Písemka z matematické analýzy pro učitele (NMTM201)
2. ročník, zimní semestr – 4. termín dne 2. února 2021

Početní část

Příklad 1. Najděte obecné řešení následující rovnice. Nemusíte lepit. Najděte její maximální řešení splňující danou počáteční podmínku:

$$y' = \frac{(y^3+1)\operatorname{cotg} x}{3y^2}, \qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt[3]{1336}.$$ [**17** bodů]

Příklad 2. Proveďte kvalitativní analýzu následující rovnice a nakreslete obrázek zachycující chování všech maximálních řešení:

$$y' = \arcsin\left(\frac{1-y^2}{4}\right) \cdot \sqrt{4-y^2}.$$ [**17** bodů]

Příklad 3. Najděte všechna maximální řešení následující rovnice:

$$y' = \sqrt[3]{x} + \frac{y}{x}.$$ [**16** bodů]

Hodnocení:

Nutné podmínky na hodnocení **dobře**:

- dosažení aspoň **16** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **42** bodů.

Nutné podmínky na hodnocení **velmi dobře**:

- dosažení aspoň **21** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **56** bodů.

Nutné podmínky na hodnocení **výborně**:

- dosažení aspoň **26** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **70** bodů.

Písemka z matematické analýzy pro učitele (NMTM201)
2. ročník, zimní semestr – 4. termín dne 2. února 2021

Teoretická část

Úloha A.

(a) Definujte prodloužení řešení a maximální řešení diferenciální rovnice. [**2** body]

(b) Definujte parciální derivace funkce dvou proměnných. [**2** body]

(c) Zformulujte Picardovu větu o existenci a jednoznačnosti řešení rovnice. [**2** body]

(d) Zformulujte větu o existenci a jednoznačnosti řešení lineární rovnice n-tého řádu. [**2** body]

(e) Zformulujte Abelovo kritérium konvergence nekonečných řad. [**2** body]

Úloha B.

(a) Podrobně dokažte, že řešení homogenní lineární diferenciální rovnice n-tého řádu tvoří lineární prostor. (Nemusíte dokazovat, že jeho dimenze je n.) [**5** bodů]

(b) Dokažte, že nekonečná řada tvaru $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konverguje, právě když $\alpha > 1$. [**4** body]

(c) Nechť y je řešení diferenciální rovnice tvaru $y' = g(y)$ na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. Dokažte, že pak $y_c(x) := y(x-c)$ je rovněž řešení. Nezapomeňte upřesnit interval, na kterém se jedná o řešení. [**5** bodů]

Úloha C.

(a) Má každá autonomní rovnice nějaké stacionární řešení? Odpověď zdůvodněte. [**2** body]

(b) Rovnice $y' = \sqrt{1-y^2}$ má stacionární řešení $y \equiv \pm 1$. Uvažujte libovolné řešení y s oborem hodnot $(-1, 1)$. Určete délku definičního oboru y. [**4** body]

(c) Zformulujte a dokažte Moivreovu větu. [**4** bodů]

Úloha D. Vyberte si **jednu** z následujících dvou možností.

(a) Dokažte, že každé řešení autonomní diferenciální rovnice je monotónní. [**16** bodů]

Nebo:

(b) Zformulujte a dokažte integrální kritérium konvergence nekonečných řad. [**12** bodů]

Pokud používáte nějaká pomocná tvrzení, musí být jasně patrné, že znáte jejich znění.