Lokální extrémy funkcí

Určete lokální extrémy funkcí:

1. $f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$,
2. $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$,
3. $x^2 - 3x - x\sqrt{y} + y$,
4. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$,
5. $f(x,y,z) = \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z} + x$.

Řešení:

1.

$$\begin{aligned} \mathrm{grad} f(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y)) = \left(6x^2 + y^2 + 10x, 2xy + 2y\right) = 0 \\ 6x^2 + y^2 + 10x = 0, \\ 2y(x+1) = 0 \Rightarrow y = 0 \wedge x = -1, \end{aligned}$$

Pro $y = 0$ dostaneme $6x^2 + 10x = x(6x+10) = 0$, tedy $x = 0 \wedge x = -\frac{5}{3}$. Pro $x = -1$ dostaneme $6 + y^2 - 10 = y^2 - 4 = 0$, tedy $y = \pm 2$. Body, ve kterých by mohl být lokální extrém, tedy jsou $[0,0]$, $[-\frac{5}{3}, 0]$, $[-1, 2]$ a $[-1. -2]$.
Určeme druhé parciální derivace funkce f, tedy $f_{x,x}(x,y) = 12x + 10$, $f_{x,y}(x,y) = 2y$ a $f_{y,y}(x,y) = 2x + 2$.

I. Řešme úlohu pomocí Hessovy matice

$$H(f) = \begin{pmatrix} f_{x,x} & f_{x,y} \\ f_{y,x} & f_{y,y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x+10 & 2y \\ 2y & 2x+2 \end{pmatrix}.$$

i) Pro bod $[0,0]$ dostaneme

$$H = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

tedy $10 > 0$ a $\det(H) = 20 > 0$, a proto je matice H pozitivně definitní $\Rightarrow$ funkce f má v bodě $[0,0]$ lokální minimum.

ii) Pro bod $[-\frac{5}{3}, 0]$ dostaneme

$$H = \begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix},$$

tedy $-10 < 0$ a $\det(H) = \frac{40}{3} > 0$, matice H je negativně definitní $\Rightarrow$ funkce f má v bodě $[-\frac{5}{3}, 0]$ lokální maximum.

iii) Pro bod $[-1, 2]$ dostaneme

$$H = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix},$$

tedy $-2 < 0$ a $\det(H) = -16 < 0$, a proto nemá funkce f v bodě $[-1, 2]$ lokální maximum.

iv) Pro bod $[-1, -2]$ dostaneme

$$H = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix},$$

tedy $-2 < 0$ a $\det(H) = -16 < 0$, a proto nemá funkce f v bodě $[-1, -2]$ lokální maximum.

II. Řešme úlohu pomocí kvadratické formy

$$Q(h) = f_{x,x}h_1^2 + 2f_{x,y}h_1h_2 + f_{y,y}h_2^2 = (12x + 10)h_1^2 + 4yh_1h_2 + (2x + 2)h_2^2.$$

i) Pro bod $[0, 0]$ dostaneme

$$Q(h) = 10h_1^2 + 2h_2^2 > 0, \forall h \neq 0.$$

Tedy $Q(h)$ je pozitivně definitní a funkce f má v bodě $[0, 0]$ lokální minimum.

ii) Pro bod $[-\frac{5}{3}, 0]$ dostaneme

$$Q(h) = -10h_1^2 - \frac{4}{3}h_2^2 < 0, \forall h \neq 0.$$

Tedy $Q(h)$ je negativně definitní a funkce f má v bodě $[-\frac{5}{3}, 0]$ lokální maximum.

iii) Pro bod $[-1, 2]$ dostaneme

$$Q(h) = -2h_1^2 + 8h_1h_2,$$

tedy $Q(1, 0) = -2 < 0$ a $Q(1, 1) = 6 > 0$. Proto $Q(h)$ je indefinitní a funkce f tedy nemá v bodě $[-1, 2]$ lokální extrém.

iv) Pro bod $[-1, -2]$ dostaneme

$$Q(h) = -2h_1^2 - 8h_1h_2,$$

tedy $Q(1, 0) = -2 < 0$ a $Q(1, -1) = 6 > 0$. Proto $Q(h)$ je indefinitní a funkce f tedy nemá v bodě $[-1, 2]$ lokální extrém.

2.

$$\begin{aligned} \mathrm{grad} f(x, y, z) = (f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z)) = \big(3x^2 + 12y, 2y + 12x, 2z + 2\big) = 0 \\ 3x^2 + 12y = 0, \\ 2y + 12x = 0 \Rightarrow y = -6x, \\ 2z + 2 = 0 \Rightarrow z = -1. \end{aligned}$$

Tedy $3x^2 - 72x = 3x(x - 24) = 0 \Rightarrow x = 0, y = 0 \wedge x = 24, y = -144$. $f_{x,x} = 6x$, $f_{x,y} = 12$, $f_{x,z} = 0$, $f_{y,y} = 2$, $f_{y,z} = 0$ a $f_{z,z} = 2$.

I. Řešme úlohu pomocí Hessovy matice

$$H(f) = \begin{pmatrix} f_{x,x} & f_{x,y} & f_{x,z} \\ f_{y,x} & f_{y,y} & f_{y,z} \\ f_{z,x} & f_{z,y} & f_{z,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

i) Pro bod $[0,0,1]$ dostaneme

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

tedy $\det(a_{1,1}) = a_{1,1} = 0$, $\det = \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ 12 & 0 \end{pmatrix} = -144 < 0$ a $\det(H) = -288 < 0$, proto je matice H indefinitní $\Rightarrow$ funkce f nemá v bodě $[0,0,1]$ lokální extrém.

ii) Pro bod $[24,-144,-1]$ dostaneme

$$H = \begin{pmatrix} 144 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

tedy $144 > 0$, $\det = \begin{pmatrix} 144 & 12 \\ 12 & 2 \end{pmatrix} = 144 > 0$ a $\det(H) = 288 > 0$, proto je matice H pozitivně definitní a funkce f nemá v bodě $[24,-144,-1]$ lokální minimum.

II. Řešme úlohu pomocí kvadratické formy

$$\begin{aligned} Q(h) &= f_{x,x}h_1^2 + f_{y,y}h_2^2 + f_{z,z}h_3^2 + 2f_{x,y}h_1h_2 + 2f_{x,z}h_1h_3 + 2f_{y,z}h_2h_3 \\ &= 6xh_1^2 + 2h_2^2 + 2h_3^2 + 24h_1h_2. \end{aligned}$$

i) Pro bod $[0,0,-1]$ dostaneme

$$Q(h) = 2h_2^2 + 2h_3^2 + 24h_1h_2.$$

Tedy $Q(-1,1,0) = 2 - 24 = -22 < 0$ a $Q(1,0,0) = 2 > 0$ a proto je kvadratická forma indefinitní a funkce f nemá v bodě $[0,0,-1]$ lokální extrém.

ii) Pro bod $[24,-144,-1]$ dostaneme

$$Q(h) = 144h_1^2 + 2h_2^2 + 2h_3^2 + 24h_1h_2 = (12h_1 + h_2)^2 + h_2^2 + 2h_3^2 > 0, \forall h \neq 0,$$

Tedy $Q(h)$ je pozitivně definitní a funkce f má v bodě $[24,-144,-1]$ lokální minimum.

3.

$$\operatorname{grad} f(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y)) = \left(2x - 3 - \sqrt{y}, -\frac{x}{2\sqrt{y}} + 1\right) = 0$$

$$\begin{aligned} &2x - 3 - \sqrt{y} = 0, \\ &-\frac{x}{2\sqrt{y}} + 1 = 0 \Rightarrow x = 2\sqrt{y}, \\ &2x - 3 - \sqrt{y} = 0 \Rightarrow \sqrt{y} = 1 \Rightarrow y = 1, x = 2. \end{aligned}$$

I. Řešme úlohu pomocí Hessovy matice

$$H(f)=\begin{pmatrix} f_{x,x} & f_{x,y} \\ f_{y,x} & f_{y,y} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2\sqrt{y}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{y}} & \frac{x}{4y^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix}.$$

Po dosazení bodu $[2,1]$ dostaneme

$$H=\begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Tedy $a_{1,1}=2>0$ a $\det(H)=\frac{3}{4}>0$, matice H je pozitivně definitiní a proto má funkce f v bodě $[2,1]$ lokální minimum.

II. Řešme úlohu pomocí kvadratické formy

$$Q(h)=f_{x,x}h_1^2+f_{y,y}h_2^2+2f_{x,y}h_1h_2=2h_1^2-\frac{1}{\sqrt{y}}h_1h_2+\frac{x}{4y^{\frac{3}{2}}}h_2^2.$$

Po dosazení bodu $[2,1]$ dostaneme

$$Q(h)=2h_1^2-h_1h_2+\frac{1}{2}h_2^2=2(h_1^2-\frac{1}{2}h_1h_2+\frac{1}{4}h_2^2)=2(h_1-\frac{1}{4}h_2)^2+\frac{3}{8}h_2^2>0,\forall h\neq 0.$$

Kvadratická forma $Q(h)$ je pozitivně definitní a proto má funkce f v bodě $[2,1]$ lokální minimum.

4.

$$\begin{aligned}&\operatorname{grad} f(x,y)=(f_x(x,y),f_y(x,y))=\left(4x^3-4y,4y^3-4x\right)=0\\ &4x^3-4y=0\Rightarrow y=x^3\end{aligned}$$

I. Řešme úlohu pomocí Hessovy matice

$$H(f)=\begin{pmatrix} f_{x,x} & f_{x,y} \\ f_{y,x} & f_{y,y} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix}.$$

i) Pro bod $[0,0]$ dostaneme

$$H=\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix},$$

tedy $a_{1,1}=0$ a $\det(H)=-16<0$ a proto funkce f nemá v bodě $[0,0]$ lokální extrém.

ii) Pro bod $[1,1]$ dostaneme

$$H=\begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix},$$

tedy $a_{1,1}=12>0$ a $\det(H)=128>0$, matice H je pozitivně definitní a proto má funkce f v bodě $[1,1]$ lokální minimum.

iii) Pro bod $[-1,-1]$ dostaneme

$$H = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix},$$

tedy $a_{1,1} = 12 > 0$ a $\det(H) = 128 > 0$, matice H je pozitivně definitní a proto má funkce f v bodě $[-1,-1]$ lokální minimum.

II. Řešme úlohu pomocí kvadratické formy

$$Q(h) = f_{x,x}h_1^2 + f_{y,y}h_2^2 + 2f_{x,y}h_1h_2 = 12x^2h_1^2 - 8h_1h_2 + 12y^2h_2^2.$$

i) Pro bod $[0,0]$ dostaneme

$$Q(h) = -8h_1h_2,$$

tedy $Q(1,1) = -8 < 0$ a $Q(1,-1) = 8 > 0$, $Q(h)$ je indefinitní a proto nemá funkce f v bodě $[0,0]$ lokální extrém.

ii) Pro bod $[1,1]$ dostaneme

$$\begin{aligned} Q(h) &= 12h_1^2 - 8h_1h_2 + 12h_2^2 = 12(h_1^2 - \frac{2}{3}h_1h_2 + h_2^2) \\ &= 12\left(h_1^2 - \frac{1}{3}h_2^2\right) + \frac{32}{3}h_2^2 > 0, \forall h \neq 0. \end{aligned}$$

Kvadratická forma $Q(h)$ je pozitivně definitní a proto má funkce f v bodě $[1,1]$ lokální minimum.

iii) Pro bod $[-1,-1]$ dostaneme

$$\begin{aligned} Q(h) &= 12h_1^2 - 8h_1h_2 + 12h_2^2 = 12(h_1^2 - \frac{2}{3}h_1h_2 + h_2^2) \\ &= 12\left(h_1^2 - \frac{1}{3}h_2^2\right) + \frac{32}{3}h_2^2 > 0, \forall h \neq 0. \end{aligned}$$

Kvadratická forma $Q(h)$ je pozitivně definitní a proto má funkce f v bodě $[1,1]$ lokální minimum.

5.

$$\operatorname{grad} f(x,y,z) = (f_x(x,y,z), f_y(x,y,z), f_z(x,y,z)) = \left(\frac{-y^2}{4x^2} + 1, \frac{y}{2x} - \frac{z^2}{y^2}, \frac{2z}{y} - \frac{2}{z^2}\right) = 0$$

$$\frac{-y^2}{4x^2} + 1 = 0 \Rightarrow y = \pm 2x$$

$$\frac{y}{2x} - \frac{z^2}{y^2} = 0 \Rightarrow y = x, y = \pm z$$

$$\frac{2z}{y} - \frac{2}{z^2} = 0 \Rightarrow y = z = \pm 1 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{2}.$$

I. Řešme úlohu pomocí Hessovy matice

$$H = \begin{pmatrix} f_{x,x} & f_{x,y} & f_{x,z} \\ f_{y,x} & f_{y,y} & f_{y,z} \\ f_{z,x} & f_{z,y} & f_{z,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y^2}{2x^3} & -\frac{y}{2x^2} & 0 \\ -\frac{y}{2x^2} & \frac{1}{2x} - \frac{2z^2}{x^3} & \frac{-2z}{y^2} \\ 0 & -\frac{2z}{y^2} & \frac{2}{y} + \frac{4}{z^3} \end{pmatrix}.$$

i) Pro bod $[\frac{1}{2}, 1, 1]$ dostaneme

$$H = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & -15 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

tedy $a_{1,1} = 4 > 0$, det $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 15 \end{pmatrix} = 56 > 0$ a $\det(H) = 320 > 0$, matice H je pozitivně definitní a proto má funkce f v bodě $[\frac{1}{2}, 1, 1]$ lokální minimum.

ii) Pro bod $[-\frac{1}{2}, -1, -1]$ dostaneme

$$H = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & 15 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \end{pmatrix}.$$

tedy $a_{1,1} = -4 < 0$, det $\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -15 \end{pmatrix} = 56 > 0$ a $\det(H) = -320 < 0$, matice H je negativně definitní a proto má funkce f v bodě $[-\frac{1}{2}, -1, -1]$ lokální maximum.

II. Řešme úlohu pomocí kvadratické formy

$$\begin{aligned} Q(h) &= f_{x,x}h_1^2 + f_{y,y}h_2^2 + f_{z,z}h_3^2 + 2f_{x,y}h_1h_2 + 2f_{x,z}h_1h_3 + 2f_{y,z}h_2h_3 \\ &= \frac{y^2}{2x^3}h_1^2 + \left(\frac{1}{2x} - \frac{2z^2}{x^3}\right)h_2^2 + \left(\frac{2}{y} + \frac{4}{z^3}\right)h_3^2 - \frac{y}{x^2}h_1h_2 - \frac{4z}{y^2}h_2h_3. \end{aligned}$$

i) Pro bod $[\frac{1}{2}, 1, 1]$ dostaneme

$$\begin{aligned} Q(h) &= 4h_1^2 - 15h_2^2 + 6h_3^2 - 4h_1h_2 - 4h_2h_3 \\ &= 4(h_1^2 - h_1h_2 + \frac{1}{4}h_2^2) + 2(h_2^2 - 2h_2h_3 + h_3^2) + 12h_2^2 + 4h_3^2 \\ &= 4(h_1 - \frac{1}{2}h_2)^2 + 2(h_2 + h_3)^2 + 12h_2^2 + 4h_3^2 > 0, \forall h \neq 0. \end{aligned}$$

tedy kvadratická forma $Q(h)$ je pozitivně definitní a proto má funkce f v bodě $[\frac{1}{2}, 1, 1]$ lokální minimum.

ii) Pro bod $[-\frac{1}{2}, -1, -1]$ dostaneme

$$\begin{aligned} Q(h) &= -4h_1^2 + 15h_2^2 - 6h_3^2 + 4h_1h_2 + 4h_2h_3 \\ &= -4(h_1^2 - h_1h_2 + \frac{1}{4}h_2^2) - 2(h_2^2 - 2h_2h_3 + h_3^2) - 12h_2^2 - 4h_3^2 \\ &= -4(h_1 - \frac{1}{2}h_2)^2 - 2(h_2 + h_3)^2 - 12h_2^2 - 4h_3^2 < 0, \forall h \neq 0. \end{aligned}$$

tedy kvadratická forma $Q(h)$ je negativně definitní a proto má funkce f v bodě $[-\frac{1}{2}, -1, -1]$ lokální maximum.