(1.) $y' = \dfrac{(y^3+1)\cot g\, x}{3y^2}$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt[3]{1336}$

$$\frac{3y^2}{y^3+1} = \frac{\cos x}{\sin x} \quad / \int \dots dx \qquad [y \neq -1]$$

$$\ln|y^3+1| = \ln|\sin x| + C$$

$$|y^3+1| = e^C \cdot |\sin x|$$

$$y^3 + 1 = K \cdot \sin x \quad , K \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Vysvětlení: • $y \equiv 0$ NENÍ stac. řešení, nelze totiž dosadit do původní rce. Proto $K \neq 0$.

• rovnice dává smysl pouze s x, pro něž $\sin x \neq 0$. Výpočet platí za předp. $[y \neq -1]$

• $K = \pm e^C \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. navíc je možné vypustit abs. hodnotu u sin: beztak jsme na intervalu, kde sin nemění zn.

$$y(x) = \sqrt[3]{K \cdot \sin x - 1},$$

pro x z intervalů, kde $\sin x \neq 0$ & $y(x) \neq -1$:

$$y(x) = -1 \iff \sqrt[3]{K \cdot \sin x - 1} = -1$$

$$\iff K \cdot \sin x = 0$$

$$\iff x \in \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Je tedy vidět, že zohledněním podmínky $[y \neq -1]$ „neubere“ žádné další body D_f.

P.P.: $\sqrt[3]{1336} = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt[3]{K \cdot \sin\frac{\pi}{2} - 1}$

$$1336 = K - 1 \quad , \quad \underline{K = 1337}$$

Celkem: $y(x) = \sqrt[3]{1337 \cdot \sin x - 1}$.

② $y' = \arcsin\left(\frac{1-y^2}{4}\right)\cdot\sqrt{4-y^2}$.

Označme $g(y) =$ P.S.

$\underline{D_g}$: • $4-y^2 \geq 0$, $y^2 \leq 4$, $y \in [-2,2]$

& • $\frac{1-y^2}{4} \in D_{\arcsin} = [-1,1]$, tj.

$$-4 \leq 1-y^2 \leq 4$$

$$-5 \leq -y^2 \leq 3$$

$$5 \geq y^2 \geq -3$$

prázdná podm.

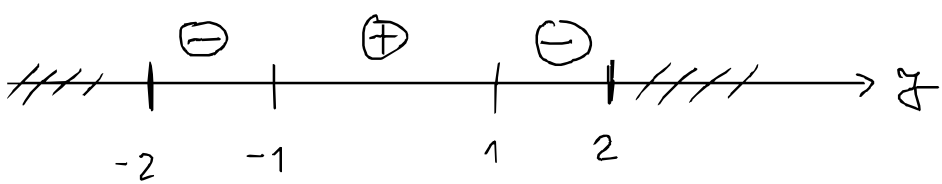
slabší podmínka než 1. bod.

Tedy $D_g = [-2,2]$.

Stacionární řešení: • $\sqrt{4-y^2} = 0$ ... $y \equiv \pm 2$

• $\arcsin(\dots) = 0 \iff 1-y^2 = 0$ ... $y \equiv \pm 1$

Monotonie: $g(y)$:



Lepení na S.Ř.: Funkce $g(y)$ je sudá.

Stačí tedy vyšetřit $y \equiv 1$, $y \equiv 2$; symetricky to pak bude pro $y \equiv -1$, $y \equiv -2$.

Lepení na 1_+: $\int_1^{\frac{3}{2}} \frac{1}{g(y)}\, dy$ K. ?

$$\frac{1}{g(y)} = \Bigg(\underbrace{\arcsin\left(\tfrac{1}{4}(1-y)(1+y)\right)}_{\text{ZN. LIM.: } \sim \frac{1}{4}\underbrace{(1-y)}_{\text{podstatný faktor}}(1+y)} \cdot \underbrace{\sqrt{4-y^2}}_{\xrightarrow{y \to 1_+} \sqrt{3} \text{ nehraje roli}} \Bigg)^{-1}$$

Známá limita pro arcsin: $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1}$

Srovnáme s funkcí $h(y) = (1-y)^{-1}$:

LSK: $$\lim_{y \to 1_+} \frac{\frac{1}{g(y)}}{h(y)} = \lim_{y \to 1_+} \frac{1-y}{\arcsin\left(\frac{1-y^2}{4}\right)\sqrt{4-y^2}}$$

$$= \lim_{y \to 1_+} (4-y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \Bigg(\lim_{y \to 1_+} \underbrace{\frac{\arcsin\left(\frac{1}{4}(1-y)\cdot(1+y)\right)}{\frac{1}{4}(1-y)(1+y)}} \cdot \frac{1+y}{4} \Bigg)^{-1}$$

$$= 3^{-\frac{1}{2}} \cdot \lim_{y \to 1_+} \left(\frac{1+y}{4}\right)^{-1} \cdot \lim \left(\dots \right)^{-1} = [\text{VOLSF}]$$

$$= 3^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 \cdot 1 \in (0, \infty).$$

Tedy, podle LSK, $\left[\int_1^{\frac{3}{2}} \frac{1}{g(y)}\, dy \text{ K.} \iff \int_1^{\frac{3}{2}} h \text{ K.} \right]$

Ale: $$\int_1^{\frac{3}{2}} h(y)\, dy = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{dy}{1-y} = \int_0^{-\frac{1}{2}} \frac{-dt}{t} = -\infty$$

SUBST: $t = 1-y$, $dt = -dy$

y	1	$\frac{3}{2}$
t	0	$-\frac{1}{2}$

Tedy D.

nelze lepit na 1_+; analogicky ani na 1_-.

Lepení na 2−: (Pozn.: 2+ nepřipadá v úvahu.)

$$\int_{\frac{3}{2}}^{2} \frac{1}{g} \text{ K. } ?$$

Tentokrát srovnáme s $h(y) = \frac{1}{\sqrt{2-y}}$:

LSK: $\lim_{y \to 2_-} \frac{\frac{1}{g(y)}}{h(y)} = \lim_{y \to 2_-} \frac{\sqrt{2-y}}{\arcsin\left(\frac{1-y^2}{4}\right)\sqrt{2+y}\sqrt{2-y}}$

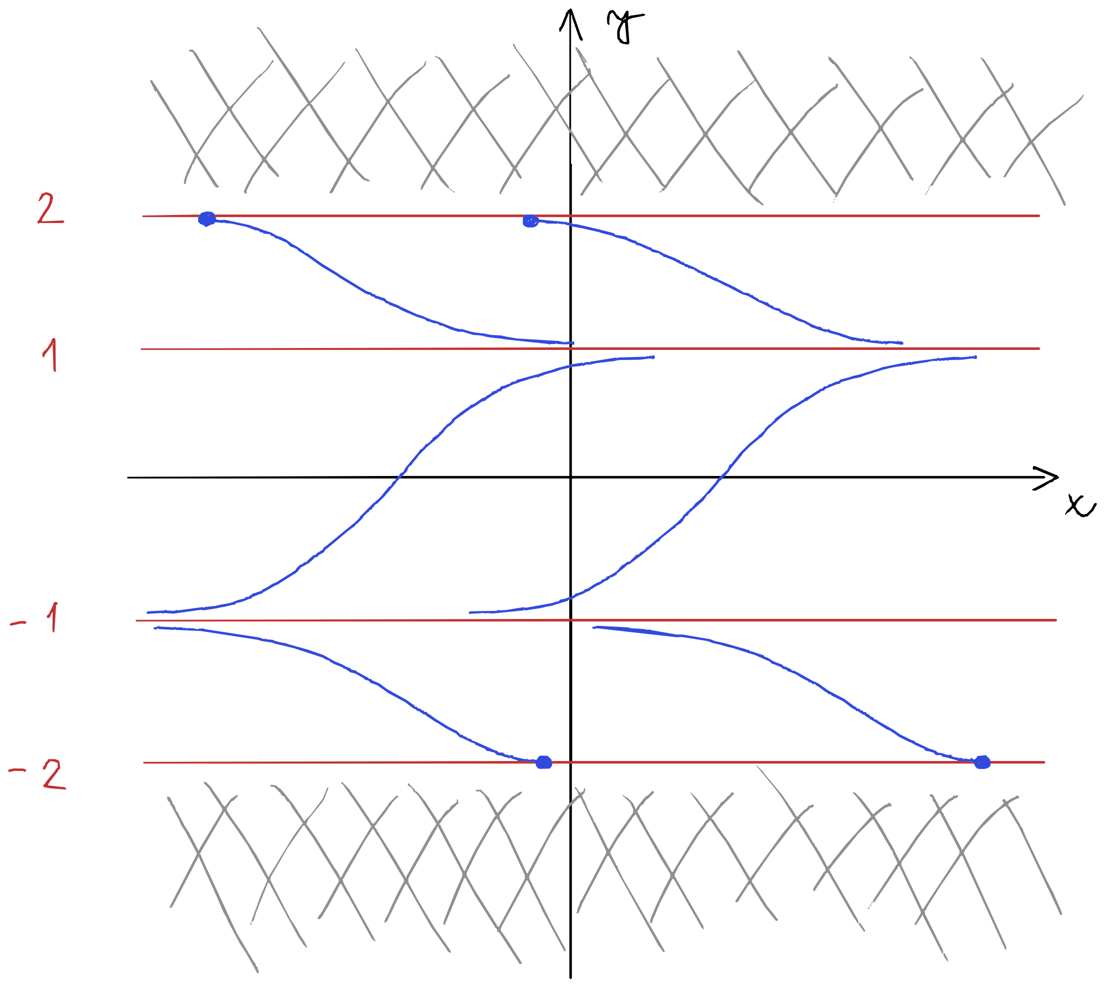
$= \left(\arcsin\left(\frac{1-2^2}{4}\right) \cdot \sqrt{2+2}\right) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Tedy opět: „oba int. se chovají stejně".

Ovšem $\int_{\frac{3}{2}}^{2} h(y)\,dy = \int_{\frac{3}{2}}^{2} (2-y)^{-\frac{1}{2}} = \left[-\frac{1}{2}(2-y)^{\frac{1}{2}}\right]_{\frac{3}{2}}^{2}$

$= 0 - \left(-\frac{1}{2}\left(2-\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, tj. K.

Proto i $\int_{\frac{3}{2}}^{2} \frac{1}{g}$ K., a tedy lze „lepit na 2−".



(3) $y' = \sqrt[3]{x} + \frac{y}{x}$

$$y' - \frac{y}{x} = \sqrt[3]{x}$$

$p(x) = -\frac{1}{x}$ $\quad P(x) = -\ln|x|$, $x \neq 0$

I.F. $= e^{P(x)} = e^{-\ln|x|} = \frac{1}{|x|}$, $x \neq 0$

Protože jsme buďto na $(-\infty, 0)$,
nebo na $(0, \infty)$,
a je jedno, jestli rci přenásobíme
$\frac{1}{x}$, nebo $-\frac{1}{x}$, můžeme odstranit „$|\cdot|$".

Tj. I.F. $:= \frac{1}{x}$. NYNÍ MÁME:

$$y' \cdot \frac{1}{x} - y \cdot \frac{1}{x^2} = x^{-\frac{2}{3}}$$

$$\left(y \cdot \frac{1}{x}\right)' = x^{-\frac{2}{3}} \quad / \int \dots dx$$

$$y \cdot \frac{1}{x} = 3x^{\frac{1}{3}} + C \quad , \ x \neq 0, \ C \in \mathbb{R}$$

$$y(x) = 3x^{\frac{4}{3}} + Cx$$

P.P.: $1 = y(1) = 3 \cdot 1^{\frac{4}{3}} + C$

$\Rightarrow C = -2$.

Celkem: maximální řešení splňující P.P.
$y(1) = 1$ musí být def. v bodě $x = 1$.
V našem případě to tedy je

$$\boxed{y(x) = 3x^{\frac{4}{3}} - 2x \quad , \ x \in (0, \infty)}$$

Zk.: $y' = 4x^{\frac{1}{3}} - 2 \stackrel{?}{=} \sqrt[3]{x} + \frac{3x^{\frac{4}{3}} - 2x}{x}$
$= 4\sqrt[3]{x} - 2$. ✓

není potřeba.