big(x + y^2\big) + e^{x^2+xy} \cdot \cos\big(x + y^2\big)2y + 0.$$

Oproti látce prvního semestru je zvýšení obtížnosti plynoucí z přítomnosti více proměnných skutečně minimální; je pouze potřeba pečlivě hlídat, co je proměnná a co konstanta. △

## 1.3 $\mathbb{R}^d$ jako metrický prostor

**1.11 Definice** (Eukleidovská norma na $\mathbb{R}^d$, pojem okolí)**.** Pro vektor (bod) $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ definujeme *eukleidovskou normu* $\boldsymbol{x}$ jako

$$\|\boldsymbol{x}\|_2 = \|\boldsymbol{x}\|_e := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_d^2} = \left(\sum_{i=1}^{d} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.6}$$

Pro $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^d$ a $\delta > 0$ dále definujeme *okolí* (resp. *prstencové okolí*) bodu $\boldsymbol{a}$ o poloměru $\delta$ jako

$$\begin{aligned} B(\boldsymbol{a}, \delta) &:= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d : \ \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|_2 < \delta\}, \qquad \text{resp.} \\ P(\boldsymbol{a}, \delta) &:= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d : \ 0 < \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|_2 < \delta\} = B(\boldsymbol{x}, \delta) \setminus \{\boldsymbol{a}\}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Množina $B(\boldsymbol{a}, \delta)$ se také často nazývá *otevřená koule se středem* $\boldsymbol{a}$ *a poloměrem* $\delta$ (viz též Definici 2.3). Dolní index 2 u normy obvykle vynecháváme, tj. píšeme $\|\cdot\|$ ve smyslu $\|\cdot\|_2$.

**1.12 Poznámka** (Norma obecně)**.** Normou rozumíme způsob měření „délky" vektorů, který splňuje jisté základní vlastnosti (uvedené níže); takových způsobů může být v jediném vektorovém prostoru více. Výše definovaná eukleidovská norma je jen jedním příkladem normy na $\mathbb{R}^d$ z mnoha.

Řekneme, že funkce $\|\cdot\|\colon X \to [0,\infty)$ je *norma* na $X$, jsou-li splněny následující axiomy:

(i) $\forall \boldsymbol{x} \in X\colon\ \|\boldsymbol{x}\| = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$;

(ii) $\forall \boldsymbol{x} \in X\ \forall c \in \mathbb{R}\colon\ \|c\boldsymbol{x}\| = |c| \cdot \|\boldsymbol{x}\|$;

(iii) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X\colon\ \|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leqslant \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$.

Dvojici $(X, \|\cdot\|)$ pak nazýváme *normovaný lineární* (též: vektorový) *prostor*.

Druhý z uvedených axiomů se nazývá *homogenita*, třetí *trojúhelníková nerovnost* (roli třetího vrcholu hraje $\mathbf{0}$, tj. počátek v $X$).

**1.13 Poznámka.**

(a) Eukleidovská norma je skutečně *norma* podle definice z předchozí poznámky. Jinými slovy splňuje všechny tři uvedené axiomy. Ověřit první dva je snadné cvičení pro vás, důkaz trojúhelníkové nerovnosti je ale poměrně těžký, a my ho vynecháme; geometrická intuice nám ostatně nedovoluje o jeho platnosti pochybovat.

(b) Na $\mathbb{R}^d$ je možné definovat další (podstatně odlišné) normy. Uvedeme tři příklady bez dalšího komentáře; je možné ukázat, že všechny vzorce níže skutečně definují normy:

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{x}\|_1 &= \sum_{i=1}^{d} |x_i|; \\ \|\boldsymbol{x}\|_p &= \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad \text{kde } p \in (1,\infty); \\ \|\boldsymbol{x}\|_\infty &= \max_{i=1,\dots,d} |x_i|. \end{aligned} \tag{1.8}$$

(c) Eukleidovská norma je speciálním případem normy $\|\cdot\|_p$ pro $p = 2$, jak je ze vzorců ihned patrné. Dolní index 2 u eukleidovské normy tedy nesouvisí s dimenzí prostoru, ale s exponenty, které se ve vyskytují ve vzorci (1.6).

(d) Je dobré si všimnout, že $B(\boldsymbol{a}, \delta)$, tedy tzv. otevřená koule, skutečně „vypadá jako koule" bez hranice. Pokud jsme tedy například v dimenzi dva, jedná se o vnitřek kruhu; v $\mathbb{R}^3$ jde o vnitřek koule (v běžném slova smyslu), tedy o kouli ochuzenou o hraniční sféru (kulovou plochu). To je dáno tím, že v definici okolí (otevřené koule) (1.7) vystupuje právě eukleidovská norma, která odpovídá standardnímu způsobu měření vzdáleností pomocí Pýthagorovy věty. Pokud ale v definici koule použijeme místo $\|\cdot\|_2$ třeba normu $\|\cdot\|$, výsledná množina bude mít jiný tvar a nebude „kulatá". Toho se týká Cvičení 1.14.

**1.14 Cvičení.** Pokuste se nakreslit, jak bude v $\mathbb{R}^2$ vypadat jednotková koule $B(\mathbf{0}, 1)$, ovšem ne vzhledem k eukleidovské normě, nýbrž vzhledem k $\|\cdot\|_1$ a vzhledem k $\|\cdot\|_\infty$. Mohli bychom odlišit značení koule podle toho, vzhledem k jaké normě kouli uvažujeme, protože to ale v nejbližší době nebudeme potřebovat, zavádíme toto značení zatím pouze pro účely tohoto cvičení:

$$B_p(\boldsymbol{a}, \delta) := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d : \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|_p < \delta\},$$

přičemž připouštíme libovolný index $p \in [1, \infty]$ (tj. včetně $\infty$). Pro definice viz (1.8).

Zadání tedy lze reformulovat takto: Nakreslete $B_1(\mathbf{0}, 1)$ a $B_\infty(\mathbf{0}, 1)$, kde symbolem „$\mathbf{0}$“ značíme (jak je běžné) počátek v daném prostoru, zde tedy bod $(0, 0)$.

*Nápověda:* Obě koule budou ve skutečnosti čtverce. Řešení je znázorněno na Obrázku 2.1.

**1.15 Definice** (Limita posloupnosti v $\mathbb{R}^d$)**.** Posloupnost $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1}^\infty$ prvků $\mathbb{R}^d$ definujeme jako zobrazení $\mathbb{N} \to \mathbb{R}^d$, které každému přirozenému číslu $n$ přiřadí bod $\boldsymbol{x}_n \in \mathbb{R}^d$.

Podobně jako u posloupností reálných čísel i v tomto případě budeme připouštět také posloupnosti definované jen pro některá přirozená čísla, popřípadě také posloupnosti indexované od 0 a podobně. Budeme také používat neformální značení $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \mathbb{R}^d$.

Posloupnost $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1}^\infty = \big\{(x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^d)\big\}_{n=1}^\infty \subseteq \mathbb{R}^d$ má limitu $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^d$, a píšeme $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{a}$, jestliže

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, d\}\colon \ \lim_{n\to\infty} x_n^i = a_i.$$

**1.16 Lemma.** *Buď $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \mathbb{R}^d$ posloupnost, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^d$. Pak NVJE:*

*(i)* $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{a}$*;*

*(ii)* $\lim_{n\to\infty} \|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{a}\| = 0$.

*Důkaz.* Nechť nejprve platí (ii), dokážeme (i). Zvolme tedy libovolné $j \in \{1, 2, \dots, d\}$; máme dokázat, že $\lim_{n\to\infty} x_n^j = a_j$. K tomu nám pomůže následující odhad:

$$0 \leqslant |x_n^j - a_j| = \sqrt{(x_n^j - a_j)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^d (x_n^i - a_i)^2} = \|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{a}\|.$$

Ovšem $\lim_{n\to\infty} \|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{a}\| = 0$ (podle (ii)), takže Lemma o dvou policajtech (pro posloupnosti reálných čísel) dává $\lim_{n\to\infty} |x_n^j - a_j| = 0$. Tedy opravdu pro každé $j$ jest $\lim_{n\to\infty} x_n^j = a_j$.

Naopak, nechť platí (i) a dokažme (ii). Podle Věty o aritmetice limit pro posloupnosti reálných čísel (1. semestr) a podle předpokladu (i) jest

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^d (x_n^i - a_i)^2 = \sum_{i=1}^d \lim_{n\to\infty} (x_n^i - a_i)^2 = \sum_{i=1}^d 0 = 0.$$

Podle Heineho věty ovšem dostáváme stejný výsledek i po aplikaci odmocniny:

$$\lim_{n\to\infty} \|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{a}\| = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\sum_{i=1}^{d} (x_n^i - a_i)^2} = \sqrt{0} = 0. \qquad \square$$

**1.17 Poznámka.** • Všimněte si, že Definice 1.15 využívá pojem limity. Nejedná se ovšem o definici kruhem, protože jde o limitu posloupnosti reálných čísel, kterou jsme definovali už v prvním semestru.

- Podobně i podmínka (ii) předchozího lemmatu využívá pojem limity ve smyslu limity posloupnosti čísel: ve výrazu se sice vyskytují vektory $\boldsymbol{x}_n$, $\boldsymbol{a}$, ovšem $\|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{a}\|$ je reálné číslo pro každé $n$. Opět tedy jde o výpočet limity posloupnosti čísel.
- Definice 1.15 vlastně říká, že limita posloupnosti vektorů se počítá *po složkách*:

$$\lim_{n\to\infty} (x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^d) = \Big(\lim_{n\to\infty} x_n^1, \lim_{n\to\infty} x_n^2, \dots, \lim_{n\to\infty} x_n^d\Big).$$

**1.18 Příklad.** Spočítejme limitu posloupnosti vektorů $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ v prostoru $\mathbb{R}^4$, kde

$$\boldsymbol{x}_n = \left(7, \frac{3n^2+1}{2n^2-6n}, \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, 2\operatorname{arctg} n\right) \in \mathbb{R}^4.$$

Jak jsme si uvědomili v poznámce, limita takovéto posloupnosti se počítá po složkách. Tedy

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n = \left(\lim_{n\to\infty} 7, \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+1}{2n^2-6n}, \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \lim_{n\to\infty} 2\operatorname{arctg} n\right) = \big(7, 3/2, e, \pi\big). \quad \triangle$$

## 1.4 Lokální extrémy

**1.19 Definice** (Extrémy a lokální extrémy funkcí více proměnných)**.** Nechť $f$ je funkce $d$ proměnných, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^d$. Řekneme, že

- $\boldsymbol{a}$ je bodem *ostrého (globálního) maxima* funkce $f$, jestliže

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{D}_f : \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{a} \Rightarrow f(\boldsymbol{x}) < f(\boldsymbol{a});$$

- $\boldsymbol{a}$ je bodem *(globálního) maxima* funkce $f$, jestliže

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{D}_f : f(\boldsymbol{x}) \leqslant f(\boldsymbol{a});$$

- $\boldsymbol{a}$ je bodem *ostrého lokálního maxima* funkce $f$, jestliže

$$\exists \delta > 0\ \forall \boldsymbol{x} \in P(\boldsymbol{a}, \delta) : f(\boldsymbol{x}) < f(\boldsymbol{a});$$

- $\boldsymbol{a}$ je bodem *lokálního maxima* funkce $f$, jestliže

$$\exists \delta > 0\ \forall \boldsymbol{x} \in P(\boldsymbol{a}, \delta)\colon\ f(\boldsymbol{x}) \leqslant f(\boldsymbol{a});$$

Analogicky definujeme různé pojmy minima (všechny definice se změní pouze obrácením nerovnosti). Je-li $\boldsymbol{a}$ bodem maxima $f$, říkáme též, že $f$ nabývá v bodě $\boldsymbol{a}$ maxima apod. V případě, že $f$ nabývá v bodě $\boldsymbol{a}$ (globálního, resp. lokálního) maxima nebo minima, říkáme, že $f$ nabývá v bodě $\boldsymbol{a}$ (globálního, resp. lokálního) *extrému*.

**1.20 Poznámka.** Všimněte si, že v definici lokálního maxima (popř. minima) lze místo $P(\boldsymbol{a}, \delta)$ ekvivalentně psát $B(\boldsymbol{a}, \delta)$. Rozmyslete si, proč u ostrých extrémů tuto možnost nemáme, tj. proč je v definicích *ostrých* extrémů podstatné použít *prstencová* okolí.

Dále je dobré si všimnout, že tyto definice jsou v souladu s definicemi extrémů pro funkce jediné proměnné, které jsme probrali v prvním semestru. Jinými slovy, pro $d = 1$ nyní vlastně máme dvě definice (například) ostrého lokálního maxima: tu právě vyslovenou a tu z prvního semestru. To ale nevadí, protože obě definice jsou navzájem ekvivalentní, jak je ihned patrné. Ve skutečnosti jsme nyní udělali jedinou věc navíc: rozšířili jsme pojmy okolí a prstencového okolí i do prostorů $\mathbb{R}^d$ pro $d > 1$ (zatímco pro $d = 1$ definice zůstala stejná).

Nyní si připomeňme tzv. Fermatovu větu z prvního semestru, která formuluje nutnou podmínku pro existenci extrému funkce jedné proměnné.

**Věta** (Fermat)**.** *Buď $f$ funkce z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$, která má v jistém bodě $a \in \mathbb{R}$ lokální extrém. Potom buďto $f'(a) = 0$, nebo derivace $f'(a)$ neexistuje.*

Jinými slovy, pokud v bodě lokálního extrému funkce derivace existuje, je nutně nulová. Pokud tedy najedeme bod, v němž má funkce $f$ nulovou derivaci, není vyloučeno, že jde o bod lokálního extrému. Nyní zformulujeme analogickou větu pro funkci $d$ proměnných.

**1.21 Věta** (Nutná podmínka lokálního extrému)**.** *Buď $f$ reálná funkce $d$ proměnných, která má v bodě $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^d$ lokální extrém. Pak*

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, d\}\colon\ \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) = 0 \quad \vee \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) \ \textit{neexistuje}.$$

*Důkaz.* Zvolme $i \in \{1, 2, \dots, d\}$ a položme

$$g(t) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \dots, a_d),$$

tj. $g$ je $i$-tá parciální funkce $f$ v bodě $\boldsymbol{a}$ (viz Definici 1.5). Předpokládejme, že existuje derivace $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) = g'(0)$ (pokud ne, jsme hotovi). Ale $g$ má v bodě 0 lokální extrém, protože $g(0) = f(\boldsymbol{a})$, přičemž $\boldsymbol{a}$ je bod lokálního extrému $f$ podle předpokladu věty.[12]

Podle Fermatovy věty (výše) dostáváme $g'(0) = 0$, takže také $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) = 0$. □

[12] Podrobněji lze argumentovat takto: Podle definice lokálního extrému (řekněme, že jde třeba o maximum)

**1.22 Poznámka.** Předchozí větou jsme popsali *nutnou podmínku* pro přítomnost lokálního extrému. Při praktických výpočtech konkrétních příkladů tuto podmínku obvykle splňuje pouze několik málo bodů, což je pro nás dobrá zpráva: A priori, když o funkci nevíme nic víc než její funkční předpis, může být extrém v libovolném bodě; po použití tohoto výsledku drtivou většinu bodů vyloučíme zůstane obvykle jen velmi nepočetná (typicky konečná) množina „podezřelých bodů“.

Jak ale pro funkce více proměnných zjistit, zda se v daném bodě skutečně extrém nachází? Obecně to může být dost složité, alespoň částečnou odpověď nicméně dáme (bez důkazu) v Oddílu 1.4.2 skrze formulaci jisté *postačující podmínky* pro přítomnost extrému.[13] Něž se pustíme do formulace (poněkud složitější) postačující podmínky, podívejme se nejprve na vcelku názornou situaci, která panuje v dimenzi $d = 1$ a která je nám v podstatě známá z prvního semestru.

**1.23 Definice.** Buď $f$ funkce $d$ proměnných, která má spojité všechny první parciální derivace na jistém okolí bodu $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^d$. Pak definujeme a značíme[14] *gradient* funkce $f$ v bodě $\boldsymbol{a}$ jako vektor

$$\nabla f(\boldsymbol{a}) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{a}), \ldots \frac{\partial f}{\partial x_d}(\boldsymbol{a}) \right).$$

Pokud $\nabla f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0} = (0, 0, \ldots, 0)$, nazýváme bod $\boldsymbol{a}$ *stacionárním bodem.*

**1.24 Důsledek.** *Buď $f$ reálná funkce $d$ proměnných, která má v bodě $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^d$ lokální extrém a na okolí $\boldsymbol{a}$ spojité všechny první parciální derivace. Pak $\nabla f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$, neboli $\boldsymbol{a}$ je stacionární bod $f$.*

**Postačující podmínka pro funkci jedné proměnné:** Mějme funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která má v jistém bodě $a \in \mathbb{R}$ nulovou první derivaci. Bod $a$ je tedy to, čemu jsme v prvním semestru někdy říkali *stacionární bod* $f$, a je „podezřelý z extrému“. Fermatova věta říká, že takový bod splňuje nutnou podmínku pro přítomnost extrému. Jak ale zjistit, zda se skutečně jedná o bod extrému?

Při vyšetřování průběhu funkce jsme v prvním semestru obvykle postupovali tak, že jsme vyšetřili rovnou intervaly monotonie (nic podobného ovšem pro funkce více proměnných nemáme), a tak bylo jasné, že když na interval, kde funkce roste, navazuje interval, kde klesá, v jejich společném krajním bodě (tj. v bodě, který oba intervaly od sebe odděluje) se nachází maximum apod.

---

existuje $\delta > 0$ takové, že pro každý bod $x \in B(\boldsymbol{a}, \delta)$ jest $f(x) \leq f(a)$. Nyní si stačí všimnout, že ovšem pro libovolné $t \in (-\delta, \delta)$ je $\varphi(t) := (a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \ldots, a_d) \in B(\boldsymbol{a}, \delta)$ (protože $\|\varphi(t) - \boldsymbol{a}\| = \|(0, \ldots, 0, t, 0, \ldots, 0)\| = |t| < \delta$), a tedy $g(t) = f(\varphi(t)) \leq f(\boldsymbol{a}) = g(0)$. Tedy 0 je bod lokálního maxima funkce $g$.

[13] Chce se mi zdůraznit, že to bude jiná podmínka, než ta výše zmiňovaná podmínka nutná z Věty 1.21. Může se tedy stát, že existují body extrému, které tuto postačující podmínku nesplňují (nutnou samozřejmě ano).

[14] Symbol „$\nabla$“ je standardním označením gradientu a čteme ho „nabla“.

Mohli jsme však postupovat ještě jiným způsobem. Pokud bychom například věděli, že funkce je na celém definičním oboru konvexní, pak stacionární bod je zjevně bodem (dokonce globálního) minima. Pokud je funkce $f$ konvexní na intervalu $I = (c, d)$, $a \in I$ a $f'(a) = 0$, pak $a$ je zjevně bodem lokálního minima. To je geometricky zcela zřejmé a ani podrobný důkaz by nebyl příliš těžký. Ve skutečnosti stačí ještě trochu méně: konvexita není potřeba na celém intervalu „kolem“ stacionárního bodu.

**Věta P** (Postačující podmínka pro extrém funkce jedné proměnné)**.** Nechť $f$ je funkce z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ a bod $a \in \mathbb{R}$ je takový, že $f'(a) = 0$. Potom:

- jestliže $f''(a) > 0$, pak $f$ má v bodě $a$ ostré lokální minimum.
- jestliže $f''(a) < 0$, pak $f$ má v bodě $a$ ostré lokální maximum.

*Důkaz.* Dokážeme pouze první tvrzení, nechť tedy $f''(a) > 0$. To jest

$$f''(a) \overset{\text{def.}}{=} \lim_{x \to a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a} > 0.$$

Podle definice limity tedy

$$\exists \delta > 0 \ \forall x \in P(a, \delta)\colon \ \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a} > 0,$$

neboli, neformálně řečeno, „$\delta$-blízko bodu $a$ je uvedený zlomek kladný“. Protože ale napravo od $a$, tj. pro $x > a$, je jmenovatel kladný, musí být kladný i čitatel. Podobně nalevo je zase jmenovatel záporný, takže i čitatel musí být záporný (aby celý zlomek byl kladný). Dostáváme tedy:

$$\begin{aligned} &\forall x \in P_+(a, \delta)\colon \ f'(x) - f'(a) > 0 \quad \text{a} \\ &\forall x \in P_-(a, \delta)\colon \ f'(x) - f'(a) < 0. \end{aligned}$$

Ovšem $f'(a) = 0$ podle předpokladu věty, takže (také díky spojitosti $f$ v bodě $a$) dostáváme:

$$\begin{aligned} &\forall x \in (a, a + \delta)\colon \ f'(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad f \text{ je rostoucí na } [a, a + \delta) \quad \text{a} \\ &\forall x \in (a - \delta, a)\colon \ f'(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad f \text{ je klesající na } (a - \delta, a]. \end{aligned}$$

Celkem tedy $f$ je klesající na $(a - \delta, a]$ a rostoucí na $[a, a + \delta)$, v bodě $a$ je tedy ostré lokální minimum. □

**1.25 Poznámka.** Uvedená Věta P je jednodimenzionální předzvěstí Oddílu 1.4.2, ve kterém zformulujeme analogické podmínky pro funkce více proměnných. Podstatou této věty je, že pomocí studia druhého derivace dokážeme v některých případech rozpoznat konvexitu nebo konkavitu funkce, a díky tomu konstatovat přítomnost extrému ve stacionárním bodě.

Pomocí studia parciálních derivací druhého řádu budeme v některých případech schopni poznat lokální chování funkce, a rozhodnout tak o přítomnosti extrému, i v případě více proměnných. Podmínky druhého řádu pro funkci více proměnných jsou však o něco komplikovanější a k jejich efektivní formulaci je potřeba říci nejprve něco o kvadratických formách.

### 1.4.1 Vsuvka o kvadratických formách

Stručně připomenu některá fakta z lineární algebry, která se nám budou hodit k formulaci a použití postačujících podmínek pro přítomnost lokálního extrému funkce více proměnných.

**1.26 Značení.** V této části budeme prvky $\mathbb{R}^d$ považovat za sloupcové vektory, jak je zvykem v lineární algebře. Množinu všech matic o $m$ řádcích a $n$ sloupcích budeme značit $M(m \times n)$. Je-li $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ čtvercová matice, symbolem $|\mathbb{A}|$ značíme determinant $\mathbb{A}$.

**1.27 Definice** (Kvadratická forma)**.** Nechť $\mathbb{A} \in M(d \times d)$ je matice. Řekneme, že $\mathbb{A}$ je *symetrická* jestliže platí $\mathbb{A} = \mathbb{A}^T$, kde $\mathbb{A}^T$ značí transponovanou matici.[15]

Nechť $\mathbb{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in M(d \times d)$ je symetrická matice. Pak funkci $\varphi\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ definované předpisem $\varphi(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}^T \mathbb{A} \boldsymbol{u}$, neboli (rozepsáno po složkách)

$$\begin{aligned}\varphi(u_1, u_2, \dots, u_d) &= \big(u_1, u_2, \dots, u_d\big) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1d} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d1} & a_{d2} & \cdots & a_{dd} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_d \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d a_{ij} u_i u_j,\end{aligned}$$

říkáme *kvadratická forma*. Říkáme, že $\mathbb{A}$ je reprezentující matice formy $\varphi$.

**1.28 Poznámka.**

- Je-li $\varphi\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ kvadratická forma, pak pro každé $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^d$ a $c \in \mathbb{R}$ platí $\varphi(c\boldsymbol{u}) = c^2 \varphi(\boldsymbol{u})$, jak je snadno vidět z následující maticového násobení, do níž si sami v duchu dosaďte $c\boldsymbol{u} = (cu_1, cu_2, \dots, cu_d)$ za $\boldsymbol{u}$.
- Každá kvadratická forma $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (tj. případ $d = 1$) je tvaru $\varphi(x) = ax^2$. Součin $ax^2$ lze chápat jako $\boldsymbol{x}^T \mathbb{A} \boldsymbol{x}$, kde $\boldsymbol{x} = (x)$ (vektor o jediné složce) a $\mathbb{A} = (a) \in M(1 \times 1)$.

**1.29 Poznámka** (Důležitý typ kvadratických forem)**.** Nechť $f$ je funkce $d$ proměnných a $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^d$ je bod, na jehož nějakém okolí jsou všechny druhé parciální derivace spojité (jakožto funkce $d$ proměnných). Potom zobrazení $\varphi\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ definované pro $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d)$ předpisem

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{a}) x_i x_j \tag{1.9}$$

je kvadratická forma, jejíž reprezentující matice je

$$\mathbb{A} = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{a}) \right)_{i,j=1}^n .$$

[15] Transponovaná matice vznikne tak, že řádky původní matice zapíšeme ve stejném pořadí do sloupců.

Toto je netriviální fakt vyžadující důkaz, protože implicitně zahrnuje informaci o symetrii matice $\mathbb{A}$; symetrie je totiž požadována v definici kvadratické formy, a bez ní by tedy zobrazení $\varphi$ z rovnice (1.9) nebylo kvadratickou formou.

Symetrie matice ovšem plyne z důležité věty , která v případě spojitosti druhých parciálních derivací garantuje, že u nich nezáleží na pořadí derivování; matice tak je za daných předpokladů skutečně symetrická.

Uvedené skutečnosti zde můžeme přijmout bez důkazu, podstatná je zde pro nás hlavně samotná kvadratická forma (1.9), s jejíž pomocí budeme později schopni zformulovat postačující podmínky pro lokální extrém funkce více proměnných.

**1.30 Definice** (Definitnost forem)**.** Buď $\varphi\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ kvadratická forma. Řekneme, že $\varphi$ je

- *pozitivně definitní* (PD), jestliže
$$\forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^d: \ \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0} \Rightarrow \varphi(\boldsymbol{u}) > 0;$$
- *negativně definitní* (ND), jestliže
$$\forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^d: \ \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0} \Rightarrow \varphi(\boldsymbol{u}) < 0;$$
- *pozitivně semidefinitní* (PSD), jestliže
$$\forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^d: \ \varphi(\boldsymbol{u}) \geqslant 0;$$
- *negativně semidefinitní* (NSD), jestliže
$$\forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^d: \ \varphi(\boldsymbol{u}) \leqslant 0;$$
- *indefinitní* (ID), neplatí-li nic z předchozího, tj.
$$\exists \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^d : \varphi(\boldsymbol{u}) > 0 \wedge \varphi(\boldsymbol{v}) < 0.$$

**1.31 Příklad.** V triviálním případě $d = 1$ jsme si už uvědomili, že libovolná kvadratická forma je tvaru $\varphi(x) = ax^2$ (viz Poznámku 1.28). Sami si z definice rozmyslete, co znamená, že $\varphi$ je PD, ND, atd. Může se stát, že kvadratická forma na $\mathbb{R}$ je ID?[16] △

**1.32 Poznámka.** Je dobré si všimnout, že libovolná kvadratická forma $\varphi\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $\varphi(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}^T \mathbb{A} \boldsymbol{u}$ na libovolné přímce v $\mathbb{R}^d$ je kvadratická funkce. Pojďme si to rozmyslet podrobně.

[16] Je PD právě pro $a > 0$ a ND právě pro $a < 0$. Pro $a = 0$ je současně PSD i NSD z triviálních důvodů. Protože tímto jsme probrali všechny možnosti, jak může kvadratická forma na $\mathbb{R}$ vypadat, je zřejmé, že ID není v žádném případě.

Uvažujme přímku zadanou parametricky $p\colon t \mapsto \boldsymbol{a} + t\boldsymbol{v}$, kde $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^d$ je výchozí bod a $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^d$ je směrový vektor přímky $p$. Nyní složíme formu $\varphi$ s přímou $p$, tj. podíváme se, jak se forma chová v bodech přímky:

$$\begin{aligned}\varphi\big(p(t)\big) &= p(t)^T \mathbb{A} p(t) = \big(\boldsymbol{a}^T + t\boldsymbol{v}^T\big)\mathbb{A}\big(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{v}\big)\\ &= \boldsymbol{a}^T \mathbb{A}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}^T \mathbb{A} t\boldsymbol{v} + t\boldsymbol{v}^T \mathbb{A}\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{v}^T \mathbb{A} t\boldsymbol{v}\\ &= \varphi(\boldsymbol{a}) + t\boldsymbol{a}^T \mathbb{A}\boldsymbol{v} + t\boldsymbol{v}^T \mathbb{A}\boldsymbol{a} + t^2\varphi(\boldsymbol{v})\\ &= \varphi(\boldsymbol{a}) + t\boldsymbol{a}^T \mathbb{A}\boldsymbol{v} + t\boldsymbol{a}^T \mathbb{A}^T\boldsymbol{v} + t^2\varphi(\boldsymbol{v})\\ &= \varphi(\boldsymbol{a}) + 2t\boldsymbol{a}^T \mathbb{A}\boldsymbol{v} + t^2\varphi(\boldsymbol{v}),\end{aligned}$$

kde v poslední nerovnosti využíváme symetrie $\mathbb{A}$. Ozančíme-li $a = \varphi(\boldsymbol{v})$, $b = 2\boldsymbol{a}^T \mathbb{A}\boldsymbol{v}$ a $c = \varphi(\boldsymbol{a})$, což jsou konstanty nezávislé na $t$, celkově dostáváme

$$f_p(t) := \varphi\big(p(t)\big) = at^2 + bt + c;$$

vidíme tedy, že, jak $t$ probíhá $\mathbb{R}$ (a tedy $p(t)$ probíhá body přímky $p$), složení $\varphi\big(p(t)\big)$ nabývá hodnot kvadratické funkce (označili jsme ji $f_p$, protože závisí na volbě přímky $p$).

Víme-li, že forma $\varphi$ je kupř. PSD, pak $f_p$ nabývá nezáporných hodnot, což samozřejmě implikuje, že $a \geqslant 0$. Pokud je forma ID, může se (ale nemusí) stát, že $f_p$ nabývá kladných i záporných hodnot (pak o $a$ nelze automaticky nic říct).

Pokud ovšem přímka $p$ prochází počátkem, můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že její výchozí bod je právě počátek, tj. $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$, a pak je zřejmé z jejich definic, že koeficienty $b, c$ jsou nulové. Tedy

$$f_p(t) = at^2, \quad \text{kdykoliv } p \text{ prochází počátkem,}$$

takže forma na každé takové přímce nabývá buďto výhradně nezáporných hodnot, nebo výhradně hodnot nekladných.

Z toho je zřejmé, že na základě pozorování kvadratické formy $\varphi$ na jediné přímce $p$ procházející počátkem nemáme šanci určit její typ: pro pochopení uvažujte ID formu $\varphi$. Podle definice $\varphi$ nabývá záporných i kladných hodnot, tj. existují vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^d$ takové, že

$$\varphi(\boldsymbol{u}) > 0 \quad \text{a} \quad \varphi(\boldsymbol{v}) < 0 \tag{1.10}$$

Nyní položme

$$p_{\boldsymbol{u}}\colon t \mapsto \boldsymbol{0} + t\boldsymbol{u} \quad \text{a} \quad p_{\boldsymbol{v}}\colon t \mapsto \boldsymbol{0} + t\boldsymbol{v}.$$

Víme, že $\varphi(p_{\boldsymbol{u}}(t)) = a_{\boldsymbol{u}}t^2$ a podobně $\varphi(p_{\boldsymbol{v}}(t)) = a_{\boldsymbol{v}}t^2$. Z předpokladu (1.10) je patrné, že nutně $a_{\boldsymbol{u}} > 0$, $a_{\boldsymbol{v}} < 0$. Speciálně tedy $p_{\boldsymbol{u}}$ a $p_{\boldsymbol{v}}$ jsou dvě různé přímky.

Poučení plynoucí z těchto úvah je, že podstata rozlišení mezi PD, ND, PSD, NSD a ID je v chování formy v různých směrech (tj. na různých přímkách procházejících počátkem). ID forma se v některém směru „chová jako PD“ (čili jako kladná parabola), v jiném jako ND (záporná parabola). To se pochopitelně nemůže stát v dimenzi 1 (máme pouze jeden směr).

**1.33 Definice.** Řekneme, že matice $\mathbb{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^d$ je diagonální, je-li $a_{ij} = 0$, kdykoliv $i \neq j$.

**1.34 Lemma.** *Nechť je matice $\mathbb{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^d$ diagonální. Pak platí:*

*(i) $\mathbb{A}$ je PD, právě když $a_{ii} > 0$ pro všechna $i$;*

*(ii) $\mathbb{A}$ je ND, právě když $a_{ii} < 0$ pro všechna $i$;*

*(iii)* $\mathbb{A}$ *je PSD, právě když* $a_{ii} \geqslant 0$ *pro všechna* $i$*;*

*(iv)* $\mathbb{A}$ *je NSD, právě když* $a_{ii} \leqslant 0$ *pro všechna* $i$*;*

*(v)* $\mathbb{A}$ *je ID, právě když existují* $i, j \in \{1, \dots, d\}$: $a_{ii} > 0 \wedge a_{jj} < 0$.

*Důkaz.* Dokážeme například druhý bod, ostatní důkazy jsou podobně lehké. Buď tedy nejprve $\mathbb{A}$ ND a buď $\varphi$ kvadratická forma reprezentovaná maticí $\mathbb{A}$. Budiž dáno kterékoliv $j \in \{1, \dots, d\}$; máme ukázat $a_{jj} < 0$. Pak pro $\boldsymbol{e}_j$ ($j$-tý vektor kanonické báze $\mathbb{R}^d$) platí

$$0 \overset{\text{ND}}{>} \varphi(\boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{e}_j^T \mathbb{A} \boldsymbol{e}_j = a_{jj}.$$

Naopak, nechť je $a_{ii} < 0$ pro všechna $i$ a je dán vektor $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \dots, u_d) \in \mathbb{R}^d \setminus \{\boldsymbol{0}\}$. Matice $\mathbb{A}$ je diagonální, takže v následující dvojité sumě vypadnou všechny sčítance, pro něž $i \neq j$:

$$\varphi(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}^T \mathbb{A} \boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} a_{ij} u_i u_j = \sum_{i=1}^{d} a_{ii} u_i^2 < 0.$$

Poslední nerovnost je dána tím, že $a_{ii} < 0$ pro všechna $i$, a protože $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$, pro některé $i$ jest $u_i \neq 0$, tj. $u_i^2 > 0$. □

**1.35 Definice.** Buď $A \in M(d \times d)$ matice. *Symetrickou elementární úpravou* matice $\mathbb{A}$ rozumíme řádkovou elementární úpravu bezprostředně následovanou příslušnou úpravou sloupcovou.[17] *Symetrická transformace* je konečná posloupnost symetrických elementárních úprav.

Připomínám, že mezi *řádkové elementární úpravy* matice lze počítat násobení řádku nenulovou konstantou, přičtení násobku řádku k jinému řádku, případně také prohození dvou řádků.

**1.36 Věta.** *(i) Symetrická transformace zachovává symetrii matice.*

*(ii) Symetrická transformace zachovává definitnost matice.*

*(iii) Každá symetrická matice se dá symetrickou transformací převést na diagonální.*

**1.37 Poznámka.**

- Důkaz právě uvedené věty vynecháme, je ale dobré se zamyslet nad tím, co z ní plyne. Je-li dána symetrická matice, pak symetrickou transformací nemůžeme „pokazit“ její symetrii; pokud nám tedy při praktickém výpočtu vznikne matice nesymetrická, víme, že jsme udělali chybu.

[17] Přesná definice: Buď $C \in M(d \times d)$ matice nějaké elementární řádkové úpravy. Pak transformaci matice $A$ podle následujícího vzorce nazýváme symterickou elementární úpravou: $A \rightsquigarrow CAC^T$.

Tuto definici lze jednoduše odvodit: Na matici $\mathbb{A}$ nejprve aplikuji řádkovou úpravu (odpovídající matici) $C$, výsledek transponuji a aplikuji na něj znovu tutéž *řádkovou* úpravu (ne sloupcovou, protože původní sloupce jsou nyní, po transponování, napsány v řádcích). Výsledek „transponuji zpět“, a je to. Postupně tak dostávám následující matice:

$$A; \qquad CA; \qquad (CA)^T = A^T C^T; \qquad CA^T C^T; \qquad (CA^T C^T)^T = CAC^T.$$

- Věta poskytuje následující metodu určování definitnosti matice: Je-li dána symetrická matice $\mathbb{A} \in M(d \times d)$, jejíž typ bychom rádi určili, stačí ji pomocí symetrických úprav převést na diagonální matici $\mathbb{D}$. (To lze vždy podle třetího bodu věty.) Typ $\mathbb{D}$ určíme snadno podle Lemmatu 1.34. Ovšem ten stejný typ přísluší i původní matici $\mathbb{A}$, protože podle druhého bodu věty se typ matice symetrickými úpravami nemění. Takže pokud například $\mathbb{D}$ je PD, musí být PD i $\mathbb{A}$ atd.

Další nástroj k určení definitnosti symetrické matice poskytuje následující věta.

**1.38 Věta** (Sylvesterovo kritérium)**.** *Nechť* $\mathbb{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^{d} \in M(d \times d)$ *je symetrická. Matice* $\mathbb{A}$ *je*

*(i) pozitivně definitní, právě když pro každé* $k \in \{1, \dots, d\}$ *platí*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0;$$

*(ii) negativně definitní, právě když pro každé* $k \in \{1, \dots, d\}$ *platí*

$$(-1)^k \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0;$$

*(iii) pozitivně semidefinitní, právě když pro každou* $k$*-tici indexů* $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant d$, $k \in \{1, \dots, d\}$, *platí*

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} & \cdots & a_{i_1 i_k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_k i_1} & \cdots & a_{i_k i_k} \end{vmatrix} \geqslant 0;$$

*(iv) negativně semidefinitní, právě když pro každou* $k$*-tici indexů* $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant d$, $k \in \{1, \dots, d\}$, *platí*

$$(-1)^k \begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} & \cdots & a_{i_1 i_k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_k i_1} & \cdots & a_{i_k i_k} \end{vmatrix} \geqslant 0.$$

**1.39 Poznámka.**

- V bodě (i) (a taky v bodě (ii)) Sylvesterova kritéria se žádá vypočítat celkem $d$ subdeterminantů, které „postupně vyrůstají z levého horního rohu, až nakonec vyplní celou matici“.

- Permutujeme-li řádky a následně stejnou permutací proházíme i sloupce, jedná se o symetrickou transformaci. Takže výsledná „symetricky permutovaná“ matice má stejnou definitnost jako matice původní podle Věty 1.36.

- Z toho plyne, že při ověřování podmínek z bodu (i), resp. (ii) není podstatné začínat zrovna v levém horním rohu. Můžeme začít také třeba vpravo dole, nebo dokonce v některém jiném („prostředním“) prvku diagonály.

- Speciálně to například znamená, že pokud má matice $\mathbb{A}$ na diagonále nějaké nekladné číslo, nemůže být PD. Skutečně, po vhodné symetrické úpravě se totiž tento nekladný prvek ocitne vlevo nahoře, a ověřování podmínky pro PD selže hned v prvním kroku. Ovšem podle Věty 1.38 je tato podmínka *ekvivalentní* pozitivní definitnosti $\mathbb{A}$. Takže $\mathbb{A}$ není PD.

  Analogicky, nezáporný prvek na diagonále znamená, že matice nemůže být ND.

- V bodě (iii) (a stejně tak i v bodě (iv)) Věty 1.38 je popsána podmínka, k jejímuž ověření je potřeba spočítat $2^d - 1$ subdeterminantů (oproti pouhým $d$ z podmínek (i,ii)) matice $\mathbb{A}$. Tento počet je dán tím, že z množiny indexů $\{1, 2, \ldots, d\}$ vybíráme libovolnou neprázdnou podmnožinu a je přitom známo, že celkový počet podmnožin $d$ prvkové množiny (včetně prázdné) je $2^d$. Je jasné, že pro $d \geqslant 3$ tento postup nemusí být nejjednodušší možný.

  Mimochodem všimněte si, že to stále nejsou všechny subdeterminanty; v podmínkách (iii,iv) se jedná o právě všechny determinanty matic, jejichž diagonály jsou obsaženy v diagonále celé matice $\mathbb{A}$. (Tj. jde pouze o „symetricky umístěné podmatice“.)

**1.40 Důsledek.** *Mějme symetrickou matici* $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$. *Matice* $\mathbb{A}$ *je*

*(i)* *PD, právě když* $a > 0$, $|\mathbb{A}| > 0$;

*(ii)* *ND, právě když* $a < 0$, $|\mathbb{A}| > 0$;

*(iii)* *PSD, právě když* $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $|\mathbb{A}| \geqslant 0$;

*(iv)* *NSD, právě když* $a \leqslant 0$, $b \leqslant 0$, $|\mathbb{A}| \geqslant 0$;

*(v)* *ID, právě když* $|\mathbb{A}| < 0$.

*Důkaz.* První čtyři body jsou triviálním důsledkem Sylvesterova kritéria. Podívejme se na bod poslední. Podle definice matice je ID, právě když nemá žádnou z ostatních čtyř možných vlastností, tj. není PD, ND, PSD, ani NSD. Protože ale PD implikuje PSD a ND implikuje NSD, je matice ID, právě když není PSD, ani NSD (a tím pádem už automaticky není ani PD nebo ND).

V našem případě tedy $\mathbb{A}$ je ID, právě když $\neg$PSD $\wedge$ $\neg$NSD, tj.

$$\begin{aligned} \mathbb{A} \text{ je ID } &\Leftrightarrow \neg(a \geqslant 0 \wedge b \geqslant 0 \wedge |\mathbb{A}| \geqslant 0) \wedge \neg(a \leqslant 0 \wedge b \leqslant 0 \wedge |\mathbb{A}| \geqslant 0) \\ &\Leftrightarrow (a < 0 \vee b < 0 \vee |\mathbb{A}| < 0) \wedge (a > 0 \vee b > 0 \vee |\mathbb{A}| < 0) \\ &\Leftrightarrow |\mathbb{A}| < 0 \vee \Big((a < 0 \vee b < 0) \wedge (a > 0 \vee b > 0)\Big) \\ &\Leftrightarrow |\mathbb{A}| < 0 \vee \ (a, b \text{ mají opačné znaménko}). \end{aligned}$$

Dostali jsme tedy, že $\mathbb{A}$ je ID, právě když $|\mathbb{A}| < 0$ nebo $ab < 0$. Ovšem determinant $|\mathbb{A}| = ab - c^2$, takže je záporný, kdykoliv $ab < 0$. Vidíme tedy, že podmínka $|\mathbb{A}| < 0$ v sobě zahrnuje i možnost $ab < 0$, a tedy $\mathbb{A}$ je ID právě tehdy, když $|\mathbb{A}| < 0$, jak bylo dokázat. □

### 1.4.2 Podmínky 2. řádu pro lokální extrémy

Podmínkou druhého řádu máme na mysli podmínku využívající fundamentálním způsobem druhých parciálních derivací funkce. V tomto oddílu se omezíme pouze na formulace zmíněných podmínek pro účely početní praxe; pro podání jejich důkazů v tuto chvíli nemáme dostatečně vybudovanou teorii.

**1.41 Definice.** Buď $f$ funkce $d$ proměnných, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^d$. Pak tzv. *Hessovu matici* (matici druhých parciálních derivací) funkce $f$ v bodě $\boldsymbol{a}$ definujeme a značíme takto:

$$\nabla^2 f(\boldsymbol{a}) = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\boldsymbol{a}) \right)_{i,j=1}^{d}.$$

**1.42 Věta** (Nutné podmínky 2. řádu)**.** *Buď $f$ funkce $d$ proměnných se spojitými druhými parciálními derivacemi druhého řádu na nějakém okolí bodu $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^d$. Potom platí:*

*(i) Je-li $\boldsymbol{a}$ bodem lokálního maxima funkce $f$, pak matice $\nabla^2 f(\boldsymbol{a})$ je NSD.*

*(ii) Je-li $\boldsymbol{a}$ bodem lokálního minima funkce $f$, pak matice $\nabla^2 f(\boldsymbol{a})$ je PSD.*

**1.43 Věta** (Postačující podmínky 2. řádu)**.** *Buď $f$ funkce $d$ proměnných se spojitými druhými parciálními derivacemi druhého řádu na nějakém okolí bodu $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^d$. Nechť $\boldsymbol{a}$ je navíc stacionárním bodem funkce $f$. Potom platí:*

*(i) Pokud $\nabla^2 f(\boldsymbol{a})$ je ND, pak $f$ nabývá v bodě $\boldsymbol{a}$ ostrého lokálního maxima.*

*(ii) Pokud $\nabla^2 f(\boldsymbol{a})$ je PD, pak $f$ nabývá v bodě $\boldsymbol{a}$ ostrého lokálního minima.*

*(iii) Pokud $\nabla^2 f(\boldsymbol{a})$ je ID, pak $f$ nenabývá v bodě $\boldsymbol{a}$ lokálního extrému.*

**1.44 Poznámka.** Jak vidno, poslední dvě věty dávají celkem pět podmínek odpovídajících všem pěti typům kvadratické formy. Dvě z těchto podmínek jsou přitom nutné a tři postačující; žádná není obojí současně. Může se stát, že určením typu matice $\nabla^2 f(\boldsymbol{a})$ nezjistíme, jestli se v bodě $\boldsymbol{a}$ nachází extrém (popř. jaký).

Například pokud $\nabla^2 f(\boldsymbol{a})$ je PSD, pak víme, že $\boldsymbol{a}$ *může být* bodem lokálního minima $f$, což není příliš zajímavá informace. Ale přímo z definic PSD a NSD navíc plyne (rozmyslete)

$$\mathbb{A} \text{ je PSD a zároveň NSD } \Rightarrow \mathbb{A} \text{ je nulová matice.}$$

Obměnou dostáváme, že když $\mathbb{A}$ je nenulová, pak nemůže být současně PSD a NSD.

Pokud je tedy $\mathbb{A} = \nabla^2 f(\boldsymbol{a})$ nenulová matice (což typicky je) a zjistili jsme, že je kupříkladu PSD, pak už nemůže být NSD. Podle Věty 1.42 (i) tedy nemůže být v bodě $\boldsymbol{a}$ lokální maximum funkce $f$.

## 1.5 Limita a spojitost

Smysluplné definice limity a spojitosti vyžadují nějaké prostředky k vyjádření pojmu „blízkosti“ mezi body. Pro nás tuto úlohu přirozeně plní pojem (libovolně malé) vzdálenosti mezi body. V prvním semestru jsme se zabývali limitou a spojitostí funkcí jedné proměnné, stačilo tedy umět měřit vzdálenost v $\mathbb{R}$: pro $x, y \in \mathbb{R}$ jsme uvažovali jejich vzdálenost $|x - y|$. Nyní se pohybujeme v dimenzi $d$ a pro měření vzdálenosti používáme eukleidovskou normu z Definice 1.11: vzdálenost mezi body $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \dots, y_d)$, je[18]

$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} (x_i - y_i)^2}. \tag{1.11}$$

Připomeňme definici limity při jedné proměnné. Nechť $f$ je funkce z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \overset{\text{def.}}{\iff} \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in P(a, \delta)\colon f(x) \in B(A, \varepsilon). \tag{1.12}$$

Za zmínku možná stojí také definice spojitosti $f$ v bodě $a$. Je možno volit mezi dvěma ekvivalentními způsoby, jak tento pojem definovat:

(i) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$;

(ii) stejně jako (1.12), kde místo $A$ píšeme $f(a)$, tj.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in P(a, \delta)\colon f(x) \in B(f(a), \varepsilon) \tag{1.13}$$

Z prvního semestru si asi pamatujete, že zatímco v definici limity je podstatné psát „$P(a, \delta)$“, v definici spojitosti (1.13) je možné ekvivalentně psát také „$B(a, \delta)$“. Je to dáno tím, že limita z podstaty věci nemá záviset na hodnotě v bodě, u spojitosti je tomu naopak.

Definice limity a spojitosti pro funkci více proměnných nebo dokonce pro zobrazení z $\mathbb{R}^d$ do $\mathbb{R}^k$ jsou stejné, jen je potřeba rozšířit definice okolí a prstencového okolí do prostoru vyšší dimenze. To už jsme udělali v Definici 1.11, takže (1.12) (resp. (1.13)) lze i pro $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ považovat za definici limity (resp. spojitosti). My ale tyto definice chceme vyslovit v poněkud obecnějším případě, a k tomu se nám hodí připomenout a okomentovat ještě jeden pojem z prvního semestru: jednostrannou limitu a spojitost.

[18] Protože zatím nebudeme potřebovat rozlišovat mezi více různými normami, nebudeme normu opatřovat indexem $e$ nebo 2 indikujícím, že se jedná o eukleidovskou normu. K nedorozumění nedojde.

Je-li $f$ funkce z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$, $a, A \in \mathbb{R}$, definujeme limitu $f$ v bodě $a$ zprava takto:

$$\lim_{x \to a_+} f(x) = A \overset{\text{def.}}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in P(a, \delta) \cap (a, \infty)\colon \; f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

V prvním semestru jsme v definici limity zprava místo $P(a, \delta) \cap (a, \infty)$ psali $P_+(a, \delta)$ neboli $(a, a + \delta)$, což je všechno stejné. Změna v této definici oproti (1.12) je v tom, že nyní něco požadujeme pouze od těch $\delta$-blízkých bodů, které jsou navíc prvky množiny $(a, \infty)$, tj. pouze od těch napravo od $a$. Jinými slovy na pravostrannou limitu funkce $f$ v bodě $a$ mohou mít vliv pouze prvky $(a, \infty)$ a na všechny ostatní body můžeme klidně zapomenout. Pravostrannou limitu v bodě $a$ lze tedy chápat jako *limitu vzhledem k množině* $M = (a, \infty)$.

V případě funkce $d$ proměnných, kde $d \geqslant 2$, máme řadu dalších možností. Kupříkladu by nás mohla zajímat limita po svislé přímce, nebo jen po jedné svislé polopřímce. Nebo počítáme limitu v počátku a zajímá nás limita pouze vzhledem k prvnímu kvadrantu. Takto bychom mohli pokračovat. Je tedy zřejmé, že už nevystačíme s pouhými dvěma pojmy (limita zleva vs. limita zprava), máme nekonečně mnoho dalších zajímavých možností. Proto je přirozené zavést limitu i spojitost vzhledem k množině, jak to provedeme v definici níže. Musíme ovšem zajistit nějaký vztah bodu $a$, kde chceme definovat limitu, a množinou $M$, vzhledem k níž budeme limitu uvažovat. (Ani v dimenzi 1 bychom asi nechtěli uvažovat třeba limitu v bodě 3 vzhledem k množině $(4, \infty)$ atd.) Jak by tedy měl tento vztah vypadat? Na to dáme odpověď nyní.

**1.45 Definice** (Hromadný a izolovaný bod množiny)**.** Nechť $d \in \mathbb{N}$ (připouštíme i dimenzi 1), $M \subseteq \mathbb{R}^d$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^d$. Řekneme, že $\boldsymbol{a}$ je *hromadným bodem množiny* $M$, jestliže

$$\forall \delta > 0\colon \;\; P(\boldsymbol{a}, \delta) \cap M \neq \emptyset.$$

Množinu všech hromadných bodů množiny $M$ značíme symbolem $M'$.

Jestliže $\boldsymbol{b}$ je prvek $M$ a není to hromadný bod $M$, pak $\boldsymbol{b}$ nazveme *izolovaným bodem* $M$.

**1.46 Poznámka.**

- Podle definice, libovolně blízko hromadnému bodu najdeme body množiny $M$. Je ovšem důležité zpozorovat, že v této definici máme *prstencové* okolí. Tím je zaručeno, že ony blízké body jsou různé od samotného bodu $\boldsymbol{a}$.
- Snadno se může stát, že nějaký hromadný bod $M$ není prvkem $M$. Příkladem je třeba množina $\{1/n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$, která má (jediný) hromadný bod 0, a ten do ní nepatří.
- Na předchozím příkladě také vidíme, že ne všechny body $M$ musí být hromadné body $M$: v tomto případě je snadné si uvědomit, že dokonce žádný bod $M$ není jejím hromadným bodem; tj. všechny body $M$ jsou izolované.
- Z předchozích dvou bodů je zřejmé, že obecně neplatí ani jedna z inkluzí $M \subseteq M'$, $M' \subseteq M$. Pochopitelně se ale může stát, že jedna (nebo obě) inkluze platí – například pro $M = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ platí rovnost $M = M'$, jak si snadno rozmyslíte sami.

**1.47 Definice** (Limita a spojitost vzhledem k množině)**.** Buď $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ zobrazení, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^d$, $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^k$. Buď dále $M \subseteq \mathbb{R}^d$ množina. Jestliže $\boldsymbol{a}$ je hromadný bod $M$, definujeme *limitu* $F$ v bodě $\boldsymbol{a}$ jako $\boldsymbol{A}$ a píšeme $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}\in M} F(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}$, kdykoliv[19]

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall \boldsymbol{x} \in P(\boldsymbol{a}, \delta) \cap M : F(\boldsymbol{x}) \in B(\boldsymbol{A}, \varepsilon).$$

Pokud $\boldsymbol{a} \in M$,[20] pak říkáme, že zobrazení $F$ je v bodě $\boldsymbol{a}$ *spojité vzhledem k množině* $M$, jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall \boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{a}, \delta) \cap M : F(\boldsymbol{x}) \in B(F(\boldsymbol{a}), \varepsilon).$$

Řekneme, že $F$ je *spojité na množině* $M$, jestliže $F$ je spojité v každém bodě $M$ vzhledem k množině $M$, tj.

$$\forall \boldsymbol{a} \in M : \quad F \text{ je spojité v bodě } a \text{ vzhledem k množině } M.$$

V případech, kdy uvažovaná množina $M$ je z kontextu jasná, můžeme zmínky o ní vynechávat: psát pouze $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}}$ a hovořit prostě o limitě (spojitosti) – bez upřesnění množiny $M$.

**1.48 Úmluva.** Zápis $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} F(\boldsymbol{x})$ chápeme jako limitu vzhledem k $\mathbb{D}_F$. Analogicky se domluvme i pro spojitost: „spojitost" bez upřesnění množiny tedy bude chápána jako spojitost vzhledem k celému definičnímu oboru.

Důsledkem této úmluvy je například $\lim_{x\to 0} \sqrt{x} = 0$, ačkoliv $\sqrt{x}$ je definovaná pouze pro nezáporná čísla $x$. Podle úmluvy totiž musíme uvažovat limitu vzhledem k definičnímu oboru, což je zde $[0, \infty)$, a jedná se tedy vlastně o limitu zprava, která skutečně existuje a je rovna 0, jak zde tvrdím. Podobně můžeme nyní říkat, že $\sqrt{x}$ je v bodě 0 spojitá, i když v prvním semestru jsme byli povinni dodávat, že je tomu tak pouze zprava.

Následující tvrzení má triviální důkaz – přímo z definice.

**1.49 Pozorování.** *Nechť $F : \mathbb{D}_F \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ je zobrazení. Pokud $\boldsymbol{a} \in M \cap M'$, pak NVJE:*

*(i)* *$F$ je v bodě $\boldsymbol{a}$ spojité vzhledem k $M$;*

*(ii)* $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}\in M} F(\boldsymbol{x}) = F(\boldsymbol{a})$.

**1.50 Poznámka.** Všimněte si předpokladu: požadujeme, aby bod $\boldsymbol{a}$ byl bodem $M$ (aby bylo možno hovořit o spojitosti vzhledem k $M$) a současně aby také byl bodem hromadným bodem $M$ (aby bylo možno hovořit o limitě vzhledem k $M$).

V případech, kdy jedna, nebo druhá, podmínka neplatí, nelze uvedenou ekvivalenci smysluplně zformulovat.

[19] Od výše uvedené definice (1.12) se tato definice liší mimo jiné tučnými znaky pro některé proměnné (tím naznačujeme, že jde o vektory) a interpretací symbolů „$P(\boldsymbol{a}, \delta)$" a „$B(\boldsymbol{a}, \delta)$". První z nich značí prstencové okolí v $\mathbb{R}^d$, druhý značí (obyčejné) okolí v $\mathbb{R}^k$. Je tedy možné, že jde o okolí v prostorech různé dimenze.

[20] V definici spojitosti tedy nepožadujeme, aby $\boldsymbol{a}$ byl hromadný bod $M$, místo toho chceme, aby $\boldsymbol{a}$ byl prvek $M$ (což v definici limity naopak potřeba není).

**1.51 Cvičení.** *Dokažte tvrzení:* Nechť $F\colon \mathbb{D}_F \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ je zobrazení, $M \subseteq \mathbb{D}_F$, $\boldsymbol{a} \in M \setminus M'$ (tj. $\boldsymbol{a}$ je izolovaný bod $M$). Pak $F$ je v bodě $\boldsymbol{a}$ spojité vzhledem k $M$.

Tvrzení může působit poněkud zvláštně, protože nevíme vůbec nic o $F$ kromě toho, že je definované aspoň na $M$. Navíc $\boldsymbol{a}$ je v množině $M$ izolovaný, takže co vůbec znamená hovořit o spojitosti v takovém bodě? Inu, přesně to, co je napsáno v definici. Zkuste si to rozmyslet.

*Důkaz.* Nechť $\boldsymbol{a} \in M$ je izolovaným bodem množiny $M$; podle definice tedy není jejím bodem hromadným, tj. neplatí výrok $\forall \delta > 0\colon P(\boldsymbol{a}, \delta) \cap M \neq \emptyset$. Negací tohoto (neplatného) formálního výroku ihned vidíme, že platí

$$\exists \delta > 0\colon P(\boldsymbol{a}, \delta) \cap M = \emptyset.$$

Toto $\delta$ nyní bude fungovat pro jakékoliv $\varepsilon > 0$ – budiž takové dáno: Jediný bod $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{a}, \delta) \cap M$ je právě $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ (skutečně, průnik s *prstencovým* $\delta$-okolím je totiž prázdný a bod $\boldsymbol{a}$ sám do množiny $M$ patří), takže triviálně platí $F(\boldsymbol{x}) = F(\boldsymbol{a}) \in B(F(\boldsymbol{a}), \varepsilon)$. $\square$

**1.52 Poznámka** (Nevlastní limita a limita v nevlastním bodě).

- Pro funkci $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ lze definovat nevlastní limitu přirozeným způsobem, stačí uvažovat definice okolí $\infty$, resp. $-\infty$, které jsme zavedli už v prvním semestru: Pro $\varepsilon > 0$ píšeme

$$B(\infty, \varepsilon) = P(\infty, \varepsilon) := \left(\frac{1}{\varepsilon}, \infty\right) \subseteq \mathbb{R} \quad \text{a}$$
$$B(-\infty, \varepsilon) = P(-\infty, \varepsilon) := \left(-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}\right) \subseteq \mathbb{R}.$$

  Nyní můžeme použít Definici 1.47 pro $\boldsymbol{A} = \infty$;[21] píšeme

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} \in M} F(\boldsymbol{x}) = \pm\infty.$$

- Podobně můžeme definovat limitu v nevlastním bodě pro křivku $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^k$, do Definice 1.47 dosadíme $\pm\infty$ za $\boldsymbol{a}$; píšeme

$$\lim_{t \to \infty} \varphi(t) = \boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^k$$

  a podobně pro limitu v $-\infty$.

- Stejně jako v prvním semestru, pokud bychom chtěli dokázat „známé věty“ o těchto pojmech (tj. o nevlastní limitě a limitě v nevlastním bodě), museli bychom to v některých případech udělat „zvlášť“.

- Všimněte si, že případ nevlastní limity v nevlastním bodě se nutně týká pouze funkcí z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$, neboť v $\mathbb{R}^d$ pro $d > 1$ jsme nevlastní body nijak nedefinovali. Tento jediný možný případ jsme už probrali v prvním semestru. (Třeba $\lim_{x \to -\infty} x^2 = \infty$ je taková limita.)

[21] V tomto případě tedy $\boldsymbol{A}$ není vektor, ale nevlastní bod v $\mathbb{R}^*$; tučný znak používám pouze proto, abych dodržel značení z definice, v níž se připouští možnost $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^k$).

**1.53 Příklad.** • Platí $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1}{x^2+y^2} = \infty$; to je potřeba ověřit z definice nebo pomocí šikovného použití limity složené funkce (cvičení pro vás).

- Uvažujme křivku $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definovanou jako $\varphi(t) = \bigl(e^{-t}\cos t,\ e^{-t}\sin t\bigr)$. Pak

$$\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = \lim_{t\to\infty} \bigl(e^{-t}\cos t,\ e^{-t}\sin t\bigr) = (0,0).$$

V tomto případě $\langle\varphi\rangle$ je spirála v $\mathbb{R}^2$, přičemž nechat $t$ běžet do $\infty$ znamená jít po této spirále směrem k počátku.

△

Shrňme nyní základní vlastnosti limit funkcí více proměnných, které jsou analogické větám známým z prvního semestru pro funkce z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$. Důkazy skoro všech bodů vynecháme, jsou ostatně analogiemi příslušných důkazů z prvního semestru. Níže ale podrobněji dokážeme spojitost polynomů více proměnných, a to se zavedením nových pomocných pojmů.

**1.54 Fakt.** *(i) Limita je jednoznačně určená;* Tento bod dokazuji níže z definice.

*(ii) Funkce je omezená na nějakém prstencovém okolí bodu, kde má limitu;*

*(iii) Limita a nerovnosti, Lemma o dvou policajtech, „omezená·nulová“;*

*(iv) Věta o aritmetice limit;* Část o limitě součtu dokazuji níže.

*(v) Heineho věta: Nechť $F\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$, $M \subseteq \mathbb{R}^d$, $\boldsymbol{a} \in M'$. Pak $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a},\,\boldsymbol{x}\in M} = \boldsymbol{A}$, právě když pro libovolnou posloupnost $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}^d$, která splňuje $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{a}$ a zároveň $\forall n \in \mathbb{N}\colon\ \boldsymbol{x}_n \neq \boldsymbol{a}$, platí $\lim_{n\to\infty} F(\boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{A}$.*

*(vi) Věta o limitě složené funkce (s podmínkou (P) nebo (S));*

*(vii) Spojitost složeného zobrazení:*

$$\left.\begin{aligned} F\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k &\text{ je spojité na } M_1\\ G\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l &\text{ je spojité na } M_2\\ F(M_1) &\subseteq M_2 \end{aligned}\right\} \implies G\circ F \text{ je spojitá na } M_1.$$

*Důkaz.* Pro lepší přehlednost nejprve uvažujme případ obyčejné limity, posléze okomentujeme ještě změny, které je v důkazu potřeba provést, aby fungoval i pro limitu vzhledem k množině.

Nechť $F\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ má v bodě $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^d$ limity $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^k$. Zvolme nyní libovolně malé $\varepsilon > 0$. Využívajíce definice limity, vidíme, že můžeme najít $\delta_1, \delta_2 > 0$ taková, že

$$\begin{aligned} &\forall \boldsymbol{x} \in P(\boldsymbol{a},\delta_1)\colon\ F(\boldsymbol{x}) \in B(\boldsymbol{A},\varepsilon/2) \quad \text{a zároveň}\\ &\forall \boldsymbol{x} \in P(\boldsymbol{a},\delta_2)\colon\ F(\boldsymbol{x}) \in B(\boldsymbol{B},\varepsilon/2) \end{aligned}$$

Zvolíme-li nyní libovolný bod $\boldsymbol{x} \in P(\boldsymbol{a}, \delta_1) \cap P(\boldsymbol{a}, \delta_2)$, pak $F(\boldsymbol{x}) \in B(\boldsymbol{A}, \varepsilon/2) \cap B(\boldsymbol{B}, \varepsilon/2)$. Odtud

$$\|\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\| \leqslant \|\boldsymbol{A} - F(\boldsymbol{x})\| + \|F(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{B}\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ovšem $\varepsilon > 0$ bylo námi zvoleno zcela libovolně, takže platí

$$\forall \varepsilon > 0\colon\ \|\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\| < \varepsilon,$$

a je tedy $\|\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\| = 0$, to jest $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$, což jsme měli dokázat.

Stejný důkaz funguje i pro limitu vzhledem k množině $M \subseteq \mathbb{R}^d$, jejímž je $\boldsymbol{a}$ hromadným bodem; drobné změny v důkazu by spočívaly v nahrazení $P(\boldsymbol{a}, \delta_1)$ průnikem $P(\boldsymbol{a}, \delta_1) \cap M$ a podobně pro $\delta_2$. Podstatnější rozdíl by byl v nesamozřejmosti existence bodu $\boldsymbol{x}$, který bychom nyní volili jako některý prvek $P(\boldsymbol{a}, \delta_1) \cap P(\boldsymbol{a}, \delta_2) \cap M$; jeho existence plyne z předopkladu, že $\boldsymbol{a} \in M'$, neboli že $\boldsymbol{a}$ je hromadný bod $M$. □

**1.55 Poznámka.** Právě uvedený důkaz jednoznačnosti limity funkce více proměnných je naschvál proveden jiným postupem než jak jsme to provedli v prvním semestru pro limitu funkce jedné proměnné; tehdy jsme v zásadě předpokládali, že $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{B}$ a dovedli tento předpoklad ke sporu. Mohli jsme ovšem postupovat i jako zde: o těch dvou limitách nepředpokládat nic a stejným argumentem odvodit, že jejich vzdálenost je menší než jakékoliv kladné číslo (a jsou tedy stejné).

**1.56 Definice.** Nechť $F\colon \mathbb{D}_F \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$. Řekneme, že

- $F$ je *izometrie* na $M$, jestliže platí

$$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in M\colon\ \big\|F(\boldsymbol{x}) - F(\boldsymbol{y})\big\| = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|.$$

- $F$ je *lipschitzovské* (s konstantou $L \geqslant 0$), jestliže

$$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in M\colon\ \big\|F(\boldsymbol{x}) - F(\boldsymbol{y})\big\| \leqslant L \cdot \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$$

  Konstantu $L$ můžeme nazývat konstantou lipschitzovskosti nebo lipschitzovskou konstantou zobrazení $F$ a samo zobrazení $F$ pak také označujeme jako $L$-lipschitzovské.

**1.57 Poznámka.** Uvedené definice mají jednoduché interpretace: Izometrie je každé takové zobrazení, které zachovává vzdálenost mezi body. Lipschitzovské zobrazení je obecnější pojem, který pouze požaduje, aby zobrazení příliš „neroztahovalo" nebo „nenafukovalo". Mám-li kupříkladu $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$ splňující $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| = 2$ a $L$-lipschitzovské zobrazení $F$ na $\mathbb{R}^d$, pak vzdálenost obrazů je nejvýše $2L$.

**1.58 Lemma.** *Nechť $F$ je zobrazení z $\mathbb{R}^d$ do $\mathbb{R}^k$, které je lipschitzovské na nějaké množině $M \subseteq \mathbb{R}^d$. Pak $F$ je na $M$ spojité.*

*Důkaz.* Předpokládejme, že $L > 0$ a $F$ je $L$-lipschitzovské na $M \subseteq \mathbb{R}^d$. Nechť $\boldsymbol{a} \in M$ a $\varepsilon > 0$ jsou dána. Položme $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$. Nyní pro libovolné $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{a}, \delta) \cap M$ dostáváme, že

$$\|F(\boldsymbol{x}) - F(\boldsymbol{a})\| \leqslant L \cdot \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| < L\delta = L\frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon.$$

Tedy skutečně $F$ je spojité v bodě $\boldsymbol{a}$, a důkaz je hotov. □

**1.59 Příklad.** Uvažujme nejprve funkci jedné proměnné $f(x) = 4x + 9$. Ukážeme, že je 4-lipschitzovská na $\mathbb{R}$: Skutečně, pro libovolné body $x, y \in \mathbb{R}$ jest

$$|f(x) - f(y)| = \big|(4x + 9) - (4y + 9)\big| = |4x - 4y| = 4|x - y|.$$

Je tedy splněna definice lipschitzovskosti funkce $f$ s konstantou 4. (Dostali jsme dokonce rovnost místo pouhé neostré nerovnosti, která se požaduje v definici. Platí-li rovnost, tím spíše samozřejmě platí neostrá nerovnost.)

Nyní dokážeme lipschitzovskost funkce $g(x) = \sin x$; to je o něco těžší a odkážeme se při tom na Lagrangeovu větu o střední hodnotě. Nechť tedy $x, y \in \mathbb{R}$ a (bez újmy na obecnosti) předpokládejme, že $x < y$. Ověřme předpoklady Lagrangeovy věty pro funkci $g$ na intervalu $[x, y]$: funkce je skutečně na celém intervalu spojitá (včetně krajních bodů) a v každém bodě otevřeného intervalu $(x, y)$ má derivaci. Lagrangeova věta za těchto předpokladů garantuje existenci nějakého bodu $\xi \in (x, y)$, pro nějž platí

$$\frac{g(y) - g(x)}{y - x} = g'(\xi), \quad \text{odkud} \quad \left|\frac{\sin y - \sin x}{y - x}\right| = |\cos \xi|.$$

Dostáváme tedy, že

$$|\sin y - \sin x| = |\cos \xi| \cdot |y - x| \leqslant 1 \cdot |y - x|.$$

Funkce sin je tedy lipschitzovská s konstantou 1 na celém $\mathbb{R}$.

Všimněte si pozorně právě provedeného postupu: protože absolutní hodnota derivace funkce $g(x) = \sin x$ je omezená hodnotou 1 (tj. $|\cos x| \leqslant 1$), je funkce $g$ 1-lipschitzovská. To dává smysl, neboť derivace vypovídá o rychlosti změny funkčních hodnot; pokud tato rychlost není velká, znamená to, že funkční hodnoty nejsou od sebe o mnoho víc vzdáleny než jim příslušné body, a právě to je podstata lipschitzovskosti. △

Právě uvedený příklad s funkcí sin se dá zobecnit do následujícího lehkého tvrzení.

**1.60 Tvrzení.** *Buď $I \subseteq \mathbb{R}$ interval, $f : I \to \mathbb{R}$ spojitá a nechť $|f'(x)| \leqslant L$ pro každý vnitřní bod $x$ intervalu $I$. Pak $f$ je $L$-lipschitzovská.*

*Důkaz.* Nechť $x, y \in I$, $x < y$; pak $[x, y] \subseteq I$, takže $f$ je spojitá na $I$. Dále interval $(x, y)$ samozřejmě obsahuje výhradně vnitřní body $I$, takže v každém bodě $t \in (x, y)$ existuje derivace $f'(t)$ (o které navíc podle předpokladu víme, že $|f'(t)| \leqslant L$). Jsou tedy splněny předpoklady Lagrangeovy věty pro funkci $f$ na intervalu $[x, y]$, a existuje tedy $\xi \in (x, y)$ splňující (po aplikaci absolutních hodnot na obě strany rovnice)

$$\left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| = |f'(\xi)| \leqslant L,$$

odkud ihned dostáváme $|f(y) - f(x)| \leqslant L \cdot |y - x|$. Protože body $x, y \in I$ byly voleny libovolně, je funkce $f$ lipschitzovská na $I$. □

**1.61 Poznámka.** Lipschitzovské funkce z mnoha důvodů hrají důležitou roli v pokročilejší matematické analýze. Nejsou sice nutně tak „pěkné“ jako funkce se spojitou derivací apod., zároveň je jich ale mnohem víc; definice lipschitzovskosti zkrátka není tak restriktivní, a přesto zaručuje vcelku dobré chování funkcí. Ilustrací tohoto faktu jsou věty Lebesgueova a Rademacherova, které zde mohu vyslovit pouze intuitivně, neboť ještě neznáme všechny pojmy v těchto větách se vyskytující.

*Buď $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ lipschitzovská. Pak $f$ má skoro všude derivaci.*

Přesný význam spojení „skoro všude“, se dozvíte v dalších kurzech matematické analýzy, intuitivně vzato ale znamená, že množina bodů, v nichž derivace neexistuje, je velmi (až zanedbatelně) malá. Tuto větu dokázal (počátkem 20. stol.) nejprve H. Lebesgue pro $d = 1$ a H. Rademacher ji později rozšířil i na případ $d > 1$.

Tato důležitá věta nás informuje o tom, že ačkoliv lipschitzovská funkce nemusí být všude diferencovatelná (tj. mít vlastní derivaci nebo totální difirenciál), má k tomuto ideálu relativně blízko. Ověřit, že funkce splňuje onu jednoduchou podmínku z Definice 1.56, je přitom poměrně jednoduché; kdybychom však chtěli přímo (bez pomoci Lebesgueovy nebo Rademacherovy věty) dokazovat existenci derivace, často bychom narazili na obtížný problém.

**1.62 Lemma** (Spojitost souřadnicových projekcí)**.** *Nechť $k \in \{1, 2, \ldots, d\}$, tj. $k$ je index některé souřadnice v $\mathbb{R}^d$, a uvažujme funkci $\pi_k : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem*[22]

$$\pi_k(x_1, x_2, \ldots, x_d) = x_k.$$

*Pak $\pi_k$ je 1-lipschitzovská, a tedy i spojitá, na $\mathbb{R}^d$.*

*Důkaz.* Zvolme $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$ libovolně, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_d)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_d)$. Pak

$$|\pi_k(\boldsymbol{x}) - \pi_k(\boldsymbol{y})| = |x_k - y_k| = \sqrt{(x_k - y_k)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{d} (x_i - y_i)^2} = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|.$$

Dostali jsme $|\pi_k(\boldsymbol{x}) - \pi_k(\boldsymbol{y})| \leqslant 1 \cdot \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$, takže $\pi_k$ je lipschitzovská s konstantou 1. Podle Lemmatu 1.58 je tedy i spojitá. □

[22] Funkci $\pi_k$ nazýváme $k$-tou souřadnicovou projekcí.

**1.63 Příklad** (Důležitý; spojitost polynomu více proměnných)**.** Uvažujme funkci $h(x, y) = xy^2 + 2x + y + 6$ a dokažme, že je spojitá na $\mathbb{R}^2$. K tomu použijeme Větu o aritmetice limit (resp. spojitosti) pro funkce více proměnných a právě dokázaný fakt, že nejjednodušší nekonstantní polynomy (tj. souřadnicové projekce) jsou spojité.

Uvědomme si nejprve, že konstantní funkce více proměnných je spojitá. Buď $k : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ konstantní, $k((x)) = K$ v každém bodě $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$. Pak $|k(\boldsymbol{x}) - k(\boldsymbol{y})| = |K - K| = 0 = 0 \cdot |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|$, takže $k$ je dokonce 0-lipschitzovská na $\mathbb{R}^d$, a je tedy spojitá. (To lze ostatně ukázat triviálně i přímo z definice spojitosti, protože pro libovolné $\varepsilon$ nám postačí třeba volba $\delta = 729$. Rozmyslete si to jako opakování na definici spojitosti.)

Nyní se podívejme znovu na funkci $h$; symbolem $\underbrace{\quad}$ budu značit postupná použití našich informací o spojitosti; začneme u elementů, tj. konstant a projekcí ($x$ a $y$, tj. funkce $(x, y) \mapsto x$ a $(x, y) \mapsto y$ jsou spojité podle předchozího lemmatu); v dalším kroku aplikujeme aritmetiku spojitosti pro součin a na závěr použijeme aritmetiku spojitosti pro součet čtyř spojitých funkcí:

$$h(x, y) = xy^2 + 2x + y + 6 = \underbrace{\underbrace{\underbrace{x}\,\underbrace{y}\,\underbrace{y}} + \underbrace{\underbrace{2}\,\underbrace{x}} + \underbrace{y} + \underbrace{6}}$$

Je zřejmé, že analogickým postupem bychom mohli dokázat spojitost libovolného polynomu více proměnných. Obecné tvrzení garantující spojitost všech polynomů lze dokázat například indukcí podle stupně polynomu. △

**1.64 Lemma** (Norma je lipschitzovská)**.** *Eukleidovská norma na $\mathbb{R}^d$ jakožto funkce $\boldsymbol{x} \mapsto \|\boldsymbol{x}\|$ je lipschitzovská (s konstantou* 1*), a tedy i spojitá.*

*Důkaz.* Mějme libovolné body $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$. Pak podle trojúhelníkové nerovnosti platí:

$$\|\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}\| \leqslant \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{y}\|, \quad \text{tedy}$$
$$\|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{y}\| \leqslant \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$$

a analogicky odvodíme i nerovnost $\|\boldsymbol{y}\| - \|\boldsymbol{x}\| \leqslant \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$, tj. celkem

$$\big|\|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{y}\|\big| \leqslant \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|.$$

To ovšem podle Definice 1.56 znamená přesně to, že funkce $\boldsymbol{x} \mapsto \|\boldsymbol{x}\|$ je lipschitzovská s konstantou 1. Je tedy také spojitá podle Lemmatu 1.58, a důkaz je hotov. □

**1.65 Příklad** (Další spojité funkce)**.**

- Funkce $(x, y) \mapsto e^{xy^2+2x+y+6}$ je spojitá na $\mathbb{R}^2$. To plyne z věty o limitě (spojitosti) složené funkce společně se spojitostí obou zúčastněných funkcí, tedy funkce vnitřní (polynom ve dvou proměnných v exponentu) a funkce vnější (exponenciála na $\mathbb{R}$). Nejsou žádná omezení na definiční obor, a funkce je tedy spojitá na $\mathbb{R}^2$.

- Funkce $f : (x, y) \mapsto \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ je definovaná pouze na množině všech takových bodů $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, že $1 - x^2 - y^2 \geqslant 0$, tj. na množině

$$\mathbb{D}_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ x^2 + y^2 \leqslant 1\}$$

což je uzavřený jednotkový kruh (se středem v počátku). Ze skládání spojitých funkcí plyne, že $f$ je na této množině spojitá, neboť jak funkce vnější, tak i funkce vnitřní jsou spojité. Poznamenávám pro jistotu, že v bodech hraniční kružnice jde pouze o spojitost vzhledem k množině (viz Definici 1.47 a Úmluvu 1.48). △

### 1.5.1 Limity pomocí polárních souřadnic

## 1.6 Derivace funkcí více proměnných

Už jsme stručně probrali pojem parciální derivace (PD) funkce více proměnných, šlo nám však v tu chvíli jen o značení a metodu výpočtu; nezajímali jsme se příliš o geometrickou interpretaci toho pojmu. Jsme-li obstojně seznámeni s pojmem derivace v případě funkce jediné proměnné, definice PD samozřejmě jistou interpretaci nabízí: je to derivace parciální funkce, a vypovídá tedy o rychlosti změny parciální funkce. Máme-li funkci $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, pak $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ vypovídají o změně $f$ ve směru osy $x$, resp. $y$, na okolí bodu $(a, b)$. V běžných dobře představitelných situacích, kdy graf funkce $f$ lze chápat jako jistou (křivou) plochu v $\mathbb{R}^3$, nám tyto dvě informace (rychlost změny ve směru jedné i druhé souřadnicové osy) dávají dobrou představu o chování funkce na celém okolí bodu $(a, b)$, tedy i ve všech ostatních směrech. Tak tomu ale není vždy; existence konečných parciálních derivací funkce $f$ v bodě $(a, b)$ sama o sobě nezaručuje dokonce ani spojitost funkce $f$ v tom bodě (tím méně pak třeba existenci tečné roviny ke grafu). To se dá ilustrovat jednoduchým, byť poněkud umělým, příkladem:

**1.66 Příklad.** Mějme funkci $f(x, y) = \operatorname{sgn}(xy)$. Tuto funkci není těžké si představit: na souřadnicových osách má zjevně hodnotu nula, dále má hodnotu 1 v otevřeném 1. a 3. kvadrantu a hodnotu $-1$ v otevřeném 2. a 4. kvadrantu; jiné hodnoty nemá.

Není dále těžké nahlédnout, že tato funkce nemá limitu v žádném bodě ležícím na některé ze souřadnicových os. To lze dokázat snadno jak z definice, tak kupříkladu dosazením přímky $y = x$ a zkoumáním limity takto složené funkce v nule. Je tedy zřejmé, že funkce není v bodě $(0, 0)$ spojitá. Přesto tam ale má obě parciální derivace: Např. $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ je derivace parciální funkce ve směru osy $x$, a ta je konstantní nulová; derivace je tedy rovna 0. Stejně se ukáže i nulovost derivace podle $y$.

Shrnutí: parciální derivace podle obou proměnných v bodě $(0, 0)$ existují (jsou nulové), přesto však funkce není v tom bodě spojitá. △

Vidíme tedy na konkrétním příkladě, že sama existence konečných parciálních derivací není postačující podmínkou ani pro spojitost funkce. Přitom z prvního semestru si určitě pamatujete následující tvrzení, které připomenu raději i s důkazem (ten se nám hodí dále):

**1.67 Tvrzení** (O funkci 1 proměnné)**.** *Nechť $f$ je funkce jedné proměnné, která má v bodě $a \in \mathbb{R}$ vlastní derivaci. Pak $f$ je v bodě $a$ spojitá.*

*Důkaz.* Stačí dokázat, že $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, což je ovšem ekvivalentní rovnosti $\lim_{x\to a}(f(x) - f(a)) = 0$. Počítejme tedy druhou z těchto limit:

$$\lim_{x\to a}\big(f(x) - f(a)\big) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a) = f'(a) \cdot \lim_{x\to a}(x - a) = f'(a) \cdot 0 = 0.$$

Využili jsme předpokladu, že derivace $f'(a)$ je konečná, takže pravá strana po použití Věty o aritmetice limit (pro součin), která je rovna $f'(a) \cdot 0$, má smysl (a je nulová). □

**Tečna ke grafu funkce 1 proměnné:** Zůstaňme ještě chvíli v kontextu funkcí jediné proměnné. Důležitý pojem související s derivací, je *tečna*. Má-li $f$ v bodě $a \in \mathbb{R}$ vlastní derivaci, definujeme tečnu v příslušném bodě jako přímku (lineární funkci)

$$y = f(a) + f'(a)(x - a), \qquad \text{neboli} \qquad T(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Je snadné si rozmyslet, že toto je rozumná definice; předně má tato přímka evidentně právě takový sklon, jaký má i funkce $f$ v bodě $a$: její směrnice je totiž rovna číslu $f'(a)$. Je dále snadno vidět, že tuto rovnici splňuje bod $(x, y) = (a, f(a))$, tj. přímka tím bodem prochází. Tyto dvě věci dohromady dávají právě to, co si představujeme pod pojmem tečna: „dotýká" se grafu funkce v tom správném bodě a má ten správný směr.

Z našich úvah 2. semestru také víme, že tečna vlastně není nic jiného než Taylorův polynom 1. řádu a že ze všech přímek právě tahle nejlépe aproximuje chování funkce $f$ na okolí bodu $a$. Míru přesnosti této aproximace přitom přesně vyjadřuje následující rovnost, kterou vzápětí (znovu) dokážu:

$$f(x) - T(x) = o(x - a), \; x \to a. \tag{1.14}$$

Skutečně,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T(x)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)}{x - a} = \ldots = f'(a) - f'(a) = 0,$$

čímž je rovnost (1.14) dokázána.

Rovnost (1.14) se dá zapsat řadou evidentně ekvivalentních způsobů:

$$\begin{aligned} & f(x) - T(x) = o(x - a),\; x \to a \\ \iff\; & f(a + h) - T(a + h) = o(h),\; h \to 0 \\ \iff\; & f(a + h) - f(a) - f'(a)h = o(h),\; h \to 0. \end{aligned}$$

Poslední uvedenou formulaci rozdělím na několik částí, které opatřím slovními popisy takto:

$$\underbrace{\underbrace{f(a+h)-f(a)}_{\text{přírůstek funkce } f} - \underbrace{f'(a)\cdot h}_{\text{přírůstek } T}}_{\text{rozdíl obou přírůstků}} = \underbrace{o(h)}_{\text{malá chyba}}, \; h \to 0. \tag{1.15}$$

Jak je snad z uvedeného zřejmé, přírůstkem funkce $f$ zde míním změnu funkční hodnoty při změně argumentu o $h$, tj. rozdíl $f(a+h) - f(a)$; jde tedy o přírůstek při „kroku“ $h$, který učiníme z bodu $a$. Protože směrnice tečny k $f$ v bodě $a$ je $f'(a)$, je jasné, že $f'(a) \cdot h$ je prostě přírůstek hodnoty tečny při kroku $h$. A protože funkce je tečnou na (malém) okolí bodu dotyku aproximována velmi přesně, oba přírůstky se od sebe liší „málo“ – samozřejmě pro „dostatečně malé“ kroky $h$.

Toto poslední nepřesné vyjádření o „malém“ rozdílu obou zmíněných přírůstků je rovnicí (1.15) precizováno tak, že tento rozdíl při kroku $h$ je roven $o(h)$, $h \to 0$, neboli je roven nějaké funkci $\eta(h)$, která splňuje $\eta(h) = o(h)$, $h \to 0$. Připomeňme opět látku 2. semestru, podle níž tento zápis znamená, že $\eta$, čili ona chyba, je nekonečně malá ve srovnání s $h$ pro $h \to 0$; přesně:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\eta(h)}{h} = 0.$$

A opět: vzhledem k tomu, že $\eta(h)$ jsme (slovně) definovali jako

$$\eta(h) = f(a+h) - f(a) - f'(a) \cdot h,$$

je poslední rovnice vlastně jen další reformulace (1.14), resp. (1.15).

Zaměříme se nyní na člen $f'(a) \cdot h$, který jsem zvýraznil v rovnici (1.15). Jak jej můžeme interpretovat? Jsou dvě hlavní možnosti, které chci nastínit:

- Jde o „lineární část přírůstku“ s krokem $h$ funkce $f$ (vzhledem k bodu $a$).
- Můžeme se však na tento člen dívat také jako na funkci $h \mapsto f'(a) \cdot h$; označme tuto funkci $L$. Pak tedy

  $$L(h) = f'(a) \cdot h, \quad L\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \tag{1.16}$$

  je lineární funkce jediné proměnné $h$. Její graf je přímka se směrnicí $f'(a)$, která prochází počátkem.

Druhé pojetí tedy je, že člen $f'(a) \cdot h$ představuje prostě nějakou lineární funkci $L(h)$. Při tomto značení se nám rovnice (1.14), resp. (1.15) promění do tvaru

$$\begin{gathered} f(a+h) - f(a) - L(h) = o(h),\; h \to 0, \quad \text{tj.} \\ \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{h} = 0. \end{gathered} \tag{1.17}$$

Právě toto pojetí se nám hodí k zobecnění na libovolný počet proměnných.

Pro $d = 2$, tj. pracujeme-li s funkcemi dvou proměnných, můžeme o věci přemýšlet velmi podobně, ovšem s tím rozdílem, že onen krok $h$ může mířit do mnoha různých směrů: můžeme vybrat libovolný vektor $h \in \mathbb{R}^2$. Analogie lineární funkce z (1.16) tedy bude nějaká lineární funkce $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Ta bude, intuitivně vzato, popisovat „lineární část přírůstku“ funkce, vydáme-li se z bodu $a$ krokem $h$. Jistě, povolené kroky $h$ jsou nyní prvky $\mathbb{R}^2$ a příslušná funkce $L$ musí umět každému z nich přiřadit příslušnou hodnotu, onu lineární část přírůstku. Musí tedy skutečně být lineární $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Obecně pro funkce $d$ proměnných budeme uvažovat lineární funkce $L\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$.

### 1.6.1 Totální diferenciál

V předchozím jsme motivovali definici totálního diferenciálu, která přijde v této části: půjde o lineární funkci splňující podmínku velmi podobnou (1.17) (pouze přizpůsobenou kontextu vyššího počtu proměnných, tj. vyšší dimenze). Přesnější termín než lineární *funkce* je ovšem lineární *forma*, a tak se mi chce raději používat ten. Rozdíl to není velký, ale aby nedošlo k nejasnostem, raději se nejprve ujistíme, že oba termíny chápeme správně.

**Připomenutí pojmu lineární formy:** *Lineární funkcí $d$* proměnných běžně rozumíme libovolnou funkci $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ tvaru (kde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d, b \in \mathbb{R}$ jsou pevné koeficienty)

$$f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_d) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_d x_d + b. \tag{1.18}$$

Připouštíme tedy možnost, že graf $f$ neprochází počátkem, neboť $f(0, 0, \dots, 0) = b$. Jiný termín označující tentýž typ objektu je *polynom stupně nejvýše* 1 v proměnných $x_1, x_2, \dots, x_d$.

Naproti tomu *lineární formou* se obecně míní lineární zobrazení vektorového prostoru do příslušného číselného oboru, v našem případě do $\mathbb{R}$. Obecné *lineární zobrazení* (tedy ne nutně forma) z vektorového prostoru $X$ do prostoru $Y$ (oba nad tělesem $\mathbb{T}$) je takové zobrazení $L\colon X \to Y$, že pro libovolné vektory $x, y \in X$ a libovolné skaláry $\alpha, \beta \in \mathbb{T}$ platí $L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y)$. Můžeme si všimnout, že $L(\mathbf{0}_X) = L(0 \cdot x) = 0 \cdot L(x) = \mathbf{0}_Y$, kde $\mathbf{0}_X$ je počátek v $X$ a $\mathbf{0}_Y$ je počátek v $Y$. Vidíme tedy, že lineární zobrazení vždy zobrazí počátek na počátek (v příslušných prostorech).

Z toho ovšem plyne, že pro $b \neq 0$ lineární *funkce* $f$ definovaná rovnicí (1.18) není lineární *forma*, protože nezobrazuje počátek na počátek.[23] Pokud ovšem $b = 0$, je lineární funkce $f$ současně lineární formou. Je snad nyní jasné, že každá lineární forma je lineární funkce, ale ne naopak.

**1.68 Značení** (Skalární součin)**.** Jsou-li $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d)$ a $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \dots, y_d)$ dva

[23] Zde počátek v cílovém prostoru je prostě $0 \in \mathbb{R}$.

vektory v $\mathbb{R}^d$, pak jejich skalární součin $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ definujeme takto

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \Big\langle (x_1, x_2, \dots, x_d), (y_1, y_2, \dots, y_d) \Big\rangle = \sum_{i=1}^{d} x_i y_i.$$

**1.69 Poznámka** (Zápis pomocí skalárního součinu a maticového součinu)**.** Vzorec (1.18) je rozepsán po složkách, lze ho ale zapsat stručněji pomocí skalárního součinu vektorů: Označíme-li $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d)$ vektor koeficientů lineární funkce $f$, pak pro $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d)$, lze tentýž vzorec zapsat stručněji jako $f(\boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{x} \rangle + b$, kde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ značí skalární součin vektorů.

Je-li tedy $L\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ lineární forma (tj. odpadá „konstantní člen“ $b$), existuje nějaký „vektor jejích koeficientů“ $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d)$ a platí

$$L(\boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{x} \rangle, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d. \tag{1.19}$$

Při maticovém zápisu v lineární algebře (LA) je zvykem psát vektory v $\mathbb{R}^d$ jako matice o $d$ řádcích a jediném sloupci, tj. *vektory jsou formálně sloupce*. Jak vidno z výše uvedeného, i lineární formy $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ odpovídají v jistém smyslu vektorům v $\mathbb{R}^d$, protože každá forma jednoznačně odpovídá nějakému vektoru $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d)$ jejích koeficientů ve smyslu vzorce $L(\boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{x} \rangle$. Lineární formy na $\mathbb{R}^d$ se v LA reprezentují pomocí matic o jediném řádku a $d$ sloupcích, tj. jsou to vlastně „řádkové vektory“. Je-li $[L]$ řádková matice $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d)$ koeficientů formy $L$ a $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ je vektor (automaticky chápaný jako matice o jednom sloupci), pak

$$L(\boldsymbol{x}) = [L] \cdot \boldsymbol{x},$$

kde „$\cdot$“ značí maticové násobení. *Formálně tedy v LA vektory jsou sloupce a formy jsou řádky*, přičemž aplikovat formu na vektor znamená prostě maticově vynásobit řádek sloupcem (v tomto pořadí), čímž vznikne matice $1 \times 1$ obsahující jediné číslo, které je de facto skalárním součinem těch dvou $d$-tic čísel (koeficientů formy a souřadnic vektoru).

To jsou ovšem pouze formality; podstatné je, že lineární forma je dána svými koeficienty a funguje jako skalární součin s vektorem těchto koeficientů podle vzorce (1.19). To je ta podstatná věc, kterou je potřeba pochopit a zapamatovat si.

**1.70 Poznámka** (Lineární forma v bodech kanonické báze)**.** Buď $L$ lineární forma na $\mathbb{R}^d$ daná koeficienty $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d$. Stojí za povšimnutí, že $L(\boldsymbol{e}_j) = \alpha_j$ (pro každé $j$), kde $\boldsymbol{e}_j$ je $j$-tý vektor kanonické báze v $\mathbb{R}^d$. Skutečně, označíme-li na okamžik $e_j^i$ $i$-tou složku vektoru $\boldsymbol{e}_j$, dostáváme

$$L(\boldsymbol{e}_j) = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i e_j^i = \alpha_j e_j^j = \alpha_j,$$

neboť jediná nenulová složka $\boldsymbol{e}_j$ je právě ta $j$-tá, tj. $e_j^j$ a jest $e_j^j = 1$.

Ukážu ještě jednou totéž, ale tentokrát na příkladu $d = 4$ a pomocí maticového zápisu lineární formy místo vzorce výše. Máme tedy lineární formu $L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ s maticí $[L] =$

$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ a zajímá nás její hodnota po dosazení (kupříkladu) vektoru $\boldsymbol{e}_3 = (0, 0, 1, 0)$. Dostáváme

$$L(\boldsymbol{e}_3) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_3 \end{pmatrix}.$$

**1.71 Definice** (Totální diferenciál funkce $d$ proměnných)**.** Buďte $f$ funkce $d$ proměnných, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^d$, $L\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ lineární forma. Řekneme, že $L$ je *totální diferenciál* (TD) funkce $f$ v bodě $\boldsymbol{a}$, jestliže platí

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \frac{f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) - L(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|} = 0. \tag{1.20}$$

Pokud existuje TD funkce $f$ v bodě $\boldsymbol{a}$, říkáme, že $f$ je v bodě $\boldsymbol{a}$ *diferencovatelná*. Diferencovatelnost *na množině* pak pochopitelně znamená diferencovatelnost v každém bodě té množiny.

**1.72 Značení.** Totální diferenciál funkce $f$ v bodě $\boldsymbol{a}$ značíme $\mathrm{d}f(\boldsymbol{a})$, v předchozí definici je tedy $\mathrm{d}f(\boldsymbol{a}) = L$.[24] To znamená, že pro dané $\boldsymbol{a}$ je $\mathrm{d}f(\boldsymbol{a})$ lineární forma na $\mathbb{R}^d$, jejíž hodnotu v bodě $\boldsymbol{h}$ je nutné značit $\mathrm{d}f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h})$.

V jiných textech je možné se setkat také se značením $f'(\boldsymbol{a})$ pro totální diferenciál, tj. v kontextu funkcí více proměnných je $f'(\boldsymbol{a}) = \mathrm{d}f(\boldsymbol{a})$, ale my toto značení používat nebudeme.

**1.73 Poznámka** (Ekvivalentní definice TD)**.** Následující reformulace definice TD můžete porovnat s poznámkami o tečně ke grafu funkce, kterými jsem definici TD motivoval. Je vidět, že hlavní rozdíly jsou v tom, že místo bodů v $\mathbb{R}$ máme nyní body $\mathbb{R}^d$, takže se zde vyskytuje hodně tučných znaků. Je ale dobré si všimnout i rozdílu ve jmenovateli limity (1.20): protože $\boldsymbol{h}$ je vektor, nedává smysl dělit přímo $\boldsymbol{h}$, a dělíme tak jeho eukleidovskou normou $\|\boldsymbol{h}\|$ čili jeho velikostí.

- $f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) - L(\boldsymbol{h}) = o(\|\boldsymbol{h}\|)$, $\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}$;
- $f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) = L(\boldsymbol{h}) + o(\|\boldsymbol{h}\|)$, $\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}$;
- $f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) = L(\boldsymbol{h}) + \eta(\boldsymbol{h})$, kde $\eta(\boldsymbol{h}) = o(\|\boldsymbol{h}\|)$, $\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}$, tj.

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \frac{\eta(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|} = 0;$$

**1.74 Věta** (Koeficienty TD jsou 1. PD)**.** *Nechť $f$ je funkce $d$ proměnných, která má v bodě $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^d$ totální diferenciál; jeho koeficienty označme $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d)$, tj. pro $\boldsymbol{h} = (h_1, h_2, \dots, h_d) \in \mathbb{R}^d$ je vyjádřen vzorcem*

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}) = L(\boldsymbol{h}) = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i h_i. \tag{1.21}$$

[24] Toto značení odráží (snad samozřejmou) skutečnost, že TD záleží na bodě $\boldsymbol{a}$ podobně jako hodnota derivace funkce jedné proměnné může bod od bodu vycházet jinak.

*Pak existují všechny 1. parciální derivace funkce $f$ v bodě $\boldsymbol{a}$ a jsou to právě koeficienty* $\mathrm{d}f(\boldsymbol{a})$, *tj. platí*

$$\alpha_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{a}), \quad j \in \{1, 2, \ldots, d\}. \tag{1.22}$$

**1.75 Poznámka.** Jediný předpoklad Věty 1.74 je diferencovatelnost $f$ v bodě $\boldsymbol{a}$, tj. existence $TD$ v $\boldsymbol{a}$. Aby se ale věta dala pohodlně a přehledně zformulovat, je dobré si nějak označit koeficienty lineární formy $\mathrm{d}f(\boldsymbol{a})$, a tak se „opticky“ zdá že věta má předpokladů více.

Stručná reformulace je, že *koeficienty TD v bodě jsou (ve stejném pořadí) všechny 1. PD funkce v tom bodě*. Spojením rovnic (1.21) a (1.22) dostáváme stručnou verzi vzorce:

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) \cdot h_i. \tag{1.23}$$

*Důkaz.* Předpokládejme, že existuje totální diferenciál $L = \mathrm{d}f(\boldsymbol{a})$ funkce $f$ v bodě $\boldsymbol{a}$; označme koeficienty formy $L$ pořadě $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d$, tj. $L(\boldsymbol{h}) = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i h_i$. Nyní spočítáme derivaci podle $j$-té proměnné přímo z definice:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{a}) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{e}_j) - f(\boldsymbol{a})}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{e}_j) - f(\boldsymbol{a}) - L(t\boldsymbol{e}_j) + L(t\boldsymbol{e}_j)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{e}_j) - f(\boldsymbol{a}) - L(t\boldsymbol{e}_j)}{t} + \lim_{t\to 0} \frac{tL(\boldsymbol{e}_j)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \underbrace{\frac{f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{e}_j) - f(\boldsymbol{a}) - L(t\boldsymbol{e}_j)}{\|t\boldsymbol{e}_j\|}}_{\text{„nulová“, tj. jdoucí k nule}} \cdot \underbrace{\frac{\|t\boldsymbol{e}_j\|}{t}}_{\text{omezená}} + \lim_{t\to 0} L(\boldsymbol{e}_j) = \alpha_j.
\end{aligned}$$

Druhá limita na posledním řádku výpočtu je limita konstanty, tj. její hodnota je $L(\boldsymbol{e}_j) = \alpha_j$ (viz Poznámku 1.70). Stačí tedy uvědomit si, že první limita je skutečně tvaru „nulová krát omezená“, jak je ve výpočtu naznačeno.

Předně, z definice totálního diferenciálu víme, že

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to \boldsymbol{0}} \frac{f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) - L(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|} = 0,$$

a použitím Věty o limitě složené funkce s touto vnější funkcí a s vnitřní funkcí[25] (kterou dosadíme za $\boldsymbol{h}$) tvaru $t \mapsto t \cdot \boldsymbol{e}_j$ skutečně dostaneme žádaný závěr, že první část zkoumaného výrazu skutečně je „nulová“, neboli má limitu 0. Zbývá ověřit omezenost druhého činitele ve zkoumané limitě. Jest pro $t \neq 0$

$$\frac{\|t\boldsymbol{e}_j\|}{t} = \frac{|t|}{t}\|\boldsymbol{e}_j\| = \frac{|t|}{t} \cdot 1 = \operatorname{sgn} t,$$

[25] V tomto případě nejde striktně vzato o funkci, nýbrž o vnitřní zobrazení $t \mapsto t\boldsymbol{e}_j$, které číslu $t$ přiřazuje vektor (a to vektor na $j$-té souřadnicové ose; jedná se vlastně o její parametrizaci).

což je jistě omezená funkce, a výpočet je dokončený.

Shrnutí: Vyšlo nám, že $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{a}) = \alpha_j$, a to přímo z definice korektním výpočtem limity (pravá strana má smysl); speciálně tedy ona derivace existuje a navíc má tu správnou hodnotu. Důkaz je tedy hotov. □

**1.76 Definice** (Tečná nadrovina)**.** Nechť $f$ je funkce $d$ proměnných, která má v bodě $\boldsymbol{a}$ totální diferenciál $\mathrm{d}f(\boldsymbol{a}) = L$. Pak *tečnou nadrovinou* ke grafu funkce $f$ v bodě $(\boldsymbol{a}, f(\boldsymbol{a})) \in \mathbb{R}^{d+1}$ rozumíme graf lineární funkce

$$\begin{aligned} y(x) &= f(\boldsymbol{a}) + L(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}), \quad \text{tj.} \\ y(x) &= f(\boldsymbol{a}) + \mathrm{d}f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}). \end{aligned}$$

**1.77 Poznámka** (Smysluplnost definice tečné nadroviny)**.** V první řadě si uvědomme, že pokud například $d = 2$, tj. máme funkci dvou proměnných, pak samozřejmě i funkce $y$ z předchozí definice má dvě proměnné, a grafy obou funkcí jsou tedy obsaženy v $\mathbb{R}^3$. V tomto případě tedy lze hovořit o tečné *rovině* (a pro $d = 1$ hovoříme o *přímce*). Pro 3 a více proměnných už se běžně nehovoří o rovině, nýbrž o *nadrovině*, což je dáno mj. tím, že její dimenze v $\mathbb{R}^{d+1}$ je rovna $d$, tedy přesně o 1 méně. (V obecné situaci, pokud by rozdíl dimenzí byl větší než 1, bychom hovořili prostě o afinním podprostoru.)

Je zřejmé, že bod $(\boldsymbol{a}, f(\boldsymbol{a}))$ je skutečně „bodem dotyku“ grafu funkce $f$ a tečné nadroviny, neboť oba grafy tento bod obsahují. Od „tečného“ objektu ale chceme víc, týká se to směru. Skutečně z Věty 1.74 dostaneme, že obě funkce, tedy $f$ a $y$ mají v bodě $\boldsymbol{a}$ všechny 1. PD stejné. Pro přehlednost opět označme

$$[L] = [\mathrm{d}f(\boldsymbol{a})] = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d), \quad \text{tj.} \quad L(\boldsymbol{h}) = \mathrm{d}f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}) = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i h_i.$$

Z toho je jednoduchou derivací lineární funkce vidět, že

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = \alpha_j, \quad \text{přičemž podle Věty 1.74 je} \quad \alpha_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{a}), \quad j = 1, \dots, d.$$

Spojením těchto informací tedy dostáváme, že

$$\frac{\partial y}{\partial x_j}(\boldsymbol{a}) = 0 + \frac{\partial L}{\partial x_j}(\boldsymbol{a}) = \alpha_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{a}).$$

Skutečně tedy tečná nadrovina a funkce mají v bodě $\boldsymbol{a}$ všechny první parciální derivace stejné.

Navíc přímo definice totálního diferenciálu nám říká, že tečná nadrovina poskytuje „velmi dobrou“ aproximaci funkce $f$ na okolí bodu $\boldsymbol{a}$; ve skutečnosti nejlepší ze všech aproximací lineárních. Lze tedy říci, že definice tečné nadroviny je rozumná, neboť vlastnosti takto definovaného objektu splňují naše očekávání.

**1.78 Věta** (TD implikuje spojitost)**.** *Nechť existuje totální diferenciál funkce $f$ v bodě $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^d$. Pak $f$ je v tomto bodě spojitá.*

*Důkaz.* Chceme dokázat, že $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a})$, neboli ekvivalentně (po substituci $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}$) chceme dokázat

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \big(f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a})\big) = 0.$$

Tuto rovnost ověříme prostým výpočtem, při němž pomocí standardních triků využijeme předpokladu existence totálního diferenciálu $\mathrm{d}f(\boldsymbol{a})$, který pro přehlednost zápisu označme $L$:

$$\begin{aligned}
\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \big(f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a})\big) &= \lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \left( \frac{f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) - L(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|} \cdot \|\boldsymbol{h}\| + L(\boldsymbol{h}) \right) \\
&= \lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \frac{f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) - L(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|} \cdot \lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \|\boldsymbol{h}\| + \lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} L(\boldsymbol{h}) \\
&= 0 \cdot 0 + 0 = 0.
\end{aligned}$$

Úpravy ve výpočtu jsou snad jasné, pojďme si ale zdůvodnit, proč je každá ze tří závěrečných limit nulová, jak zde tvrdím. První limita je nulová podle definice totálního diferenciálu, protože $L = \mathrm{d}f(a)$, tj. $L$ je TD funkce $f$ v bodě $\boldsymbol{a}$. Druhá limita je nulová, protože norma je podle Lemmatu 1.64 spojitá, takže limitu lze počítat prostým dosazením: $\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \|\boldsymbol{h}\| = \|\boldsymbol{0}\| = 0$. Třetí limita je nulová z podobného důvodu, lineární forma $L$ je spojitá (je to polynom, viz Příklad 1.63), takže opět stačí dosadit: $\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} L(\boldsymbol{h}) = L(\boldsymbol{0}) = 0$. Důkaz je hotov. □

Následující důležitou větu si uvedeme bez důkazu, který sice není nezvládnutelně těžký, je ale poněkud technicky náročný.

**1.79 Věta.** *Buď $f$ funkce $d$ proměnných, která má v bodě $\boldsymbol{a}$ spojité všechny 1. parciální derivace. Pak existuje* $\mathrm{d}f(\boldsymbol{a})$.

**1.80 Definice.** Je-li $f$ funkce $d$ proměnných, která má ve všech bodech množiny $G \subseteq \mathbb{R}^d$ spojité všechny 1. parciální derivace, říkáme, že $f$ je třídy $C^1$ na $G$ a píšeme $f \in C^1(G)$.

**1.81 Poznámka.** Buď $f$ funkce $d$ proměnných, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^d$, a uvažujme následující výroky. (Pozor, nejsou ekvivalentní!)

(A) Všechny 1. PD funkce $f$ jsou v bodě $\boldsymbol{a}$ spojité.

(B) Existuje $\mathrm{d}f(\boldsymbol{a})$.

(C) Existují všechny 1. PD funkce $f$ v bodě $\boldsymbol{a}$.

(D) Funkce $f$ je v bodě $\boldsymbol{a}$ spojitá.

$$\begin{tikzcd}
 & \text{(A)} \arrow[d, Rightarrow] & \\
 & \text{(B)} \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
\text{(C)} & & \text{(D)}
\end{tikzcd}$$

Mezi těmito výroky obecně platí jen některé implikace, které jsou naznačeny ve schématu. Všechny ostatní implikace je možné celkem snadno vyvrátit pomocí protipříkladů. Zejména chci znovu zdůraznit, že obecně (C) neimplikuje (D), což dosvědčuje protipříklad $f(x, y) = \operatorname{sgn}(xy)$ (viz Příklad 1.66).

## 1.6.2 Derivace podle vektoru

**1.82 Definice** (Derivace podle vektoru)**.** Buď $f : \mathbb{D}_f \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ a nechť $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^d$. Definujeme *derivaci* funkce $f$ v bodě $\boldsymbol{a}$ *podle vektoru* $\boldsymbol{v}$ jako

$$\mathrm{D}_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{a})}{t}.$$

**1.83 Poznámka.**

- Může se stát, že $\mathrm{D}_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a}) \in \{-\infty, \infty\}$, my ovšem budeme obvykle pracovat pouze s konečnými hodnotami derivace podle vektoru.

- Pro $\lambda \in \mathbb{R}$ platí $\mathrm{D}_{\lambda\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a}) = \lambda \mathrm{D}_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a})$, což jednoduše plyne z definice (a triviální aplikace věty o limitě složené funkce s lineární vnitřní funkcí $t \mapsto \lambda t$:

$$\mathrm{D}_{\lambda\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a}) = \lambda \lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + t\lambda\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{a})}{t\lambda} = \lambda \mathrm{D}_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a}).$$

- Z předchozího bodu je zřejmé, že na hodnotu derivace $\mathrm{D}_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a})$ má vliv kromě směru vektoru $\boldsymbol{v}$ také jeho velikost; neformálně: znásobím-li vektor $\boldsymbol{v}$ třikrát, bude derivace podle něj trojnásobná.

- Běžně se definuje také derivace *ve směru vektoru*[26]; pro nenulový vektor $\boldsymbol{v}$ je definována jako $\mathrm{D}_{\frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|}} f(\boldsymbol{a})$, tj. jako derivace podle jednotkového vektoru určujícího směr $\boldsymbol{v}$. (Víme, že to je právě vektor $\frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|}$.)

- Derivace funkce $f$ v bodě $\boldsymbol{a}$ ve směru vektoru $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$, jak je snad z již uvedeného jasné, nezávisí na velikosti $\boldsymbol{v}$, pouze na jeho směru.

- Pro daný nenulový vektor $\boldsymbol{v}$ lze definovat *směr* vektoru $\boldsymbol{v}$ jako vektor $\frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|}$. S touto definicí pak derivace ve směru vektoru $\boldsymbol{v}$ není nic jiného než derivace podle směru vektoru $\boldsymbol{v}$. Rozmyslete si tuto terminologickou hříčku.

**1.84 Věta.** *Nechť má $f$ v bodě $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^d$ totální diferenciál. Nechť $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \dots, v_d) \in \mathbb{R}^d$. Pak platí*

$$\mathrm{D}_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a}) = \mathrm{d}f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{v}) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) \cdot v_i$$

*Důkaz.* Platnost druhé rovnosti je nám známa z Věty 1.74 (viz též (1.23)), jde tedy o důkaz první rovnosti. Pro přehlednější zápis označme $L := \mathrm{d}f(\boldsymbol{a})$ a také předpokládejme, že $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ (v opačném případě je věc triviální, obě strany rovnosti jsou zjevně nulové). Dále budeme

[26] Je potřeba pečlivě rozlišovat mezi derivací *podle* vektoru z Definice 1.82 a derivací *ve směru* vektoru.

postupovat velmi podobně jako v důkazu Věty 1.74. Počítejme z definice:

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a}) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{v})-f(\boldsymbol{a})}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{v})-f(\boldsymbol{a})-L(t\boldsymbol{v})+L(t\boldsymbol{v})}{t} \\
&= L(\boldsymbol{v}) + \lim_{t\to 0} \underbrace{\frac{f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{v})-f(\boldsymbol{a})-L(t\boldsymbol{v})}{\|t\boldsymbol{v}\|}}_{\longrightarrow 0 \quad \text{(VOLSF)}} \cdot \underbrace{\frac{\|t\boldsymbol{v}\|}{t}}_{\text{omezená}}
\end{aligned}$$

Dokážeme-li, že poslední limita je skutečně tvaru „nulová krát omezená“, bude celkový výsledek výpočtu skutečně $L(\boldsymbol{v})$, jak bylo dokázat. Zdůvodním nejprve omezenost druhého činitele:[27]

$$\frac{\|t\boldsymbol{v}\|}{t} = \frac{|t|\cdot\|\boldsymbol{v}\|}{t} = \frac{t\cdot\operatorname{sgn} t}{t}\cdot\|\boldsymbol{v}\| = \operatorname{sgn} t\cdot\|\boldsymbol{v}\|, \quad t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Nakonec se podíváme na to, že první činitel ve zkoumané limitě má limitu nula. Nejprve uvažme, že podle definice totálního diferenciálu jest[28]

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \frac{f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{a})-L(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|} = 0$$

Dosazením vnitřní funkce $t \mapsto t\boldsymbol{v}$ za $\boldsymbol{h}$ a použitím věty o limitě složené funkce dostaneme požadovaný závěr. □

Nyní připomenu definici gradientu funkce $f$ v bodě $\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^d$:

$$\nabla f(\boldsymbol{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{a}), \ldots \frac{\partial f}{\partial x_d}(\boldsymbol{a})\right).$$

**1.85 Důsledek.** *Buď $f$ diferencovatelná v bodě $\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^d$. Pak:*

*(i)* $\mathrm{d}f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{h}) = \langle\nabla f(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{h}\rangle$;

*(ii)* $\mathrm{D}_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a}) = \langle\nabla f(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{v}\rangle$.

*Důkaz.* Nechť tedy existuje $\mathrm{d}f(\boldsymbol{a})$. Pak pořadě podle Věty 1.84, Věty 1.74 a definice gradientu dostáváme pro libovolný vektor $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_d)\in\mathbb{R}^d$:

$$\mathrm{D}_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a}) = \mathrm{d}f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{v}) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) v_i = \langle\nabla f(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{v}\rangle,$$

[27] Srovnej s důkazem Věty 1.74.
[28] Viz poznámka pod čarou 27.

což dokazuje obě tvrzení důsledku (v případě (i) $\boldsymbol{v}$ hraje roli $\boldsymbol{h}$). $\square$

**1.86 Příklad.** Mějme nějakou funkci $f : \mathbb{R}^3$, pro kterou už jsme spočítali, že $\nabla f(-1,-1,-1) = (2,3,5)$. Zajímají nás derivace $f$ v bodě $(-1,-1,-1)$ podle vektorů $\boldsymbol{u} = (7,5,-2)$, $\boldsymbol{v} = (-3,2,0)$. Podle Důsledku 1.85 stačí spočítat příslušné skalární součiny, nuže:

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_{\boldsymbol{u}} f(-1,-1,-1) &= \langle \nabla f(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{u} \rangle = \big\langle (2,3,5),\ (7,5,-2) \big\rangle = 2 \cdot 7 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot (-2) = 19, \\ \mathrm{D}_{\boldsymbol{v}} f(-1,-1,-1) &= \langle \nabla f(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{v} \rangle = \big\langle (2,3,5),\ (-3,2,0) \big\rangle = 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 2 + 5 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Pokud bychom se dále zajímali o derivaci *ve směru* vektorů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$, pak v druhém případě vyjde samozřejmě opět nula; v případě prvním nejprve spočítáme $\|\boldsymbol{u}\| = \|(7,5,-2)\| = \sqrt{7^2 + 5^2 + (-2)^2} = \sqrt{78}$. Takže derivace funkce $f$ v bodě $(-1,-1,-1)$ *ve směru* vektoru $\boldsymbol{u}$ je

$$\mathrm{D}_{\frac{\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|}} f(-1,-1,-1) = \frac{1}{\|\boldsymbol{u}\|} \mathrm{D}_{\boldsymbol{u}} f(-1,-1,-1) = \frac{19}{\sqrt{78}}.$$

Všimněte si, že při řešení žádné části tohoto příkladu jsme nepotřebovali využít informaci, že se jedná o derivaci v bodě $\boldsymbol{a} = (-1,-1,-1)$; v běžné situaci bychom informaci o tomto bodě použili k zjištění konkrétní hodnoty gradientu, který ovšem v této úloze byl známý přímo ze zadání. $\triangle$

**1.87 Věta** (Směr maximálního růstu je právě gradient)**.** *Buď $f$ diferencovatelná v bodě $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^d$. Pak*

*(i)* $\max\{\mathrm{D}_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a}) \colon \|\boldsymbol{v}\| = 1\} = \|\nabla f(\boldsymbol{a})\|$*;*

*(ii) pokud* $\mathrm{d}f(\boldsymbol{a}) \neq \boldsymbol{0}$*, pak tohoto maxima se nabývá právě pro vektor* $\boldsymbol{v} = \frac{\nabla f(\boldsymbol{a})}{\|\nabla f(\boldsymbol{a})\|}$.

*Důkaz.* Připomeňme nejprve, že pro dva vektory $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$ platí vzorec

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\| \cdot \cos\alpha,$$

kde $\alpha$ je velikost úhlu sevřeného oběma vektory. Je zřejmé, že „maxima se nabývá pro $\alpha = 0$“.

Dokažme nyní oba body věty naráz, k čemuž si zvolme jednotkový vektor $\boldsymbol{v}$, čili vektor splňující $\|\boldsymbol{v}\| = 1$. Pak podle Věty 1.84 jest

$$\mathrm{D}_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a}) = \langle \nabla f(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{v} \rangle = \|\nabla f(\boldsymbol{a})\| \cdot \|\boldsymbol{v}\| \cdot \cos\alpha = \|\nabla f(\boldsymbol{a})\| \cdot \cos\alpha,$$

kde $\alpha$ je velikost úhlu sevřeného vektory $\nabla f(\boldsymbol{a})$ a $\boldsymbol{v}$. Z průběhu funkce cos je zřejmé, že pro $\alpha = 0$ je tato hodnota maximální. Pokud $\mathrm{d}f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$, tj. ekvivalentně $\nabla f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$, je funkce $\alpha \mapsto \|\nabla f(\boldsymbol{a})\| \cdot \cos\alpha$ konstantní nula. V opačném případě je tato funkce jistým kladným násobkem kosinu, a tedy pro $\alpha = 0$ se nabývá ostrého maxima (jak je zřejmé z průběhu funkce cos), jehož hodnota je $\|\nabla f(\boldsymbol{a})\| \cdot \cos 0 = \|\nabla f(\boldsymbol{a})\|$. Tím je věta dokázána, uvědomíme-li si, že $\boldsymbol{v} = \frac{\nabla f(\boldsymbol{a})}{\|\nabla f(\boldsymbol{a})\|}$ je jednotkový vektor (tj. $\|\boldsymbol{v}\| = 1$) ve stejném směru jako $\nabla f(\boldsymbol{a})$, tj. $\alpha = 0$. $\square$

### 1.6.3 Derivace složené funkce více proměnných

Následující věta je důležitou analogií Věty o derivaci složené funkce, kterou známe z prvního semestru, pro funkce více proměnných. Její následující formulace pro *funkce* je poněkud krkolomná, ovšem na početních příkladech pro vás nejspíš nebude těžké pochopit ten vcelku jednoduchý princip. Navíc se tato věta dá zformulovat podstatně stručněji a přehledněji (ovšem také abstraktněji) pro obecná zobrazení mezi eukleidovskými prostory (tedy nikoliv nezbytně funkce, které mají své hodnoty v $\mathbb{R}$).

**1.88 Věta** (Řetízkové pravidlo)**.** *Nechť mají (vnitřní) funkce $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ v bodě $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^d$ totální diferenciál. Nechť má (vnější) funkce $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ totální diferenciál v bodě $\boldsymbol{b} = \big(\varphi_1(\boldsymbol{a}), \varphi_2(\boldsymbol{a}), \dots, \varphi_k(\boldsymbol{a})\big) \in \mathbb{R}^k$. Definujme (složenou) funkci $F\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ předpisem*

$$F(\boldsymbol{x}) = f\big(\varphi_1(\boldsymbol{x}), \varphi_2(\boldsymbol{x}), \dots, \varphi_k(\boldsymbol{x})\big), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

*Pak $F$ má v bodě $\boldsymbol{a}$ totální diferenciál a platí*

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(\boldsymbol{a}) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial y_i}(\boldsymbol{b}) \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{a}).$$

**1.89 Poznámka.** Funkce $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_k$ uspořádané do $k$-tice lze chápat jako zobrazení $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_k)\colon \mathbb{D}_{\boldsymbol{\varphi}} \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$,[29] které funguje podle přirozeného předpisu

$$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) = \big(\varphi_1(\boldsymbol{x}), \varphi_2(\boldsymbol{x}), \dots \varphi_k(\boldsymbol{x})\big), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d.$$

Při tomto vektorovém zápisu tedy je $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{a})$ a nemáme $k$-tici vnitřních funkcí, nýbrž prostě jedno *vnitřní zobrazení* $\boldsymbol{\varphi}$, které má právě tolik složek, kolik vnější funkce $f$ má proměnných, tj. právě $k$. Můžeme tedy psát $F = f \circ \boldsymbol{\varphi}$.

Zobecnění na situaci, kdy máme ne jednu, ale několik, například $m$, vnějších funkcí (každá o $k$ proměnných), se nabízí. Lze pak psát $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m)\colon \mathbb{D}_{\boldsymbol{f}} \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ a také $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{\varphi}$. Pomocí řetízkového pravidla můžeme zkoumat derivace každé složky zvlášť, jsme tedy už schopni spočítat parciální derivace pro libovolné složené zobrazení.

Navíc ale existuje elegantní způsob, jak větu o derivaci složené funkce (alias řetízkové pravidlo) vyjádřit v této obecné situaci.

Definice 1.71 zavádí pojem totálního diferenciálu pouze pro funkce z $\mathbb{R}^d$ do $\mathbb{R}$. Je-li $\boldsymbol{F}\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$, lze totální diferenciál $\mathrm{d}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a})$ v bodě $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^d$ definovat analogicky jako lineární zobrazení $\boldsymbol{L}\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ splňující

$$\lim_{\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}} \frac{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}) - \boldsymbol{L}(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|} = \boldsymbol{0}.$$

[29] Je snad jasné, že definiční obor $\boldsymbol{\varphi}$ je množina všech bodů $\mathbb{R}^d$, ve kterých je definována každá ze složek zobrazení $\boldsymbol{\varphi}$. To jinak řečeno znamená $\mathbb{D}_{\boldsymbol{\varphi}} = \bigcap_{i=1}^{k} \mathbb{D}_{\varphi_i}$.

Lze ukázat (podobně jako jsme to udělali pro funkci ve Větě 1.74), že matice reprezentující totální diferenciál $\mathrm{d}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a})$ se skládá ze všech 1. parciálních derivací $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, \dots, F_m)$ v bodě $\boldsymbol{a}$:[30]

$$\left[\mathrm{d}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a})\right] = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_d}(\boldsymbol{a}) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_d}(\boldsymbol{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \frac{\partial F_m}{\partial x_2}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_d}(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix}.$$

Tuto matici lze chápat tak, že v řádcích jsou pořadě zapsány totální diferenciály jednotlivých složek zobrazení $\boldsymbol{F}$. Matice $\left[\mathrm{d}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a})\right]$ se nazývá *Jacobiho matice* zobrazení $\boldsymbol{F}$ v bodě $\boldsymbol{a}$.

Totální diferenciál $\boldsymbol{F}$ je tedy prostě lineární zobrazení, které „funguje“ mezi prostory stejné dimenze jako $\boldsymbol{F}$ samo. Máme-li tedy obecně dvě zobrazení $\boldsymbol{F}$ a $\boldsymbol{G}$ mezi eukleidovskými prostory nějakých dimenzí, která se dají složit kupříkladu v pořadí $\boldsymbol{G} \circ \boldsymbol{F}$,[31] lze v tomtéž pořadí skládat i jejich totální diferenciály jakožto lineární zobrazení, protože i pro toto samozřejmě „dimenze souhlasí“, neboť jsou stejné jako u původních zobrazení. Následující věta, která je zobecněním Věty 1.88 a je nejobecnější verzí věty o derivaci složeného zobrazení v konečné dimenzi, říká prostě, že *diferenciál složeného zobrazení je složení příslušných diferenciálů.*

Protože skládání lineárních zobrazení odpovídá násobení příslušných matic, lze následující větu formulovat dvěma způsoby: buďto pomocí složení totálních diferenciálů jakožto zobrazení nebo pomocí násobení příslušných reprezentujících matic těchto diferenciálů.

**1.90 Věta** (O derivaci složeného zobrazení)**.** *Mějme zobrazení* $\boldsymbol{\varphi}\colon \mathbb{D}_{\boldsymbol{\varphi}} \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ *a* $\boldsymbol{f}\colon \mathbb{D}_{\boldsymbol{f}} \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$, *přičemž* $\boldsymbol{\varphi}$ *má totální diferenciál v bodě* $\boldsymbol{a}$ *a* $\boldsymbol{f}$ *má totální diferenciál v bodě* $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{a})$. *Pak* $\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{\varphi}$ *má v bodě* $\boldsymbol{a}$ *totální diferenciál a platí*

$$\mathrm{d}\big(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{\varphi}\big)(\boldsymbol{a}) = \mathrm{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}) \circ \mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{a}),$$
$$\left[\mathrm{d}\big(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{\varphi}\big)(\boldsymbol{a})\right] = \left[\mathrm{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})\right] \cdot \left[\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{a})\right].$$

## 1.7 Vázané extrémy

[30] Matici reprezentující lineární zobrazení $L$ značíme $[L]$.

[31] Tj. dimenze cílového prostoru $\boldsymbol{F}$ je rovna dimenzi výchozího prostoru $\boldsymbol{G}$.

# Kapitola 2

# Metrické prostory

## 2.1 Definice a příklady MP

Dosud jsme pracovali takřka výhradně s eukleidovskými prostory, tj. $\mathbb{R}^d$ s eukleidovskou normou založenou na Pýthagorově větě. Norma vektoru $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ je definována (viz Definici 1.11) jako $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^d x_i^2}$ a její geometrický význam je prostě *vzdálenost* bodu $\boldsymbol{x}$ od počátku soustavy souřadné, tj. bodu $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$.

Důležité je, že analogicky jsme schopni *měřit vzdálenost* mezi libovolnými dvěma body $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$; jejich vzdálenost je (jak jsme si už rozmysleli, viz (1.11)) prostě $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$. Díky tomu jsme schopni definovat okolí a prstencové okolí jako $B(\boldsymbol{x}, \delta) = \{\boldsymbol{y} \colon \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| < \delta\}$ a $P(\boldsymbol{x}, \delta) = B(\boldsymbol{x}, \delta) \setminus \{\boldsymbol{x}\}$. Řečeno slovy, $B(\boldsymbol{x}, \delta)$ je množina takových bodů $\boldsymbol{y}$, jejichž *vzdálenost* od středu $\boldsymbol{x}$ je menší než poloměr $\delta$, a je tedy přirozené $B(\boldsymbol{x}, \delta)$ nazývat koule se středem $\boldsymbol{x}$ a poloměrem $\delta$ (popřípadě *kruh*, je-li $d = 2$ a *interval* pro $d = 1$).

Eukleidovské prostory jsou tedy nadány možností *měřit vzdálenosti* mezi body, díky čemuž lze definovat okolí neboli „koule“. A to nám stačí k tomu, abychom mohli vyslovit definice limity a spojitosti funkce (viz Definici 1.47 a též poznámky na začátku Oddílu 1.5). Zběžné pročtení těchto definic prozradí, že se v nich nepoužívají žádné speciální vlastnosti $\mathbb{R}^d$ (třeba struktura vektorového prostoru), stačí nám pojmy okolí a prstencového okolí a pro ty zase stačí mít možnost *měřit vzdálenost*.

Kromě eukleidovských prostorů existuje velké množství dalších „prostorů“ (množin), v nichž dává dobrý smysl měřit nějakým způsobem vzdálenosti mezi dvojicemi prvků. Tím pádem je možné (a často účelné) v takových prostorech budovat podobnou teorii limity a spojitosti zobrazení, jakou máme v $\mathbb{R}$ (a jakou jsme v $\mathbb{R}^d$ pouze naznačili bez důkazů). Protože však takových případů je skutečně mnoho, nebylo by praktické v každém konkrétním případě budovat „tutéž“ teorii, opakovat stále stejné myšlenky důkazů. Místo toho je vhodné se podívat na to, co mají všechny tyto prostory společné, a ostatní podrobnosti ignorovat. Tím se samozřejmě můžeme připravit o možnost dokazovat věci, které platí pouze v některém specifickém kontextu a v jiném ne, zato ale budeme mít obecnou teorii, kterou můžeme aplikovat v libovolném konkrétním případě. Tím jednotícím prvkem, o kterém bude řeč, je právě možnost *měřit vzdálenosti*; tato možnost definuje strukturu *metrického prostoru*.

**2.1 Definice.** Buď $M$ množina. Funkce $\rho\colon M \times M \to [0, \infty)$ se nazývá *metrika* na $M$, platí-li $\forall x, y, z \in M$:

(i) $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$;

(ii) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ *(symetrie)*;

(iii) $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$ *(trojúhelníková nerovnost).*

Je-li $\rho$ metrika na množině $M$, uspořádanou dvojici $(M, \rho)$ nazýváme *metrický prostor*.

**2.2 Poznámka.** Důležitou součástí definice metriky je i nezápornost jejích hodnot (protože $\rho\colon M \times M \to [0, \infty)$). Interpretace metriky je, jak bylo naznačeno v úvodu k této kapitole, *měření vzdálenosti* mezi body $M$. Proto by nedávalo smysl, kdyby metrika mohla nabývat záporných hodnot; vzdálenost nemůže dost dobře být záporná. Může ovšem být nulová, a to právě tehdy, když měříme vzdálenost nějakého bodu od sebe samého, jak žádá axiom (i). Jinak řečeno, kdykoliv máme dva *různé* body $x, y \in M$, vzdálenost $\rho(x, y)$ mezi nimi je nutně kladná.

Všimněte si, že metrika na $M$ je striktně vzato funkce na $M \times M$. To je samozřejmé, protože metrika měří vzdálenost mezi nějakými *dvěma* body. To znamená, že třeba metrika na $\mathbb{R}$ je formálně vzato nějaká funkce definovaná na $\mathbb{R}^2$. Nenechte se tím zmást.

**2.3 Definice** (Otevřená koule)**.** Buď $(M, \rho)$ metrický prostor, $x \in M$, $\delta > 0$. Pak definujeme otevřenou kouli se středem $x$ a poloměrem $\delta$ jako množinu

$$B_\rho(x, \delta) := \{y \in M\colon\ \rho(x, y) < \delta\}.$$

Dolní index „$\rho$“ v symbolu „$B_\rho(x, \delta)$“ budeme často vynechávat a psát pouze „$B(x, \delta)$“. Pochopitelně tak budeme činit pouze v případech, kdy nebude hrozit nedorozumění (tj. v případech, kdy bude jasné, kterou metriku máme na mysli).

**2.4 Příklad** (Metrika vznikne z normy)**.**

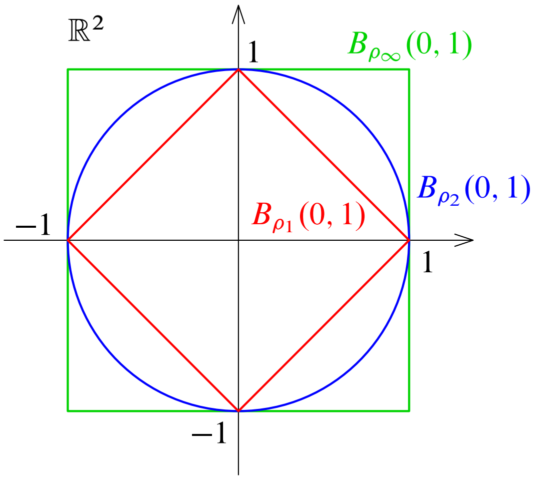
- Pro $M = \mathbb{R}$ a $x, y \in M$ je $\rho(x, y) := |x - y|$ standardní metrika na $\mathbb{R}$. Rozmyslíme si, že se skutečně jedná o metriku ověřením všech tří axiomů. K ověření (i) si pouze uvědomíme, že pro reálná čísla $x, y$ je $\rho(x, y) = |x - y| = 0$, jedině pokud $x = y$ (v opačném případě je $\rho(x, y) = |x - y| > 0$).

  K ověření axiomu (ii) stačí jednoduchý výpočet:

  $$\rho(x, y) = |x - y| = |(-1)(y - x)| = |-1| \cdot |y - x| = |y - x| = \rho(y, x).$$

  Trojúhelníková nerovnost, tedy axiom (iii), je nám také známa už z prvního semestru:

  $$\rho(x, z) = |x - z| = |(x - y) + (y - z)| \leqslant |x - y| + |y - z| = \rho(x, y) + \rho(y, z).$$




Obrázek 2.1: Jednotkové koule v různých metrikách

Vidíme tedy, že $(\mathbb{R}, |\cdot - \cdot|)$ je metrický prostor.[1] To speciálně znamená, že veškerá teorie, kterou dokážeme v této kapitole, se mj. vztahuje i na $\mathbb{R}$ se standardní metrikou (tj. vlastně na látku prvního semestru).

- Je-li $(X, \|\cdot\|)$ normovaný lineární prostor (viz Poznámku 1.12), pak funkce $\rho\colon X \times X \to [0, \infty)$ definovaná pro $x, y \in X$ předpisem

$$\rho(x, y) = \|x - y\| \tag{2.1}$$

je metrika. Ověření všech axiomů probíhá stejně jako v předchozím příkladě standardní metriky na $\mathbb{R}$. Tento příklad je důležitý, neboť ukazuje, že z libovolné normy na libovolném vektorovém prostoru vzniká prostřednictvím vzorce (2.1) metrika. To samozřejmě znamená, že libovolný normovaný lineární prostor lze chápat speciálně jako prostor metrický, a tedy veškerá teorie metrických prostorů se vztahuje na každý normovaný lineární prostor.

- Na základě předchozího bodu lze zpozorovat, že množina $\mathbb{R}^d$ sama o sobě nedefinuje metrický prostor, je potřeba říci jakou normu (potažmo metriku) na této množině budeme používat. Při volbě různých norem mohou vzniknout metrické prostory odlišných vlastností. Poznámka 1.13 (b) definuje několik různých norem na $\mathbb{R}^d$. Jim příslušné metriky můžeme označit stejnými indexy, tj. máme různé metriky $\rho_1, \rho_p, \rho_\infty$. Protože pro každé $p \in (1, \infty)$ dostaneme jinou metriku $\rho_p$, máme nyní nekonečně mnoho různých metrik na téže množině $\mathbb{R}^d$. Je zajímavé, že jednotková koule (tj. koule se středem v počátku a poloměrem 1) vzhledem k různým těmto metrikám vypadá různě; kruh v běžném slova smyslu je to pouze pro $p = 2$. $\triangle$

[1] Zde symbolem $|\cdot - \cdot|$ myslím funkci $(x, y) \mapsto |x - y|$, tj. za každou tečku lze dosadit jiné číslo.

**2.5 Příklad** (Diskrétní metrika)**.** Definujeme *diskrétní metriku* kupříkladu na množině $\mathbb{R}$, je ovšem možné analogickým způsobem zadat diskrétní metriku na libovolné množině. Pro $x, y \in \mathbb{R}$ položme

$$\rho_{\mathrm{d}}(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{pokud } x = y, \\ 1, & \text{pokud } x \neq y. \end{cases}$$

Je snadné cvičení (proveďte) ověřit, že $\rho_{\mathrm{d}}$ splňuje všechny axiomy metriky. Metrika $\rho_{\mathrm{d}}$ se nazývá *diskrétní metrika* a prostor $(\mathbb{R}, \rho_{\mathrm{d}})$ se nazývá *diskrétní prostor*.

Všimněte si, že tato metrika nabývá pouze dvou různých hodnot, a sice 0, pokud body jsou stejné a 1, jsou-li různé. Jde tedy vlastně o nejjednodušší představitelnou metriku, která je „právě tak složitá“, aby vyhověla axiomu (i) z Definice 2.1. Jediné, co tato metrika „měří“, je „identita vs. různost“. Je tedy například

$$\rho_{\mathrm{d}}(1, 10) = 1, \quad \rho_{\mathrm{d}}(\pi, e) = 1, \quad \rho_{\mathrm{d}}(-2, -2) = 0.$$

Rozmyslíme si ještě, jak vypadají otevřené koule (podle Definice 2.3) v $\mathbb{R}$ vzhledem k metrice $\rho_{\mathrm{d}}$. Zvolme nejprve nějaký střed $x \in \mathbb{R}$. Zvolíme-li poloměr $\delta > 1$, pak $B_{\rho_{\mathrm{d}}}(x, \delta) = \{y \in \mathbb{R} \colon \rho_{\mathrm{d}}(x, y) < \delta\} = \mathbb{R}$, protože všechny vzdálenosti jsou 0, nebo 1 (a jsou tedy menší než $\delta$). Naopak, zvolíme-li poloměr $\delta \in (0, 1]$, pak $B_{\rho_{\mathrm{d}}}(x, \delta) = \{x\}$, protože pouze sám bod $x$ má od sebe vzdálenost menší než $\delta \leqslant 1$. Pro lepší představu uvedu několik konkrétních příkladů.

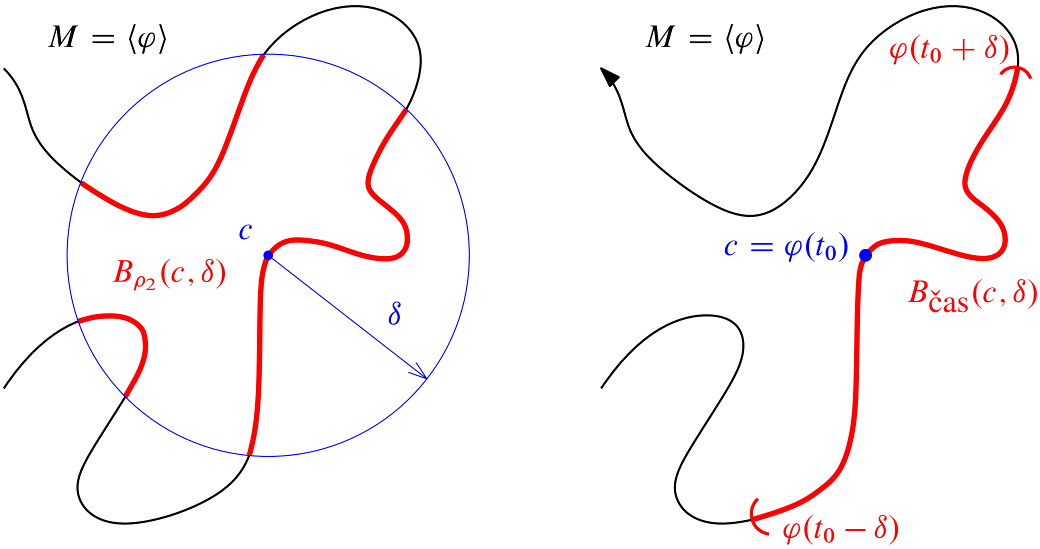
$$B_{\rho_{\mathrm{d}}}\Big(7, \frac{1}{2}\Big) = \{7\}, \quad B_{\rho_{\mathrm{d}}}(8, 1) = \{8\}, \quad B_{\rho_{\mathrm{d}}}\Big(9, \frac{11}{10}\Big) = \mathbb{R}. \qquad \triangle$$

**2.6 Definice** (Podprostor)**.** Buď $(M, \rho)$ metrický prostor a $N \subseteq M$. Pak metrický prostor $(N, \rho|_{N \times N})$ se nazývá *podprostor* prostoru $(M, \rho)$ a značí se $(N, \rho)$.

**2.7 Poznámka** (K definici podprostoru)**.** Symbolem $\rho|_{N \times N}$ máme pochopitelně na mysli restrikci metriky $\rho \colon M \times M \to [0, \infty)$ na podmnožinu $N \times N$ svého definičního oboru. Omezením definičního oboru na $N \times N$ tedy vznikne funkce $\rho|_{N \times N} \colon N \times N \to [0, \infty)$, u níž je snadné vidět, že se jedná o metriku na $N$, tj. že pro všechna $x, y, z \in N$ splňuje ony tři axiomy z definice metriky. Skutečně, $\rho$ splňuje ty axiomy dokonce pro všechna $x, y, z$ z větší množiny $M$, tím spíše tedy z $N$.

V definici se dále píše, že metrický prostor $(N, \rho|_{N \times N})$ budeme značit $(N, \rho)$, tj. budeme vynechávat informaci o tom, že ve skutečnosti uvažujeme restrikci metriky $\rho$ původně definované na nějaké větší množině. (To proto, že tato informace je skoro vždy z kontextu zřejmá.)

**2.8 Příklad** (Dvě metriky na křivce v $\mathbb{R}^2$)**.** Uvažujme nějakou hladkou křivku $\varphi \colon [0, 1] \to \mathbb{R}^2$. Připomínám, že křivka je v tomto smyslu prostě zobrazení s uvedeným definičním oborem $[0, 1]$ a cílovým prostorem $\mathbb{R}^2$; její obor hodnot, tedy množinu všech bodů, které křivka „navštíví“, značíme $\langle \varphi \rangle$. Právě obor hodnot je ve skutečnosti ona množina v $\mathbb{R}^2$, kterou vnímáme jako křivku v geometrickém slova smyslu, tedy jako jistou množinu bodů.




Obrázek 2.2: Vzdálenost měřená vzdušnou čarou vs. vzdálenost měřená časem

Zaměřme se na $(\mathbb{R}^2, \rho_2)$, tedy $\mathbb{R}^2$ jako metrický prostor se standardní eukleidovskou normou (tj. vzdáleností počítanou pomocí Pýthagorovy věty) a uvažujme podprostor $(\langle\varphi\rangle, \rho_2) =:$ $(M, \rho_2)$, tj. $M := \langle\varphi\rangle$. Zvolme libovolný bod na křivce, tj. bod $c \in M$ a nějaký poloměr $\delta$. Jak v podprostoru $(M, \rho_2)$ vypadá příslušná koule $B(c, \delta)$? Přirozeně musí být podmnožinou $M$, a nejedná se tedy o geometrický kruh. Místo toho jde o průnik příslušného kruhu v celém $\mathbb{R}^2$ s množinou $M$. Věc je zachycena v levé části Obrázku 2.2. Tento způsob měření vzdálenosti tedy jako by umožňoval přecházet mezi body křivky po nejkratší spojnici v $\mathbb{R}^2$; jde tedy vlastně o měření vzdálenosti „vzdušnou čarou“.

Na tomtéž obrázku je ale zachycen ještě druhý způsob, jak na křivce měřit vzdálenost: jde o způsob „vnitřní“, kdy jsme v pohybu omezeni pouze na křivku. Tento způsob známe dobře z výletů, které vlastně představují trajektorie pohybu našich těl parametrizované časem. Snadno si lze představit, že se v jistém bodě $c$ výletu zastavíme a zamyslíme se, kde jsme byli před časem $\delta$ a kde budeme v čase o $\delta$ pozdějším; můžeme si při tom i představit celý úsek výletu odpovídající tomuto časovému intervalu. Tento úsek výletu se dá interpretovat jako koule $B(c, \delta)$ vzhledem k „časové metrice“.

Druhý, „výletový“, způsob měření vzdálenosti určitě dává dobrý smysl. Pokud nesledujeme mapu, často si ani nemusíme všimnout, že se na naší trase dostaneme do blízkosti (vzdušnou čarou) nějakého místa, kde jsme byli o mnoho hodin dříve – a ani nás to nemusí zajímat. Z pohledu výletu je zajímavější otázka „kdy už tam budeme“ než otázka „jak daleko je náš cíl vzdušnou čarou“. $\triangle$

## 2.2 Základní pojmy v MP

**2.9 Definice** (Limita posloupnosti v metrickém prostoru)**.** Buď $(M, \rho)$ metrický prostor a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ nějaká posloupnost prvků množiny $M$.[2] Řekneme, že prvek $x \in M$ je limitou posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ a píšeme $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, jestliže platí

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0. \tag{2.2}$$

Pokud $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu, nazveme ji *konvergentní.*

**2.10 Poznámka.** Uvedenou definici je vhodné porovnat s Definicí 1.15 a zejména pak s Lemmatem 1.16. V případě $\mathbb{R}^d$ jsem se z nějakého důvodu rozhodl limitu posloupnosti definovat pomocí konvergence po složkách a následně v lemmatu dokázat, že tato definice je ekvivalentní tomu, že „vzdálenost od limity jde k nule“. V případě metrického prostoru nemáme možnost limitu posloupnosti definovat pomocí „složek“ (body obecného prostoru $M$ nemusí žádné „složky“ mít).

Výsledek je, že máme několik různých definicí limity posloupnosti, a je třeba si ujasnit, že v případech, na které se vztahuje více než jedna z nich, jsou vymezené pojmy stejné (tj. definice jsou navzájem ekvivalentní). Pro eukleidovské prostory je toto obsahem Lemmatu 1.16.

Podívejme se na to trochu podrobněji pro $\mathbb{R}$ se standardní metrikou (tj. pro $a, b \in \mathbb{R}$ je $\rho(a,b) = |a - b|$). To je metrický prostor, takže Definice 2.9 se vztahuje i na něj, a v tomto základním prostoru tak nyní máme dvě definice limity posloupnosti (jedna nová a jedna z 1. semestru). Naštěstí jsou vzájemně ekvivalentní, což v podstatě víme také od prvního semestru: pro posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ totiž platí

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad\Longleftrightarrow\quad \lim_{n\to\infty} |x_n - x| = 0.$$

Pravá strana ekvivalence je přitom jen jiný zápis pro $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0$, kde $\rho$ je ona standardní metrika na $\mathbb{R}$; tzn. pravá strana odpovídá Definici 2.9.

Závěr tedy je, že nevzniká žádná kolize značení, neboť právě definovaný pojem limity posloupnosti v obecném metrickém prostoru je v příslušných případech ekvivalentní dřívějším definicím. Nová definice tento pojem pouze rozšiřuje na obecnější třídu prostorů.

**2.11 Poznámka.** Všimněte si, že v Definici 2.9, tedy v definici limity, používáme pojem limity. Samozřejmě nejde o definici kruhem, protože v (2.2) jde o limitu posloupnosti reálných čísel (a tu máme definovanou od prvního semestru).

[2] Posloupností prvků množiny $M$ rozumíme prostě zobrazení $\mathbb{N} \to M$, jak jsme zvyklí už z prvního semestru, kdy roli $M$ hrála množina $\mathbb{R}$. Podobně jako v dřívějších případech připouštíme i tak zvané zobecněné posloupnosti, kdy například není potřeba indexovat od 1, pro konečně mnoho indexů $n$ nemusí být definován prvek posloupnosti $x_n$ apod. K pojmu posloupnosti tedy nadále přistupujeme poněkud volně.

**2.12 Cvičení.** Buď $(M, \rho)$ metrický prostor, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq M$ posloupnost, $x \in M$. Dokažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, právě když platí

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geqslant n_0\colon \; \rho(x_n, x) < \varepsilon.$$

Všimněte si dále, že místo $\rho(x_n, x) < \varepsilon$ lze ekvivalentně psát $x_n \in B(x, \varepsilon)$, jak je zřejmé z definice otevřené koule (2.3).

**2.13 Definice** (Otevřená množina, vnitřek)**.** Buď $(M, \rho)$ metrický prostor, $A \subseteq M$ libovolná podmnožina.

- Řekneme, že bod $x \in A$ je *vnitřní bod* množiny $A$, pokud

$$\exists \varepsilon > 0\colon \; B(x, \varepsilon) \subseteq A.$$

- *Vnitřek* množiny $A$ je množina všech vnitřních bodů $A$, tj.

$$A^{\circ} = \operatorname{Int}(A) := \{x \in A\colon \; x \text{ je vnitřní bod } A\}.$$

- Množina $A$ se nazve *otevřená*, pokud všechny její body jsou vnitřní body $A$.

**2.14 Lemma.** *Buď $(M, \rho)$ metrický prostor, $A \subseteq M$ libovolná podmnožina. Pak:*

*(i) Množina $A$ je otevřená, právě když $A = A^{\circ}$.*

*(ii) Libovolná otevřená koule v $M$ je otevřená množina.*

*Důkaz.* První bod lemmatu je okamžitým důsledkem definic; rozmyslete si sami.

Pro důkaz (ii) zvolme libovolný bod $c \in M$ a libovolný poloměr $\delta > 0$; těmito volbami je dána (libovolná) otevřená koule $B(c, \delta)$, označme ji $B$ a dokažme, že je to otevřená množina podle Definice 2.13. Máme tedy dokázat, že každý bod koule $B$ je vnitřní bod $B$. Budiž tedy dán libovolný bod $x \in B = B(c, \delta)$. Pak (podle definice této koule) je $\rho(c, x) < \delta$. Označme $\varepsilon := \delta - \rho(c, x)$; pak $\varepsilon > 0$. Tvrdím, že $B(x, \varepsilon) \subseteq B(c, \delta) = B$ (čímž bude dokázáno, že $x$ je vnitřní bod $B$):

Pro důkaz uvedené inkluze stačí zvolit libovolný bod $y \in B(x, \varepsilon)$ a dokázat $y \in B$; buď tedy dáno $y \in B(x, \varepsilon)$, tj. $\rho(x, y) < \varepsilon$. Odhadujme (s použitím trojúhelníkové nerovnosti pro metriku $\rho$) vzdálenost $y$ od $c$ (chceme, že je menší než $\delta$):

$$\rho(c, y) \leqslant \rho(c, x) + \rho(x, y) < \rho(c, x) + \varepsilon = \delta. \tag{2.3}$$

Tedy $y \in B(c, \delta)$; protože $y \in B(x, \varepsilon)$ bylo libovolné, je $B(x, \varepsilon) \subseteq B(c, \delta)$. To dokazuje, že libovolný bod $x \in B$ je vnitřní bod $B$, takže $B$ je otevřená. $\square$

**2.15 Poznámka.**

- Dokázali jsme, že otevřená koule je otevřená, což vám možná připadá zvláštní. Snad jste ale už nahlédli, že v Definici 2.3 je „otevřenost“ čistě terminologie a použití toho slova jsme si klidně mohli odpustit. Právě dokázané lemma ukazuje, že to je terminologie dobrá, tj. že „otevřená“ koule skutečně je *otevřená* ve smyslu obecnější Definice 2.13.[3]

- Snad jste také nahlédli, že pro otevřenost otevřené koule je podstatné, že v její definici najdeme *ostrou* nerovnost; právě díky tomu je $\varepsilon\delta - \rho(c, x)$ kladné. Kdyby koule byla definována neostrou nerovností, takto definované $\varepsilon$ by mohlo být nulové a v takovém případě by důkaz skončil neúspěchem.

**2.16 Věta** (Vlastnosti otevřených množin)**.** *Buď $(M, \rho)$ metrický prostor. Platí:*

*(i) Množiny $M$ a $\emptyset$ jsou otevřené.*

*(ii) Jsou-li $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq M$ otevřené množiny, pak i $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ je otevřená.*

*(iii) Je-li $I$ libovolná množina „indexů“,[4] a je-li pro každý index $\alpha \in I$ dána nějaká otevřená množina $A_\alpha$, pak $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ je otevřená.*

**2.17 Poznámka.** Obsah třetího bodu věty se dá shrnout slovy: *Jakékoliv sjednocení otevřených množin je otevřená množina.* Není zde přitom důležitý počet těch množin; klidně jich může být například nespočetně mnoho a tvrzení stále platí.

Naproti tomu v tvrzení (ii) se omezujeme pouze na průniky konečně mnoha otevřených množin; ty otevřené jsou, nekonečné průniky ale otevřené být nemusí. Stručná formulace (ii) tedy zní: *Konečné sjednocení otevřených množin je otevřená množina.*

*Důkaz.* První bod tvrzení je triviální. Proč je triviální? Rozmyslete si to.[5]

K důkazu bodu (ii) mějme dány libovolné otevřené množiny $A_1, A_2, \ldots A_n \subseteq M$. Máme dokázat, že každý bod jejich průniku je jeho bodem vnitřním; budiž tedy dán libovolný bod $x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i$. Pak $x$ je prvkem každé jednotlivé množiny $A_i$ a z jejich otevřenosti plyne, že pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ můžeme zvolit nějaké $\delta_i > 0$ takové, že $B(x, \delta_i) \subseteq A_i$. Je přitom snad jasné, že menší poloměr bude fungovat taky: pro $\delta \leqslant \delta_i$ je samozřejmě také $B(x, \delta) \subseteq A_i$, protože $B(x, \delta) \subseteq B(x, \delta_i)$. Nyní tedy máme vybrány poloměry $\delta_i > 0$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, a

[3] Jde skutečně o obecnější definici, protože (jak asi čekáte) obvykle existují i jiné otevřené množiny než otevřené koule.

[4] Ve skutečnosti stačí psát prostě libovolná množina, neboť jakýkoliv objekt může hrát roli indexu. Jinak řečeno jakákoliv množina může být vnímána jako „indexová množina“.

[5] Množina $M$, tj. celý prostor, je otevřená, protože každá otevřená koule (s libovolným středem z $M$ a libovolným kladným poloměrem) je obsažena v $M$. Tím pádem každý bod $x \in M$ je vnitřním bodem $M$, což dosvědčí třeba koule $B(x, 1337)$; ta je totiž obsažena v $M$. Prázdná množina je zase otevřená z toho důvodu, že skutečně *každý její bod $x$* splňuje „podmínku“. Je už jedno, o jakou „podmínku“ se jedná (zde je to tedy to, že $x$ je vnitřní bod $\emptyset$), protože žádný bod neobsahuje. Jedná se tedy o prázdný požadavek, a ten je splněn automaticky.

vybereme si z nich ten nejmenší: položme $\delta := \min\{\delta_i : i \in \{1, 2, \dots, n\}\}$. Pak $\delta > 0$, ovšem $\delta \leqslant \delta_i$ pro každé $i$, takže také $B(x, \delta) \subseteq B(x, \delta_i) \subseteq A_i$ pro každé $i$. To ovšem znamená, že $B(x, \delta) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} A_i$. Bod $x$ je tedy vnitřním bodem onoho průniku, jak bylo dokázat.

Dokažme bod (iii). Buďte dány otevřené množiny $A_\alpha \subseteq M$, $\alpha \in I$, a zvolme libovolný bod $x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$. Pak existuje index $\alpha_0 \in I$, pro nějž $x \in A_{\alpha_0}$ (protože $x$ leží ve sjednocení $A_\alpha$ přes všechny indexy). Ovšem množina $A_{\alpha_0}$ je otevřená, takže existuje $\delta > 0$ takové, že $B(x, \delta) \subseteq A_{\alpha_0}$. Ovšem $A_{\alpha_0} \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$, takže celkem i $B(x, \delta) \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$, což dokazuje, že $x$ je vnitřním bodem toho sjednocení. Protože $x$ bylo libovolné, je důkaz hotov. $\square$

**2.18 Definice** (Hranice, uzavřená množina)**.** Buď $(M, \rho)$ metrický prostor, $A \subseteq M$.

- Bod $x \in M$ je *hraniční bod* množiny $A$, pokud platí

$$\forall \varepsilon > 0\colon\ B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \wedge B(x, \varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset. \tag{2.4}$$

- *Hranice* množiny $A$ je množina všech hraničních bodů množiny $A$, tj.

$$H(A) := \{x \in M :\ x \text{ je hraniční bod množiny } A\}.$$

- *Uzávěr* množiny $A$ je množina $\overline{A} := A \cup H(A)$.

- Množina $A$ je *uzavřená*, jestliže $H(A) \subseteq A$.

**2.19 Pozorování.** *Buď $(M, \rho)$ metrický prostor, $A \subseteq M$. Pak platí:*

*(a)* $A^\circ \cap H(A) = \emptyset$.

*(b)* $A \subseteq A^\circ \cup H(A)$.

*(c)* $A^\circ = A \setminus H(A)$.

*(d)* $\overline{A} = A^\circ \cup H(A)$.

*(e)* *$A$ je otevřená* $\Leftrightarrow A \cap H(A) = \emptyset$.

*(f)* $H(A) = H(A^c)$.

*(g)* $M = A^\circ \cup H(A) \cup (A^c)^\circ$. *Každé dvě množiny napravo jsou navíc disjunktní.*

*(h)* $\left(\overline{A}\right)^c = (A^c)^\circ$.

*(i)* $A \subseteq B \Rightarrow A^\circ \subseteq B^\circ$.

*(j)* $A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$.

*Důkaz.* Ad (a): Je-li $x \in A^\circ$, pak podle definice existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $B(x, \varepsilon) \subseteq A$. Pak ale $B(x, \varepsilon) \cap A^c = \emptyset$, a z definice hranice je ihned vidět, že $x \notin H(A)$.

Ad (b): Nechť $x \in A$ a předpokládejme, že $x \notin A^\circ$, tj. $\forall \varepsilon > 0\colon B(x, \varepsilon) \not\subseteq A$, tj. $\forall \varepsilon > 0\colon B(x, \varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset$. K tomu ovšem triviálně platí také $\forall \varepsilon\colon B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$, protože $x \in B(x, \varepsilon) \cap A$. Zkombinováním těchto dvou postřehů dostáváme $x \in H(A)$. Dokázali jsme, že pokud $x \in A$ a neleží v $A^\circ$, nutně leží v $H(A)$, čímž je tvrzení dokázáno.

Ad (c): Podle definice a (b) je $A^\circ \subseteq A \subseteq A^\circ \cup H(A)$, takže

$$A^\circ = A^\circ \setminus H(A) \subseteq A \setminus H(A) \subseteq (A^\circ \cup H(A)) \setminus H(A) = A^\circ,$$

kde první i poslední rovnost plynou z (a). Protože tedy tato série inkluzí začíná i končí stejnou množinou, musí všude nastávat rovnost, speciálně tedy $A^\circ = A \setminus H(A)$, což jsme měli ukázat.

Ad (d): $\overline{A} \overset{\text{def.}}{=} A \cup H(A) \overset{\text{triv.}}{=} \big(A \setminus H(A)\big) \cup H(A) \overset{\text{(c)}}{=} A^\circ \cup H(A)$.

Ad (f): Protože $A = (A^c)^c$, lze psát pro libovolné $x$:

$$\begin{aligned} x \in H(A) &\iff \forall \varepsilon > 0\colon\ B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \ \wedge\ B(x, \varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset \\ &\iff \forall \varepsilon > 0\colon\ B(x, \varepsilon) \cap (A^c)^c \neq \emptyset \ \wedge\ B(x, \varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset \\ &\iff x \in H(A^c). \end{aligned}$$

Tím je dokázáno, že množiny $H(A)$ a $H(A^c)$ mají přesně stejné prvky, a jsou tedy stejné.

Ad (e) „$\Rightarrow$“: Je-li $A$ otevřená, pak podle definice $A = A^\circ$, a jest $A \cap H(A) = A^\circ H(A) \overset{\text{(a)}}{=} \emptyset$.

„$\Leftarrow$“: Pokud $A \cap H(A) = \emptyset$, pak vzpomeňme na (b), tj. $A \subseteq A^\circ \cup H(A)$. Z těchto dvou vztahů plyne $A \subseteq A^\circ$, čili $A$ je otevřená.

Ad (g): Nechť $x \notin A^\circ \cup H(A)$. Pak podle (b) $x \notin A$, tj. $x \in A^c$. Ovšem podle (b) a (f) to znamená $x \in A^c \subseteq (A^c)^\circ \cup H(A^c) = (A^c)^\circ \cup H(A)$, odkud $x \in (A^c)^\circ \cup H(A)$, tj. $x \in (A^c)^\circ$ nebo $x \in H(A)$. My ovšem víme, že $x \notin H(A)$, takže musí platit $x \in (A^c)^\circ$. Dostali jsme tedy, že kterýkoliv bod $x \in M$, který není prvkem $A^\circ$ ani $H(A)$, musí být prvkem $(A^c)^\circ$, čímž je dokázána proklamovaná rovnost.

Zbývá zdůvodnit, že každé dvě množiny na pravé straně rovnosti jsou disjunktní. Množiny $A^\circ$ a $H(A)$ jsou disjunktní podle (a) a tentýž argument dokazuje i disjunktnost $(A^c)^\circ$ a $H(A^c)$, přičemž ale $H(A^c) = H(A)$ podle (f). Konečně $A^\circ \subseteq A$ a $(A^c)^\circ \subseteq A^c$; protože $A$ a $A^c$ jsou disjunktní, totéž platí i pro jejich podmnožiny $A^\circ$ a $(A^c)^\circ$.

Ad (h): Plyne okamžitě z (g) (zde použijeme i dodatku o disjunktnosti) a (d).

Ad (i): Předpoklad $x \in A^\circ$ znamená existenci $\varepsilon > 0$, že $B(x, \varepsilon) \subseteq A$. Protože však $A \subseteq B$, platí i $B(x, \varepsilon) \subseteq B$, tj. $x \in B^\circ$. Tedy $A^\circ \subseteq B^\circ$.

Ad (j): Protože $A \subseteq B$, platí $A^c \supseteq B^c$. Podle (i) tedy také $(A^c)^\circ \supseteq (B^c)^\circ$. Podle (h) tedy dostáváme

$$\big(\overline{A}\big)^c = (A^c)^\circ \supseteq (B^c)^\circ = \big(\overline{B}\big)^c, \qquad \text{a tedy} \qquad \overline{A} \subseteq \overline{B}.$$

□

**2.20 Lemma.** *Buď $(M, \rho)$ metrický prostor, $A \subseteq M$. Pak $\overline{A}$ je uzavřená množina.*

*Důkaz.* Chceme dokázat, že $H\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{A}$. Podle definice $\overline{A} = A \cup H(A)$, takže stačí dokázat $H\left(\overline{A}\right) \subseteq H(A)$. Zvolme tedy $x \in H\left(\overline{A}\right)$; to podle definice hraničního bodu (2.4) znamená

$$\forall \varepsilon > 0\colon\ B(x,\varepsilon) \cap \overline{A} \neq \emptyset \ \wedge\ B(x,\varepsilon) \cap \left(\overline{A}\right)^c \neq \emptyset. \tag{2.5}$$

Protože $A \subseteq \overline{A}$, je $A^c \supseteq \left(\overline{A}\right)^c$, takže když $B(x,\varepsilon)$ protíná $\left(\overline{A}\right)^c$, tím spíše protíná $A^c$. Z toho a z (2.5) dostáváme

$$\forall \varepsilon > 0\colon\ B(x,\varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset. \tag{2.6}$$

Budiž nyní dáno $\varepsilon > 0$; z (2.5) víme, že $B(x,\varepsilon) \cap \overline{A} \neq \emptyset$, a chceme dokázat, že dokonce $B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. Zvolme bod $y \in B(x,\varepsilon) \cap \overline{A}$ (víme, že nějaký existuje). Pokud $y \in A$, jsme hotovi, neboť to znamená, že $y \in B(x,\varepsilon) \cap A$, tj. tento průnik je neprázdný. Pokud naopak $y \notin A$, pak nutně $y \in H(A)$, protože máme $y \in \overline{A} = A \cup H(A)$.

Máme tedy $y \in B(x,\varepsilon) \cap H(A)$. Koule $B(x,\varepsilon)$ je ale otevřená množina podle Lemmatu 2.14, takže $y$ je vnitřní bod $B(x,\varepsilon)$, tj. existuje poloměr $\delta > 0$ takový, že $B(y,\delta) \subseteq B(x,\varepsilon)$. Podle definice hranice (a skutečnosti $y \in H(A)$) je ale $B(y,\delta) \cap A \neq \emptyset$. Tím pádem množinu $A$ protíná i větší koule $B(x,\varepsilon)$, tj. $B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.

Protože $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, dostáváme

$$\forall \varepsilon > 0\colon\ B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset. \tag{2.7}$$

Spojením (2.6) a (2.7) dostáváme, že $x \in H(A)$, čímž je důkaz dokončen. □

**2.21 Poznámka.** Některé body Pozorování 2.19 je možné (a snadné) dokazovat přímo z definice místo použití předchozích bodů lemmatu. Výsledný důkaz možná nebude nejkratší možný, může ale být více přímočarý a přirozenější (a díky tomu i snazší na zapamatování). Například (c) lze dokázat takto:

Nejprve dokážeme inkluzi $A^\circ \subseteq A \setminus H(A)$, nechť tedy $x \in A^\circ$. Pak $x \in A$ podle definice vnitřku (2.13) a zbývá dokázat $x \notin H(A)$. Protože však podle předpokladu $x \in A^\circ$, musí existovat nějaké $\varepsilon > 0$ takové, že $B(x,\varepsilon) \subseteq A$, což je v rozporu s definicí hraničního bodu (2.4), neboť pro toto $\varepsilon$ máme $B(x,\varepsilon) \cap A^c = \emptyset$. Tedy $x \notin H(A)$.

Důkaz opačné inkluze, tedy $A^\circ \supseteq A \setminus H(A)$, zahájíme volbou $x \in A \setminus H(A)$. Je tedy $x \in A$ a zároveň $x \notin H(A)$, tj. pro $x$ platí negace (2.4), tj. platí

$$\exists \varepsilon > 0\colon B(x,\varepsilon) \cap A = \emptyset \vee B(x,\varepsilon) \cap A^c = \emptyset.$$

Mějme tedy takové $\varepsilon > 0$. Zřejmě ale nemůže platit první z obou alternativ, protože $x \in A$ (a tedy $x \in B(x,\varepsilon) \cap A$). Je tedy nutně $B(x,\varepsilon) \cap A^c = \emptyset$, což ovšem znamená přesně to, že $B(x,\varepsilon) \subseteq A$. Dostali jsme tedy, že $x \in A^\circ$, čímž je dokončen důkaz druhé inkluze. Protože platí inkluze na obě strany, množiny jsou si rovny.

**2.22 Věta** (Charakterizace uzavřených množin)**.** *Buď $(M,\rho)$ metrický prostor, $A \subseteq M$. Pak jsou následující výroky ekvivalentní:*

*(i)* *A je uzavřená;*

*(ii)* *$A^c$ je otevřená;*

*(iii)* $\overline{A} = A$*;*

*(iv)* *Pro každou konvergentní posloupnosti* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$ *je* $\lim_{n\to\infty} x_n \in A$.

*Důkaz.* V důkazu se odkazujeme na různé body Pozorování 2.19. Nejprve dokážeme vzájemnou ekvivalenci prvních tří výroků a pak přidáme ještě čtvrtý.

(i)⇒(ii): Jelikož $A$ je uzavřená, jest $H(A^c) \overset{\text{(f)}}{=} H(A) \subseteq A$, takže $H(A^c) \cap A^c = \emptyset$. Tedy $A^c$ je otevřená podle (e).

(ii)⇒(iii): Podle (h) a předpokladu (ii) platí $\left(\overline{A}\right)^c = (A^c)^\circ = A^c$, odkud (přechodem ke komplementu na obou stranách rovnice) $\overline{A} = A$, tj. platí (iii).

(iii)⇒(i): Podle předpokladu a definice uzávěru je $A = \overline{A} = A \cup H(A)$, takže $H(A) \subseteq A$, a tedy $A$ je uzavřená.

(ii)⇒(iv): Buď $A^c$ otevřená a nechť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$ je konvergentní; chceme dokázat, že $x := \lim_{n\to\infty} x_n \in A$. Sporem: kdyby $x \in A^c$, najdeme (z předpokladu otevřenosti $A^c$) poloměr $\varepsilon > 0$, že $B(x,\varepsilon) \subseteq A^c$. Nyní ovšem podle definice limity posloupnosti existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \geqslant n_0\colon\ x_n \in B(x,\varepsilon).$$

Speciálně tedy třeba hned $x_{n_0} \in B(x,\varepsilon) \subseteq A^c$, tedy $x_{n_0} \notin A$, což je spor s předpokladem, že všechny členy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ leží v $A$.[6] Takže musí být $x \in A$, a (iv) platí.

(iv)⇒(i): Nechť platí (iv) a nechť je dán libovolný bod $x \in H(A)$; chceme dokázat, že $x \in A$, čímž bude dokázáno $H(A) \subseteq A$, tj. uzavřenost $A$. Podle definice hraničního bodu (2.4), kterou aplikujeme s $\varepsilon = \frac{1}{n}$, pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje nějaké

$$x_n \in B\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap A \neq \emptyset.$$

Vyberme tedy takovou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ pak platí $0 \leqslant \rho(x,x_n) < \frac{1}{n}$, a Lemma o dvou policajtech implikuje $\lim_{n\to\infty} \rho(x,x_n) = 0$, neboli $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ (podle Definice 2.9).

K bodu $x$ jsme tedy našli posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$ s limitou $x$. Podle (iv) je tedy $x \in A$, a jsme hotovi. □

**2.23 Poznámka** (O dualitě otevřených a uzavřených množin)**.** Buď $(M,\rho)$ metrický prostor, $G \subseteq M$. Pak $G$ je otevřená, právě když $G^c$ je uzavřená.

Pro důkaz tohoto faktu stačí položit $A = G^c$ a aplikovat předchozí větu, přičemž máme na paměti, že $(G^c)^c = G$, neboli že „komplement komplementu je původní množina“.

[6] Zjistili jsme, že od indexu $n_0$ dál dokonce *žádný* člen posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ neleží v $A$, to nás ale nemusí zajímat; stačí jeden takový. (Tj. stačí nám jeden spor, nepotřebujeme jich mít nekonečně mnoho.)

V následujícím už budeme s naprostou samozřejmostí tuto „dualitu“ mezi otevřenými a uzavřenými množinami používat: Jestliže množina je otevřená, pak její komplement je uzavřený; jestliže množina je uzavřená, pak její komplement je otevřený. A samozřejmě, zjistíme-li, že komplement naší množiny je třeba uzavřený, bude nám jasné, že naše množina je otevřená apod. Těchto faktů budeme často užívat bez dalšího komentáře.

Za pozornost stojí v tomto kontextu důkaz Věty 2.26 o vlastnostech uzavřených množin, kterou na základě zmiňované duality dokážeme z Věty 2.16. Je dobré si všimnout podobnosti i rozdílů mezi oběma větami.

**2.24 Poznámka.** Je-li $A$ libovolná množina v metrickém prostoru $(M, \rho)$, pak podle Lemmatu 2.20 je $\overline{A}$ uzavřená. Podle Věty 2.22 (kde za $A$ dosadíme $\overline{A}$) je tedy $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$. Celkem tedy pro libovolnou množinu $A$ platí

$$\overline{\overline{A}} = \overline{A}.$$

**2.25 Příklad** (Intervaly v $\mathbb{R}$ jako otevřené a uzavřené množiny)**.**

• Uvažujme množinu $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ pro nějaká čísla $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Protože $H\big([a, b]\big) = \{a, b\} \subseteq [a, b]$, je $[a, b]$ uzavřená množina. Protože hraniční body nejsou vnitřní, zároveň vidíme, že $[a, b]$ není uzavřená.

• Naproti tomu interval $(a, b)$ pro $a, b \in \mathbb{R}^*$ je otevřená množina, protože všechny jeho body jsou vnitřní. To lze ukázat například přímo z definice: buď dán libovolný bod $x \in (a, b)$. To znamená, že $a < x < b$, tedy $\delta := \min\{x - a, b - x\} > 0$, a $B(x, \delta) = (x - \delta, x + \delta) \subseteq (a, b)$. Tedy $x$ je vnitřní bod $(a, b)$, a protože bylo zvolen libovolně, jsou vnitřní všechny, tj. $(a, b)$ je otevřená množina.

• Speciálně tedy dostáváme, že intervaly $(-\infty, b)$ a $(a, \infty)$ jsou otevřené množiny. Jejich komplementy jsou tedy (podle Věty 2.22) uzavřené množiny. Tj. intervaly tvaru

$$(-\infty, a] = \mathbb{R} \setminus (a, \infty) \quad \text{a} \quad [b, \infty) = \mathbb{R} \setminus (-\infty, b) \quad \text{jsou uzavřené množiny.}$$

• Pomocí komplementů a Věty 2.22 lze podat jiný snadný důkaz toho, že interval $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ je uzavřená množina: Poněvadž

$$[a, b] = \mathbb{R} \setminus \Big( \underbrace{(-\infty, a) \cup (b, \infty)}_{\text{otevřená}} \Big),$$

je $[a, b]$ uzavřená množina, jsouc komplementem množiny otevřené.

• Dále se zaměříme na tzv. polouzavřené (tj. polootevřené) intervaly, tj. intervaly tvaru $[a, b)$ nebo $(a, b]$, kde $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$. (Všimněte si, že je nyní řeč pouze o omezených intervalech.) Zaměříme-li se třeba na první případ, tj. $[a, b)$, s tím, že druhá možnost je symetrická, můžeme si všimnout, že $H\big([a, b)\big) = \{a, b\} \not\subseteq [a, b)$, takže není uzavřená. Na druhou stranu ale nějaký prvek své hranice obsahuje (konkrétně $a$); ten není vnitřní, takže množina není ani otevřená.

Z toho plyne zásadní poučení: *Množiny nejsou jako dveře.* Může se totiž (na rozdíl od dveří) stát, že množina není otevřená, ani uzavřená.

• Jednobodová množina, např. $\{1\}$ je uzavřená, není otevřená. Důkaz uzavřenosti lze provést například přes komplement:

$$\{1\} = \mathbb{R} \setminus \Big( (-\infty, 1) \cup (1, \infty) \Big).$$

• Konečně si všimneme, že existují také tzv. *obojetné množiny*, tj. množiny, které jsou zároveň otevřené i uzavřené. Konkrétně v $\mathbb{R}$ jsou takové právě dvě, a to $\emptyset$ a $\mathbb{R}$. Obě jsou totiž otevřené podle Věty 2.16, a jelikož jsou vzájemně svými komplementy, jsou také obě uzavřené (komplement otevřené je uzavřená). △

**2.26 Věta** (Vlastnosti uzavřených množin)**.** *Buď $(M, \rho)$ metrický prostor. Platí:*

*(i) Množiny $M$ a $\emptyset$ jsou uzavřené.*

*(ii) Jsou-li $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq M$ uzavřené množiny, pak i $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ je uzavřená.*

*(iii) Je-li $I$ libovolná množina „indexů“, a je-li pro každý index $\alpha \in I$ dána nějaká uzavřená množina $A_\alpha$, pak $\displaystyle\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ je uzavřená.*

*Důkaz.* Důkaz neprovedeme přímou cestou, ačkoliv by to bylo podobně snadné. Místo toho využijeme dualitu mezi otevřenými a uzavřenými množinami (viz Poznámku 2.23) a Větu 2.16.

Ad (i): víme, že $\emptyset$ je otevřená (Věta 2.16 (i)), takže komplement $M = \emptyset^c$ je uzavřená. Analogicky je uzavřená $\emptyset$, protože $\emptyset^c = M$ je otevřená.

Ad (ii): použijeme De Morganův vzorec:

$$M \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcap_{i=1}^{n} \underbrace{(M \setminus \underbrace{A_i}_{\text{uz.}})}_{\text{otevřená}}.$$

Podle Věty 2.16 (ii) je průnik otevřených množin otevřená množina. Tedy množina na pravé straně rovnosti výše je otevřená. Takže $M \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ je otevřená, a $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ je (jakožto komplement otevřené) uzavřená.

Ad (iii): použijeme druhý („duální“) De Morganův vzorec:

$$M \setminus \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (M \setminus A_\alpha).$$

Na pravé straně rovnosti je množina zapsána jako sjednocení otevřených množin (komplementů uzavřených množin $A_\alpha$), a je tedy otevřená podle Věty 2.16 (iii). Takže $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ je (jakožto komplement otevřené) uzavřená. □

**2.27 Poznámka** (Důkaz vlastností uzavřených množin bez De Morganových vzorců a odkazu na otevřené)**.** Pro ilustraci se podívejme třeba na důkaz druhého bodu Věty 2.26 bez použití znalostí o otevřených množinách:

Buďte tedy množiny $A_1, A_2, \dots, A_n \subseteq M$ uzavřené a budiž dána libovolná konvergentní posloupnost $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ s limitou $x = \lim_{k\to\infty} x_k$. Podle Věty 2.22 stačí dokázat, že $x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, tj. z toho sjednocení „nelze vykonvergovat“, a je tedy uzavřené.

Protože posloupnost $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ je nekonečná a množin $A_i$ je konečně mnoho (konkrétně jich je $n$), v jedné z nich se musí nacházet nekonečně mnoho členů; tj. přesně řečeno, musí existovat $p \in \{1, 2, \dots, n\}$ a rostoucí posloupnost indexů[7] $\{k_j\}_{j=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{N}$ tak, že $x_{k_j} \in A_p$ pro všechna $j$. Ovšem $\{x_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ je podposloupnost konvergentní posloupnosti $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, a má tedy stejnou limitu.[8] Máme tedy $\lim_{j\to\infty} x_{k_j} = x$, přičemž $x_{k_j} \in A_p$ pro všechna $j$. Ale $A_p$ je uzavřená podle předpokladu, takže $x \in A_p$ (z $A_p$ nelze vykonvergovat). Tedy $x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, a jsme hotovi.

## 2.3 Spojitá zobrazení mezi MP

**2.28 Definice** (Spojitost)**.** Buďte $(M, \rho)$ a $(N, \sigma)$ metrické prostory, $f: M \to N$ zobrazení. Řekneme, že $f$ je *spojité v bodě $a \in M$*, jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in M:\ x \in B_\rho(a, \delta) \ \Rightarrow\ f(x) \in B_\sigma(f(a), \varepsilon).$$

Říkáme, že $f$ *je spojité (na $M$)*, jestliže $f$ je spojité v každém bodě $M$.

**2.29 Lemma** (Aritmetika spojitosti)**.** *Buďte $(M, \rho)$ metrický prostor a $f, g: M \to \mathbb{R}$ spojité funkce. Pak $f + g$, $f \cdot g$ jsou spojité na $M$ a $\frac{f}{g}$ je spojitá ve všech bodech svého definičního oboru.*

*Důkaz.* Doplním později, nebudu zkoušet. □

**2.30 Věta** (Heineho definice spojitosti)**.** *Nechť $(M, \rho)$, $(N, \sigma)$ jsou metrické prostory, $f: M \to N$ je zobrazení a $c \in M$. Pak jsou následující výroky ekvivalentní:*

*(i)* $f$ *je spojité v bodě* $c$;

*(ii)* $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq M:\ \lim_{n\to\infty} x_n = c \ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(c)$.

*Důkaz.* Doplním později, nebudu zkoušet. Od důkazu Heineho věty, který jsme probrali v 1. semestru, se důkaz liší pouze v kosmetických detailech. □

[7] Připomeňte si, že vybraná posloupnost (neboli podposloupnost) z nějaké posloupnosti je dána rostoucí posloupností těch indexů, které do tohoto „výběru“ zařadíme. Vizte definici vybrané posloupnosti v prvním dílu skript.

[8] Cvičení pro vás je dokázat toto tvrzení v kontextu metrických prostorů; důkaz je v principu stejný jako v prvním semestru pro posloupnosti reálných čísel.

**2.31 Značení** (Vzor množiny při zobrazení)**.** Buď $f : M \to N$ jakékoliv zobrazení mezi množinami $M$ a $N$ a nechť $B \subseteq N$ je podmnožina. Pak *vzor* množiny $B$ při zobrazení $f$ značíme a definujeme takto:

$$f^{-1}(B) = \{x \in M : f(x) \in B\}. \tag{2.8}$$

**2.32 Poznámka** (Kolize značení vzoru a inverzního zobrazení)**.** Je důležité si připomenout, že zde je (bohužel standardní) kolize značení: $f^{-1}$ značí také inverzní zobrazení k $f$, které ovšem nemusí existovat. Pokud inverzní zobrazení existuje (což platí právě tehdy, když $f$ je prosté), pak množina $f^{-1}(B)$ chápaná jako obraz $B$ při zobrazení $f^{-1}: N \to M$ je přesně stejná jako $f^{-1}(B)$ chápaná jako vzor podle rovnice (2.8).[9]

Zmíněná kolize značení tedy není nijak tíživá, neboť v případě, že ke kolizi skutečně dochází (tj. obě interpretace jsou dobře definované), nezáleží na tom, kterého chápání se přidržíme, neboť obě dají tutéž množinu. Problém je ovšem paradoxně v situaci, kdy inverzní zobrazení neexistuje; pak totiž zápis $f^{-1}(B)$ může budit opačný dojem, tedy že inverzní zobrazení vlastně existuje.

V následujícím nebudeme předpokládat prostotu zobrazení, s nimiž pracujeme, není pro nás v tomto kontextu nijak podstatná. Symbolem tvaru $f^{-1}(B)$ apod. budeme tedy vždy myslet vzor podle definice (2.8).

**2.33 Lemma** (O vzorech)**.** *Buď $f : M \to N$ zobrazení mezi množinami $M$ a $N$ a nechť $A, B \subseteq N$. Pak platí:*

*(i)* $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$*;*

*(ii)* $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$*;*

*(iii)* $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$*;*

*(iv)* $f^{-1}(A^c) = \big(f^{-1}(A)\big)^c$*;*

*(v) jestliže* $A \subseteq B$*, pak* $f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$.

*Důkaz.* Pro ilustraci ukážu bod (iii), jehož je bod (iv) okamžitým důsledkem a ostatní body se dokáží podobně. Z následujících ekvivalencí první a třetí platí přímo z definice vzoru (2.8), zatímco druhá a čtvrtá ekvivalence jsou z definice množinového rozdílu.

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(A \setminus B) \quad &\iff \quad f(x) \in A \setminus B \\ &\iff \quad f(x) \in A \ \wedge \ f(x) \notin B \\ &\iff \quad x \in f^{-1}(A) \ \wedge \ x \notin f^{-1}(B) \\ &\iff \quad x \in f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B). \end{aligned}$$

To dokazuje rovnost (iii). □

[9] Toto tvrzení samozřejmě potřebuje důkaz. Ten si můžete rozmyslet jako jednoduché cvičení.

**2.34 Věta** (Charakterizace spojitosti pomocí vzorů)**.** *Nechť $(M, \rho)$ a $(N, \sigma)$ jsou metrické prostory a $f : M \to N$ je zobrazení. Pak jsou následující výroky ekvivalentní:*

*(i)* $f$ *je spojitá na* $M$*;*

*(ii)* $\forall G \subseteq N :$ $G$ *je otevřená* $\Rightarrow$ $f^{-1}(G)$ *je otevřená;*

*(iii)* $\forall F \subseteq N :$ $F$ *je uzavřená* $\Rightarrow$ $f^{-1}(F)$ *je uzavřená .*

*Důkaz.* Nejdřív dokážeme ekvivalenci prvních dvou bodů. Předpokládejme tedy nejprve, že platí (i), tj. $f$ je spojitá na $M$, a dokažme (ii); budiž tedy dána libovolná otevřená množina $G \subseteq N$. Máme dokázat, že její vzor $f^{-1}(G) = \{x \in M : f(x) \in G\}$ je otevřená množina, což provedeme přímo z definice otevřenosti. Je tedy dán libovolný bod $a \in f^{-1}(G)$, tj. takový, že $f(a) \in G$, a cílem je ukázat, že jde o vnitřní bod $f^{-1}(G)$. Protože $G$ je otevřená a $f(a) \in G$, existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $B_\sigma(f(a), \varepsilon) \subseteq G$. Zobrazení $f$ je ale spojité, je tedy spojité i v bodě $a$, a existuje tedy (k tomuto $\varepsilon$ příslušné) $\delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in M : \; x \in B_\rho(a, \delta) \;\Rightarrow\; f(x) \in B_\sigma(f(a), \varepsilon).$$

Z toho vyplývá první z následujících inkluzí; ta druhá plyne z bodu (v) Lemmatu 2.33 a toho, že (podle volby $\varepsilon$) je $B_\sigma(f(a), \varepsilon) \subseteq G$:

$$B_\rho(a, \delta) \subseteq f^{-1}\big(B_\sigma(f(a), \varepsilon)\big) \subseteq f^{-1}(G).$$

Celkem tedy $B_\rho(a, \delta) \subseteq f^{-1}(G)$, takže $a$ je vnitřní bod $f^{-1}(G)$, a jsme hotovi s důkazem první implikace.

Předpokládejme nyní platnost (ii), zvolme libovolně $a \in M$ a dokažme spojitost $f$ v bodě $a$ (tím bude dokázán výrok (i)). Budiž pro to dáno $\varepsilon > 0$, máme najít příslušné $\delta$. Označíme-li $G = B_\sigma(f(a), \varepsilon)$, pak $G \subseteq N$ je otevřená podle Lemmatu 2.14. Z předpokladu (ii) nyní plyne, že $f^{-1}(G)$ je otevřená v $M$. Přitom samozřejmě $a \in f^{-1}(G)$ (protože $f(a) \in G = B_\sigma(f(a), \varepsilon)$), takže z otevřenosti existuje $\delta > 0$ takové, že $B_\rho(a, \delta) \subseteq f^{-1}(G)$. To ovšem podle definice vzoru znamená přesně to, že

$$\forall x \in B_\rho(a, \delta) : \; f(x) \in G = B_\sigma(f(a), \varepsilon),$$

tj. našli jsme „vhodné“ $\delta > 0$, a $f$ tedy opravdu je spojitá v bodě $a$. Tím je dokončen důkaz ekvivalence prvních dvou bodů.

Důkaz věty bude dokončen, dokážeme-li ještě ekvivalenci (ii) a (iii). Nechť platí (ii); dokážeme (iii). Buď tedy dána libovolná uzavřená $F \subseteq N$. Pak podle Lemmatu 2.33

$$\big(f^{-1}(F)\big)^c = f^{-1}\big(F^c\big),$$

přičemž $F^c$ je otevřená (jakožto komplement uzavřené), takže $f^{-1}(F^c)$ je otevřená podle předpokladu platnosti (ii) (vzor libovolné otevřené je otevřená). Celkem jsme tedy dostali, že komplement množiny $f^{-1}(F)$ je otevřený, takže ona sama je uzavřená. Důkaz opačné implikace je analogický a přenechávám ho laskavému čtenáři jako dobrovolný úkol (DÚ). $\square$

## 2.4 Kompaktnost

Cílem této sekce je vyvinout praktický způsob, jak rozpoznat množiny v $\mathbb{R}^d$, na kterých (libovolná) spojitá funkce zaručeně nabývá svých extrémů. Weierstrassova věta z prvního semestru je příkladem takového tvrzení: říká totiž, že tuto vlastnost mají uzavřené, omezené intervaly v $\mathbb{R}$. Přesně řečeno, každá spojitá funkce na $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ nabývá maxima i minima. Ve vyšší dimenzi ale pracujeme se složitějšími množinami, takže je potřeba obecnější kritérium. Takovou postačující podmínkou je právě kompaktnost; je ovšem potřeba také umět kompaktní množiny rozpoznat.

Kromě samotné definice kompaktní množiny tato sekce přináší dvě hlavní informace:

- Věta 2.38 garantuje, že jakákoliv spojitá funkce na jakékoliv kompaktní množině nabývá svých extrémů přes tuto množinu.

- Věta 2.43 pak poskytuje pohodlný způsob, jak rozpoznat kompaktní množinu v $\mathbb{R}^d$.

Použitím těchto dvou nástrojů jsme schopni v konkrétních početních úlohách zaručit, že zkoumané funkce skutečně nabývají extrémů, které se (jinými metodami) snažíme najít. Zejména u těžších problémů je důležité (a uklidňující) už od začátku vědět, že řešení existuje, a že se tedy v potu tváře neženeme za neexistující chimérou.

**2.35 Definice** (Vybraná posloupnost)**.** Nechť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost prvků množiny $M$.[10] Je-li $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ rostoucí posloupnost přirozených čísel („indexů“), pak se posloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ nazývá *vybraná posloupnost* z posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Vybraná posloupnost je tedy dána, kdykoliv je dána příslušná rostoucí posloupnost indexů $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$. Zároveň každá vybraná posloupnost příslušnou posloupnost indexů určuje. Jiný termín pro vybranou posloupnost je *podposloupnost*.

**2.36 Definice** (Kompaktní množina)**.** Buď $(M,\rho)$ metrický prostor a nechť $K \subseteq M$. Řekneme, že množina $K$ je *kompaktní*, jestliže každá posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq K$ má konvergentní vybranou posloupnost s limitou v $K$. Říkáme, že $(M,\rho)$ je kompaktní metrický prostor, pokud $M$ je kompaktní a kompaktní množině často říkáme zkráceně *kompakt*.

**2.37 Poznámka.** Uvedená definice je v našem kontextu dobře aplikovatelná, „správnější“ by ale bylo definovat kompaktnost množiny $K \subseteq N$ výrokem (ii) níže, který nyní uvádím bez důkazu jako charakterizaci kompaktnosti. Nuže:

[10] Je nyní lhostejné, o jakou množinu $M$ se jedná (nemusí jít ani o metrický prostor). Mohl jsem tedy napsat prostě „buď $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ jakákoliv posloupnost“.

Buď $(M, \rho)$ metrický prostor a nechť $K \subseteq M$. Pak NVJE:

(i) $K$ je kompaktní;

(ii) z každého pokrytí $K$ otevřenými množinami lze vybrat konečně mnoho, které stále $K$ pokrývají.

Abych nemusel definovat nové pojmy, je (ii) formulována poněkud krkolomně. Standardní formulace zní: *Z každého otevřeného pokrytí $K$ lze vybrat konečné podpokrytí.* Tato (ekvivalentní) definice kompaktnosti v metrických prostorech má řadu výhod, jejich rozbor je však mimo rámec tohoto kurzu.

### 2.4.1 Nabývání extrémů

**2.38 Věta** (Spojitá funkce na kompaktu nabývá extrémů)**.** *Buď $(M, \rho)$ neprázdný kompaktní metrický prostor. Nechť $f : M \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Pak $f$ nabývá svých extrémů na $M$. To jest, existují body $a, b \in M$ takové, že*

$$f(a) = \inf_{x \in M} f(x);$$
$$f(b) = \sup_{x \in M} f(x).$$

*Důkaz.* Buď $M$ kompaktní a $f : M \to \mathbb{R}$ spojitá; dokážeme, že $f$ nabývá minima přes $M$ (důkaz nabývání maxima je analogický). Položme

$$m = \inf_{x \in M} f(x).$$

Pak $m \in [-\infty, \infty)$, tj. a priori není jasné, že $f$ musí být zdola omezená, a musíme tedy zvážit i možnost $m = -\infty$. Ať tak či tak, z definice infima vyplývá

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists x \in M : \ f(x) \in B(m, \varepsilon), \qquad \text{kde}$$
$$B(m, \varepsilon) = \begin{cases} (m - \varepsilon, m + \varepsilon), & \text{pokud } m \in \mathbb{R}, \\ \left(-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}\right), & \text{pokud } m = -\infty. \end{cases}$$

Rekurzí pro $\varepsilon = \frac{1}{n}$ vybereme posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq M$ takovou, že $f(x_n) \in B\left(m, \frac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$. Pak $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = m$. Skutečně, pokud $m > -\infty$, pak pro všechna $n \in \mathbb{N}$ máme $m \leqslant f(x_n) < m + \frac{1}{n}$, a podle Lemmatu o dvou policajtech tedy $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = m$. Pokud by platilo $m = -\infty$, pak bychom pro všechna $n \in \mathbb{N}$ měli $f(x, n) \in B\left(-\infty, \frac{1}{n}\right) = (-\infty, -n)$, takže $f(x_n) < -n$, a podle Lemmatu o jednom policajtovi je $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = -\infty$.

Máme tedy posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq M$, pro niž $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = m$. Díky kompaktnosti $M$ můžeme najít vybranou posloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, která má v $M$ limitu; označme ji

$x = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$. Protože však vybraná posloupnost (z posloupnosti $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$) má stejnou limitu jako posloupnost původní,[11] platí také $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = m$.

Podle předpokladu spojitosti $f$ na $M$ (a speciálně tedy v bodě $x$) a Heineho věty 2.30 platí $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x)$. Celkem tedy máme

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x);$$
$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = m.$$

Jelikož limita je určena jednoznačně,[12] dostáváme $f(x) = m$. V bodě $x$ se tedy nabývá infima všech hodnot, tj. minima. Nyní už je jasné, že $m > -\infty$, tj. $m \in \mathbb{R}$, neboť $m$ je hodnota funkce $f$ v jistém bodě a my připouštíme pouze hodnoty konečné. Tím je důkaz dokončen. $\square$

Důkazem Věty 2.38 je dokončena první klíčová myšlenka oddílu o kompaktech: už víme, že spojitá funkce na kompaktu nabývá extrémů. Zbývá naučit se kompaktní množinu rozpoznat, když se s ní setkáme. To je obsahem zbytku oddílu.

### 2.4.2 Rozpoznání kompaktů v $\mathbb{R}^d$

Nejprve se hodí připomenout, že $\mathbb{R}^d$ (pro $d \in \mathbb{N}$) chápeme jako metrický prostor se standardní eukleidovskou metrikou, která vychází z Pýthagorovy věty: pro vektory $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_d)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_d)$ je

$$\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{d}(x_i - y_i)^2}.$$

Připomeňme také, že pro posloupnost vektorů $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}^d$ a $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^d$ je podle Lemmatu 1.16

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{a} \iff \lim_{n\to\infty} \|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{a}\| = 0.$$

Máme-li posloupnost vektorů $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ a zajímáme-li se o složky jednotlivých členů posloupnosti, používáme značení jednotlivých složek pomocí horních indexů, tj.

$$\boldsymbol{x}_n = \left(x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^d\right) \in \mathbb{R}^d.$$

Pro formulaci naší charakterizace kompaktnosti (Věty 2.43) je potřeba ještě jeden standardní pojem teorie metrických prostorů:

[11] To lze snadno ukázat z definic a v prvním semestru jsme tak učinili.

[12] To platí v každém metrickém prostoru, zde ale navíc jde o posloupnost reálných čísel $\{f(x_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$, takže nám stačí věta o jednoznačnosti limity posloupnosti dokázaná už v prvním semestru.

**2.39 Definice** (Omezená množina a posloupnost)**.** Buď $(M, \rho)$ metrický prostor, a nechť $A \subseteq M$. Řekneme, že $A$ je *omezená*, jestliže existují „střed“ $x \in M$ a „poloměr“ $R > 0$ takové, že $A \subseteq B(x, R)$. Posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq M$ je *omezená*, je-li omezená množina jejích hodnot $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.[13] Není-li množina (nebo posloupnost) omezená, nazývá se *neomezená*.

**2.40 Poznámka** (Dvě ekvivalentní definice omezenosti.)**.** Podle definice je $A \subseteq M$ omezená, jestliže

$$\exists x \in M \; \exists R > 0 \colon \; A \subseteq B(x, R).$$

Řečeno slovy, $A$ se nazývá omezená, pokud je obsažena v nějaké otevřené kouli (pokud ji „pohltí“ nějaká koule). Nic se přitom neříká o středu této koule: může být kdekoliv a tvrdí se existence pouze jednoho takového středu. Intuice z eukleidovských nám ale napovídá, že na volbě středu by nemělo příliš záležet, máme-li svobodu vzít podle potřeby větší poloměr.

Tvrdím, a záhy také dokážu, že následující výroky jsou ekvivalentní:[14]

(i) $A$ je omezená;

(ii) $\forall x \in M \; \exists R > 0 \colon \; A \subseteq B(x, R)$;

(iii) $\operatorname{diam}(A) < \infty$, kde $\operatorname{diam}(A) := \sup\{\rho(x, y) \colon x, y \in A\}$.

*Důkaz.* Předpokládejme $M \neq \emptyset$. Pak triviálně platí (ii)⇒(i): za střed koule pohlcující množinu $A$ lze volit (s vhodným poloměrem) dokonce libovolný bod $M$, určitě tedy existuje aspoň jeden takový bod (díky neprázdnosti $M$).

Dokažme opačnou implikaci, tj. (i)⇒(ii): Podle (i) můžeme najít $x \in M$ a $R > 0$ tak, že $A \subseteq B(x, R)$. Dokážeme (ii); budiž tedy dáno libovolné $y \in M$ (kvůli kolizi značení volím jiné písmenko). Označme $S := R + \rho(y, x)$; pak $A \subseteq B(y, S)$, což nyní dokážu. Budiž dán libovolný bod $z \in A$. Pak použitím trojúhelníkové nerovnosti a vztahu $z \in A \subseteq B(x, R)$ dostaneme

$$\rho(y, z) \leqslant \rho(y, x) + \rho(x, z) < \rho(y, x) + R = S,$$

tedy $\rho(y, z) < S$, tj. $z \in B(y, S)$. Protože $z \in A$ bylo libovolné, znamená to $A \subseteq B(y, S)$. K libovolnému $y \in M$ jsme tedy našli vhodný poloměr $S > 0$ tak, že $A \subseteq B(y, S)$, a důkaz (ii) je tedy hotov.

Princip je, že když existuje nějaká daná koule $B(x, R)$, která obsahuje $A$, a je dán libovolný (jiný) „střed“ $y$, stačí vzít tak velký poloměr $S$, aby $B(x, R) \subseteq B(y, S)$. Pak samozřejmě také $A \subseteq B(y, S)$.

---

[13] Vzpomeňme, že posloupnost (tj. nějaké zobrazení) je něco jiného než množina jejích hodnot. Třeba množina hodnot konstantní posloupnosti je jednobodová. A může se také stát, že dvě různé posloupnosti mají stejné množiny hodnot – kupř. posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ dané vzorci $a_n = (-1)^n$, $b_n = (-1)^{n+1}$ se neshodují ani pro jeden index, a přitom platí $\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \{b_n : n \in \mathbb{N}\} = \{-1, 1\}$.

[14] To ovšem pro *neprázdný* metrický prostor $M$. Všimněte si, že pro prázdný metrický prostor $M = \emptyset$ a $A = M$ množina $A$ není omezená, protože žádný „střed“ vůbec neexistuje; naproti tomu výrok (ii) bude platit i v tomto případě.

Důkaz ekvivalence bodu (iii) s body (i) a (ii) vám přenechám jako jednoduché cvičení s nápovědou: Ad (i)⇒(ii): Dokažte a aplikujte: $C \subseteq D \Rightarrow \operatorname{diam}(C) \leqslant \operatorname{diam}(D)$. Ad (ii)⇒(i): Zvolíme-li nějaký bod $x \in A$, pak libovolný další bod $y \in A$ splňuje $\rho(x, y) \leqslant \operatorname{diam}(A)$. □

**2.41 Cvičení** (Podposloupnost má stejnou limitu)**.** V důkazu Věty 2.38 jsme použili fakt z prvního semestru, že vybraná posloupnost z konvergentní posloupnosti reálných čísel je také konvergentní a má stejnou limitu. Důkaz následující věty používá obdobu tohoto tvrzení pro posloupnosti v obecném metrickém prostoru:

*Buď $(M, \rho)$ metrický prostor a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq M$ konvergentní posloupnost s $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Pak libovolná vybraná posloupnost $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ má tutéž limitu, tj. $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$.*

Důkaz tohoto tvrzení je analogický tomu z prvního semestru. Proveďte ho.

**2.42 Cvičení** (Konvergentní posloupnost je omezená)**.** Buď $(M, \rho)$ metrický prostor a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq M$ posloupnost. Je-li $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentní, pak je omezená.

Důkaz tohoto tvrzení lze provést analogicky jako v prvním semestru pro posloupnosti reálných čísel. Nápověda: označme $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Podle definice limity jsou všechny členy od jistého $n_0$ dál v kouli $B(x, 1)$ (pro $\varepsilon = 1$). Stačí tedy poloměr 1 dostatečně zvětšit na $R \geqslant 1$ tak, aby koule $B(x, R)$ pohltila také všech konečně mnoho členů s indexy $< n_0$.

**2.43 Věta** (Charakterizace kompaktů v $\mathbb{R}^d$)**.** *Množina $M \subseteq \mathbb{R}^d$ je kompaktní, právě když je omezená a uzavřená.*

*Důkaz.* Předpokládejme, že $M \subseteq \mathbb{R}^d$ je kompaktní; dokážeme nejprve uzavřenost, a to skrze podmínku (iv) Věty 2.22. Zvolme tedy libovolnou konvergentní posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq M$. Kompaktnost $M$ implikuje existenci konvergentní podposloupnosti s limitou v $M$;[15] ovšem tato podposloupnost musí mít stejnou limitu jako $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ (viz Cvičení 2.41). Proto $\lim_{n\to\infty} x_n \in M$. Množina $M$ je tedy uzavřená (nelze z ní vykonvergovat).

Nyní dokážeme, že kompaktnost implikuje kromě uzavřenosti také omezenost, a provedeme to sporem. Stále tedy předpokládáme, že $M$ je kompaktní, a pro spor navíc předpokládejme, že není omezená. Idea je, že v $M$ najdeme neomezenou posloupnost, která navíc nebude mít žádnou konvergentní podposloupnost (protože i každá podposloupnost bude neomezená); to bude spor s kompaktností.

Napišme si, co přesně znamená neomezenost $M$. Nuže, $M$ není omezená, právě když

$$\begin{aligned}\neg(M \text{ je omezená}) &\iff \neg\big(\exists x \in \mathbb{R}^d\ \exists R > 0\colon\ M \subseteq B(x, R)\big)\\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}^d\ \forall R > 0\colon\ M \not\subseteq B(x, R)\\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}^d\ \forall R > 0\colon\ M \setminus B(x, R) \neq \emptyset.\end{aligned}$$

[15]Definice kompaktnosti připouští i konvergentní posloupnost z níž vybíráme (konvergentní) podposloupnost. Obě posloupnosti (tedy ta původní a ta z ní vybraná) pak mají tutéž limitu.

Můžeme zvolit libovolné $x$ odpovídající výroku za poslední ekvivalencí, zvolme tedy třeba $x = \mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^d$; pak platí

$$\forall R > 0\colon\ M \setminus B(\mathbf{0}, R) \neq \emptyset. \tag{2.9}$$

Rekurzí vybereme posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ takovou, že

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon\ x_n \in M \setminus B(\mathbf{0}, n). \tag{2.10}$$

Je zřejmé, že to lze provést, protože množina $M \setminus B(\mathbf{0}, R)$ je (podle (2.9)) pro sebevětší $R$ neprázdná; takže $M \setminus B(x, n)$ je neprázdná pro každé $n \in \mathbb{N}$, a v každém kroku konstrukce $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tedy „máme z čeho vybírat“.

Z (2.10) plyne $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq M$ a také neomezenost množiny hodnot $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Kdyby totiž byla omezená, pak by podle Poznámky 2.40 muselo existovat $R > 0$ takové, že $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq B(\mathbf{0}, R)$; takové ovšem neexistuje, neboť pro každé $R$ najdeme přirozené číslo $n > R$ a (2.10) pak implikuje $x_n \notin B(\mathbf{0}, R)$. Stejným argumentem se dokáže neomezenost libovolné posloupnosti vybrané z $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Máme tedy posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq M$, jejíž žádná podposloupnost není omezená, a tedy (podle Cvičení 2.42) není konvergentní. To je spor s kompaktností $M$. Množina $M$ proto nemůže být neomezená, a je tedy omezená.

Zbývá dokázat opačnou implikaci. Předpokládejme, že $M$ je omezená a uzavřená, a dokažme, že $M$ je kompaktní. Budiž pro to dána libovolná posloupnost vektorů $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{(x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^d)\right\}_{n=1}^{\infty} \subseteq M$; máme najít její podposloupnost s limitou v $M$. Protože $M$ je (podle předpokladu) omezená, je omezená i posloupnost v $M$ obsažená. Je snadné si uvědomit, že z toho plyne také omezenost posloupností jednotlivých složek; tj. tvrdím, že každá z následujících $d$ posloupností reálných čísel je omezená: $\left\{x_n^1\right\}_{n=1}^{\infty}, \left\{x_n^2\right\}_{n=1}^{\infty}, \dots, \left\{x_n^d\right\}_{n=1}^{\infty}$.

Podle Bolzanovy-Weierstrassovy věty (první semestr) ovšem každá omezená posloupnost reálných čísel má konvergentní vybranou posloupnost. Existuje tedy rostoucí posloupnost indexů $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ taková, že příslušná vybraná posloupnost z posloupnosti $\left\{x_n^1\right\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní; limitu této vybrané posloupnosti označíme

$$a_1 := \lim_{k\to\infty} x_{n_k}^1 \in \mathbb{R}.$$

Není ovšem žádný důvod se domnívat, že právě tato posloupnost indexů $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ zařídí konvergenci příslušné podposloupnosti pro jiné souřadnice než právě tu první. Naštěstí ale můžeme zpozorovat, že $\left\{x_{n_k}^2\right\}_{n=1}^{\infty}$ je stále omezená (jsouc podposloupností omezené posloupnosti $\left\{x_n^2\right\}_{n=1}^{\infty}$). Druhou aplikací Bolzanovy-Weierstrassovy věty tedy z této podposloupnosti můžeme vybrat podposloupnost („podpodposloupnost“ neboli vybranou posloupnost z vybrané posloupnosti) odpovídající indexům $\left\{n_k^{(2)}\right\} \subseteq \{n_k : k \in \mathbb{N}\}$. To jest, druhý výběr indexů (naznačený superskriptem „(2)“) provádíme pouze z indexů vybraných v prvním kole vybírání.

Označme

$$a_2 := \lim_{k\to\infty} x^2_{n_k^{(2)}} \in \mathbb{R},$$

přičemž nezapomínejme, že tento druhý výběr „nezrušil benefit výběru prvního“, neboli že platí (díky tomu, že podposloupnost konvergentní posloupnosti má stejnou limitu)

$$a_1 = \lim_{k\to\infty} x^1_{n_k^{(2)}} \in \mathbb{R}.$$

Tímto způsobem pokračujeme, až konečně po $d$ aplikacích Bolzanovy-Weierstrassovy věty dostaneme vybrané indexy „$d$-tého řádu“ (sub-sub-…-subvýběr) $\{n_k^{(d)}\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $i \in \{1, 2, \dots, d\}$ platí

$$a_i = \lim_{k\to\infty} x^i_{n_k^{(d)}} \in \mathbb{R}.$$

Označme $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \dots, a_d)$. Pak tedy vybraná posloupnost $\{\boldsymbol{x}_{n_k^{(d)}}\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje po složkách k $\boldsymbol{a}$. Podle Lemmatu 1.16 to znamená, že $\lim_{k\to\infty} \rho\big(\boldsymbol{x}_{n_k^{(d)}}, \boldsymbol{a}\big) = 0$.

Zbývá ukázat, že $\boldsymbol{a} \in M$. To ovšem plyne z toho, že všechny členy posloupnosti $\{\boldsymbol{x}_{n_k^{(d)}}\}_{k=1}^{\infty}$ jsou prvky uzavřené množiny $M$, takže i limita této posloupnosti musí být prvek $M$ podle Věty 2.22 („nelze vykonvergovat z uzavřené množiny“).

Pro danou posloupnost $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsme našli konvergentní podposloupnost s limitou v $M$. Tedy $M$ je kompaktní. □

### 2.4.3 Praktické důkazy kompaktnosti

V úvodu k této sekci (2.4) jsem se zmínil, že naším hlavním cílem je umět zaručit nabývání extrémů spojité funkce. To nemusí být možné vždy, je-li ale řeč o extrémech vzhledem ke kompaktní množině, je jejich existence garantována Větou 2.38. V tomtéž úvodu také píši, že otázka rozpoznání kompaktních množin je vyřešena Větou 2.43. V zásadě bychom tedy mohli na pojem kompaktní množiny zapomenout a formulovat následující důsledek, který plyne bezprostředně ze zmíněných dvou vět:

**2.44 Důsledek.** *Buď $M \subseteq \mathbb{R}^d$ uzavřená a omezená. Buď $f : M \to \mathbb{R}$ spojitá. Pak $f$ nabývá svých (globálních) extrémů (vzhledem k $M$).*

To je pozoruhodný výsledek. I kdybychom se ale rozhodli pod jeho dojmem na pojem kompaktnosti docela zapomenout (což bych nerad), stále by zůstala otázka, jak snadno dokázat omezenost a hlavně uzavřenost dané množiny. Množiny jsou různé a často je potřeba přijít s řešením „na míru“ konkrétnímu příkladu, mnoho standardních početních situací však lze vyřešit použitím Věty 2.34. Pojďme si to předvést na příkladě.

**2.45 Příklad.** Dokažme kompaktnost množiny

$$M = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leqslant 4\big\}.$$

K tomu podle Věty 2.43 stačí (a je nutné) dokázat, že $M$ je omezená a uzavřená.

Omezenost $M$ podle definice znamená, že existuje nějaká koule v $\mathbb{R}^2$ (čili otevřený kruh), která $M$ obsahuje. V tomto případě je jasné, že tuto vlastnost má například následující koule:

$$B(\mathbf{0},3) = B\big((0,0),3\big) = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon\ x^2+y^2 < 9\big\} \supseteq M.$$

Uzavřenost $M$ dokážeme, možná poněkud překvapivě, pomocí Věty 2.34. Idea je, že množinu $M$ vyjádříme jako vzor uzavřené množiny při nějakém spojitém zobrazení (zde funkci). Podle zmíněné věty tím bude dokázáno, že $M$ je uzavřená. Konkrétně: položme $f(x,y) = x^2+y^2$. Pak

$$\begin{aligned} M &= \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon\ x^2+y^2 \leqslant 4\big\} \\ &= \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon\ f(x,y) \leqslant 4\big\} \\ &= \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon\ f(x,y) \in (-\infty,4]\big\} \\ &= f^{-1}\big((-\infty,4]\big). \end{aligned}$$

Jsouc polynomem, $f$ je spojitá; interval $(-\infty,4]$ je uzavřená množina, protože jeho komplement $(-\infty,4]^c = (4,\infty)$ je množina otevřená. Podle Věty 2.34 je tedy $f^{-1}\big((-\infty,4]\big)$ uzavřená množina, tj. $M$ je uzavřená (podle rovností výše). Dokázali jsme, že $M$ je omezená i uzavřená, je tedy kompaktní. △

**2.46 Poznámka.** Hlavní nová myšlenka postupu v řešení Příkladu 2.45 je vyjádření dané množiny ve tvaru vzoru (uzavřené) množiny při spojitém zobrazení. Cílem je převést problém uzavřenosti (možná docela složité) množiny $M$ na problém uzavřenosti nějaké množiny v $\mathbb{R}$ (a spojitosti jisté funkce). Nepříliš překvapivě bývá otázka uzavřenosti podmnožin $\mathbb{R}$ jednodušší než ve vyšší dimenzi.

# Kapitola 3

# Posloupnosti a řady funkcí

**3.1 Definice** (Bodová konvergence posloupnosti funkcí)**.** Buďte $f_n$ $(n \in \mathbb{N})$ a $f$ reálné funkce definované aspoň na množině $M$ (lhostejno jakého typu). Řekneme, že posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *bodově konverguje* k $f$ na $M$, píšeme „$f_n \to f$ na $M$“, jestliže platí

$$\forall x \in M\colon \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

**3.2 Definice** (Stejnoměrná konvergence posloupnosti funkcí)**.** Buďte $f_n$ $(n \in \mathbb{N})$ a $f$ reálné funkce definované aspoň na množině $M$ (lhostejno jakého typu). Řekneme, že posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *stejnoměrně konverguje* k $f$ na $M$, píšeme „$f_n \rightrightarrows f$ na $M$“, jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant n_0\ \forall x \in M\colon\ \bigl|f_n(x) - f(x)\bigr| < \varepsilon.$$

**3.3 Tvrzení** (Stejnoměrná konvergence zachovává omezenost a neomezenost)**.**
*Buďte $f_n, f$ $(n \in \mathbb{N})$ reálné funkce definované aspoň na $M$ a nechť $f_n \rightrightarrows f$ na $M$. Pak*

*(i) Jestliže všechny funkce $f_n$ jsou omezené $(n \in \mathbb{N})$, pak i $f$ je omezená.*

*(ii) Jestliže všechny funkce $f_n$ jsou neomezené $(n \in \mathbb{N})$, pak i $f$ je neomezená.*

**3.4 Lemma.** *Buďte $f_n, f$ $(n \in \mathbb{N})$ reálné funkce definované aspoň na $M$.*

*(i) $(f_n \rightrightarrows f$ na $M) \implies (f_n \to f$ na $M)$.*

*(ii) $(f_n \rightrightarrows f$ na $M) \implies (f_{n+1} \rightrightarrows f$ na $M)$.*

*(iii) Jestliže $A \subseteq M$ a $f_n \rightrightarrows f$ na $M$, pak $f_n \rightrightarrows f$ na $A$.*

*(iv) Jestliže $f_n \rightrightarrows f$ na každé z množin $M_1, M_2, \dots M_p$ (kde $p \in \mathbb{N}$ je počet těchto množin), pak $f_n \rightrightarrows f$ na $\bigcup_{i=1}^{p} M_i$.*

*(v) Je-li $M$ konečná, pak $(f_n \rightrightarrows f$ na $M) \iff (f_n \to f$ na $M)$.*

**3.5 Připomenutí.** • V eukleidovských prostorech jsme definovali hromadný bod množiny v Definici 1.45 jako bod, jehož každé prstencové okolí protíná onu množinu. Stejný pojem lze definovat i pro obecné metrické prostory:

Buď $(X, \rho)$ metrický prostor, $M \subseteq X$, $a \in X$. Řekneme, že $a$ je *hromadný bod* $M$, je-li

$$\forall \delta > 0\colon\ P(a, \delta) \cap M \neq \emptyset.$$

Množinu všech hromadných bodů $M$ označujeme opět $M'$.

- V prvním semestru jsme definovali tzv. Bolzanovu-Cauchyovu podmínku pro posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ platností výroku

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \geqslant n_0\colon\ |x_m - x_n| < \varepsilon.$$

Totéž můžeme definovat v obecném metrickém prostoru $(M, \rho)$ pro posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq M$, stačí pouze v závěru výroku psát $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$ místo $|x_m - x_n| < \varepsilon$. Pro obecné metrické prostory pak hovoříme o *cauchyovské posloupnosti* (místo posloupnosti splňující Bolzanovu-Cauchyovu podmínku).

**3.6 Poznámka.** Metrický prostor $(X, \rho)$ se nazývá *úplný*, pokud každá cauchyovská posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq M$ je konvergentní.

Z prvního semestru víme, že $\mathbb{R}$ se standardní metrikou je úplný. Tento výsledek se dá snadno rozšířit na vyšší dimenzi a dokázat, že všechny prostory $\mathbb{R}^d$ se standardní eukleidovskou metrikou jsou úplné.

**3.7 Věta** (Moore-Osgood)**.** *Buď $(X, \rho)$ metrický prostor, $M \subseteq X$, $a \in M'$. Buďte dále $f_n$, $f$ ($n \in \mathbb{N}$) funkce definované aspoň na $M$ takové, že $f_n \rightrightarrows f$ na $M$. Nechť dále pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje limita*