Písemka z matematické analýzy pro učitele (NMTM201)
2. ročník, zimní semestr – 2. termín dne 23. ledna 2023

Početní část

Příklad 1. Najděte všechna maximální řešení diferenciální rovnice [**20** bodů]

$$y' \cdot \sin x \cdot \cos x - y = 0.$$

Příklad 2. Proveďte kvalitativní analýzu následující rovnice a nakreslete graf zachycující chování všech maximálních řešení: [**15** bodů]

$$y' = y \cdot \sqrt{1 - y^2}.$$

Příklad 3. Najděte všechna maximální řešení následující rovnice: [**15** bodů]

$$y' + 2xy = 2x^3.$$

Určete to maximální řešení, které splňuje počáteční podmínku $y(0) = 2$.

Hodnocení:

Nutné podmínky na hodnocení **dobře**:

- dosažení aspoň **10** bodů z *Úloh A a B* teoretické části;
- dosažení aspoň **16** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **42** bodů.

Nutné podmínky na hodnocení **velmi dobře**:

- dosažení aspoň **14** bodů z *Úloh A a B* teoretické části;
- dosažení aspoň **21** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **56** bodů.

Nutné podmínky na hodnocení **výborně**:

- dosažení aspoň **30** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **70** bodů.

Písemka z matematické analýzy pro učitele (NMTM201)
2. ročník, zimní semestr – 2. termín dne 23. ledna 2023

Teoretická část

Úloha A.

(a) Zformulujte Newtonovu-Leibnizovu formuli pro zobecněný Riemannův integrál. [**2** body]

(b) Definujte pojem řešení diferenciální rovnice. [**2** body]

(c) Zformulujte Picardovu větu o existenci a jednoznačnosti řešení rovnice. [**2** body]

(d) Zformulujte větu o existenci maximálního řešení. [**1** bod]

(e) Definujte prostory $C(a,b)$, $C^k(a,b)$ (pro $k \in \mathbb{N}$) a $C^\infty(a,b)$. [**3** body]

Úloha B.

(a) Zformulujte a dokažte srovnávací kritérium konvergence zobecněného Riemannova integrálu. Stačí dokázat existenci $\int_a^b |f|$, nemusíte dokazovat existenci $\int_a^b f$. [**6** bodů]

(b) Podrobně dokažte, že řešení homogenní lineární diferenciální rovnice n-tého řádu tvoří lineární prostor. Rovnici napište. (Nemusíte dokazovat, že jeho dimenze je n.) [**6** bodů]

Úloha C.

(a) Budiž $y(x)$ nějaké řešení rovnice $y' = \sin y + \cos y$. Je y nutně monotónní? [**3** body]

(b) Rozhodněte o platnosti následujícího výroku a své tvrzení dokažte: Buďte p, q_1, q_2 spojité funkce na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. Nechť y_1 je na intervalu I řešení rovnice $y' + py = q_1$ a y_2 je na tomtéž intervalu řešení rovnice $y' + py = q_2$. Potom $y_1 - y_2$ je na I řešení rovnice $y' + py = q_1 - q_2$. [**4** body]

(c) Pomocí integrálního kritéria rozhodněte o konvergenci řady [**5** bodů]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n \cdot \ln \ln n}.$$

Úloha D.

Vyberte si **jednu** z následujících dvou možností.

(a) Dokažte, že každé řešení autonomní diferenciální rovnice je monotónní. [**16** bodů]

Nebo:

(b) Zformulujte a dokažte integrální kritérium konvergence nekonečných řad. [**12** bodů]

Pokud používáte nějaká pomocná tvrzení, musí být jasně patrné, že znáte jejich znění.