13. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/∼kuncova/, kunck6am@natur.cuni.cz

Teorie

Věta 1 (Lagrangeovy multiplikátory)**.** Nechť $G \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina, $f, g \in C^1(G)$, $M = \{[x, y] \in G, g(x, y) = 0\}$ a $[x_0, y_0] \in M$ je bodem lokálního extrému funkce f vzhledem k množině M. Pak je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:

1. $\nabla g(x_0, y_0) = (0, 0)$
2. existuje $\lambda \in \mathbb{R}$ splňující $\nabla f(x_0, y_0) + \lambda \nabla g(x_0, y_0) = (0, 0)$

Věta 2 (Lagrangeovy multiplikátory 2)**.** Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $f, g_1, \ldots, g_m \in C^1(G)$, $m < n$, $M = \{\boldsymbol{z} \in G, g_1(\boldsymbol{z}) = 0, g_2(\boldsymbol{z}) = 0, \ldots, g_m(\boldsymbol{z}) = 0\}$ a $\tilde{\boldsymbol{z}} \in M$ je bodem lokálního extrému funkce f vzhledem k množině M. Pak je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:

1. vektory $\nabla g_1(\tilde{\boldsymbol{z}}), \nabla g_2(\tilde{\boldsymbol{z}}), \ldots, \nabla g_m(\tilde{\boldsymbol{z}})$ jsou lineárně závislé,

   Jeden vektor je lineárně závislý, jestliže je nulový, dva vektory jsou lineárně závislé, jestliže jeden je násobek druhého.

2. existují $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ splňující

$$\nabla f(\tilde{\boldsymbol{z}}) + \lambda_1 \nabla g_1(\tilde{\boldsymbol{z}}) + \lambda_2 \nabla g_2(\tilde{\boldsymbol{z}}) + \cdots + \lambda_m \nabla g_m(\tilde{\boldsymbol{z}}) = \mathbf{0}.$$

Poznámka 3. Nechť f je spojitá na $\overline{M}$. Pak $\sup f(M) = \sup f(\overline{M})$ a $\inf f(M) = \inf f(\overline{M})$.

Poznámka 4. Nechť K je neprázdní kompaktní množina v metrickém (pod)prostoru X. Nechť navíc $\operatorname{int} K \subset X$. Nechť funkce f je spojitá na K a nechť existuje $x_0 \in \operatorname{int} K$ tak, že

$$x \in \partial K \cup (X \setminus K) \implies f(x) > f(x_0) \qquad (\text{resp.} f(x) < f(x_0)).$$

Pak má funkce f v množině X minimum (resp. maximum) rovné $\min f(K)$ (resp. $\max f(K)$) a všechny body $x \in X \cup K$, v nichž je $f(x) = \min f(K)$ (resp. $f(x) = \max f(K)$), leží v $\operatorname{int} K$.

Algoritmy

Globální extrémy:

1. Postupujeme jako u lokálních extrémů - tím získáme lokální maxima nebo minima. Pokud je funkce diferencovatelná, tak jinde extrémy být nemohou.
2. Odhadneme limity v krajích definičního oboru. Např. jak se funkce chová na přímkách $y = 0$, $x = 0$.
3. Pokud to vypadá, že funkce globální extrémy nemá (např. jde někde do nekonečna), tak za pomoci limit najdeme bod, který má vyšší hodnotu, než naše lok. maximum (minimum analogicky).
4. Pokud to vypadá, že v místech lok. extrémů jsou i globální, tak:
   (a) Najdeme kompakt, který obsahuje tyto podezřelé body. Spojitá funkce na kompaktu musí nabývat extrémů.
   (b) Ukážeme, že mimo kompakt je funkce menší než maximum (a větší než minimum). Tady pomůže vhodná volba kompaktu, znalost limit a nějaké ty obvyklé odhady.

Extrémy na omezené množině:

1. Je-li množina uzavřená, tak odůvodníme, že spojitá funkce na kpt. nabývá extrémy.
2. Extrémy mohou být:
   (a) na vnitřku množiny jen v místech s nulovými derivacemi (jejich typ nevyšetřujeme, pokud na to nejsme přímo tázáni);
   (b) v bodech vnitřku, kde neexistuje derivace;
   (c) na hranici: hraniční křivky (nebo plochy) - obvykle lze dosadit a získat funkci 1 proměnné.
   (d) na hranici hranice: krajní body, hroty trojúhelníku atp.
3. Všechny podezřelé body sepíšeme a porovnáme jejich funkční hodnoty. Vybereme maximum a minimum.
4. Pokud množina není uzavřená, tak ji prve uzavřeme a vyšetříme jako kompakt. Pokud je extrém na její hranici (mimo množinu), tak funkce tento extrém nemá - ale bude to její sup/inf.

Příklady

1. Najděte globální extrémy funkcí
   (a) $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$
   Hint: Jak se chová funkce te^{-t}?
   (b) $f(x,y) = (x^2+7y^2)e^{-5x^2-2y^2}$
   Hint: Lze se nějakými odhady dostat k funkci te^{-t}?
   (c) $f(x,y) = 3x + \frac{4y}{x^2} + \frac{27}{y^3}$, $M = (0,\infty)^2$
   (d) Najděte supremum a infimum fukce
   $f(x,y) = (x+y+z)e^{-(x+2y+3z)}$, na $M = (0,\infty)^3$

2. Najděte globální extrémy funkcí na množině M
   (a) $f(x,y,z) = x - 2y - 2z$, $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\}$
   (b) $f(x,y) = x^2 + y$, $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\}$
   (c) $f(x,y) = 4x + 3y - 4$, $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 1\}$
   (d) $f(x,y,z) = x - y + 3z$, $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+4z^2 = 4\}$
   (e) $f(x,y,z) = x + 2y + 3z$, $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 1, x^2+y^2 = 1\}$
   (f) $f(x,y) = x^2+y^2$, $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : 2x + 6y = 20\}$
   (g) $f(x,y) = x^2+y^2$, $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : 5x^2 - 6xy + 5y^2 - 4 = 0\}$

Zkouškové příklady

3. Najděte globální extrémy funkcí na množině M
   (a) $f(x,y,z) = xy + yz$, $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1, x+y+z = 1\}$
   (b) $f(x,y,z) = z + e^{xy}$, $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1, x^2+y^2 = z^2\}$
   (c) $f(x,y,z) = x^2+2xz+y^2+z$, $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1, x = y^2+z^2\}$

4. Najděte globální extrémy funkcí na množině M
   (a) $f(x,y) = x^4y$, $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^4+y^4 \leq 16, x \geq -1\}$
   (b) $f(x,y) = 2x + 4y$, $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$
   (c) $f(x,y,z) = e^{-z^2}(x^2+y^2+xy)$, $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 1, |z| \leq 1\}$
   (d) $f(x,y) = (x^2+7y^2)e^{-(2x^2+y^2)}$, $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^2+4y^2 \leq 1\}$

5. Určete maximální možný objem kvádru, jehož hrany jsou rovnoběžné se souřadnými osami, jeden jeho vrchol leží v počátku a diagonálně protilehlý vrchol leží v množině $M = \{[x,y,z], x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, 4x+2y+z = 2.\}$

Bonusové příklady

6. Farmář a farmářka mají 100 m pletiva a rádi by oplotili pozemek pro ovce tak, aby měl co největší plochu. Trvají na tom, že pozemek bude mít tvar obdélníku. Ježto je u řeky, stačí jej oplotit ze 3 stran. Jaké bude zadání za pomoci Lagrangeových multiplikátorů?

   (a) $f(x, y) = xy$, $g(x, y) = 2x + y - 100$

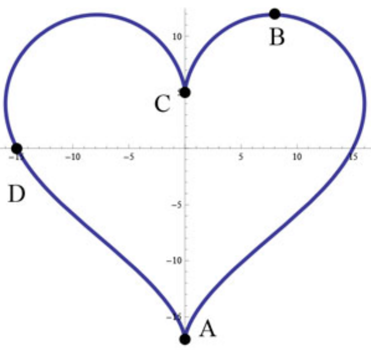
   (b) $f(x, y) = 2x + 2y - 100$, $g(x, y) = xy$

   (c) $f(x, y) = xy$, $g(x, y) = x + y - 100$

   (d) $f(x, y) = x + y$, $g(x, y) = xy - 100$

Figure 1: https://www.cbr.com/shaun-the-sheep-best-worst-episodes-imdb/

7. Ve kterém z bodů A, B, C, D se nachází minimum funkce $f(x, y) = y$ vzhledem ke křivce na obrázku?



Zdroj: https://www.cpp.edu/conceptests/question-library/mat214.shtml