# Matematická analýza III (NMTM201)[1]

Martin Rmoutil

22. prosince 2022

[1]Tvorba tohoto materiálu byla podpořena z Fondu vzdělávací politiky MŠMT na rok 2020, projekt *Podpora zkvalitnění přípravy učitelů matematiky, fyziky a informatiky na MFF UK.*

# Obsah

# Předmluva

Tento text bezprostředně navazuje na má skripta MA1 a MA2 a předpokládá porozumění látce prvních dvou semestrů. V první kapitole se zabývám zobecněným Riemannovým integrálem, přičemž v popředí zájmu stojí hlavně otázka jeho konvergence (tj. konečnosti). Tato látka se v mnoha ohledech podobá vyšetřování konvergence řad, kterému jsme věnovali část prvního semestru, jsou zde však některé nové aspekty. Výsledky této kapitoly aplikujeme později při vyšetřování jistých typů diferenciálních rovnic.

Druhá kapitola se zabývá různými (ovšem zdaleka ne všemi) typy diferenciálních rovnic. Podle mých zkušeností je dobré tuto látku vstřebávat prostřednictvím příkladů (které jsou z početního hlediska obvykle lehké) a zpočátku spíše jen intuitivního pohledu na teorii. Při přípravě na zkoušku byste však tuto fázi měli mít z větší části za sebou, takže sledování souvislostí a těžších důkazů by nemělo být nemožné. Tuto kapitolu je podle mě dobré přečíst dvakrát a při prvním čtení ji kombinovat s „průvodcem“, o němž pohovořím v dalším odstavci.

Za větší zmínku stojí apendix, v němž máte připravenou jakousi sbírku úloh (spíše teoretického charakteru), s jejíž pomocí snad lépe a snáze pochopíte základní koncepty související s diferenciálními rovnicemi. Chci zdůraznit, že jde o dosti experimentální formu, a já budu rád za jakoukoliv zpětnou vazbu.

Nebude-li explicitně řečeno jinak, budeme se i nadále držet definicí a úmluv zavedených v prvních dvou semestrech, například:

- supremum shora neomezené (resp. infimum zdola neomezené) podmnožiny $\mathbb{R}$ je $\infty$ (resp. $-\infty$);
- pracujeme s *rozšířenou reálnou osou* $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ a definujeme některé operace s nekonečny, jiné ne; $\infty = +\infty$;
- slovem *funkce* rozumíme i nadále reálnou funkci jedné reálné proměnné;
- slovo *posloupnost* se vztahuje i na zobecněné posloupnosti, tj. posloupnosti definované až od jistého členu (třeba $\left\{\sqrt{n-10}\right\}_{n=1}^{\infty}$, která je definovaná až od desátého členu);
- *vlastní* limita, derivace atd. znamená konečná;
- symbol log (bez indexu udávajícího základ) má stejný význam jako ln (i nadále se ovšem budu snažit používat pouze ln);
- symbol pro určitý integrál nemusí zahrnovat integrační proměnnou, takže $\int_a^b f = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Kdo prostudoval předchozí díly, nebude mít potíže se v tomto textu vyznat.

*MR*

# Kapitola 1

# Zobecněný Riemannův integrál

Klasický Riemannův integrál je definován výhradně pro omezenou funkci na omezeném uzavřeném intervalu. To v praxi znamená významné omezení, neboť často by nás zajímaly určité integrály z neomezených funkcí nebo integrály s nekonečnými mezemi. Chceme umět dát význam symbolům jako

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \text{ (neomez. fce)},\qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \text{ (neomez. interval), nebo}\qquad \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)} \text{ (obojí).}$$

V následující definici toto nepříjemné omezení do značné míry odstraníme pomocí přirozeného limitního procesu. Idea je následující: Nevíme sice, co je to $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$, ale umíme vypočítat $\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ a obvykle také umíme vypočítat limitu tvaru $\lim_{\varepsilon\to 0_+}(\ldots)$. Spojením těchto dvou postupů dostaneme:

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = [2\sqrt{x}]_\varepsilon^1 = 2 - 2\sqrt{\varepsilon} \quad \text{a aplikací limity:}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0_+}(2-2\sqrt{\varepsilon}) = 2 - 2\sqrt{0} = 2.$$

Obecná definice sleduje tuto myšlenku, integrál se však „rozdělí na dvě části“ pro případ, že by byl „problém“ na obou krajích intervalu, přes který integrujeme:

**1.1 Definice** (Zobecněný Riemannův integrál)**.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$. Nechť $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ je funkce (nemusí být omezená). Předpokládejme, že pro každý podinterval $[x,y] \subseteq (a,b)$ existuje integrál $(\mathrm{R})\!\int_x^y f(x)\,\mathrm{d}x$. Nechť dále existuje $c \in (a,b)$ takové, že pravá strana níže má smysl. Pak definujeme

$$(\mathrm{ZR})\!\int_a^b f = \lim_{x\to a_+} (\mathrm{R})\!\int_x^c f + \lim_{y\to b_-} (\mathrm{R})\!\int_c^y f. \tag{1.1}$$

**1.2 Poznámka.** (a) Hodnota pravé strany rovnice (1.1) nezávisí na volbě čísla $c \in (a,b)$. Jinak řečeno, existují-li dvě různá čísla $c_1, c_2 \in (a,b)$ tak, že pravá strana rovnice má smysl dosadíme-li za $c$ jak $c_1$, tak $c_2$, pak oba výsledky jsou shodné. Tento fakt, jehož snadný důkaz najdete v Dodatku A, je nutný k tomu, aby Definice 1.1 byla *korektní*. (Pokud bychom mohli volbou různých $c$ dostat různé výsledky, a hodnota definovaného integrálu by tak vlastně na naší volbě pomocného čísla $c$ závisela, hovořili bychom samozřejmě o *nekorektní* definici.)

(b) Hodnota $(\mathrm{R})\!\int_a^b f$, a tedy ani hodnota $(\mathrm{ZR})\!\int_a^b f$, nezávisí na změně funkce $f$ v konečně mnoha bodech.

(c) Pro existující $(\mathrm{ZR})\!\int_a^b f$ se může stát, že $a \notin \mathbb{D}_f$ nebo $b \notin \mathbb{D}_f$ (nebo obojí); „zobecněný Riemannův integrál krajní body ignoruje“.

(d) Může se stát, že $(\mathrm{ZR})\int_a^b f = \infty$ (nebo $-\infty$).

**1.3 Tvrzení** (O spojitosti Riemannova integrálu)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a nechť $f \in \mathcal{R}([a,b])$ (tj. existuje $(\mathrm{R})\int_a^b f$ ). Pak platí:*

$$\lim_{x\to b-} \int_a^x f = \int_a^b f = \lim_{x\to a+} \int_x^b f.$$

*Důkaz.* Dokážeme první rovnost; důkaz druhé rovnosti je analogický. Jelikož $f \in \mathcal{R}([a,b])$, funkce $f$ je omezená (to je požadavek v definici Riemannova integrálu, takže jiné než omezené funkce tento integrál mít nemohou), a existuje tedy nějaká konstanta $M > 0$ taková, že $|f(x)| \leqslant M$ pro všechna $x \in [a,b]$. Chceme dokázat rovnost

$$\lim_{x\to b-} \int_a^x f = \int_a^b f;$$

pro jednodušší zápis toho, co to znamená podle definice limity, si zaveďme pomocné značení:

$$F(x) = \int_a^x f, \qquad I = \int_a^b f.$$

(Z předpokladu existence $\int_a^b f$ plyne existence integrály přes všechny pod intervaly (podle věty z minulého semestru), a funkce $F$ je tedy dobře definována na celém intervalu $[a,b]$.) Takže náš cíl je dokázat $\lim_{x\to b-} F(x) = I$, což je zkratka pro následující výrok:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in P_-(b,\delta)\colon |I - F(x)| < \varepsilon.$$

Budiž tedy dáno libovolné $\varepsilon > 0$; máme najít vhodné $\delta > 0$. To zvolíme jako

$$\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{M}, b-a\right\}.$$

Je-li nyní dáno libovolné $x \in P_-(b,\delta)$, pak předně $x \in (a,b)$ (a tedy je definována hodnota $F(x)$), protože $\delta \leqslant b-a$ a dále platí:

$$|I - F(x)| = \left|\int_a^b f - \int_a^x f\right| = \left|\int_x^b f\right| \leqslant \int_x^b |f| \overset{(*)}{\leqslant} \int_x^b M = M(b-x) < M\delta \leqslant M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

Přitom rovnost označená $(*)$ plyne z omezenosti $f$ konstantou $M$ na $[x,b]$ (dokonce na celém $[a,b]$). Tím je dokázáno, že skutečně $\lim_{x\to b-} F(x) = I$, a jsme hotovi. □

**1.4 Důsledek.** *Pokud existuje $(\mathrm{R})\int_a^b f$, pak existuje i $(\mathrm{ZR})\int_a^b f$ a nastává rovnost.*

**1.5 Poznámka.** Uvedený důsledek nám umožňuje přestat neustále rozlišovat mezi $(\mathrm{R})\int$ a $(\mathrm{ZR})\int$: i v situacích, kdy integrál existuje v obou smyslech, má stále jen jednu možnou hodnotu. Aby bylo opravdu jasné, co tím myslím, podívejme se na jednoduchou ilustraci pomocí $\int_0^\pi \sin x \,\mathrm{d}x$.

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{R})\int_0^\pi \sin t \,\mathrm{d}t &= [-\cos t]_0^\pi = \cos 0 - \cos\pi = 2\\
(\mathrm{ZR})\int_0^\pi \sin t \,\mathrm{d}t &= \lim_{x\to 0+} (\mathrm{R})\int_x^{\frac{\pi}{2}} \sin t \,\mathrm{d}t + \lim_{y\to \pi-} (\mathrm{R})\int_{\frac{\pi}{2}}^y \sin t \,\mathrm{d}t\\
&= \lim_{x\to 0+} [-\cos t]_x^{\frac{\pi}{2}} + \lim_{y\to\pi-} [-\cos t]_{\frac{\pi}{2}}^y\\
&= \lim_{x\to 0+} (0 - (-\cos x)) + \lim_{y\to\pi-} (-\cos y - 0) = \cos 0 - \cos\pi = 2
\end{aligned}
$$

Na konkrétním případě tedy vidíme, že oběma způsoby jsme dospěli ke stejnému výsledku, a je celkem jasné, který způsob je v tomto případě jednodušší.

Chci zde ovšem zdůraznit, že druhý uvedený způsob výpočtu zde (kvůli ilustrativnímu efektu) striktně sleduje definici zobecněného Riemannova integrálu (rozdělení na dvě části atd.), což v praxi není potřeba. Obvykle nemusíme příliš přemýšlet o tom, jestli počítáme přímo Riemannův integrál, nebo jeho zobecněnou verzi. V následujícím uvidíme, že běžná početní metoda hledání primitivní funkce a následné dosazení do Newtonovy-Leibnizovy formule (jak jsme ji používali v minulém semestru (k výpočtu „obyčejného“ Riemannova integrálu) funguje stejně dobře v obou případech, přičemž o typu integrálu musíme přemýšlet až na samém konci výpočtu, kde ve zobecněném případě může být drobná změna (místo okamžitého dosazení jedné z mezí do primitivní funkce musíme spočítat limitu).

**1.6 Věta** (Newtonova-Leibnizova formule pro zobecněný Riemannův integrál)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$ a funkce $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ je spojitá. Nechť $F$ je primitivní funkce k $f$ na $(a, b)$. Pak*

$$(\mathrm{ZR})\int_a^b f = \lim_{x \to b_-} F(x) - \lim_{x \to a_+} F(x) =: [F]_a^b.$$

**1.7 Poznámka** (O značení)**.** Už v prvním semestru jsme občas používali stručné značení jednostranných limit ve tvaru

$$F(a_+) := \lim_{x \to a_+} F(x)$$

a podobně. Pravá strana výše uvedené zobecněné N.-L. formule se tedy dá zapsat jako $F(b_-) - F(a_+)$. Také jsme hojně využívali značení tvaru $[F]_a^b := F(b) - F(a)$, které nyní můžeme modifikovat a značit

$$[F]_a^b := F(b_-) - F(a_+) = \lim_{x \to b_-} F(x) - \lim_{x \to a_+} F(x).$$

Je důležité si uvědomit, že tímto význam onoho značení objektivně měníme na něco jiného. Pokud by funkce $F$ nebyla v bodě $a$ spojitá zprava, resp. nebyla v bodě $b$ spojitá zleva, mohlo by se stát, že původní a nová verze tohoto značení dají jiný výsledek, protože v takových případech

$$F(a) \neq \lim_{x \to a_+} F(x) \quad \text{resp.} \quad F(b) \neq \lim_{x \to b_-} F(x).$$

Pochopitelně v případě, že hodnoty $F(a)$, $F(b)$ nejsou definovány, jako tomu často bývá v případě zobecněného intervalu, žádná kolize značení nám nehrozí. V případě, kdy $F' = f$ na $[a, b]$ (tj. včetně jednostranných derivací v krajních bodech) ovšem taky problém s kolizí nenastane, protože $F$ je spojitá na celém $[a, b]$, jsouc primitivní funkcí (a tedy majíc vlastní derivaci). Speciálně je tedy spojitá zprava v bodě $a$, takže $F(a) = F(a_+)$, a podobně v bodě $b$ zleva. Je tedy i v tomto případě jedno, kterou interpretaci pro symbol $[F]_a^b$, jestli starou, nebo novou, použijeme.

Díky tomu můžeme zobecněnou Newtonovu-Leibnizovu formuli zapsat v nejúspornějším tvaru, který postihuje všechny případy (zde $f$ je spojitá a $F' = f$ na $(a, b)$):

$$\int_a^b f = [F]_a^b.$$

*Důkaz Věty 1.6.* Protože $f$ je spojitá na celém $(a, b)$, je spojitá také na libovolném podintervalu $[x, y] \subseteq (a, b)$, takže všechny příslušné integrály $(\mathrm{R})\int_x^y f$ existují. Můžeme tedy zkusit počítat z definice integrál na levé straně dokazované rovnosti, tedy $(\mathrm{ZR})\int_a^b f$. Zvolme tedy libovolný dělicí bod $c \in (a, b)$.

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{ZR})\int_a^b f &= \lim_{x\to a_+} (\mathrm{R})\int_x^c f + \lim_{y\to b_-} (\mathrm{R})\int_c^y f \\
&= \lim_{x\to a_+} [F]_x^c + \lim_{y\to b_-} [F]_c^y \\
&= \lim_{x\to a_+} (F(c) - F(x)) + \lim_{y\to b_-} (F(y) - F(c)) \\
&= -\lim_{x\to a_+} F(x) + \lim_{y\to b_-} F(y) = F(b_-) - F(a_+) = [F]_a^b.
\end{aligned}
$$

Pravá strana má podle předpokladu věty smysl, takže limity existují a dají se sečíst. Tím pádem byl celý výpočet korektní, a rovnost platí. □

**1.8 Příklad.** Spočtěme následující integrál.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \left[2\sqrt{x}\,\right]_0^1 = 2\sqrt{1} - 2\sqrt{0} = 2.$$

První rovnost výpočtu je přesně podle zobecněné Newtonovy-Leibnizovy formule (Věta 1.6). Protože jsme ale v situaci, kdy „obyčejný“ Riemannův integrál neexistuje, protože funkce není definovaná (ani omezená) na celém $[0, 1]$, dalo by se čekat, že výraz $\left[2\sqrt{x}\,\right]_0^1$ budeme vyhodnocovat pomocí limit takto:

$$\left[2\sqrt{x}\,\right]_0^1 = \lim_{x\to 1_-} 2\sqrt{x} - \lim_{x\to 0_+} 2\sqrt{x} = 2.$$

Vidíme, že výsledek je stejný, takže se zdá, že těmito úvahami nemá cenu ztrácet čas. Je to dáno spojitostí primitivní funkce (zde $2\sqrt{x}$), která je automatická. Přece je ale jeden aspekt, který stojí za naši pozornost: funkce $2\sqrt{x}$ sice je primitivní k $\frac{1}{\sqrt{x}}$, ale pouze na intervalu $(0, 1]$[1], nikoliv na $[0, 1]$. To znamená, že nás sice nemusí překvapit možnost vypočítat limitu dosazením v bodě 1, v nule to ale stále je trochu zvláštní vzhledem k tomu, že integrand $\frac{1}{\sqrt{x}}$ tam ani není definovaný. Jak je to možné?

Ještě jednou opakuji, že $2\sqrt{x}$ je primitivní funkcí k integrandu pouze na $(0, 1]$. Shodou okolností je ale tím samým vzorcem $2\sqrt{x}$ definována jistá spojitá funkce ještě o bod dále: včetně nuly. Tím pádem můžeme limitu $\lim_{x\to 0_+} 2\sqrt{x}$ spočítat (díky spojitosti) prostě dosazením. △

## 1.1 Vyšetřování konvergence integrálu

**1.9 Definice** (Konvergence integrálu)**.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$ a $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ je funkce. Řekneme, že integrál $\int_a^b f$ *konverguje*, jestliže tento integrál existuje ve zobecněném Riemannově smyslu a má konečnou hodnotu. V takovém případě někdy také říkáme, že funkce $f$ je *riemannovsky integrovatelná na* $(a, b)$.

Pokud konverguje integrál $\int_a^b |f|$, říkáme, že příslušný integrál $\int_a^b f$ konverguje absolutně.

Budeme se zajímat o to, jak poznat, jestli daný integrál konverguje, neboli zda má konečnou hodnotu. Asi není příliš překvapivé, že tato teorie má mnoho společného se studiem konvergence nekonečných číselných řad, se kterým jsme začali v prvním semestru. Pro integrály je ovšem situace složitější než pro řady; základní rozdíl je v tom, že „o konvergenci řady $\sum_{n=1}^\infty a_n$ se rozhoduje vždy v nekonečnu“; sečteme-li konečně mnoho jejích členů, vždy dostaneme konečné číslo. Naproti tomu třeba integrál tvaru $\int_1^\infty f$ může stejně dobře divergovat kvůli chování funkce na okolí bodu 1, jako kvůli jejímu chování v nekonečnu.[2]

[1] Dokonce na $(0, \infty)$, ovšem stále bez bodu 0.

[2] Jinými slovy pro některé funkce $f$ vychází $\left|\int_{1+\varepsilon}^\infty f\right| < \infty$, zatímco $\int_1^{1+\varepsilon} f$ je nekonečný.

Budeme se proto zajímat o to, jak se funkce chová na okolí obou krajních bodů integračního oboru, z nichž jeden (nebo i oba) mohou býti vlastní (tj. konečné). Pro velmi rychlou ilustraci „problémů“, které mohou vzniknout „ve vlastních bodech“, poslouží integrály $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$ a $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$, z nichž (jak snadno ověříte výpočtem) první je konečný a druhý nekonečný.

**1.10 Věta** (Srovnávací kritérium)**.** *Buď $I \subseteq \mathbb{R}$ libovolný interval s kraji* $\inf I = a$, $\sup I = b$. *Mějme funkce $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ takové, že pro každý podinterval $[c,d] \subseteq I$ platí $f, g \in \mathcal{R}([c,d])$. Nechť $|f(x)| \leqslant g(x)$ pro všechna $x \in I$. Pak platí implikace:*

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x < \infty \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x < \infty.$$

Formulace připouští případy, kdy $a = -\infty$ nebo $b = \infty$. Celý následující důkaz této věty provedeme ve speciálním případě, kdy $I = [a,b)$ pro nějaké $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$. Všechny ostatní případy jsou lehkými důsledky tohoto případu speciálního, jak ostatně vysvětluji v poznámce níže (za důkazem).

*Důkaz.* Předpokládejme nejprve, že $f \geqslant 0$ na celém $I = [a,b)$ (obecný případ, kdy $f$ smí nabývat i záporných hodnot, prozkoumáme níže). Položme

$$F(x) = \int_a^x f \quad \text{a} \quad G(x) = \int_a^x g.$$

Všimněme si, že samozřejmě $F(a) = G(a) = 0$ (integrál přes interval $[a,a]$ je nulový). Funkce $F$ a $G$ jsou dobře definované pro všechna $x \in [a,b)$ podle předpokladu věty. Podle Základní věty kalkulu pro takto definované funkce $F$ a $G$ platí

$$F' = f \quad \text{a} \quad G' = g \quad \text{na} \quad [a,b).$$

Standardní argument nyní dokazuje, že funkce $F$ je neklesající, pročež existuje $\int_a^b f$: Totiž $F' = f \geqslant 0$ na $[a,b)$ (podle dodatečného předpokladu na začátku důkazu), takže $F$ má nezápornou derivaci. To ale znamená, že existuje

$$(\mathrm{ZR})\int_a^b f \stackrel{\text{(def.)}}{=} \lim_{x\to b_-} \int_a^x f = \lim_{x\to b_-} \big(F(x) - F(a)\big) = \lim_{x\to b_-} F(x) - F(a);$$

poslední limita skutečně existuje díky právě dokázané monotonii funkce $F$ (1. semestr: „monotónní funkce má limitu“), a tím pádem existuje i integrál nalevo. Všimněte si, že jsme integrál nemuseli dělit na dvě části, protože interval je na jedné straně uzavřený.

Dále využijeme předpoklad věty, že $|f| \leqslant g$ (proto i $f \leqslant g$):

$$(G - F)' = G' - F' = g - f \geqslant 0 \quad \text{na } [a,b).$$

Vidíme, že funkce $G - F$ má nezápornou derivaci, je tedy na $[a,b)$ neklesající; to znamená, že pro libovolné $x \in [a,b)$ je

$$G(x) - F(x) \geqslant G(a) - F(a) = 0 - 0 = 0,$$

to jest $G - F$ je nezáporná na $[a,b)$. Jinak řečeno $\forall x \in [a,b)\colon G(x) \geqslant F(x)$. Díky tomu dostáváme:

$$\int_a^b f = \lim_{x\to b_-} F(x) - F(a) = \lim_{x\to b_-} F(x) \leqslant \lim_{x\to b_-} G(x) = \lim_{x\to b_-} G(x) - G(a) = \int_a^b g < \infty.$$

Tím je důkaz dokončen za dodatečného předpokladu, že $f \geqslant 0$ na $[a,b)$. V obecném případě, kdy není zaručeno, že $f \geqslant 0$ na $[a,b)$, musíme udělat nějakou práci navíc. Zbytek důkazu najdete v Dodatku A. □

**1.11 Poznámka.**

- Je zřejmé, že pro platnost věty není podstatné, že pracujeme zrovna s intervalem tvaru $[a, b)$. Analogický důkaz (pouze v tomto smyslu převrácený) by prokázal platnost symetrické verze pro interval $(a, b]$. (Nebo bychom mohli provést důkaz zrcadlové verze použitím verze už dokázané podobným způsobem, jako to ukazuji níže v Poznámce 1.18 na příkladě jiné věty.) Spojením obou těchto tvrzení, tedy srovnávacího kritéria pro interval tvaru $(a, b]$ a pro interval tvaru $[b, c)$, odvodíme srovnávací kritérium pro otevřený interval $I = (a, c)$ (kde $a, c \in \mathbb{R}^*$, $a < c$).

  Tím jsme probrali tři ze čtyř typů intervalu; zbývá se krátce zamyslet nad intervalem tvaru $I = [a, b]$ (kde $a, b \in \mathbb{R}$). Tento případ je triviální, z předpokladu věty totiž vyplývá, že $f \in \mathcal{R}([a, b])$, jelikož $[a, b] \subseteq I = [a, b]$. To ovšem znamená, že (ZR)$\int_a^b f =$ (R)$\int_a^b f < \infty$ podle Důsledku 1.4 (a toho, že $f \in \mathcal{R}([a, b])$).

- Podobně jako u srovnávacího kritéria pro nekonečné řady hovoříme o *konvergentní majorantě*; zde je to funkce $g$. Nyní uvažme formulaci obměnou implikace:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ \text{ nekonverguje } \Rightarrow \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \ \text{ nekonverguje.}$$

  Tvrzení jsme ekvivalentně mohli formulovat takto. Pokud je splněn předpoklad této obměněné implikace, funkci $f$ někdy nazýváme *divergentní minorantou* (pro $g$), ovšem s výhradou, že do „divergence“ zahrnujeme i případnou neexistenci integrálu, v čemž terminologie kolísá.

- Mezi předpoklady Věty 1.10 je také požadavek

$$\forall [c, d] \subseteq I: \ f, g \in \mathcal{R}([c, d]). \tag{1.2}$$

  Jak ho chápat? Chce se, aby obě zúčastněné funkce měly (obyčejný, a tedy konečný) Riemannův integrál na libovolném uzavřeném podintervalu intervalu $I$. Samozřejmě, že pokud $I$ je sám uzavřený, je tento požadavek nesmyslně komplikovaný, neboť je v takovém případě ekvivalentní $f, g \in \mathcal{R}(I)$ (což znamená, že obě funkce mají přes $I$ konečný integrál, a není tak co řešit).

  Srovnávací kritérium je zajímavé pouze v těch případech, kdy do hry netriviálním způsobem vstupuje *zobecněný* Riemannův integrál, což pro uzavřený interval nemůže nastat vzhledem k Důsledku 1.4. Představme si tedy, že $I$ je jednoho ze zbývajících tří typů intervalu, pro jednoduchost třeba otevřený: $I = (a, b)$. Pak samozřejmě žádný interval $[c, d]$ obsažený v $(a, b)$ *nepokrývá celý interval* $(a, b)$. Předpoklad (1.2) tak dává mnohem lepší smysl; chce se prostě, aby *uvnitř* $(a, b)$ existovaly (automaticky konečné) Riemannovy integrály obou funkcí. O celém intervalu $(a, b)$ ale nepředpokládáme vlastně nic: zatím mohou být oba integrály $\int_a^b f$ a $\int_a^b$ konečné i nekonečné. Teprve další předpoklad, totiž že $|f| \leqslant g$ na $(a, b)$ dává nějaký vztah mezi těmito integrály: jeli konečný integrál $\int_a^b g$, pak je konečný i integrál $\int_a^b f$.

- Ještě jedna poznámka k předpokladu srovnávacího kritéria (1.2): v předchozí poznámce jsme si snad zhruba rozmysleli jeho význam, nyní bychom si ale měli uvědomit, jestli a jak jsme schopni ho v praxi ověřit. Na to je naštěstí jednoduchá odpověď, kterou nám umožňují dát dvě důležité věty z minulého semestru: Spojitá funkce $h$ na $[c, d]$ má Riemannův integrál $\int_c^d h$, tj. $h \in \mathcal{R}([c, d])$. Analogická věta platí, nahradíme-li slovo „spojitá“ slovem „monotónní“. Ke splnění předpokladu (1.2) tedy stačí, aby funkce $f, g$ byly spojité nebo monotónní na celém intervalu $I$; pak mají tuto vlastnost i na libovolném podintervalu $[c, d]$, a tedy (podle zmíněných dvou vět) $f, g \in \mathcal{R}([c, d])$.

  Stručně řečeno, v praxi nám stačí, každá z funkcí $f, g$ je spojitá nebo monotónní na celém $I$.

V prvním semestru jsme dokázali, že když nekonečná číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně, potom také konverguje. Tento výsledek jsme museli dokázat zvlášť, protože jsme měli srovnávací kritérium pro řady zformulované v méně obecné verzi, než jaká by odpovídala Větě 1.10, kterou máme pro integrály (měli jsme srovnávací kritérium pouze pro nezáporné řady). Část důkazu Věty 1.10, která se týká obecných (a ne pouze nezáporných) funkcí, je v Dodatku A; můžete si tam všimnout, že tato část důkazu nápadně připomíná právě důkaz výše zmíněné věty pro řady („absolutní konvergence implikuje konvergenci“). Díky práci v provedené v dodatku je následující tvrzení už takřka „zadarmo“.

**1.12 Důsledek.** *Nechť integrál $\int_a^b f$ absolutně konverguje. Potom také konverguje.*

*Důkaz.* Podle předpokladu jest $\int_a^b |f| < \infty$. Pro přehlednost položme $g := |f|$ na $(a, b)$. Pak samozřejmě $|f| \leqslant g$, a podle srovnávacího kritéria (aplikovaného na dvojici funkcí $f$ a $g$) tedy konverguje integrál $\int_a^b f$, jak jsme si přáli. □

**1.13 Věta** (Limitní srovnávací kritérium)**.** *Nechť jsou funkce $f$ a $g$ nezáporné a spojité na intervalu $[a, b)$ ($a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$). Nechť*

$$\lim_{x \to b_-} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

*Pak platí následující:*

*(i)* $0 < A < \infty \;\Rightarrow\; \left(\int_a^b f \;\; K. \Leftrightarrow \int_a^b g \;\; K.\right)$.

*(ii)* $A = 0 \;\Rightarrow\; \left(\int_a^b f \;\; K. \Leftarrow \int_a^b g \;\; K.\right)$.

*(iii)* $A = \infty \;\Rightarrow\; \left(\int_a^b f \;\; K. \Rightarrow \int_a^b g \;\; K.\right)$.

*Důkaz.* Formulace kritéria je rozdělena do tří „větví“, pro co nejpohodlnější aplikaci. Z hlediska důkazu by ale bylo vhodnější jiné rozdělení, a to:

(a) $A < \infty \;\Rightarrow\; \left(\int_a^b f \;\; \text{K.} \Leftarrow \int_a^b g \;\; \text{K.}\right)$; (b) $A > 0 \;\Rightarrow\; \left(\int_a^b f \;\; \text{K.} \Rightarrow \int_a^b g \;\; \text{K.}\right)$.

Než provedeme důkaz (a) a (b), nejprve si rozmyslíme, že tyto dva výroky skutečně dokazují (i), (ii), (iii). Skutečně: (a) implikuje (ii), protože když $A = 0$, pak je samozřejmě $A$ taky konečné. Navíc (a) dává implikaci „zprava doleva“ v (i). Podobně (b) implikuje (iii), protože $\infty > 0$, a také implikaci „zleva doprava“ v (i). Ujistěte se, že je vám toto jasné, jde v podstatě o základní výrokovou logiku.

Dokážeme nyní tvrzení (a). Předpokládejme, že $A < \infty$ a že integrál $\int_a^b g$ konverguje; chceme dokázat, že pak konverguje i integrál $\int_a^b f$.

Náš předpoklad $A < \infty$, kde $A = \lim_{x \to b_-} \frac{f(x)}{g(x)}$, znamená toto:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in (b - \delta, b) \colon \left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| < \varepsilon.$$

Pro $\varepsilon = 1$ nám tento předpoklad garantuje existenci jistého $\delta > 0$ takového, že

$$\forall x \in (b - \delta, b) \colon \; \frac{f(x)}{g(x)} < A + 1, \quad \text{tj.} \quad \forall x \in (b - \delta, b) \colon \; f(x) < (A + 1) g(x).$$

Číslo $\delta$ můžeme pochopitelně podle potřeby zmenšit,[3] takže můžeme (a učiníme tak) zároveň předpokládat, že je tak malé, že $(b-\delta, b) \subseteq [a, b)$.[4] Podle předpokladu jsou obě funkce, tedy $f$ i $g$, nezáporné na $(b-\delta, b)$, takže podle srovnávacího kritéria (Věty 1.10)

$$\int_{b-\delta}^{b} f < \infty, \quad \text{protože} \quad \int_{b-\delta}^{b} (A+1)g(t)\,\mathrm{d}t = (A+1)\int_{b-\delta}^{b} g < \infty,$$

Snadno si dále uvědomíme, že také

$$\int_{a}^{b-\delta} f < \infty,$$

protože funkce $f$ je podle předpokladu věty spojitá na intervalu $[a, b-\delta]$ (dokonce na celém $[a, b)$), takže Riemannův integrál výše existuje v klasickém smyslu. Připomeňme, že „nezobecněný“ Riemannův integrál buďto neexistuje, nebo je konečný; náš integrál díky spojitosti existuje, musí tedy být konečný.[5] Celkem:

$$\int_{a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{a}^{b-\delta} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{b-\delta}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t < \infty.$$

Máme dokázáno tvrzení (a), ze kterého nyní už lehce vyplyne i (b): Předpokládejme, že $A > 0$. Tj.

$$\lim_{x\to b_-} \frac{f(x)}{g(x)} > 0, \quad \text{odkud} \quad \lim_{x\to b_-} \frac{g(x)}{f(x)} < \infty.$$

Je tedy splněn předpoklad už dokázaného (a), pokud si funkce $f$, $g$ vymění role. Tvrzení (a) pak říká, že $\left(\int_a^b g \ \text{K.} \Leftarrow \int_a^b f \ \text{K.}\right)$, což je přesně dokazovaná implikace. Jsme tedy hotovi. □

Následuje několik poznámek týkajících se formulace a použití právě dokázané věty.

**1.14 Poznámka** (Důležitá)**.** První poznámka se týká předpokladu, že $f$, $g$ jsou nezáporné funkce. Věta se dá zformulovat (a platí) i v případě, že jedna či obě funkce jsou nekladné: je totiž zřejmé, že konvergence integrálu nezáleží na znaménku, takže v případě potřeby můžeme jednu (či obě) funkce „překlopit“ do kladných hodnot (tj. prostě přidat znaménko minus) – na konvergenci (resp. divergenci) integrálu to nic nezmění, změní se pouze znaménko.

Například pokud nás zajímá konvergence integrálu

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x, \tag{1.3}$$

jehož integrand je na integračním oboru (intervalu $[-1, 0)$) záporný, Větu 1.13 (LSK) můžeme použít tak, že vyšetříme integrál z kladné funkce: $\int_{-1}^{0} \frac{-1}{\sin x}\,\mathrm{d}x$. To uděláme srovnáním s kladnou funkcí $g(x) = -1/x$:

$$\lim_{x\to 0_-} \frac{\frac{-1}{\sin x}}{\frac{-1}{x}} = \lim_{x\to 0_-} \frac{x}{\sin x} = 1 \in (0, \infty),$$

takže podle LSK

$$\int_{-1}^{0} \frac{-1}{\sin x}\,\mathrm{d}x \text{ K., právě když K. } \int_{-1}^{0} \frac{-1}{x}\,\mathrm{d}x. \tag{1.4}$$

[3]Nerovnosti výše pak budeme požadovat od menší množiny bodů $x$, takže budou platit tím spíše.

[4]Pouze na tomto intervalu totiž podle předpokladů věty určitě víme něco o $f$ a $g$.

[5]Koho by však toto zdůvodnění zcela neuspokojilo, nechť si vzpomene na Weierstrassovu větu: funkce $f$ je spojitá na uzavřeném, omezeném intervalu $[a, b-\delta]$, je tedy na tomto intervalu omezená nějakou konstantou $K$, tj. $|f(x)| \leqslant K$, $x \in [a, b-\delta]$. Odtud plyne (snadno z definice nebo z příslušných tvrzeníček druhého semestru), a je to geometricky zcela názorné, že $\int_a^{b-\delta} f \leqslant K \cdot \big((b-\delta) - a\big) < \infty$.

K tomuto závěru nám stačí přesně výše uvedené znění Věty 1.13, které požaduje, aby srovnávané funkce byly na intervalu $[a,b)$ (v našem případě $[-1,0)$) nezáporné. Nyní si už stačí jen uvědomit (spočítat), že druhý z integrálů v (1.4) diverguje. Tím pádem diverguje i první z obou integrálů (je tedy roven $\infty$); ten se ovšem od integrálu ze zadání (1.3) liší pouze znaménkem, takže (1.3) také diverguje (je roven $-\infty$).

Na uvedeném příkladě je dobře vidět, že na znaménku vlastně nezáleží; funkce klidně můžou být záporné a věta bude fungovat; podstatné je spíše to, že je znaménko na celém intervalu stejné.[6]

Shrneme-li dosavadní úvahy, mělo by být zřejmé, že v LSK „na znaménku nezáleží“ – a co přesně tím myslíme. Mohli bychom tedy příslušným způsobem upravit formulaci Věty 1.13. Pokud bychom ji chtěli zformulovat obecněji, pouze bychom si museli dát pozor na to, že limita $A$ by mohla vyjít i záporná. Případ (i) by tedy odpovídal $A \in (-\infty,0) \cup (0,\infty)$, případ (ii) by byl beze změny a v případě (iii) bychom měli $A = -\infty \vee A = \infty$.

Proč jsme tedy LSK nezformulovali co nejobecněji a neušetřili si tím celé toto zdlouhavé vysvětlování? Je pro to několik důvodů:

- Je přehlednější napsat „nechť $f \geqslant 0$ na $[a,b)$“ než „nechť $f$ na $[a,b)$ nemění znaménko“ a k tomu vysvětlovat, co přesně tím máme na mysli.
- Studium konvergence se obvykle dělí na dvě části: pro nezáporné funkce a pro funkce obecné.[7] Obsah celé této poznámky se přitom „rozumí sám sebou“, tj. mlčky se předpokládá, že čtenář bude tyto výsledky umět aplikovat i na nekladné funkce.

**1.15 Úmluva.** V souladu s předchozí poznámkou budeme Limitní srovnávací kritérium používat v obecnější verzi pro funkce $f, g$, které „nemění znaménko“; připouštíme tedy i nekladné funkce. Máme při tom na paměti, že limita podílu obou funkcí může vyjít i záporná, a že tedy například pro $A \in (-\infty,0)$ rovněž nastává ekvivalence obou konvergencí: $\int_a^b f$ konverguje $\Leftrightarrow$ konverguje $\int_a^b g$.

**1.16 Poznámka.** Limitní srovnávací kritérium máme zformulováno v jistém smyslu nesymetricky: požadujeme totiž spojitost funkcí $f, g$ na *polouzavřeném* intervalu $[a,b)$ a limitu $A$ počítáme v bodě $b$ zleva. Můžeme se ptát: *A proč neuvažujeme intervaly ostatních typů? A proč nás nezajímá limita v bodě a zprava?* Cílem zbytku této poznámky je odpovědět na první otázku; druhou otázku zodpovídám v poznámce následující.

- *Polouzavřený interval* $(a,b]$. Tvrzení by mohlo být vysloveno a dokázáno „zrcadlově“, tedy v situaci, kdy bychom věděli, že funkce $f$, $g$ jsou spojité na intervalu $(a,b]$ a definovali bychom
$$A = \lim_{x\to a_+} \frac{f(x)}{g(x)}.$$
Vše ostatní může zůstat beze změny a výsledná věta platí. To je takřka triviální a jsou dva základní způsoby, jak si to uvědomit: První z nich je, že se podíváme na důkaz Věty 1.13 a prostě si všimneme, že se dá snadno upravit pro symetrickou verzi, takže i ta platí. Nebo můžeme použít už dokázané; tomu se věnuje poznámka níže.
- *Otevřený interval* $(a,b)$. Jsme-li v situaci, kdy funkce $f$, $g$ jsou spojité pouze na $(a,b)$, můžeme (a taky to tak v praxi děláme) interval rozdělit pomocným bodem $d \in (a,b)$: vyšetřujeme pak konvergenci přes intervaly $[d,b)$ (zde použijeme Větu 1.13 v našem znění) a $(a,d]$ (zde použijeme zrcadlovou verzi z předchozího bodu poznámky).

[6] Ani to ve skutečnosti není úplně potřeba. Stačí předpokládat, že obě funkce, tedy $f$ i $g$, jsou spojité a mají v $[a,b)$ konečně mnoho nulových bodů (takže jen konečněkrát změní znaménko).

[7] Analogicky jako jsme to už viděli v prvním semestru, kdy jsme se zajímali o konvergenci nekonečných číselných řad: tehdy jsme se zajímali o kritéria konvergence pro řady s nezápornými členy a později zvlášť i o řady s členy obecnými.

S otevřenými intervaly si tedy poradíme pomocí verzí Limitního srovnávacího kritéria pro oba typy polouzavřeného intervalu. Bylo by poněkud krkolomné tento (jednoduchý) postup formulovat do věty, a proto naše formulace zůstává „jednostranná“.

- *Uzavřený interval* $[a, b]$. Pokud bychom ve Větě 1.13 uvažovali uzavřený interval $[a, b]$ a funkce $f$, $g$ na tomto intervalu spojité, byla by otázka konvergence příslušných integrálů zcela nezajímavá. Oba integrály by konvergovaly automaticky (viz přímo důkaz Věty 1.13, v němž se mj. znovu vysvětluje, že spojitá funkce na uzavřeném, omezeném intervalu má konečný Riemannův integrál). Uvažovat uzavřený, omezený interval při studiu konvergence Riemannova integrálu je tedy triviální a nemusíme kvůli tomu dokazovat nové věty.

**1.17 Poznámka.** Pojďme se zamyslet nad otázkou, proč nás ve Větě 1.13 nezajímá limita v bodě $a$ (ani v žádném jiném bodě) a místo toho o všem rozhoduje hodnota limity v bodě $b$ zleva:

$$A = \lim_{x\to b_-} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

V předpokladech věty máme spojitost funkcí $f$, $g$ na $[a, b)$; ona limita nás tedy zajímá právě v tom krajním bodě intervalu, který není v intervalu obsažen. Zdá se tedy, že (v tomto případě) právě bod $b$ je ten problematický: na chování funkcí v jeho (levém) okolí závisí vztah konvergencí obou integrálů.

Jak ale může být pro integraci „problematický bod“? Vždyť víme, že hodnota (ani existence) integrálu nezávisí na hodnotě funkce v jednom bodě! Ano, jde skutečně o nepřesné vyjádření a správně bychom měli říkat, že „problém je na levém okolí bodu $b$“.[8]

Tolik k terminologii, nyní se ale zaměřme na podstatu věci. Jestliže je funkce $f$ spojitá na intervalu $[a, b)$, je nutně spojitá na $[a, d]$ pro libovolné $d \in (a, b)$[9] – a podle Weierstrassovy věty je tam i omezená. Tím pádem integrál $\int_a^d f$ je konečný pro libovolné $d \in (a, b)$.

Naproti tomu, funkce $f$ nemusí být omezená na $(d, b)$: u bodu $b$ může růst do nekonečna, což je jistě důvod k pochybnostem o konvergenci integrálu $\int_d^b f$. Alternativně, pokud $b = \infty$ (kteroužto možnost ve formulaci věty také připouštíme), tj. integrujeme-li přes interval nekonečné délky, máme důvody k pochybnostem o konvergenci integrálu automaticky.

Je tedy snad jasné, že potíže s konvergencí integrálu mohou být způsobeny pouze chováním funkce v blízkosti bodu $b$: funkce může být neomezená nebo může být $b = \infty$.[10]

Odtud je snad také samozřejmé, že pokud bychom v Limitním srovnávacím kritériu předpokládali spojitost funkcí $f, g$ na intervalu $(a, b]$, museli bychom se zajímat o limitu jejich podílu v bodě $a$, nikoliv $b$.

**1.18 Poznámka.** Odvoďme zrcadlovou verzi Věty 1.13 pouze s použitím verze už dokázané (tj. bez zopakování důkazu); předpokládejme tedy, že funkce $f$, $g$ jsou spojité na $(a, b]$, $a \in \mathbb{R}^*$ a definujme $A$ rovnicí

$$A = \lim_{x\to a_+} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Pro ilustraci dokážeme třeba první bod věty; nechť tedy $A \in (0, \infty)$ a dokažme, že $\int_a^b f$ konverguje, právě když $\int_a^b g$ konverguje:

---

[8] a to tím spíše, že – jak víme z prvního semestru – limita jakékoliv funkce v bodě $b$ nezávisí na hodnotě přímo v onom bodě.

[9] Jako snadné cvičení si můžete dokázat, že platí i opačná implikace, tedy celkem $f$ je spojitá na $[a, b)$ $\Leftrightarrow$ $f$ je spojitá na $[a, d]$ pro všechna $d \in (a, b)$.

[10] Může pochopitelně nastat i obojí. Za povšimnutí stojí, že i v takovém případě se může stát, že integrál konverguje (těžko to však budete dokazovat pomocí Věty 1.13). Dokážete zkonstruovat příklad nezáporné neomezené funkce $f$ spojité na $[0, \infty)$, pro niž $\int_0^\infty f < \infty$?

Definujme pomocné funkce $\tilde{f}(x) = f(-x)$ a $\tilde{g}(x) = g(-x)$; ty jsou spojité na $[-b, -a)$, takže pro ně můžeme aplikovat (nezměněnou) Větu 1.13, v níž roli $[a, b)$ hraje interval $[-b, -a)$. Jest

$$\lim_{x\to -a_-} \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)} = \lim_{x\to -a_-} \frac{f(-x)}{g(-x)} = \lim_{x\to a_+} \frac{f(x)}{g(x)} = A \in (0, \infty).$$

Podle Věty 1.13 tedy $\int_{-b}^{-a} \tilde{f}$ konverguje, právě když $\int_{-b}^{-a} \tilde{g}$ konverguje. Jednoduchou substitucí ovšem zjistíme, že

$$\int_{-b}^{-a} \tilde{f} = \int_{-b}^{-a} f(-x)\,\mathrm{d}x = \left| \begin{aligned} t &= -x \\ \mathrm{d}t &= -\,\mathrm{d}x \end{aligned} \right| = -\int_{b}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f.$$

Podobně $\int_{-b}^{-a} \tilde{g} = \int_a^b g$. Tím pádem $\int_a^b f = \int_{-b}^{-a} \tilde{f}$ konverguje, právě když konverguje $\int_{-b}^{-a} \tilde{g} = \int_a^b g$, což jsme chtěli dokázat.

**1.19 Příklad.** Rozhodněte o konvergenci následujících integrálů:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x, \quad \int_1^\infty \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x, \quad \int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

*Řešení.* První integrand je funkce $f(x) = \frac{1}{\sin x}$, která je spojitá na intervalu $(0, 1]$, „problémový bod“ je tedy 0. Víme, že funkce $\sin x$ se v nule chová stejně jako $x$; vyjádřeno přesně je to známou limitou $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Je tedy přirozené srovnávat funkci $f$ s funkcí $g(x) = \frac{1}{x}$:

$$\lim_{x\to 0_+} \frac{\frac{1}{\sin x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0_+} \frac{x}{\sin x} = 1 \in (0, \infty),$$

a podle Limitního srovnávacího kritéria tedy $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$ konverguje, právě když konverguje integrál $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x}$, který ovšem diverguje (jak si lze snadno spočítat). Závěr tedy je, že první vyšetřovaný integrál diverguje.

Druhý integrál snadno vyšetříte pomocí srovnání s funkcí $\frac{1}{x^2}$; je zřejmé, že problémový bod je tentokrát pouze $\infty$. Integrál konverguje. (Při výpočtu limity použijete Větu o limitě složené funkce a stejnou známou limitu jako v prvním příkladě.)

Podívejme se podrobněji na třetí integrál; označme $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$. Jedna z mezí integrálu je nekonečná, a je tedy nutno vyšetřit příslušnou limitu.[11] Lze si ovšem všimnout, že v tomto případě máme problém na obou stranách, neboť funkce $\ln x$ není definovaná v bodě 0 (a integrand tedy nemůže být v bodě nula spojitý). Musíme tedy integrál rozdělit na dvě části, z nichž každou vyšetříme opět pomocí Limitního srovnávacího kritéria:

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \int_1^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x. \tag{1.5}$$

První sčítanec vyřešíme srovnáním s funkcí $g(x) = \ln x$:

$$\lim_{x\to 0_+} \frac{\frac{\ln x}{1+x^2}}{\ln x} = \lim_{x\to 0_+} \frac{1}{1+x^2} = 1 \in (0, \infty).$$

Jsme tedy v situaci, kdy se oba integrály chovají stejně; protože $\int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x$ konverguje (jak lze snadno spočíst),[12] konverguje i první sčítanec výše.

[11] Tj. nekonečno je vždycky „problémový bod“.

[12] Všimněte si, že $\ln x$ je na $(0, 1)$ záporná, takže striktně vzato nesplňuje předpoklad Věty 1.13, kterou zde používáme. V jedné z poznámek pod důkazem věty je vysvětleno, že to nevadí; stačí nám, že funkce na tom intervalu nemění znaménko.

Druhý sčítanec v (1.5) lze vyřešit srovnáním s vhodnou funkcí, která konverguje, ovšem „o něco hůře“ než $\frac{1}{1+x^2}$; je to kvůli logaritmu v čitateli, který způsobuje, že integrand sice jde k nule dostatečně rychle, ne ale tak rychle jako $\frac{1}{x^2}$. Jinými slovy, srovnáním s $\frac{1}{x^2}$ se nic nedozvíme; skutečně

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\ln x}{1+x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{1+x^2} \cdot \lim_{x\to\infty} \ln x = 1 \cdot \infty = \infty,$$

takže podle Věty 12 konvergence $\int_1^\infty f$ implikuje konvergenci $\int_1^\infty g$, což je nám k ničemu.

Místo toho provedeme srovnání s funkcí $g(x) = \frac{1}{x^{3/2}}$. Integrál $\int_1^\infty g$ „konverguje o něco pomaleji“,[13] takže máme šanci na úspěch, který se skutečně dostaví takto:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{3/2}\ln x}{1+x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{3/2}\sqrt{x}}{1+x^2} \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 1 \cdot 0 = 0,$$

takže podle Limitního srovnávacího kritéria konvergence $\int_1^\infty g$ (která nastává, jak lze ověřit snadným výpočtem) implikuje konvergenci $\int_1^\infty f$, a i druhý sčítanec v rovnosti (1.5) konverguje; konverguje tedy celý integrál. △

Při vyšetřování konvergence integrálu v souvislosti s chováním autonomních rovnic se občas dá s výhodou využít následující

**1.20 Lemma.**

*(i) Nechť $g$ je spojitá a nenulová na $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$. Pak*

$$\int_a^b \frac{1}{g} \quad \textit{konverguje.}$$

*(ii) Buď $g$ spojitá na $[a,b]$, $g > 0$ na $[a,b)$ a $g(b) = 0$. Nechť $g'_-(b) \in \mathbb{R}$. Pak*

$$\left| \int_a^b \frac{1}{g} \right| = \infty.$$

*Důkaz.* Důkaz prvního bodu je v podstatě triviální: protože $g$ je spojitá a nenulová, platí totéž i pro $1/g$ – obojí na intervalu $[a,b]$. Funkce $1/g$ je spojitá na $[a,b]$, má tam tedy Riemannův integrál (který je, jak víme, vždy konečný).

Druhou část lemmatu dokážeme pomocí Limitního srovnávacího kritéria; funkci $1/g$ srovnáme s funkcí $h(x) = \frac{1}{x-b}$ (využijeme předpoklad $g(b) = 0$):

$$\lim_{x\to b_-} \frac{\frac{1}{x-b}}{\frac{1}{g(x)}} = \lim_{x\to b_-} \frac{g(x)}{x-b} = \lim_{x\to b_-} \frac{g(x)-g(b)}{x-b} = g'_-(b),$$

což je (podle předpokladu lemmatu) prvkem $\mathbb{R}$. Podle Limitního srovnávacího kritéria tedy každopádně platí implikace

$$\int_a^b \frac{1}{g} \text{ konverguje} \Rightarrow \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x-b} \text{ konverguje.}$$

My ale víme (případně umíme snadno spočítat), že druhý z uvedených integrálů diverguje, diverguje tedy i ten první, což jsme měli dokázat. □

[13] To je dáno tím, že exponent ve jmenovateli je blíže k hraničnímu případu exponentu $\alpha = 1$. Ten je, jak víme, největší, pro nějž integrál $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ diverguje.

**1.21 Poznámka.** Jako obvykle je dobré si uvědomit, že platí i zrcadlová verze bodu (ii) lemmatu. V uvedené formulaci „jsou problémy“ na okolí bodu $b$ zleva (protože tam se jmenovatel blíží nule). Druhou možností by bylo uvažovat situaci, kdy problémy nastávají na pravém okolí bodu $a$. Měli byste být schopni sami napsat přesnou formulaci této verze lemmatu. Jak jsme zvyklí z jiných podobných případů, nebudeme už v konkrétních příkladech zdůrazňovat, že používáme zrcadlovou verzi (budeme to považovat za zřejmé).

**1.22 Příklad.** Pro funkci $g(x) = \sin x$ se budeme zajímat o konvergenci integrálu $\int_0^\pi \frac{1}{g}$. Víme, že $g$ má vlastní derivaci v obou krajních bodech 0 i $\pi$ (dokonce na $\mathbb{R}$). Podle Lemmatu 1.20 tedy diverguje dokonce každý z integrálů

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x,$$

tím spíše tak diverguje integrál přes celý interval $(0, \pi)$. Zároveň jsme dostali návod na ještě jednodušší způsob řešení prvního příkladu v 1.19 (pouze zde máme integrál přes $(0, 1)$ místo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, což není podstatný rozdíl).

Podívejme se ještě na příklad funkce $g(x) = \sqrt{x}$ a integrál $\int_0^1 \frac{1}{g}$. Protože $g(0) = 0$, $g'_+(0) = \infty$ (jak zjistíme například lehkým výpočtem z definice derivace), lemma (zrcadlová verze bodu (ii)) nám neříká nic. My ovšem víme, že v tomto konkrétním případě integrál konverguje, což můžeme ověřit prostě tak, že spočteme jeho hodnotu. △

## 1.2 Připomenutí řad

V prvním semestru jsme se zabývali nekonečnými číselnými řadami. Byla dána posloupnost reálných čísel $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ a my jsme formální symbol

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots, \qquad \text{resp.} \qquad \sum_{n=1}^\infty a_n \tag{1.6}$$

nazývali *(nekonečnou číselnou) řadou*. Protože z libovolné posloupnosti můžeme utvořit řadu a z řady zase posloupnost, z formálního hlediska mezi oběma pojmy není rozdíl. Dvě různá značení pro stejný typ matematického objektu zavádíme kvůli tomu, že při studiu řad nám jde o něco jiného než při studiu posloupností; v praxi se tedy hodí mezi oběma pojmy rozlišovat.

Zatímco u posloupností nás obvykle zajímá chování jednotlivých členů a zejména pak její limita, u řady se zajímáme o součty jejích členů a v limitním smyslu pak o součet *všech* jejích členů. Co přesně tím myslíme, vyjadřuje definice součtu nekonečné řady (1.6): $s \in \mathbb{R}^*$ se nazve jejím součtem, pokud je limitou součtů částečných $s_N$:

$$s = \lim_{N\to\infty} s_N = \lim_{N\to\infty} \left(a_1 + a_2 + \ldots + a_N\right) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^N a_n.$$

Součet řady – pokud existuje – značíme stejným symbolem jako řadu samu:

$$\sum_{n=1}^\infty a_n = s = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^N a_n.$$

To je drobná kolize značení, která ovšem obvykle nevede k nedorozuměním.[14]

[14] Poněkud matoucím důsledkem této kolize je nicméně skutečnost, že symbol $\sum_{n=1}^\infty a_n$ má smysl pro libovolnou posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, tedy i pro takovou, že součet řady $\sum_{n=1}^\infty a_n$ neexistuje.

Princip tedy je, že z posloupnosti $a_1, a_2, a_3, \ldots$ utvoříme novou posloupnost – posloupnost částečných součtů – jejíž limita nás bude zajímat:

$$a_1,\ a_1 + a_2,\ a_1 + a_2 + a_3,\ \ldots.$$

Při obecném studiu řad jsou tedy dvě podstatné složky:

- Musíme *umět sčítat* libovolný konečný počet členů naší řady, abychom mohli definovat posloupnost částečných součtů. Členy řady tedy musí být obsaženy v nějaké algebraické struktuře s rozumnou binární operací „sčítání“.[15]

- Musíme mít rozumnou *definici limity posloupnosti*; tu aplikujeme na posloupnost částečných součtů, a dostaneme součet řady.[16]

Jak si jistě vzpomínáte, v prvním semestru jsme se málokdy zajímali o konkrétní hodnotu součtu dané řady; místo toho nás zajímala konvergence a divergence řad:

Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je *konvergentní*, jestliže její součet existuje a je konečný, tj. jestliže $\sum_{n=1}^{\infty}$. V opačném případě řadu označujeme jako *divergentní*.

Jistě také není potřeba moc podrobně vysvětlovat, že se (ostatně jako vždy) držíme určité „hantýrky“, která nám usnadňuje komunikaci, a přitom nevede k nedorozuměním. Například:

- O konvergentní řadě říkáme také, že *konverguje* apod.

- Můžeme posouvat počáteční index, měnit písmenka apod. Je nám jasné, co rozumíme třeba symbolem $\sum_{i=7}^{\infty} b_i$, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$ apod.

- Píši-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \in \mathbb{R}$, mám tím symbolem na mysli součet řady, nikoliv řadu samu, která pochopitelně není prvkem množiny reálných čísel.

Vzpomeňme několik základních příkladů:

- Harmonická řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje, má totiž nekonečný součet, tj. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$;

- Geometrická řada $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ konverguje, právě když $|q| < 1$. Má pak součet $\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$;

- speciálně, řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ diverguje, protože vůbec nemá součet;

- řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ nebo $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ konvergují atd.

Velmi stručně jsme se zabývali také pojmy absolutní a relativní (neabsolutní) konvergence: Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je *absolutně konvergentní*, jestliže je konvergentní řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Řada, která je konvergentní a není absolutně konvergentní, se nazývá *relativně konvergentní* (též *neabsolutně konvergentní*).

Relativně konvergentní řady skutečně existují, tento fakt je přitom obvykle potřeba ověřit pomocí nějakého kritéria konvergence. Ne všechna kritéria se však hodí na vyšetřování relativní konvergence; vlastně jsme v prvním semestru probrali jen jedno takové, a to kritérium Leibnizovo. Ostatní kritéria konvergence, která jsme si uvedli, se týkají pouze konvergence absolutní (resp. konvergence řad s nezápornými členy).[17]

[15] V našem případě je to těleso $\mathbb{R}$, později však budeme pracovat i s $\mathbb{C}$, tj. budeme uvažovat řady komplexních čísel.

[16] V našem jde o limitu posloupnosti reálných čísel, kterou jsme definovali na začátku prvního semestru. Později definujeme limitu posloupnosti v obecnějším kontextu, například i limitu posloupnosti komplexních čísel.

[17] To se týká srovnávacího, podílového i odmocninového kritéria, i jejich limitních verzí. Zmiňovali jsme se také o Raabeovu kritériu; i to se týká pouze řad s nezápornými členy.

Standardním příkladem relativně konvergentní řady je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Tato řada konverguje, což velmi snadno plyne z Leibnizova kritéria konvergence. Nekonverguje ale absolutně, neboť $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$. Obě tyto informace lze vyslovit současně konstatováním, že řada je relativně konvergentní.

Kromě kritérií konvergence (která zde nebudeme opakovat podrobně; kdo chce, může si je najít v prvním dílu skript) je připomenout několik základních faktů o řadách:

- Konvergence řady nezáleží na prvních konečně mnoha členech. (Ovšem záleží na nich hodnota případného součtu.)
- Pro $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ platí
$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$
má-li pravá strana rovnosti smysl. (Tj. pokud oba součty napravo existují a dají se sečíst.[18])
- Nutná podmínka konvergence řady: Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Ale pozor, opačná implikace neplatí, o čemž svědčí třeba Harmonická řada (která diverguje, „ačkoliv“ její členy jdou k nule).
- Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně, pak konverguje.

## 1.3 Vztah řady a integrálu

Jeden z faktů, které jsme si uvedli bez důkazu, a přitom jsme je v prvním semestru hojně využívali, je následující tvrzení: Pro $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{konverguje} \quad \iff \quad \alpha > 1.$$

Ačkoliv existuje i elementární důkaz,[19] my využijeme toho, že už máme k dispozici teorii integrálu, a podáme mnohem přehlednější a jednodušší důkaz. K tomu použijeme následující kritérium konvergence pro řady s nezápornými členy, takzvané Integrální kritérium.

### 1.3.1 Znovu o Zobecněném Riemannově integrálu

Stručné opakování definice a základních vlastností Zobecněného Riemannova integrálu lze najít v části 1.1. Nyní předpokládejme, že máme spojitou nezápornou funkci $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ a podívejme se na geometrický význam integrálu

$$(\mathrm{ZR})\int_1^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1.7}$$

[18] Může se stát, že oba součty existují, sečíst se ale nedají, např. $\infty + (-\infty)$.

[19] Elementární znamená, že nevyužívá žádnou složitější teorii; neznamená to, že by ten důkaz byl jednoduchý.

Protože $f \geqslant 0$ na $[1, \infty)$, je funkce $F$ definovaná předpisem

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

neklesající. To je intuitivně zřejmé a plyne to ze Základní věty kalkulu, která říká, že $F' = f$, a tedy $F' \geqslant 0$ na $[1, \infty)$, takže $F$ je na tom intervalu neklesající. Tím pádem existuje limita[20]

$$(\mathrm{ZR})\int_1^\infty f(t)\,\mathrm{d}t \overset{\text{def.}}{=} \lim_{x\to\infty} \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to\infty} F(x).$$

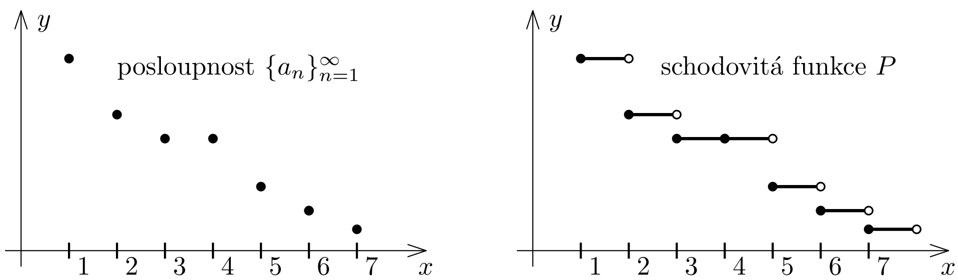
Integrál (1.7) tedy každopádně existuje, není ovšem jasné, jestli má konečnou hodnotu, nebo je roven $\infty$. Opět se tedy ptáme, jestli integrál *konverguje* nebo *diverguje*. K hledání odpovědí na otázky tohoto typu (pro různé konkrétní integrály) jsme už dobře vybaveni: kromě početních metod k určení přesné hodnoty některých integrálů máme také kritéria konvergence integrálu z oddílu 1.1.

**Geometrická představa:** Nyní se však zaměříme na jiný aspekt, a sice na hledání souvislosti mezi konvergencí integrálu tvaru (1.7) a jistých nekonečných řad. Pojďme si uvědomit, že – alespoň intuitivně – se jedná o velmi podobné problémy: geometrická představa *součtu řady* je totiž stejná jako představa *hodnoty integrálu* (1.7):

Buď $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ nějaká posloupnost reálných čísel. Jak víme, formálně vzato není taková posloupnost nic jiného než funkce $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. My si ovšem můžeme rozšířit definici této funkce na celý interval $[1, \infty)$ tak, že hodnota funkce na intervalu $[n, n+1)$ je $a_n$. Tj. definujeme funkci $P : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ předpisem

$$P(x) = a_n, \quad x \in [n, n+1).$$

Funkce $P$ je tedy po částech konstantní, někdy též „schodovitá“, funkce.



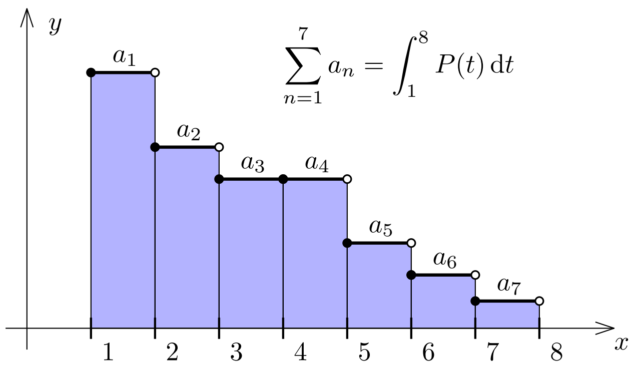

Obrázek 1.1: Vztah posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ a příslušné funkce $P$.

Všimněme si, že plocha pod grafem funkce $P$ se skládá z obdélníků o šířce jedna a výšce dané příslušným členem posloupnosti. Například na intervalu $[1, 2)$ má příslušný obdélník výšku $a_1$; plocha tohoto obdélníka je tedy rovna přesně $a_1$ – a stejně to funguje i dále: plocha obdélníka pod grafem funkce $P$ na intervalu $[n, n+1)$ je rovna $a_n$. Vidíme, že je souvislost mezi plochou pod grafem funkce $P$ a součtem $a_1 + a_2 + \ldots$: pro libovolné $N$ platí

$$\sum_{n=1}^N a_n = \int_1^{N+1} P(t)\,\mathrm{d}t, \quad \text{a tedy} \quad \sum_{n=1}^\infty a_n = \int_1^\infty P(t)\,\mathrm{d}t.$$

Pro $N = 7$ je výše uvedená rovnost zachycena na obrázku.

[20] Jak víme, limita monotónní funkce existuje autmaticky.




Obrázek 1.2: Vztah součtu řady a integrálu funkce.

Snad se tedy podařilo ukázat, že sčítání nekonečné řady je vlastně speciální případ integrace pomocí Zobecněného Riemannova integrálu: stačí zvolit vhodnou schodovitou funkci.

V tomto případě jsme začínali s nekonečnou číselnou řadu a převedli ji na funkci; v jistém smyslu je ale možno postupovat i naopak, tj. funkci je možno přiřadit posloupnost (resp. řadu). To obecně nemusí dávat nic rozumného: když funkci $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ přiřadíme posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ definovanou vzorcem

$$a_n = f(n), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1.8}$$

pak tato posloupnost žádným způsobem neodráží chování funkce $f$ *mezi po sobě jdoucími přirozenými čísly*, tj. na intervalech tvaru $(n, n+1)$, kde $n \in \mathbb{N}$. Mezi integrálem $\int_1^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ a řadou $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tedy nemusí být žádný rozumný vztah.

Funkce $f$ mohla být „schodovitá“, v kterémžto případě by mezi oběma hodnotami nastala rovnost; také ale mohla být například nulová v každém přirozeném čísle a mít „kopečky“ uprostřed. Třeba pro funkci $f(x) = |\sin(\pi x)|$ bude posloupnost definovaná vzorcem (1.8) konstantní nulová, neboť $f(n) = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Takže $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$, zatímco $\int_1^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \infty$, jak lze snadno vidět (integrál je součtem ploch nekonečně mnoha stejně velkých kopečků).

Pokud ale budeme požadovat, aby funkce $f$ byla monotónní, podobné nezbednosti jí tím znemožníme a vztah mezi integrálem a řadou bude dostatečně těsný. To je obsahem následující věty.

## 1.3.2 Integrální kritérium konvergence

**1.23 Věta** (Integrální kritérium)**.** *Nechť $f : [1, \infty) \to [0, \infty)$ je libovolná nerostoucí funkce. Potom*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \ \textit{konverguje} \quad \Longleftrightarrow \quad (\mathrm{ZR})\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \ \textit{konverguje}.$$

*Důkaz.* Protože funkce $f$ je nerostoucí a nezáporná na $[1, \infty)$, je $f(1) \geqslant f \geqslant 0$ na $[1, \infty)$ (tj. $f$ je navíc omezená), a tedy existuje její (obyčejný) Riemannův integrál přes libovolný podinterval $[a, b] \subseteq [1, \infty)$.[21] Všechny níže se vyskytující Riemannovy integrály přes omezené intervaly tedy existují.

Z toho, že $f$ je nerostoucí, dále samozřejmě dostaneme, že je nerostoucí na každém intervalu tvaru $[n, n+1]$, $n \geqslant 1$. Díky tomu pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\forall t \in [n, n+1]\colon \ f(n) \geqslant f(t) \geqslant f(n+1),$$

[21] Ve druhém semestru jsme si dokázali dvě různé postačující podmínky pro existenci Riemannova integrálu $f$ přes interval $[a, b]$: častěji používanou (a) *spojitost* $f$ na $[a, b]$, ale také (b) *monotonii a omezenost* $f$ na $[a, b]$.

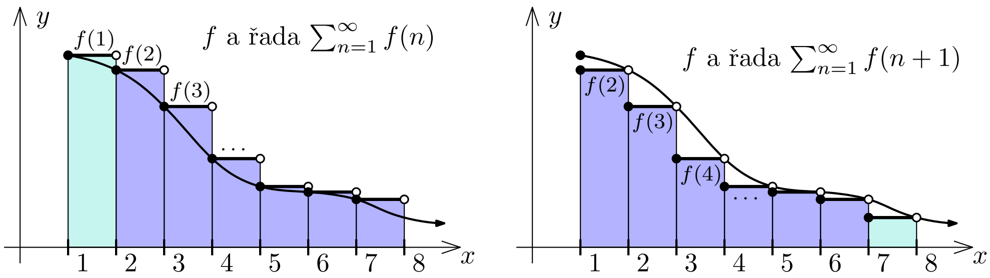
takže (integrací přes interval $[n, n+1]$)

$$f(n) = \int_n^{n+1} f(n)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_n^{n+1} f(n+1)\,\mathrm{d}t = f(n+1).$$

Tyto nerovnosti platí pro všechna $n$, takže nic nebrání tomu, abychom prvních $N$ z nich sečetli (pro libovolné $N \in \mathbb{N}$). Dostaneme

$$\sum_{n=1}^{N} f(n) \geqslant \sum_{n=1}^{N} \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \sum_{n=1}^{N} f(n+1), \quad \text{tj.}$$
$$\sum_{n=1}^{N} f(n) \geqslant \int_1^{N+1} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \sum_{n=1}^{N} f(n+1).$$

Poslední dvojice nerovností je – kromě právě uvedeného jejího důkazu – jasně patrná i z Obrázku 1.3: plocha pod grafem funkce je shora odhadnuta jedním součtem a zdola odhadnuta posunutým součtem, v němž první (největší) člen odstraníme a přidáme jeden člen následující. Protože jsme tyto nerovnosti




Obrázek 1.3: Horní odhad integrálu řadou a naopak.

dokázali pro libovolné $N \in \mathbb{N}$, platí pro všechna $N \in \mathbb{N}$. Můžeme tedy zkusit vypočítat limity pro $N \to \infty$ posloupností

$$\left\{\sum_{n=1}^{N} f(n)\right\}_{N=1}^{\infty}, \qquad \left\{\int_1^{N+1} f(t)\,\mathrm{d}t\right\}_{N=1}^{\infty} \quad \text{a} \quad \left\{\sum_{n=1}^{N} f(n+1)\right\}_{N=1}^{\infty}. \tag{1.9}$$

Pokud tyto limity existují, splňují podle triviálního tvrzeníčka z prvního semestru tytéž nerovnosti jako jejich $N$-té členy. Prozatím předpokládejme, že limity a také integrál $\int_1^{\infty} f$ opravdu existují. Pak tedy platí[22]

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} f(n) \geqslant \lim_{N\to\infty} \int_1^{N+1} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} f(n+1), \quad \text{tj.}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \geqslant \int_1^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} f(n+1).$$

Poslední uvedená dvojice nerovností ihned dává požadovaný výsledek: Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) < \infty$, pak i $\int_1^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t < \infty$, a jedna implikace je dokázána. Naopak, pokud $\int_1^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t < \infty$, pak (podle druhé

[22] Fakt, že limita prostřední posloupnosti „částečných integrálů“ je skutečně uvedený integrál, je dokázán v závěru důkazu pomocí Heineho věty.

nerovnosti výše) jest $\sum_{n=1}^{\infty} f(n+1) < \infty$, tedy i $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = f(1) + \sum_{n=1}^{\infty} f(n+1) < \infty$. Důkaz tedy bude kompletní v okamžiku, kdy ověříme existenci limit posloupností z (1.9) a existenci integrálu $\int_1^{\infty} f$.

Ověřme nejprve existenci limity první a třetí uvedené posloupnosti (tyto limity jsou součty příslušných řad): Protože funkce $f$ je podle předpokladu nezáporná, je jasné, že obě zmíněné posloupnosti jsou neklesající,[23] a mají tedy limity (ať už vlastní, nebo nevlastní).

Zbývá ověřit existenci limity prostřední uvedené posloupnosti, resp. celého integrálu. Uvažujme obvyklou funkci $F\colon [1,\infty) \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Zcela stejně jako v opakovací části 1.3.1 si uvědomíme, že podle Základní věty kalkulu je funkce $F$ primitivní k $f$, neboli $F' = f \geqslant 0$ na $[1,\infty)$. Funkce $F$ je tedy neklesající, a má proto limitu v nekonečnu.[24] Jinými slovy existuje

$$(\mathrm{ZR})\int_1^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to\infty} \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to\infty} F(t).$$

To je skoro vše, co jsme potřebovali. Ale pozor, potřebujeme dokázat existenci limity *posloupnosti*:

$$\lim_{N\to\infty} \int_1^{N+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{N\to\infty} F(N+1).$$

Z Heineho věty, která dává do souvislosti limitu funkce a limitu posloupnosti, ovšem ihned plyne,[25] že

$$\lim_{N\to\infty} F(N+1) = \lim_{x\to\infty} F(x) = \int_1^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Tím je důkaz Integrálního kritéria dokončen. □

**1.24 Důsledek.** *Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konverguje, právě když $\alpha > 1$.*

*Důkaz.* Důkaz je přímočarou aplikací předchozí věty. Na rozdíl od nekonečné řady, u příslušného integrálu jsme schopni spočítat jeho přesnou hodnotu; ukáže se, že je tato hodnota konečná právě tehdy, když $\alpha > 1$:

Nejprve se podívejme na speciální případ, kdy $\alpha = 1$, tj. zajímáme se o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, tj. harmonické řady. Divergenci této řady jsme dokázali už dříve jiným způsobem; nyní ji dokážeme znovu pomocí integrálního kritéria, které aplikujeme na funkci $f(x) = \frac{1}{x}$. Funkce $f$ je na intervalu $[1,\infty)$ nerostoucí (dokonce klesající) a má tam kladné hodnoty, splňuje tedy předpoklady kritéria, a to nám tak říká, že

$$\int_1^{\infty} f \quad \text{konverguje} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{konverguje.}$$

Stačí tedy vyšetřit konvergenci integrálu $\int_1^{\infty} f$, což provedeme tak, že spočítáme jeho přesnou hodnotu:

$$\int_1^{\infty} f = \int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x} = [\ln x]_1^{\infty} = \lim_{x\to\infty} \ln x - \ln 1 = \infty.$$

Integrál tedy diverguje, a podle výše uvedené ekvivalence tedy diverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.[26]

[23] Přičítáme další a další nezáporná čísla, takže částečné součty se nikdy nezmenší.

[24] i v libovolném bodě $[1,\infty)$; to nás teď ovšem nezajímá

[25] Do funkce $F$ zde dosazujeme za $x$ posloupnost $\{N+1\}_{N=1}^{\infty}$, která jde do nekonečna. Tím je ověřena podmínka „(H1)“; podmínka „(H2)“ z Heineho věty je v případě limity v nekonečnu splněna triviálně. Zopakujte si Heineho větu a přesvědčte se, že je zde použita korektním způsobem.

[26] Máme tedy nový a úplně jiný důkaz známé skutečnosti, že harmonická řada je divergentní.

Vyšetřivše případ $\alpha = 1$, předpokládejme nyní opak, tj. že $\alpha \neq 1$. Je zřejmé, že k vyšetření konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ pomocí integrálního kritéria je vhodné použít funkci $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, která je monotónní a kladná na $[1, \infty]$.[27] Počítejme tedy integrál:

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \int_1^\infty x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^\infty = \frac{1}{1-\alpha}\left(\lim_{x\to\infty} x^{1-\alpha} - 1\right) = \begin{cases} \infty, & \text{je-li } 1-\alpha > 0, \\ \frac{0-1}{1-\alpha}, & \text{je-li } 1-\alpha < 0. \end{cases}$$

Vidíme tedy, že uvažovaný integrál je (po započtení případu $\alpha = 1$, kdy diverguje), konvergentní právě tehdy, když $1 - \alpha < 0$ (v opačném případě jsme zjistili, že diverguje), tj., právě když $\alpha > 1$. Podle integrálního kritéria, které je forumlováno jako ekvivalence, tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konverguje přesně v týchž případech, tj., právě když $\alpha > 1$, a důkaz je hotov. □

**1.25 Poznámka.** Předpokladem Věty 1.23 je, že funkce $f\colon [1, \infty) \to [0\infty)$ je nerostoucí. To je poměrně konkrétní situace, která zahrnuje tři různé předpoklady: (a) funkce je definována na intervalu $[1, \infty)$, (b) funkce je nezáporná, (c) funkce je nerostoucí. Je asi patrné, že věta se dá zobecnit vzhledem ke všem těmto předpokladům. Ve většině takových případů činíme tichou dohodu, že jsme oprávněni používat modifikovanou verzi věty, aniž bychom explicitně podali důkaz pro novou situaci. Bylo by samozřejmě možné větu formulovat zcela obecně, abychom se vyhnuli nutnosti se takto domlouvat, to by však mnohdy znamenalo přítomnost mnoha parametrů navíc vyskytujících se ve formulaci obecné verze věty. V matematické kultuře je zcela standardní postup ve vhodných případech zformulovat jednodušší (byť méně obecnou) verzi s tím, že triviální zobecnění si čtenář podle potřeby umí dokázat sám. V tomto konkrétním případě se podíváme, jak výše uvedené předpoklady můžeme zobecnit.

(a) Řekněme, že pomocí integrálního kritéria chceme vyšetřit konvergenci řady $\sum_{n=7}^{\infty} \frac{1}{n-6}$. Přirozeně se nabízí použít funkci $f$ definovanou jako $f(x) = \frac{1}{x-6}$ a spočítat integrál $\int_7^\infty f$. (Ten vyjde nekonečný, takže bychom rádi vyslovili závěr, že daná řada diverguje.) Potíž je v tom, že tato funkce nesplňuje předpoklady: není definována na $[1, \infty)$.

   Intuitivně je ale zcela zřejmé, že ona „1“ nehraje důležitou roli; věta by platila úplně stejně, kdybychom ji nahradili sedmičkou a důkaz by byl zcela analogický. Dostali bychom tak „posunutou verzi“ Věty 1.23.

(b) Podstatou předpokladu nezápornosti je, že funkce nemůže „měnit znaménko“. Stejně dobře bychom mohli dokázat podobnou větu, v níž bychom místo nezápornosti předpokládali nekladnost. Dokonce by stačilo předpokládat, že je funkce nezáporná „až od jistého $x_0$“. V praxi takové příklady snadno rozpoznáme a můžeme bez obav použít integrální kritérium i na ně.

(c) Záleží jen na tom, aby funkce byla monotónní, není potřeba znát konkrétní směr. Budeme-li se držet předpokladu nezápornosti $f$, pak ta zajímavá (netriviální) situace nastává ve chvíli, kdy $f$ je nerostoucí. V případě, že by byla neklesající, tvrzení věty by ovšem platilo také; pak totiž ihned vidíme z obrázku (představte si ho!), že integrál i řada jsou divergentní (s výjimkou případu, kdy $f = 0$ na $[1, \infty)$).

Pokud bychom tedy chtěli zformulovat novou verzi věty, která je zobecněná ve všech třech výše probraných smyslech, mohlo by to vypadat například nějak takto:

[27] Je ovšem nerostoucí, jak se žádá v předpokladech integrálního kritéria, pouze pokud $\alpha > 0$; pokud ale $\alpha \leqslant 0$, je divergence vyšetřované řady zřejmá. A to například kvůli nesplnění nutné podmínky konvergence: pro $\alpha \leqslant 0$ je limita $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ různá od nuly, a řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ tedy nemůže konvergovat. Není ale příliš důležité tuto věc explicitně konstatovat v důkazu, protože integrální kritérium platí i tehdy, když v jeho předpokladech nahradíme slovo „nerostoucí“ slovem „monotónní“. To ovšem znamená, že pomocí integrálního kritéria jsme oprávněni vyšetřovat i případ $\alpha \leqslant 0$.

*Nechť* $K \in \mathbb{Z}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $K \leqslant x_0$ *a monotónní funkce* $f : [K, \infty) \to \mathbb{R}$ *je buďto nezáporná na* $[x_0, \infty)$ *nebo nekladná na* $[x_0, \infty)$ *(tj. „od* $x_0$ *dál nemění znaménko"). Pak*

$$\sum_{n=K}^{\infty} f(n) \ \textit{konverguje} \quad \Longleftrightarrow \quad (\mathrm{ZR})\int_K^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \ \textit{konverguje}.$$

# Kapitola 2

# Obyčejné diferenciální rovnice

## 2.1 Úvod

*Diferenciální rovnice* je taková rovnice, ve které neznámou je funkce a ve které se vyskytuje kromě funkce samotné také její derivace (třeba i vyššího řádu). Neznámou (hledanou) funkci budeme obvykle značit písmenkem $y$ a za proměnnou této funkce obvykle zvolíme $x$. Proměnnou $x$ můžeme, ale nemusíme, explicitně naznačit – z toho vyplývají dva různé zápisy pro každou rovnici (viz seznam příkladů níže). Podívejme se na několik příkladů diferenciálních rovnic:

(1) $y' = 1 + y^2$, resp. $y'(x) = 1 + (y(x))^2$;

(2) $y'' + y = 0$, resp. $y''(x) + y(x) = 0$;

(3) $y''y = 1 + (y')^2$, resp. $y''(x)y(x) = 1 + (y'(x))^2$;

(4) $y' = \frac{y^2}{1+x^2}$, resp. $y'(x) = \frac{(y(x))^2}{1+x^2}$;

(5) $y' + \frac{y}{x} = x^2$, resp. $y'(x) + \frac{y(x)}{x} = x^2$.

Tyto rovnice jsou poměrně různorodé, minimálně jedno však mají všechny společné, a sice fakt, že hledanou funkcí je funkce jediné proměnné – takové rovnice nazýváme *obyčejné diferenciální rovnice*. Lze si ovšem představit i rovnice, ve kterých vystupují funkce více proměnných; pokud v nějaké takové rovnici vystupuje kromě funkce samotné také nějaká její parciální derivace (viz dále), pak hovoříme o *parciální diferenciální rovnici* (PDR). Není asi překvapující, že PDR jsou v nějakém smyslu komplikovanější než ODR, a dává tedy smysl začít studium diferenciálních rovnic právě těmi obyčejnými.

V této kapitole se obyčejné diferenciální rovnice naučíme klasifikovat a některé typy se naučíme řešit. Hned na začátku tedy dává smysl se ptát, co to znamená diferenciální rovnici vyřešit; zjednodušená odpověď je, že to znamená najít (všechna) řešení. A co je to řešení diferenciální rovnice? Jak už bylo řečeno, půjde vždy o nějakou funkci, a to konkrétně takovou, která splňuje danou rovnici po dosazení libovolného $x$ z jistého intervalu $I$; hovoříme pak o řešení rovnice na tomto intervalu $I$. K pojmu řešení se ještě vrátíme, nečekejte ovšem, že by vás podrobnější výklad o tomto pojmu nějak zvlášť překvapil: intuitivně je to jasné.

Příkladem řešení rovnice (2) našeho seznamu je třeba funkce $y(x) = \sin x$ na $\mathbb{R}$. Skutečně, dosadíme-li do rovnice $\sin x$ za $y$ a (jak je to nutné) $(\sin x)'' = -\sin x$ za $y''$, dostaneme

$$-\sin x + \sin x = 0,$$

což skutečně platí pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ – jde tedy opravdu o řešení na $\mathbb{R}$. Podobně ovšem můžete ověřit, že řešením téže rovnice je také $y(x) = \cos x$ nebo třeba $y(x) = -\sin x + 17 \cos x$.

**2.1 Příklad.** Jedna z nejjednodušších rovnic, jejíž jedno netriviální řešení každý zná, je

$$y' = y. \tag{2.1}$$

Rovnice nám říká, že hledaná funkce $y$ je rovna svojí derivaci; naším cílem může být nějakou takovou funkci najít (v ideálním případě pak všechny takové).

Můžeme si všimnout, že jedna funkce splňující tuto podmínku je konstantní nulová funkce: Dosazením konstantní nuly dostáváme $(0)' = 0$, což skutečně platí, neboť derivace konstantní funkce je nula. Toto řešení však jen obtížně prodáme jako „netriviální“. Je zvykem používat v tomto případě termín *stacionární řešení* – tak budeme označovat libovolné konstantní řešení diferenciální rovnice.[1]

Jiné řešení – a zajímavější – řešení naší rovnice je funkce $y(x) = e^x$ na $\mathbb{R}$. Opravdu, dosadíme-li za $y$ exponenciálu, dostaneme

$$(e^x)' = e^x,$$

což, jak dobře víme, skutečně platí pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Další možností je třeba $y(x) = -13e^x$. Je vlastně vidět, že pro libovolnou konstantu $C \in \mathbb{R}$ (třeba pro 0, 1 nebo $-13$) je funkce

$$y(x) = Ce^x \tag{2.2}$$

řešením naší rovnice. (Později uvidíme, že tohoto tvaru jsou ve skutečnosti všechna řešení (2.1).)

Vidíme, že řešení existuje nekonečně mnoho (pro každé $C \in \mathbb{R}$ jedno řešení definované na $\mathbb{R}$). Zadání úlohy je ale možné upřesnit udáním dalších požadavků na hledané řešení. Standardním způsobem je zadat tak zvanou *počáteční podmínku*, tj. požadavek typu

$$y(x_0) = y_0.$$

Hledáme pak takové řešení rovnice (2.1), které má hodnotu v bodě $x_0$ rovnou $y_0$. Toho lze obvykle dosáhnout dosazením počáteční podmínky do obecného tvaru řešení, v našem případě tedy do (2.2) dosadíme $x_0$ za $x$ a $y_0$ za $y$; obdržíme rovnost čísel (neboť zúčastněné funkce byly vyhodnoceny v bodě $x_0$) ve které ovšem nadále figuruje parametr $C$. Toto $C$ tedy interpretujeme jako neznámou v obyčejné číselné rovnici a vypočítáme ho. Tím dostaneme už konkrétní řešení naší rovnice, a to takové, které splňuje počáteční podmínku $y(x_0) = y_0$.

Aby to bylo jasnější, podívejme se na příklad s konkrétními čísly: Uvažujme třeba počáteční podmínku

$$y(1) = 2; \tag{2.3}$$

hledáme tedy takovou konstantu $C$, že jí příslušné řešení $y(x) = Ce^x$ má v bodě $x = 1$ hodnotu $y = 2$. To jest, řešíme číselnou rovnici s neznámou $C$:

$$y(1) = C \cdot e^1, \quad \text{to jest, podle (2.3)}, \quad 2 = C \cdot e.$$

Vidíme tedy, že $C = \frac{2}{e}$, a řešení splňující počáteční podmínku (2.3) je tedy

$$y(x) = \frac{2}{e} \cdot e^x. \qquad \triangle$$

**2.2 Poznámka** (Co tedy můžeme popsat pomocí diferenciálních rovnic?)**.** Velmi často se jedná o vývoj hodnoty nějaké veličiny (třeba velikosti populace nebo ceny nějakého zboží) v závislosti na čase. Zde

[1] U některých rovnice nemusí samozřejmě existovat žádné stacionární řešení; v jiných případech jich naopak může být i nekonečně mnoho.

samozřejmě onu veličinu interpretujeme jako závisle proměnnou, zatímco nezávisle proměnná je čas; hovoříme tedy o funkci. Jsme-li tedy postaveni před otázku, jak se v budoucnu bude vyvíjet jistá populace, dává smysl hledat *funkci*, která udává velikost populace v daném čase.

V praxi pak řešení takové úlohy vypadá tak, že nejprve najdeme rovnici, která podle našeho názoru odráží zákony, kterými se velikost studované veličiny řídí, a pak tuto rovnici řešíme. Obvykle tímto způsobem dostaneme nějakou diferenciální rovnici.

Například při studiu velikosti populace můžeme vycházet z celkem smysluplného předpokladu, že čím větší populace, tím rychlejší rozmnožování. To jest, rychlost změny (růstu) populace je přímo úměrná velikosti této populace. Označíme-li tuto velikost v čase $t$ symbolem $y(t)$, předchozí věta se dá přeložit takto:

$$y = a \cdot y, \qquad \text{resp.} \qquad y'(t) = a \cdot y(t),$$

kde $a \in \mathbb{R}$ je parametr související s tím, jak rychle se studovaný druh rozmnožuje (ten musíme určit případ od případu). Tento model populačního růstu tedy v řeči matematiky vyjadřuje nám intuitivně zřejmý fakt, že čím větší populace, tím větší je potenciál pro rozmnožování, a tedy rychlost růstu této populace.

Uvedený populační model (tzv. Malthusův populační model) jistě má svá omezení; jeho řešením jsou funkce tvaru

$$y(x) = Ce^{ax},$$

kde $C \in \mathbb{R}$ je konstanta (podobně jako v příklady výše), která v tomto případě souvisí s „počáteční velikostí“ naší populace (tj. s velikostí populace v nějakém momentě, kdy známe její velikost, a od nějž dál nás zajímá budoucí vývoj). Vidíme, že velikost populace s časem roste exponenciálně (pokud $a > 0$), což patrně nemůže pokračovat do nekonečna, neboť ve všech známých praktických situacích máme pro tuto populaci jen omezené množství zdrojů (energie, prostor...). Toto omezení bere v úvahu tak zvaný Logistický populační model (k němu se ještě dostaneme v textu níže). Lze tedy očekávat, že náš model bude reálnou situaci popisovat relativně dobře v krátkodobém horizontu, ale v horizontu dlouhodobějším se bude více a více odchylovat od reality.

Hledání nejvhodnějšího modelu však často není otázka pro matematika; naším úkolem je řešit danou rovnici (model). Do jaké míry tato rovnice souvisí s realitou se řeší v příslušných vědních oborech; asi ve všech případech přitom platí, že model představuje jen nějakou aproximaci skutečnosti; odráží jen některé její aspekty, a to ne stoprocentně přesně. Obvykle však lze najít takový model, který dostatečně přesně (v závislosti na kontextu) danou situaci popisuje.

Za zmínku stojí, že libovolná populace sestává z celočíselného počtu jedinců, a je tedy striktně vzato nesmysl ji popisovat pomocí funkce jako exponenciála, která může nabývat neceločíselných hodnot. Ve většině případů je ale populace tak velká, že tato nepřesnost může být zanedbána.[2]

**2.3 Poznámka** (Proč řešit DR?)**.** Můžeme se nyní ptát, proč bychom měli řešit diferenciální rovnici místo toho, abychom prostě rovnou popsali studovanou veličinu funkcí (třeba vývoj velikosti populace můžeme popsat funkcí, jejíž proměnná je čas).

Odpověď na tuto otázku je v samotné povaze přírodních zákonů. Ty totiž většinou fungují tak, že jsme schopni popisovat které veličiny a krátkodobé změny těchto veličin jsou si úměrné, ale neumíme a priori popsat chování těchto veličin v dlouhodobějším časovém rámci.[3]

Vrátíme-li se k našemu příkladu s populací, můžeme si uvědomit, že v nejjednodušším případě (kdy zanedbáváme většinu reálných vlivů na velikost populace působících) je „rychlost růstu“ této populace

[2]Třeba u zmíněného Malthusova populačního modelu není problém v tom, že dává i neceločíselné počty jedinců, ale v tom, že předpovídá neomezený růst: nepřesnost plynoucí z tohoto faktu je (alespoň pro dostatečně velké populace, kde nám například stačí přesnost na stovky jedinců) mnohem důležitější.

[3]Toto platí i v jiných případech, kdy naší proměnnou není čas, nýbrž například prostor, a my popisujeme třeba silové pole – třeba to, jaká síla působí na nabitou částici v daném bodě prostoru.

přímo úměrná její velikosti. Tato jednoduchá úvaha tedy vede na diferenciální rovnici

$$P'(t) = C \cdot P(t),$$

kde $P(t)$ je velikost populace v čase $t$ a $P'(t)$ je tím pádem rychlost růstu (časová změna) této populace (a $C$ je konstanta související např. s rychlostí rozmnožování). Tento jednoduchý vztah je intuitivní; a priori z něj ovšem není jasné, jak přesně vypadá hodnota funkce $P$ v libovolném čase $t$.

Kdyby bylo jednoduché napsat rovnou předpis pro funkci, kterou se daná veličina řídí, velká část matematiky by vůbec nebyla potřeba. Třeba v předchozím příkladě s růstem populace je nám intuitivně jasné, že čím větší populace, tím rychlejší její růst, a tedy rychlost růstu se bude zvětšovat. Už ovšem vůbec není jasné, půjde-li o růst exponenciální (jak tomu skutečně je), nebo například kvadratický (kvadratická funkce přece také „roste čím dál tím rychleji“).

Obvykle se tedy nacházíme v situaci, kdy jsme schopni relativně dobře popsat *krátkodobé nebo lokální* chování našich veličin a chceme si udělat co nejpřesnější představu o jejich chování *dlouhodobém nebo globálním*.

Dáme-li dohromady dostatečný počet krátkých časových intervalů (o nichž podle předpokladu víme dost), dostaneme interval dlouhý. Tato představa připomíná ideu určitého integrálu: jsme schopni sečíst (zintegrovat) spoustu uzoučkých sloupečků pod grafem funkce. Z důvodu této analogie (a také z důvodu způsobu řešení, který obvykle zahrnuje integraci) se někdy místo „řešit rovnici“ říká „integrovat rovnici“. Informaci o dlouhodobém chování studované veličiny poskládáme (zintegrujeme) z infinitesimálních kousků.

### 2.1.1 Uhlíková metoda datování

Než se podíváme na složitější diferenciální rovnice a na jejich klasifikaci, pojďme se podívat na jeden klasický praktický příklad, jímž je uhlíková metoda datování. To je v archeologii a příbuzných oborech standardní metoda sloužící k odhadům stáří fosilních (a jiných) nálezů.

Uhlíková metoda datování je založena na skutečnosti, že v našem prostředí se přirozeně vyskytují (kromě jiných) následující dva izotopy uhlíku, a to $^{12}C$ a $^{14}C$, přičemž první z nich, $^{12}C$, je stabilní[4] a představuje drtivou většinu uhlíku v přírodě. Druhý izotop, $^{14}C$, je mírně radioaktivní, tj. rozpadá se na nižší izotopy dostatečně rychle na to, aby to bylo měřitelné. Radioaktivní uhlík $^{14}C$ vzniká v atmosféře působením kosmických záření z dusíku. Živé organismy tedy skrze proces dýchání do sebe nasávají $^{14}C$ (vázaný v části oxidu uhličitého ve vzduchu), a tento uhlík zůstává v jejich tělech i po jejich smrti; od toho momentu uhlík $^{14}C$ (nahromaděný například v kostech apod.) podléhá rozpadu. Ve fosilních nálezech kostí našich předků je tedy méně $^{14}C$ než v našich vlastních. A protože $^{14}C$ ubývá nám známou rychlostí, jsme schopni právě z množství zbývajícího $^{14}C$ odhadnout stáří nálezu.

## 2.2 Různé typy diferenciálních rovnic

Následuje (neúplný) seznam různých členění rovnic:

- *Obyčejné* diferenciální rovnice (neznámou je funkce jedné proměnné) nebo *parciální* diferenciální rovnice (neznámou je funkce více proměnných);

- Členění podle *řádu rovnice*: řád rovnice je řád nejvyšší derivace, která se v rovnici vyskytuje. Rovnice (1), (4) a (5) v úvodu této kapitoly jsou prvního řádu, zbylé dvě jsou druhého řádu.

[4] Tj. téměř nedochází ke štěpení jeho jader, a jeho množství je v čase – i v řádu miliard let – takřka konstantní.

- *Lineární* rovnice nebo *nelineární* rovnice: Lineárním rovnicím, které jsou ovšem dosti speciální, věnujeme samostatný oddíl; v něm je také podrobně vysvětleno, o co přesně se jedná. Nepřesně řečeno se jedná o rovnice, které „se chovají lineárně vzhledem k řešením“, takže řešení tvoří nějaký lineární (vektorový) prostor. Nelineární rovnice jsou pak všechny rovnice, které nejsou lineární.

- Existují další speciální podkategorie obyčejných diferenciálních rovnic. My se zaměříme zejména na tzv. *autonomní* diferenciální rovnice a obecněji na rovnice *se separovanými proměnnými*; existuje však řada dalších speciálních případů s příslušnými metodami řešení. Ještě jeden typ rovnic jsou rovnice, které se někdy nazývají *triviální*; jejich řešení není nic jiného než hledání primitivní funkce (tj. neurčitý integrál), a vlastně už je tedy známe z druhého semestru.

Kromě toho se můžete setkat s úlohami s počáteční podmínkou a bez ní (toto „dělení“ však nesouvisí ani tak s typem rovnice, jako spíše s požadavky zadávajícího).

Dříve než podrobněji vysvětlíme některé základní pojmy a výsledky obecné teorie diferenciálních rovnic (a také některé metody řešení), podívejme se na dva relativně jednoduché případy:[5]

(i) *triviální* DR jsou tvaru $y' = h(x)$; třeba $y' = 2x$ (řešením je $y(x) = x^2$);

(ii) *autonomní* DR jsou tvaru $y' = g(y)$; třeba rovnice (1) z Úvodu.

**Triviální DR** jsou rovnice tvaru

$$y' = h(x), \qquad \text{resp.} \qquad y'(x) = h(x). \tag{2.4}$$

Pravá strana této rovnice tedy závisí pouze na $x$, explicitně nezávisí na $y$.

Hledat funkci $y$ takovou, že platí $y'(x) = h(x)$ neznamená nic jiného než hledat primitivní funkci k $h$. Skutečně, nechť

$$\int h(x)\, dx \stackrel{c}{=} H(x).$$

To je ovšem jen jiný zápis pro $H'(x) = h(x)$, tj. jde jen o jiný způsob jak zapsat, že $H$ je řešení rovnice (2.4). Libovolná primitivní funkce k $h$ je tedy řešením.

Jsme přitom zvyklí, že primitivní funkci hledáme (tj. počítáme neurčitý integrál) vždy na nějakém (otevřeném) intervalu; to je v souladu s tím, co se dozvíme o řešení diferenciální rovnice: vždy totiž musíme udat, na jakém intervalu se o řešení jedná, a tento interval bude vždy otevřený. Vylučujeme tedy případy, kdy by v definičním oboru řešení „byla díra“ (vadí nám i jediný „chybějící bod“).

Připomeňme si nyní důsledek Základní věty kalkulu, nám již známý z druhého semestru.

*Je-li $f$ spojitá na $(a, b)$, pak $f$ má na $(a, b)$ primitivní funkci. Je-li $x_0 \in (a, b)$ libovolný bod, pak příkladem primitivní funkce k $f$ na $(a, b)$ je*

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(\tilde{x})d\tilde{x}.$$

Připomeňme si také roli proměnné: v uvedeném vyjádření funkce $F(x)$ proměnná $x$ nevystupuje uvnitř integrálu, nýbrž jakožto horní mez tohoto integrálu. Hlavní věc, ve které se uvedené tvrzení od samotné Základní věty kalkulu (tak, jak jsme si ji zformulovali v druhém semestru) spočívá v tom, že zde máme místo uzavřeného intervalu interval otevřený. Tvrzení platí i pro polouzavřené intervaly, to nás ovšem momentálně nezajímá, protože diferenciální rovnice budeme řešit pouze na intervalech otevřených.

Z uvedeného tvrzení snadno dostaneme následující větu.

[5] Všechny případné nejasnosti, například ohledně pojmů jako řešení rovnice, by se měly vyjasnit níže v oddílu o obecné teorii DR.

**2.4 Věta.** *Nechť $f$ je spojitá na intervalu $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ $(a,b \in \mathbb{R}^*)$, $x_0 \in (a,b)$. Potom úloha s počáteční podmínkou*

$$y' = f(x), \quad y(x_0) = y_0$$

*má na intervalu $(a,b)$ řešení*

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tilde{x}) d\tilde{x}.$$

*Důkaz.* Podle Základní věty kalkulu platí

$$\frac{d}{dx}\Big(y_0 + \int_{x_0}^{x} f\Big) = f.$$

Označíme-li tedy

$$F(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f,$$

pak $F'(x) = f(x)$ pro všechna $x \in (a,b)$, tj. $F$ splňuje danou rovnici. Podle definice (určitý integrál přes degenerovaný interval $[x_0, x_0]$ je nulový) navíc platí, že $\int_{x_0}^{x_0} f = 0$, a tedy $F(x_0) = y_0 + 0$. □

**2.5 Příklad.** Jaká je rovnice křivky se sklonem

$$x + 10 \sin x,$$

která prochází bodem $(\pi, 0) \in \mathbb{R}^2$?

*Řešení.* Úloha je naschvál vyjádřena poněkud enigmaticky. Ve skutečnosti nejde o nic jiného než o řešení rovnice $y' = x + 10 \sin x$, v druhé části úlohy navíc s počáteční podmínkou $y(\pi) = 0$. (Graf řešení $y$ má procházet bodem $(\pi, 0)$, což znamená přesně to samé, jako že hodnota tohoto řešení v bodě $\pi$ je 0, tj. $y(\pi) = 0$.)

Výpočet lze provést úplně jednoduše: protože se jedná o triviální diferenciální rovnici (tj. pravá strana nezávisí na $y$), stačí prostě najít primitivní funkci k $x + 10 \sin x$ a ta bude hledaným řešením. (Obecné řešení se z ní stane, když ji obohatíme o integrační konstantu, která může nabývat jakékoliv hodnoty.) Vypočítáme tedy neurčitý integrál:

$$\int (x + 10 \sin x)\, dx \stackrel{c}{=} \frac{x^2}{2} - 10 \cos x,$$

tj. obecné řešení je tvaru

$$y(x) = \frac{x^2}{2} - 10 \cos x + C, \qquad \text{kde } C \in \mathbb{R}.$$

Nyní můžeme zohlednit počáteční podmínku; má platit:

$$0 = y(\pi) = \frac{\pi^2}{2} - 10 \cos \pi + C = \frac{\pi^2}{2} + 10 + C,$$

takže $C = -\frac{\pi^2}{2} - 10$ a hledané řešení splňující počáteční podmínku $y(\pi) = 0$ je tedy

$$y(x) = \frac{x^2}{2} - 10 \cos x - \frac{\pi^2}{2} - 10. \qquad \triangle$$

*Alternativní řešení* úlohy s počáteční podmínkou spočívá v přímé aplikaci Základní věty kalkulu, respektive věty výše. Podle této věty platí, že hledané řešení je

$$\begin{aligned} y(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tilde{x}) d\tilde{x} = 0 + \int_{\pi}^{x} \big(\tilde{x} + 10 \sin(\tilde{x})\big) d\tilde{x} \\ &= \Big[\frac{\tilde{x}^2}{2} - 10 \cos(\tilde{x})\Big]_{\pi}^{x} = \frac{x^2}{2} - 10 \cos x - \frac{\pi^2}{2} - 10. \end{aligned} \qquad \triangle$$

**Autonomní DR** jsou rovnice tvaru

$$y' = g(y), \qquad \text{resp.} \qquad y'(x) = g(y(x)). \tag{2.5}$$

Postup při hledání řešení je přímočarý: Stačí rovnici vydělit její pravou stranou a pak (s pomocí věty o substituci, kterou ovšem obvykle ani nezmiňujeme) spočítat integrál na levé straně: rovnici

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = 1 \quad \text{integrovat podle } x\text{:} \quad \int \frac{y'(x)\,\mathrm{d}x}{g(y(x))} = \int 1\,\mathrm{d}x.$$

Na vzniklý integrál použijeme substituci $y(x) = y$, $y'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}y$,[6] čímž dostaneme

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = x + C, \quad \text{kde } C \in \mathbb{R} \text{ je integrační konstanta.}$$

Uvedený postup je obecný a musíme si dát pozor na jedinou věc: *nulové body funkce* $g$; ty totiž způsobí, že dělení rovnice funkcí $g(y)$ není ekvivalentní úprava. Tento problém lze obejít tak, že nulové body funkce $g$, které odpovídají stacionárním řešením rovnice, vyšetříme zvlášť. V zásadě tak jde především o to, jestli umíme vypočítat integrál $\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)}$.

Příjemnou vlastností autonomních rovnic je také to, že jsme často schopni získat celkem dobrou představu o průbězích řešení, aniž bychom pro ně znali explicitní vyjádření; jsme schopni zjistit poměrně dost i o řešeních rovnic, která explicitně spočíst neumíme (nebo to dokonce nejde). Takovým metodám budeme říkat *kvalitativní řešení autonomních rovnic* a podíváme se na ně později (viz 2.6.2). Nyní uvádím jeden příklad autonomní rovnice.

**2.6 Příklad** (Logistický populační model)**.** Následující rovnice odpovídá takzvanému Logistickému populačnímu modelu (viz též Poznámku M výše):

$$y' = y - \frac{y^2}{10}.$$

Pro jednoduchost jsou zde zvoleny konkrétní konstanty, obecná podoba Logistického populačního modelu je $y' = ay - by^2$ (máme tedy $a = 1$ a $b = \frac{1}{10}$), nebo spíše $p' = ap - bp^2$ (resp. $p'(t) = ap(t) - b(p(t))^2$), kde neznámá $p$ je funkce popisující závislost velikosti populace na čase.

Vidíme, že na rozdíl od Malthusova populačního modelu, který předpovídá neomezený exponenciální růst velikosti populace, v tomto případě máme dvě stacionární řešení:

$$y' = y - \frac{y^2}{10} = y\Big(1 - \frac{1}{10}y\Big),$$

takže vidíme, že stacionární řešení jsou $y \equiv 0$ (nulová populace tedy zůstane nulová navždy) a $y \equiv 10$ (stabilní nenulová velikost populace).

Všimněme si mimochodem, že vzhledem k naší interpretaci zkoumané funkce (jako velikosti jisté populace) nás nezajímají řešení se zápornými hodnotami. Je zde ovšem také otázka smysluplnosti výsledku: V reálné situaci je velikost populace vždy celé číslo a zde připouštíme i necelé hodnoty funkce $y$. Je tedy zřejmé, že se jedná o pouhou aproximaci. Tento problém přestane být tak palčivý, interpretujeme-li $y$ například jako velikost populace v milionech. To, že $y \equiv 10$ je (stacionární) řešení rovnice, nám potom říká, že populace o $10^7$ jedincích je stabilní.

[6] Novou integrační proměnnou značíme opět $y$, což je sice určitá kolize značení, k nedorozumění ale nevede; více viz Oddíl 2.5.

Zkusme nyní tuto rovnici vyřešit. Předpokládejme, že $y \notin \{0, 10\}$; pak můžeme rovnici vydělit její pravou stranou.[7] Dostaneme:

$$\frac{y'}{y - \frac{y^2}{10}} = 1,$$

odkud integrací obou stran rovnice podle $x$ (vzpomeňte, že levá $y = y(x)$ je funkce $x$) dostáváme rovnici

$$\int \frac{y'(x)}{y(x) - \frac{y(x)^2}{10}} \,\mathrm{d}x = \int 1 \,\mathrm{d}x.$$

Integrál vpravo je triviální, výsledek je $x + C_2$, kde $C_2$ je integrační konstanta; počítejme tedy integrál vlevo: pomocí substituce $y(x) = t$ (odkud $y'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$) a metody parciálních zlomků máme

$$\int \frac{y'(x)\,\mathrm{d}x}{y(x) - \frac{y(x)^2}{10}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t - \frac{t^2}{10}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} - \int \frac{\mathrm{d}t}{t-10} = \ln\left|\frac{y(x)}{y(x)-10}\right| + C_1,$$

kde $C_1 \in \mathbb{R}$ je integrační konstanta.

Zpět k naší rovnici: dostali jsme

$$\ln\left|\frac{y(x)}{y(x)-10}\right| + C_1 = x + C_2,$$

takže (označíme-li $C := C_2 - C_1$)

$$\left|\frac{y(x)}{y(x)-10}\right| = e^{x+C}.$$

Protože se jedná o populační model, můžeme uvažovat pouze kladné hodnoty $y$, situaci tedy rozdělíme na pouhé dva případy:

(a) Pro $y \in (0, 10)$ je zlomek uvnitř absolutní hodnoty záporný, takže dostáváme rovnici

$$-\frac{y(x)}{y(x)-10} = e^{x+C}.$$

(b) Pro $y \in (10, \infty)$ je zlomek uvnitř absolutní hodnoty kladný, takže dostáváme rovnici

$$\frac{y(x)}{y(x)-10} = e^{x+C}.$$

Oba případy naráz můžeme zapsat pomocí symbolu $\pm$ takto:

$$\frac{y(x)}{y(x)-10} = \pm e^{x+C},$$

odkud už snadno vyjádříme, že

$$y(x) = \frac{\pm 10 \cdot e^{x+C}}{1 \pm e^{x+C}},$$

kde platí buďto v obou případech minus nebo v obou případech plus. Všimněte si, že bez ohledu na volbu znaménka (a bez ohledu na volbu $C \in \mathbb{R}$) je zřejmé, že $\lim_{x\to\infty} y(x) = 10$. △ △

[7] Pravá strana je za uvedeného předpokladu nenulová.

**Separované proměnné:** Zmínili jsme dva z nejjednodušších typů diferenciálních rovnic: rovnice *triviální* jsou tvaru $y' = h(x)$ a rovnice *autonomní* jsou tvaru $y' = g(y)$. Existuje společné zobecnění obou těchto typů rovnic, a to tzv. *rovnice se separovanými proměnnými*, které jsou tvaru

$$y' = h(x)g(y), \quad \text{resp. tvaru} \quad y'(x) = h(x)g(y(x)).$$

Je jasné, že jde skutečně o společné zobecnění. Skutečně, libovolná triviální rovnice je ve skutečnosti rovnice se separovanými proměnnými pokud definujeme $g \equiv 1$; pak $h(x) = h(x) \cdot 1 = h(x)g(y)$, takže $y' = h(x)$ je ekvivalentní $y' = h(x)g(y)$. Podobně libovolnou autonomní rovnici lze chápat jako rovnici se separovanými proměnnými, položíme-li $h \equiv 1$; pak $y' = g(y)$ je ekvivalentní $y' = h(x)g(y)$ a opět jde o rovnici se separovanými proměnnými.

Vzhledem k tomu, že třída rovnic se separovanými proměnnými zahrnuje všechny triviální a všechny autonomní rovnice, lze očekávat, že řešení takových rovnic bude náročnější, než řešení každého z obou speciálních typů. Tak tomu skutečně je, nejde však o nepřekonatelný rozdíl v obtížnosti: i pro rovnice se separovanými proměnnými existuje algoritmický (a vcelku přímočarý) postup hledání (všech) řešení.

Než se budeme více zabývat rovnicemi tohoto tvaru, hodí se probrat něco málo obecné teorie DR , k čemuž se ovšem hodí také některé základní poznatky o funkcích více proměnných. Začneme tím druhým.

## 2.3 Vsuvka o funkcích dvou a více proměnných

**Úvod:** Formálně vzato není velký rozdíl mezi funkcí jediné proměnné a funkcí více proměnných. V obou případech jde o to, že funkce přiřazuje jednoznačnou hodnotu každému prvku svého definičního oboru; v jednom případě je tento definiční obor podmnožinou $\mathbb{R}$ (máme-li funkci jedné proměnné) a v druhém případě je podmnožinou $\mathbb{R}^n$ (jde-li o funkci $n$ proměnných). Například body v rovině jsou tvaru $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, jde tedy o uspořádané dvojice čísel (souřadnic) a každou souřadnici chápeme jako jednu nezávisle proměnnou.

Některé funkce více proměnných jsou každému dobře známy. Třeba plocha $P$ obdélníka o stranách délek $x$ a $y$ je dána předpisem

$$P(x, y) = x \cdot y, \quad \text{kde } x > 0 \text{ a } y > 0.$$

Je jasné, že tato plocha záleží na obou rozměrech (které jsou kladné), a nejedná se tedy o funkci jedné proměnné, nýbrž dvou.

Povrch $S$ (nedegenerovaného) kvádru o stranách $x, y, z > 0$ je

$$S(x, y, z) = 2xy + 2yz + 2zx,$$

jde tedy o funkci tří proměnných. Definičním oborem této funkce je množina $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x > 0, y > 0, z > 0\} = (0, \infty) \times (0, \infty) \times (0, \infty)$.[8]

Dalším zajímavým příkladem může být funkce teploty v různých bodech daného trojrozměrného tělesa nebo třeba místnosti. Abychom jednoznačně určili bod v místnosti, potřebujeme tři souřadnice $x, y, z$; teplota je jejich funkcí a můžeme ji zapisovat třeba $T(x, y, z)$.

Narozdíl od funkce jedné proměnné, kterou jsme zvyklí ztotožňovat s jejím dobře představitelným grafem (který je podmnožinou roviny, a odpovídá mu tedy dvojrozměrný obrázek), u funkce tří proměnných

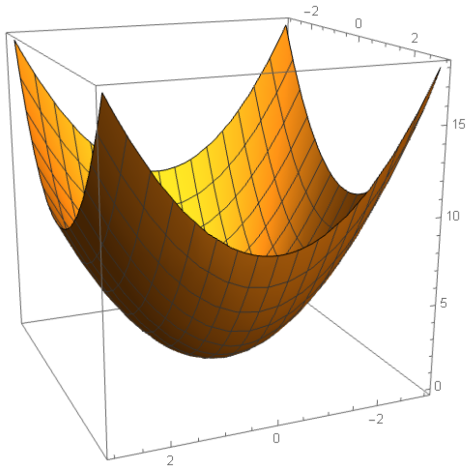
[8] Tento fakt plyne z naší interpretace, při níž $x, y, z$ jsou délky stran kvádru, a jsou to tedy kladná čísla. Ze samotného vzorce, který dává smysl i s nekladnými hodnotami $x, y, z$, toto omezení definičního oboru samozřejmě neplyne. Je to podobné jako u populačního modelu, kde jsme se nestarali o řešení se zápornými hodnotami (záporná velikost populace je stejně absurdní jako nekladná délka strany kvádru).

(jako je teplota) si už graf představit snadno neumíme, protože bychom k tomu potřebovali čtyřrozměrný obrázek. Jedna možnost je představovat si barvu: čím teplejší je vzduch v daném bodě místnosti, tím červenější si ho představujeme; pokud je teplota nízká představujeme si barvy v modré části spektra.[9]

Alespoň u funkcí dvou proměnných je však tvorba jednoduché představy stále v možnostech běžného smrtelníka: Zatímco graf funkce jedné proměnné může vypadat jako obrázek horizontu s nějakým pohořím, graf funkce dvou proměnných je celý povrch tohoto pohoří. Tedy dvěma proměnným („zeměpisné délce a zeměpisné šířce") umíme přiřadit hodnotu („nadmořskou výšku"). Nadmořská výška je tedy funkcí těchto dvou proměnných a samotný povrch krajiny je grafem této funkce.

**Přesněji:** Řekneme-li, že $f$ je funkce dvou proměnných, máme ovšem na mysli funkci dvou reálných proměnných, takže $f$ je definována na nějaké podmnožině $A \subseteq \mathbb{R}^2$ a má hodnoty v $\mathbb{R}$. Píšeme pak $f : A \to \mathbb{R}$ a hodnotu v bodě $(x, y) \in A$ značíme podle očekávání symbolem $f(x, y)$.

Jak vypadá třeba funkce $f(x, y) = 7$, si představíme snadno (konstantní funkce). Příliš těžká představa není ani pro funkci $f(x, y) = x^2 + y^2$; ta je samozřejmě definovaná na celém $\mathbb{R}^2$ (nic nám nebrání za $x, y$ dosadit libovolná reálná čísla). Graf této funkce omezené na čtverce $[-2, 2] \times [-2, 2] \subseteq \mathbb{R}^2$ zachycuje obrázek 2.1. Následující obrázek 2.2 zachycuje funkci $f(x, y) = x + \sin(x^2 + y^2)$ na množině $[-4, 4] \times [-4, 4]$.



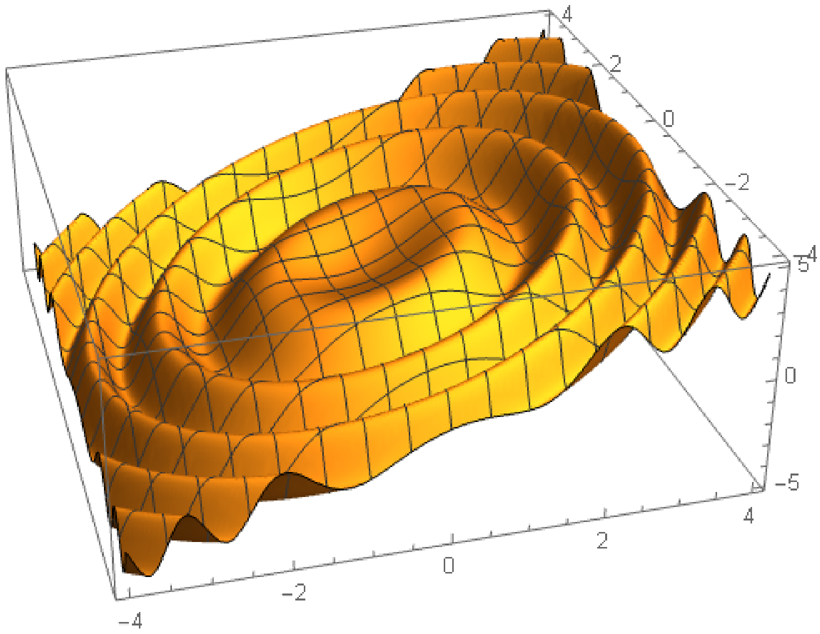
Obrázek 2.1: $x^2 + y^2$

Dalším, trochu složitějším, příkladem funkce dvou proměnných je třeba následující funkce:

$$f(x, y) = \log y \cdot \sin x + e^{y^2}. \tag{2.6}$$

Snadno si uvědomíme, že maximálním definičním oborem této funkce je $\mathbb{R} \times (0, \infty)$, tedy všechny body, které v $\mathbb{R}^2$ leží ostře nad osou $x$ (je totiž potřeba, aby $y > 0$, jinak nemá smysl $\log y$).

[9] Fyzici snad tuto konvenci překousnou; jsem si nicméně vědom toho, že ve skutečnosti má modré světlo větší energii než červené.




Obrázek 2.2: Část grafu funkce $f(x, y) = x + \sin(x^2 + y^2)$.

**Parciální derivace:** I funkce více proměnných lze derivovat, situace je však komplikovanější, a existuje více způsobů, jak pojem derivace zobecnit. Chápeme-li například nám známou derivaci jako směrnici tečny ke grafu funkce, pro funkce dvou proměnných je potřeba tuto představu změnit a brát v úvahu tečnou rovinu ke grafu funkce. (Graf sám, stejně jako tečná rovina v nějakém jeho bodě, je podmnožinou $\mathbb{R}^3$.) O sklonu roviny v $\mathbb{R}^3$ už ale nelze dát jednoduchou výpověď jediným číslem; je potřeba čísel dvou, a tedy nelze například hovořit o směrnici tečné roviny.

Nejsnáze pochopitelným souvisejícím konceptem je asi parciální derivace. Je-li $f$ funkce dvou proměnných jako výše a vrátíme-li se k naší představě jejího grafu jako reliéfu nějaké krajiny, pak si můžeme představit, že nějakým bodem $(a, b)$ na onom území vedeme řez v západo-východním směru (tedy ve směru osy $x$) a podíváme se na tento řez jako na funkci jedné proměnné. Derivováním této takzvané parciální funkce dostaneme parciální derivaci funkce $f$ v bodě $(a, b)$ ve směry osy $x$. Podobně dostaneme parciální derivaci ve směru $y$, pokud onen řez povedeme severo-jižním směrem.

**Přesněji:** Dosadíme-li do $f(x, y)$ za $y$ nějakou *pevnou* hodnotu $y_0$, obdržíme tak funkci jediné proměnné $x$, a to $g(x) = f(x, y_0)$, tzv. parciální funkci. Tu můžeme derivovat v jakémkoliv bodě $x_0$ takovém, že bod $(x_0, y_0)$ leží v definičním oboru funkce $f$, a tím způsobem definujeme *parciální derivaci funkce $f$ podle $x$ v bodě* $(x_0, y_0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) := g'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}.$$

Z výše uvedené definice $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ je vidět, že ve skutečnosti můžeme vynechat úvahy o parciální funkci $g$ a použít pouze výraz za poslední rovností. Analogicky můžeme (už bez parciální funkce) definovat *parciální derivaci funkce $f$ podle $y$ v bodě* $(x_0, y_0)$ takto:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) := \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}.$$

Pro parciální derivace existuje celá řada různých značení, z nichž některá se vůbec nepodobají těm, která budeme používat my. Pro nás budou běžná následující označení parciálních derivací

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} := \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

a analogicky pro derivaci podle $y$:

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} := \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Je snad jasné, že můžeme uvažovat i jiné proměnné a příslušné značení by fungovalo analogicky.

**Geometrický význam** parciálních derivací je intuitivně zřejmý: $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ popisuje rychlost růstu funkce v bodě $(x_0, y_0)$ ve směru osy $x$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ odpovídá růstu ve směru osy $y$. Je jasné, že tato dvě čísla už jednoznačně určují kandidáta na tečnou rovinu ke grafu funkce $f$ v bodě $(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \in \mathbb{R}^3$, a sice graf funkce $R$ dané předpisem

$$R(x, y) = f(x_0, y_0) + a(x - x_0) + b(y - y_0), \text{ kde } a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \text{ a } b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Jedná se tedy o rovinu s algebraickou rovnicí (tvaru $ax + by + cz = d$):

$$z - \underbrace{\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}}_{\text{konst.}} x - \underbrace{\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}}_{\text{konst.}} y = \underbrace{f(x_0, y_0) - \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} x_0 - \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} y_0}_{\text{Toto je také konstanta!}}$$

**Praktické počítání:** V praxi se parciální derivace vypočítá velmi snadno, umíme-li už derivovat funkce jedné proměnné (což umíme): stačí totiž ty proměnné, podle kterých zrovna nederivujeme (tedy všechny až na tu jednu, podle níž derivujeme), chápat jako konstanty – tím se de facto omezujeme na práci s parciální funkcí – a derivovat podle obvyklých vzorců.

Nejprve se podívejme na jednoduchou polynomiální funkci, jako třeba $f(x, y) = x^2 + y^2$ a spočtěme nejprve parciální derivaci podle $x$, pak podle $y$ (v prvním výpočtu tedy jako konstantu chápeme $y$, ve druhém $x$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2) = 2x + 0 = 2x; \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2) = 0 + 2y = 2y. \end{aligned}$$

O něco složitější příklad nám poskytne funkce $f(x, y)$ definovaná předpisem (2.6):

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(\log y \cdot \sin x + e^{y^2}) = \log y \cdot \cos x + 0; \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(\log y \cdot \sin x + e^{y^2}) = \frac{1}{y} \sin x + 2y e^{y^2}. \end{aligned}$$

**Spojitost, eukleidovská metrika na $\mathbb{R}^n$:** Připomeňme nejprve pojem spojitosti funkce jedné proměnné. Je-li $A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ a $a \in A$, pak *funkce $f$ je spojitá v bodě $a$*, jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in B(a, \delta): |f(x) - f(a)| < \varepsilon, \tag{2.7}$$

kde $B(a, \delta) = (a - \delta, a + \delta)$.

K tomu je potřeba dvou poznámek:

- V prvním semestru jsme spojitost $f$ v bodě $a$ definovali platností vztahu

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a),$$

  tj. „limita = hodnota“. Zároveň je ale snadné ukázat (a my jsme tak učinili), že tato definice je ekvivalentní výroku (2.7).

- Na první pohled konzistentnější zápis by obsahoval „$f(x) \in B(f(a), \varepsilon)$“ místo „$|f(x)-f(a)| < \varepsilon$“. Alternativně bychom mohli psát „$|x - a| < \delta$“ místo „$x \in B(a, \delta)$“; mixovat oba přístupy v jednom zápisu každopádně působí zvláštně. Tento „mixovaný“ způsob zápisu má ale drobnou výhodu v tom, že až definujeme $B(a, \delta) \subseteq \mathbb{R}^n$ pro $a \in \mathbb{R}^n$, bude výrok (2.7) definicí spojitosti funkce $n$ proměnných $f$ v bodě $a \in \mathbb{R}^n$.

Jak víme, intuitivně vzato spojitost znamená, že v bodech *blízkých $a$* jsou hodnoty blízké $f(a)$. Úplně stejně to bude fungovat i pro funkce více proměnných, tedy funkce definované na nějaké podmnožině $\mathbb{R}^n$, kde $n \geqslant 2$. Abychom to však byli schopni zformulovat, musíme umět přesně říci, co znamená být *blízko* bodu $a \in \mathbb{R}^n$. Musíme tedy definovat vzdálenost mezi libovolnými dvěma body v $\mathbb{R}^n$. To lze udělat mnoha různými způsoby, kanonická je však možnost použít takzvanou *eukleidovskou metriku*[10] *(vzdálenost)*, která je intuitivně jasná a počítá se de facto pomocí Pýthagorovy věty:

**2.7 Definice** (Eukleidovská norma a metrika)**.** Je-li $n \in \mathbb{N}$, definujeme *eukleidovskou normu* vektoru (bodu) $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ jako

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} = \left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Nyní definujeme *eukleidovskou vzdálenost* mezi body $x, y \in \mathbb{R}^n$ jako

$$\|x - y\|.$$

Pokud tedy $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, pak vzdálenost mezi $x$ a $y$ je

$$\begin{aligned} \|x - y\| &= \|(x_1 - y_1, x_2 - y_2, \ldots, x_n - y_n)\| \\ &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}. \end{aligned}$$

V jednodimenzionální teorii prvního semestru jsme definovali pojmy okolí a prstencové okolí bodu. Analogické pojmy můžeme definovat i ve vyšší dimenzi takto:

[10] *Metrika* je obecně způsob měření „vzdálenosti“; libovolná (abstraktní) množina, je-li vybavena metrikou, se pak stává *metrickým prostorem* – abstraktní strukturou, o které se více dozvíte ve 4. semestru. Důležitým postřehem je, že právě schopnost měřit vzdálenost je klíčová pro definice pojmů jako je limita a spojitost. Tyto pojmy a související teorii je tedy možné do značné míry budovat v abstraktních metrických prostorech a všechny takto získané výsledky se pak dají aplikovat v libovolném konkrétním případě, například v $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, či v jiných konkrétních prostorech, s nimiž se setkáme.

**2.8 Definice** ($n$-dimenzionální koule)**.** Nechť $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ a $\delta > 0$. Definujeme *otevřenou $n$-dimenzionální kouli* se středem $a$ a poloměrem $\delta$ jako

$$B(a,\delta) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| < \delta\}.$$

**2.9 Poznámka.**

- Kouli můžeme dle libosti nazývat také *okolím*, je však dobré mít na paměti, že pojem okolí může mít v některých kontextech (včetně kontextu teorie metrických prostorů) i obecnější význam. Chceme-li zobecnit také pojem *prstencového okolí* do vyšší dimenze, stačí definovat $P(a,\delta) = B(a,\delta) \setminus \{a\}$.

- Aby se výše definovaná „koule“ odlišila od jiných typů koule (definovaných pomocí jiné metriky), občas se pro upřesnění říká „$n$-dimenzionální *eukleidovská* koule“.

- Je také dobré si všimnout, že $B(a,\delta)$ se nazývá „koule“ v libovolné dimenzi, a to včetně dimenzí 1 a 2. Striktně vzato tedy otevřený interval v $\mathbb{R}$ je otevřená koule a totéž platí o kruhu bez hraniční kružnice v rovině. Tato terminologie je zcela přirozená[11] a je standardní v řadě matematických teorií a i když se jí nebudeme držet nijak křečovitě (interval budu nadále nazývat intervalem, kruh kruhem), je dobré o ní vědět.

Nyní jsme připraveni vyslovit definice spojitosti funkce více proměnných:

**2.10 Definice** (Spojitost funkce $n$ proměnných)**.** Nechť $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}^n$ a nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (tedy funkce $n$ proměnných). Řekneme, že *$f$ je spojitá v bodě $a$*, jestliže platí (2.7).

Všimněme si, že pro $n = 1$ jde o přesně stejnou definici jako výše. Význam symbolu $B(a,\delta)$, který se v definici vyskytuje, interpretujeme různě v závislosti na hodnotě $n$. Pro $n = 1$ má ten symbol právě ten význam, který jsme mu dávali už v 1. semestru. Pro $n > 1$ je definice $B(a,\delta)$ uvedena výše.

**2.11 Cvičení.** Rozmyslete si, jaká by byla správná definice limity funkce $n$ proměnných. (Stačí se podívat na definici limity pro $n = 1$ a adaptovat ji i pro vyšší dimenzi stejně, jak jsme to právě učinili s definicí spojitosti.)

**Jak poznat spojitou funkci $n$ proměnných:** Pro spojitost (i limity) funkcí více proměnných platí ty samé základní věty jako v případě $n = 1$, a to navíc se stejnými důkazy. Projdete-li si znovu teorii 1. semestru, snadno se o tom přesvědčíte. Platí tedy tvrzení jako:

- jednoznačnost limity,
- aritmetika spojitosti,
- složení spojitých je spojitá,[12]
- Heineho věta (příslušně upravená s posloupnostmi v $\mathbb{R}^n$),

i analogie složitějších tvrzení, jako je věta o derivaci složené funkce, Weierstrassova věta atd.

Také je jednoduché dokázat následující tvrzení:

[11] Otevřená koule je množina všech bodů, jejichž *vzdálenost* od daného středu je menší než daný poloměr. To je krásná a jednoduchá definice a byla by škoda ji omezovat pouze na $\mathbb{R}^3$.

[12] Upravená věta o spojitosti složené funkce může mít více podob. V našem případě budeme uvažovat následující verzi, v níž vnější funkce má jedinou proměnnou a pouze funkce vnitřní jich může mít více: *Nechť (vnitřní funkce) $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je spojitá v bodě $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in A$. Nechť (vnější funkce) $g : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá v bodě $f(a) \in \mathbb{R}$. Potom funkce ($n$-proměnných) $g \circ f$ je spojitá v bodě $a$.*

Důkaz této věty je snadné cvičení na $\varepsilon$-$\delta$ gymnastiku prvního semestru.

**2.12 Tvrzení.** *Nechť $h\colon I \to \mathbb{R}$ a $g\colon J \to \mathbb{R}$ jsou spojité funkce jedné proměnné (definované na nějakých podmnožinách $I, J \subseteq \mathbb{R}$). Potom funkce dvou proměnných $f_1\colon I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $f_2\colon \mathbb{R} \times J \to \mathbb{R}$ definované následujícími předpisy jsou spojité:*

$$f_1(x, y) = h(x), \qquad f_2(x, y) = g(y).$$

**2.13 Poznámka.**

- Všimněme si, že funkce $f_1 = f_1(x, y)$ netriviálním způsobem závisí pouze na proměnné $x$, funkce $f_2 = f_2(x, y)$ zase pouze na $y$. Jde tedy vlastně o „umělý způsob“, jak z funkce jedné proměnné (třeba $g = g(y)$) vyrobit funkci dvou proměnných ($f_2(x, y) = g(y)$). Utvoříme-li ale součin těchto dvou funkcí, dostaneme už novou funkci, která netriviálním způsobem závisí na každé z obou proměnných: například

$$f(x, y) = f_1(x, y) \cdot f_2(x, y) = h(x) \cdot g(y).$$

  Podle předchozího tvrzení jsou funkce $f_1$, $f_2$ spojité, a podle aritmetiky spojitosti (pro funkce více proměnných) je tedy spojitá i funkce $f = f(x, y)$, a to na množině $I \times J$, kde je definována.

- Je asi jasné, že podobně bychom mohli postupovat i v případě funkcí tří a více proměnných. Třeba funkce $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) := h(x_1)$ je spojitá atd.

- Tvrzení 2.12 je zformulováno jako implikace, platí však i implikace opačná, která má také snadný důkaz. (Například platí: pokud $f(x, y) = g(y)$ a $f$ je spojitá jako funkce dvou proměnných, pak $g$ je spojitá funkce jedné proměnné.)

**2.14 Příklad.** 1) Funkce $f_1(x, y) = yx + \sin(y)$ je spojitá, což plyne z výše uvedených faktů. Skutečně, funkce $(x, y) \mapsto x$, $(x, y) \mapsto y$ jsou spojité podle Tvrzení S, takže podle „aritmetiky spojitosti“ je spojitá i funkce, která vznikne jako jejich součin, $(x, y) \mapsto yx$. Tvrzení S dále implikuje spojitost funkce $(x, y) \mapsto \sin(y)$ a opětovným použitím „aritmetiky spojitosti“ (tentokrát pro součet) dostaneme spojitost funkce $(x, y) \mapsto yx + \sin(y)$, tj. funkce $f_1$.

2) Spojitá je také funkce

$$f_2(x, y) = \ln(\sin^2(x \cdot e^y) + 1) + \cos(\sqrt[3]{x} + y);$$

dokážeme to opět tím, že popíšeme „spojité atomy“ a postup jímž je z nich postupně utvořená (pomocí aritmetických operací a skládání). Nuže:

- Tvrzení S dává spojitost následujících předpisů chápaných jako funkce dvou proměnných $e^y$, $1$, $\sqrt[3]{x}$, $y$, $(x, y) \mapsto x$ apod.
- Aritmetika spojitosti dává spojitost funkcí $x \cdot e^y$ a $\sqrt[3]{x} + y$.
- Podle (upravené) věty o spojitosti[13] složené funkce jsou tedy spojité funkce $\sin^2(x \cdot e^y)$ a $\cos(\sqrt[3]{x} + y)$.
- Podle aritmetiky spojitosti je dále spojitá funkce $\sin^2(x \cdot e^y) + 1$.
- Věta o spojitosti složené funkce nyní implikuje spojitost funkce $\ln(\sin^2(x \cdot e^y) + 1)$.
- Konečně, aritmetika spojitosti dává spojitost funkce $f_2$.

Všimněte si, že funkce je definovaná ve všech bodech $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, je tedy spojitá na $\mathbb{R}^2$.

[13] viz poznámku pod čarou 12

3) Uvažujte třeba funkci
$$f_3(x,y) = e^{x^2+\sin(x\cdot y^2+\sqrt{y})}$$
a dokažte její spojitost pomocí podobného rekurzivního postupu, jaký jsme použili v předchozích případech. Použijte aritmetiku spojitosti, spojitost složené funkce a Tvrzení S. △

---

**2.15 Poznámka.** Je dobré si všimnout, že funkce $f_3$ z předchozího příkladu je definována na množině $\mathbb{R}\times[0,\infty)$ (musí být $y\geqslant 0$ kvůli přítomnosti $\sqrt{y}$, jiné omezení není). Co tedy znamená, když prohlásíme, že „$f_3$ je spojitá“? Obvykle se takovým konstatováním myslí, že funkce je spojitá ve všech bodech svého definičního oboru. Co ale znamená spojitost $f_3$ třeba v bodě $(0,0)$? Když se nad touto otázkou zamyslíte více, zjistíte, že spojitost $f_3$ v tomto bodě (ani v žádném jiném bodě osy $x$, která tvoří „hranici“[14] definičního oboru) neplatí.

Podíváme-li se na definici spojitosti funkce více proměnných, jak jsme ji uvedli výše, tedy na (2.7), v níž symbol $B(a,\delta)$ chápeme jako kouli v $\mathbb{R}^n$, můžeme si uvědomit, že spojitost funkce $f_3$ nikdy nemůže platit.[15] Proč je to tak? V (2.7) se tvrdí existence $\delta>0$ takového, že jistá nerovnost zahrnující $f(x)$ je splněna pro všechna $x\in B(a,\delta)$. V našem případě, kdy $a=(0,0)\in\mathbb{R}^2$, ale takové $\delta$ nenajdeme, neboť ať si vybereme sebemenší $\delta>0$, vždy budou v $B(a,\delta)=B((0,0),\delta)$ i nějaké body se zápornou druhou souřadnicí a v takových funkce $f_3$ není definována; ona nerovnost tedy nemůže být splněna – a požadovaný výrok tedy neplatí pro žádné $\delta>0$. Nabízí se tedy otázka, jestli lze definici spojitosti upravit takovým způsobem, aby mělo smysl se bavit i o spojitosti v hraničních bodech definičního oboru. Odpověď je kladná.

V teorii funkcí jedné proměnné, kterou jsme probírali v prvním semestru, jsme narazili na podobný problém: co například znamená spojitost funkce $x\mapsto\sqrt{x}$ v bodě 0? Vyřešili jsme tuto technickou potíž zavedením pojmu jednostranné spojitosti; v případě $\sqrt{x}$ jsme pak mohli konstatovat, že sice není v bodě 0 spojitá, je v něm ale spojitá zprava. Spojitost $\sqrt{x}$ na $[0,\infty)$ pak zahrnovala i tuto informaci.

Nyní jsme však ve složitější situaci, protože definiční obor funkce $f_3$ je „množina dimenze 2“, a je jasné, že do bodu $(0,0)$ můžeme uvnitř tohoto def. oboru doputovat v nekonečně mnoha různých směrech; těžko tedy přijdeme s přímou analogií pojmu jednostranné limity, který jsme s výhodou využili v případě dimenze 1.

Správnou odpovědí je tzv. *spojitost vzhledem k množině*:

**2.16 Definice** (Spojitost funkce více proměnných vzhledem k množině)**.** Nechť $n\in\mathbb{N}$, $D\subseteq\mathbb{R}^n$ a $f: D\to\mathbb{R}$ je funkce ($n$ proměnných). Nechť $A\subseteq\mathbb{R}^n$ je libovolná množina a $a\in\mathbb{R}^n$ je libovolný bod. Řekneme, že *funkce $f$ je v bodě $a$ spojitá vzhledem k množině $A$*, jestliže platí
$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in B(a,\delta)\cap A:\ |f(x)-f(a)|<\varepsilon.$$
Říkáme, že *f je spojitá*, je-li $f$ v každém bodě $x\in\mathbb{D}_f$ spojitá vzhledem k $\mathbb{D}_f$.

V některých případech tato definice pochopitelně dává triviální až absurdní výsledky, a to i pro funkce jediné proměnné:

Například platí, že $f(x)=\frac{1}{x}$ je spojitá v bodě 0 vzhledem k množině $[1,2]$. (Skutečně, zjistíte, že pro libovolné $\varepsilon>0$ stačí vzít $\delta=1$. Nevadí pak dokonce ani to, že $0\notin\mathbb{D}_f$.) Je to důsledkem toho, že – intuitivně vzato – bod 0 je daleko od množiny, vzhledem k níž testujeme spojitost v tom bodě.

Oblíbená Dirichletova funkce je spojitá ve všech racionálních bodech vzhledem k množině $\mathbb{Q}$. Je také spojitá ve všech iracionálních bodech vzhledem k množině $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. (Snadné cvičení.)

Podobně můžete ověřit, že libovolná funkce $f$ je spojitá v libovolném bodě $x\in\mathbb{D}_f$ vzhledem k množině $\{x\}$. Ani to není moc zajímavý výsledek.

Pokud ovšem budeme uvažovat pouze spojitost vzhledem k $\mathbb{D}_f$, dostaneme obvykle velmi rozumné výsledky, včetně vět jako aritmetika spojitosti, věta o spojitosti složené funkce, Heineho věta atd.

Funkce $f_3$ z Příkladu výše je podle této definice *spojitá*. (Tj. spojitá ve všech bodech z $\mathbb{D}_{f_3}$ vzhledem k $\mathbb{D}_{f_3}$.)

## 2.4 Základní pojmy a výsledky teorie ODR

Až dosud jsme uvažovali pouze nejjednodušší diferenciální rovnice, a sice rovnice se separovanými proměnnými (speciálně pak rovnice *triviální* a rovnice *autonomní*), tedy obecně rovnice tvaru
$$y' = h(x)\cdot g(y), \tag{2.8}$$

---

[14] Pojem *hranice množiny* jsme si ještě nedefinovali. Až ale probereme základy *teorie metrických prostorů*, budeme moci odstranit uvozovky, kterými jsem prozatím slovo „hranice“ opatřil.

[15] a to bez ohledu na to, jak přesně se funkce chová; podstatné je jen to, že jde o „hraniční bod“ definičního oboru.

kde $g, h$ jsou nějaké funkce (jedné proměnné). Všimněme si, že $f(x, y) = h(x)g(y)$ je příkladem funkce dvou proměnných $x, y$; nicméně i přes svobodu, kterou máme ve volbě funkcí $g, h$, ve tvaru součinu $h(x)g(y)$ se dají vyjádřit jen některé funkce dvou proměnných. Třeba už tak jednoduchá funkce jako $f(x, y) = x + y$ není v onom „součinovém tvaru“. Je tedy zřejmé, že rovnice

$$y' = f(x, y), \tag{2.9}$$

kde $f$ je nějaká funkce dvou proměnných, je ostře obecnější úloha, než rovnice se separovanými proměnnými (2.8).

Nejobecnější forma obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu je ale následující, v níž $F$ je nějaká funkce tří proměnných:

$$F(x, y, y') = 0. \tag{2.10}$$

Všimněme si, že tento tvar je opravdu obecnější: skutečně, libovolnou rovnici tvaru (2.9) můžeme vyjádřit také ve tvaru (2.10), a to pomocí funkce $F(x, y, y') = y' - f(x, y)$. Je hned vidět, že rovnice (2.9) a (2.10) jsou ekvivalentní.

Ale je dobré si uvědomit, že ne každá rovnice tvaru (2.10) se dá vyjádřit ve tvaru (2.9). Třeba s rovnicí

$$\sin(y')yx = 0$$

(která je tvaru (2.10)) bude velmi těžké pořízení, do snáze uchopitelného tvaru (2.9) se nám ji převést nepodaří. Vidíme, že podstata rozdílu mezi oběma tvary je, že ten méně obecný z nich je „rozřešený vzhledem k derivaci“, což je ve skutečnosti hlavní důvod, proč jsme schopni s rovnicí rozumně pracovat.

Úplně obecná obyčejná diferenciální rovnice $n$-tého řádu je potom tvaru (kde $F$ je funkce $n + 2$ proměnných)

$$F(x, y, y', y^{(2)}, \dots, y^{(n)}) = 0. \tag{2.11}$$

**2.17 Příklad** (Různé volby $F$)**.** Výše v podstatě tvrdíme, že libovolná obyčejná diferenciální rovnice se dá – při vhodné volbě funkce $F$ – napsat ve tvaru (2.11). Pojďme si to ilustrovat na několika konkrétních příkladech rovnic; budeme uvažovat pět diferenciálních rovnic, které jsme uvedli v samém úvodu tohoto textu: ke každé z nich udáme odpovídající funkci $F$.

Proměnné této funkce $F$ při tom naschvál označíme $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n+2}$,[16] abychom zdůraznili, že jde o funkci více proměnných ve zcela běžném smyslu. Teprve když za její proměnné dosadíme popořadě $x$, $y$, $y'$ atd. a položíme výsledek roven 0, dostaneme diferenciální rovnici.

V pravém sloupci následujícího seznamu je vždy diferenciální rovnice, kterou dostaneme dosazením $x$, $y$, $y'$ (případně i $y''$) do příslušné funkce $F$ z levého sloupce.

$$\begin{aligned}
F(x_1, x_2, x_3) &= x_3 - bx_2^2 - a & y' &= a + by^2;\\
F(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_4 + x_2 & y'' + y &= 0;\\
F(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_4x_2 - x_3^2 - 1 & y''y &= 1 + (y')^2;\\
F(x_1, x_2, x_3) &= x_3 - \frac{x_2^2}{1 + x_1^2} & y' &= \frac{y^2}{1 + x^2};\\
F(x_1, x_2, x_3) &= x_3 + \frac{x_2}{x_1} - x_1^2 & y' + \frac{y}{x} &= x^2.
\end{aligned}$$

△

Nejobecnější rovnice, kterou se seriózně zabýváme v této kapitole, je (2.9). Tím je vymezen předmět studia.[17] Přišla tedy ta správná chvíle řešení diferenciální rovnice definovat přesně, aby bylo opravdu naprosto jasné, o čem se bavíme, a co je naším cílem. (Pojem řešení definujeme pro nejobecnější možnou rovnici, protože nás to nestojí nic navíc.)

---

[16] místo $x, y, y', \dots, y^{(n)}$

[17] S výjimkou oddílu o lineárních diferenciálních rovnicích vyššího řádu se budeme pohybovat výhradně v tomto rámci – tedy v rámci rovnic prvního řádu rozřešených vzhledem k $y'$ (tj. rovnice (2.9)).

**2.18 Definice** (Řešení ODR)**.**

- *Řešením diferenciální rovnice* (2.11) rozumíme libovolnou funkci $y$ definovanou na nějakém otevřeném intervalu $I$, pro kterou platí

$$\forall x \in I: \; F(x, y(x), y'(x), y^{(2)}(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0.$$

  Speciálně: Řešením diferenciální rovnice (2.9) je funkce $y$ na $I$ splňující

$$\forall x \in I: \; y'(x) = f(x, y(x)).$$

- Pokud $I \subseteq \tilde{I}$ jsou různé otevřené intervaly, $y$ je řešení (2.11) na $I$, $\tilde{y}$ je řešení (2.11) na $\tilde{I}$ a tato řešení se shodují na $I$ (tedy na menším z obou intervalů, kde jsou definována obě), řekneme, že $\tilde{y}$ *je prodloužením řešení* $y$ *na* $\tilde{I}$.

- Řešení, které nemá žádné prodloužení, nazýváme *maximálním řešením.*

**2.19 Poznámka.** (a) Přímo z rovnice (2.9) plyne, že libovolné její řešení $y$ na intervalu $I$ má v libovolném bodě toho intervalu vlastní derivaci. Skutečně, pro všechna $x \in I$ totiž platí

$$y'(x) = f(x, y(x)) \in \mathbb{R},$$

neboť funkce (dvou proměnných) $f$ má hodnoty v $\mathbb{R}$. Tvrzení je tedy vlastně samozřejmé.

Zkuste si rozmyslet, že podobným (ale přece trochu jiným) argumentem dostaneme, že dokonce i řešení obecnější rovnice (2.10) musí být diferencovatelné (tj. mít vlastní derivaci).

(b) Podobně jako pojem primitivní funkce, i pojem řešení ODR uvažujeme vždy na nějakém intervalu. Za zdůraznění ovšem stojí, že v případě DR uvažujeme zásadně *otevřený* interval.

(c) Ještě malý příklad k pojmu maximálního řešení. Třeba funkce $y_1(x) = \cos x$ na intervalu $(0, 2\pi)$ (tedy s uměle omezeným definičním oborem) je řešením rovnice

$$y'' + y = 0$$

na intervalu $(0, 2\pi)$ – jak se můžete snadno přesvědčit. Není to však řešení *maximální*, má totiž prodloužení. Příkladem takového prodloužení je funkce $y_2(x) = \cos x$ na $(0, 7)$: skutečně, obě funkce se shodují na menším z obou intervalů, tj. přesněji:

$$y_1(x) = y_2(x) \quad \text{pro všechna } x \in (0, 2\pi).$$

Ani $y_2$ ale není maximální řešení; prodloužení jistě snadno najdete. Je jasné, že maximální řešení (které je prodloužením $y_1$ i $y_2$) je funkce $y(x) = \cos x$ na $\mathbb{R}$. (Je jasné, že toto řešení prodloužení nemá: není totiž kam prodlužovat.)

**2.20 Věta** (Prodlužování řešení)**.** *Každé řešení rovnice* (2.11)*, které není maximální, se dá prodloužit (rozšířit) na maximální řešení. (Může existovat více způsobů.)*

**2.21 Poznámka.** V předchozí větě je důležitá poznámka, že může existovat více způsobů prodloužení. Ale nemusí! Striktně vzato by tato skutečnost neměla být součástí formulace věty, proto je v závorce. Je to ale natolik důležitá poznámka, že ji raději píšu už tam.

Jak je vidět z praktických výpočtů a z Picardovy věty o existenci a jednoznačnosti řešení níže, některé rovnice umožňují různě nalepovat řešení, takže jednoznačnost prodloužení v některých případech nemusí být zaručena. Naopak ty rovnice, které splňují předpoklad Picardovy věty, mají všechna prodloužení jednoznačně určená.[18]

**2.22 Věta** (Peanova věta o existenci řešení)**.** *Nechť je funkce $f(x, y)$ spojitá pro $(x, y) \in (a, b) \times (c, d)$. Potom libovolným bodem $(x_0, y_0) \in (a, b) \times (c, d)$ prochází nějaké řešení rovnice*

$$y' = f(x, y).$$

Poznamenejme, že v této větě můžeme směle konstatovat existenci maximálního řešení, protože (jak víme z Věty 2.20) každé řešení se dá na maximální prodloužit.

**2.23 Věta** (Picardova věta o existenci a jednoznačnosti řešení)**.** *Nechť je spojitá jak $f(x, y)$, tak i její parciální derivace $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ ve všech bodech $(x, y) \in (a, b) \times (c, d)$. Potom libovolným bodem $(x_0, y_0)$ prochází maximální řešení rovnice*

$$y' = f(x, y),$$

*které je v obdélníku $(a, b) \times (c, d)$ určeno jednoznačně.*

**2.24 Poznámka.** Následující dvě formulace vyjdou nastejno (viz též příklad v odstavci o triviálních rovnicích výše):

- řešení rovnice $y' = f(x, y)$ procházející bodem $(x_0, y_0)$;
- řešení rovnice $y' = f(x, y)$ splňující počáteční podmínku $y(x_0) = y_0$.

K Picardově větě poznamenávám, že v ní máme zaručenu nejen existenci řešení (jako tomu je už za slabších předpokladů věty Peanovy), nýbrž i „lokální“ jednoznačnost tohoto řešení. Jiné vyjádření tohoto faktu je třeba následující:

*Existuje právě jedno řešení $y$ procházející bodem $(x_0, y_0)$, jehož graf vede od hranice k hranici obdélníku $(a, b) \times (c, d)$.*

Toto řešení je tedy „maximální v obdélníku $(a, b) \times (c, d)$“ – a takové existuje jen jedno. Ještě jinými, nepřesnými slovy:

*Řešení se v onom obdélníku nemohou „větvit“.*

**2.25 Příklad.** Rovnice

$$y' = \sqrt[3]{y} \tag{2.12}$$

nesplňuje podmínku z Picardovy věty, tudíž není zaručena jednoznačnost maximálního řešení s danou počáteční podmínkou. Výpočtem je skutečně lehké ověřit, že na nulové stacionární řešení $y \equiv 0$ lze různě lepit. Řešení se tedy v bodech $x$ mohou „větvit“ (v každém bodě osy $x$ se „mohu rozhodnout, jestli se odpojím, nebo budu dále pokračovat konstantně“).

Pojďme se na to podívat konkrétně. Je snadno vidět, že $y \equiv 0$ je (stacionární) řešení rovnice, protože po dosazení do rovnice dostaneme rovnost $(0)' = 0$, která platí; nulu zde přitom chápeme jako konstantní nulovou funkci definovanou na celém $\mathbb{R}$, takže se sluší konstatovat, že uvedená rovnost platí na $\mathbb{R}$.

Konstantní nula je tedy jedno řešení a nyní vypočítáme předpis pro řešení s hodnotami nenulovými. Předpokládejme tedy, že $y \neq 0$; pak můžeme celou rovnici vydělit její pravou stranou a bude to – za tohoto předpokladu – ekvivalentní úprava:

$$\frac{y'(x)}{\sqrt[3]{y(x)}} = 1, \quad \text{odkud integrací podle } x \quad \int \frac{y'(x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{y(x)}} = \int 1\,\mathrm{d}x.$$

[18] I v takových případech se může stát, že naše metoda řešení vyžaduje na konci slepit dva kusy řešení v jedno maximální (apod.); v takových případech však lze lepit jediným způsobem, takže se neporuší jednoznačnost řešení. Naproti tomu když u některých autonomních rovnic nalepujeme na stacionární řešení, často se můžeme rozhodnout, jestli budeme pokračovat konstantním řešením, nebo ne. Zde tedy jednoznačnost není.

Standardním použitím věty o substituci podle předpisu $y = y(x)$, $\mathrm{d}y = y'(x)\,\mathrm{d}x$ na levé straně rovnice dostaneme $\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt[3]{y}}$, takže celkem máme

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt[3]{y}} = x + C_1, \quad \text{tj.} \quad \frac{3}{2}y^{2/3} + C_2 = x + C_1,$$

kde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ jsou integrační konstanty. Označíme-li $C = C_1 - C_2$, je zřejmé, že pro $C$ opět přichází v úvahu libovolná reálná hodnota, píšeme tedy opět $C \in \mathbb{R}$.[19] Po úpravě dostáváme

$$y^{2/3} = \frac{2}{3}(x + C), \quad \text{tj.} \quad y^2 = \frac{8}{27}(x + C)^3;$$

poslední úprava je ekvivalentní, což je dáno tím, že „třetí mocnina“ je bijekce $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$. Totéž ovšem neplatí o druhé mocnině, resp. odmocnině, kterou na rovnici musíme aplikovat nyní, abychom z ní konečně vyjádřili $y$. Vzpomeneme si, že pro reálné číslo $a$ platí $\sqrt{a^2} = |a|$. Odtud

$$|y| = \sqrt{\frac{8}{27}(x + C)^3}, \quad \text{tj.} \quad y = \pm\sqrt{\frac{8}{27}(x + C)^3}.$$

Použitím dvojího znaménka „$\pm$“ máme pochopitelně na mysli to, že se aplikuje na celém definičním oboru $y$ buďto znaménko „$+$“, nebo na celém definičním oboru „$-$“. Takže řešení jsou (pro libovolné pevné číslo $C$) jak funkce

$$y(x) = \sqrt{\frac{8}{27}(x + C)^3}, \quad \text{tak i} \quad y(x) = -\sqrt{\frac{8}{27}(x + C)^3}. \tag{2.13}$$

Na začátku výpočtu jsme museli předpokládat $y \neq 0$ (aby bylo možno dělit rovnici $\sqrt[3]{y}$), podívejme se tedy, kdy vzorce (2.13) tuto podmínku porušují: Je snadno vidět, že se tak stane pro $x = -C$. Navíc, protože do druhé odmocniny dosazujeme pouze nezáporné hodnoty, musí platit $x + C \geqslant 0$, celkem tedy uvedené funkce rovnici řeší na intervalu $x \in (-C, \infty)$. Jak už jsme ovšem předeslali, tato řešení nejsou maximální, neboli mají prodloužení; toto prodloužení získáme pomocí techniky lepení.

Pro dané (pevné) $C \in \mathbb{R}$ definujme „slepená“ řešení takto:

$$y_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{pokud } x \in (-\infty, -C], \\ \sqrt{\frac{8}{27}(x + C)^3}, & \text{pokud } x \in (-C, \infty). \end{cases}$$

$$y_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{pokud } x \in (-\infty, -C] \\ -\sqrt{\frac{8}{27}(x + C)^3}, & \text{pokud } x \in (-C, \infty). \end{cases}$$

Jak vidíme, právě definované funkce $y_1$ a $y_2$ se liší pouze ve znaménku před odmocninou, zkontrolujeme tedy jen například funkci $y_2$.

Podle definice je $\mathbb{D}_{y_2} = \mathbb{R}$, máme tedy ukázat, že $y_2$ je řešení (2.12) na $\mathbb{R}$, neboli že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ jest

$$y_2'(x) = \sqrt[3]{y_2(x)}. \tag{2.14}$$

Pro $x$ z intervalu $(-C, \infty)$, kdy $y_2(x) = -\sqrt{\frac{8}{27}(x + C)^3}$, tato rovnost platí podle výpočtu výše. Pro $x \in (-\infty, -C)$ je $y_2(x) = 0$, tj. funkce $y_2$ je na tomto *otevřeném* intervalu konstantní, a má tedy na něm

[19] Toto je standardní způsob, kterým dvě integrační konstanty (vzniknuvší integracemi na každé straně rovnice) nahradíme konstantou jedinou. Viz též 2.6.

nulovou derivaci. Takže i na tomto intervalu rovnost (2.14) platí (to jsme ostatně věděli: nula je stacionární řešení).

Zbývá tedy ověřit (2.14) přímo v bodě lepení $x = C$. Pro to si nejprve všimněme, že funkce $y_2$ skutečně byla – jak očekáváme – slepena spojitě, tj. že je v bodě $-C$ spojitá. (Předpokládám, že čtenáři je tento bod jasný, pro jistotu ho ale aspoň jednou uvedu podrobně.) Spojitost $y_2$ v bodě $-C$ znamená platnost rovnosti $y_2(-C) = \lim_{x\to -C} y_2(x)$, podívejme se tedy na onu limitu a rovnost ověřme. Funkce $y_2$ je nalevo od $-C$ definována jiným vzorcem než napravo, dává proto smysl zaměřit se na obě jednostranné limity:

$$\lim_{x\to -C_-} y_2(x) = \lim_{x\to -C_-} 0 = 0,$$

$$\lim_{x\to -C_+} y_2(x) = \lim_{x\to -C_+} -\sqrt{\frac{8}{27}(x+C)^3} = -\sqrt{\frac{8}{27}(-C+C)^3} = 0.$$

Celkem tedy $y_2(-C) = 0 = \lim_{x\to -C} y_2(x)$, a $y_2$ je v bodě $-C$ spojitá.

Nyní, když jsme si podrobně rozmysleli, že funkce $y_2$ je v bodě $-C$ spojitá, pojďme se konečně podívat na derivaci. Funkce $y_2$ není na žádném (sebemenším) okolí bodu $-C$ definována „jedním vzorcem“, nezbývá tedy než situaci opět nahlédnout zvlášť zleva a zprava: Funkce $y_2$ je konstantní na $(-\infty, -C]$, takže $(y_2)'_-(-C) = 0$. Na intervalu $[-C, \infty)$ (včetně $-C$, kde je nulová) je rovna $-\sqrt{\frac{8}{27}(x+C)^3}$. Jednoduchým výpočtem zjistíme, že

$$\left(-\sqrt{\frac{8}{27}(x+C)^3}\right)'\Bigg|_{x=-C} = \ldots = 0,$$

tedy i derivace zprava je nulová. Je tedy $(y_2)'_-(-C) = (y_2)'_+(-C) = 0$, odkud $y_2'(-C) = 0$. Celkem tedy $y_2'(-C) = 0 = \sqrt[3]{0} = \sqrt[3]{y_2(-C)}$, tj. rovnost (2.14) je opravdu splněna i v bodě $-C$, a $y_2$ je tedy řešením naší rovnice na celém $\mathbb{R}$. (A protože v případě řešení definovaného na $\mathbb{R}$ nepřichází v úvahu prodloužení, jde automaticky o řešení maximální.) $\triangle$

Na posledním příkladě jsme viděli podrobně rozepsanou techniku „lepení“, a to i s důkazem, že takto vzniklá funkce skutečně je řešením. V praxi takto podrobná zdůvodnění dávat nemusíme, neboť stačí mít na paměti, že platí následující:

**Lemma L.** *Lepení je OK. :-)*

## 2.5 Jak chápat pojem *řešení* DR

Uvažujme rovnici

$$y' = f(x,y), \qquad \text{resp.} \qquad y'(x) = f(x, y(x)), \tag{R}$$

kde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce dvou proměnných (pro jednoduchost předpokládáme, že je definovaná na celém $\mathbb{R}^2$).

**2.26 Otázka.** Jak si máme „graficky představit“, že jistá funkce $y = y(x)$ je řešením této rovnice (řekněme na nějakém intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$)?

Jakkoliv se to může leckterému začátečníkovi zdát nepravděpodobné, představa je to docela snadná. Vyjděme z definice řešení: co to vlastně znamená, že funkce $y$ je *řešení* rovnice (R) na intervalu $I$?

Podle Definice 2.18 to znamená, že nastává rovnost

$$y'(x) = f(x, y(x)),$$

a to pro všechna $x$ z onoho intervalu $I$.

**Je definice pojmu řešení matoucí?** Pokud ten pocit ani trochu nemáte, možná můžete tento úsek přeskočit. Mně osobně se ale zdá, že výše uvedené vyjádření definice *řešení* diferenciální rovnice,[20] může docela snadno působit poněkud matoucím dojmem. Je to, jako kdybychom si vzali algebraickou rovnici

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \tag{2.15}$$

a nazvali jejím *řešením* každé číslo $x \in \mathbb{C}$, pro které platí

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0. \tag{2.16}$$

Vypadá to skoro jako tautologie, tedy vlastně prázdný výrok. Při povrchním pohledu je těžké pochopit, co se vlastně definuje a proč. Copak nestačilo tu rovnici napsat jen jednou?

Důvodem, proč tato definice řešení algebraické rovnice působí divně, podle mého názoru je, že neznámou v rovnici (2.15) značíme stejným symbolem $x$, jako řešení v rovnici (2.16). Zápis obou rovností je tak zcela stejný, přesto každou z nich chápeme jinak:

- V první z nich „$x$“ hraje roli *neznámé*, a hodnota levé strany tedy *není určená*: je jenom připravena mít pevnou konkrétní hodnotu v okamžiku, kdy za $x$ dosadíme nějaké číslo. (A v ten moment se ukáže, jestli nastává nebo nenastává rovnost, neboli jestli ono dosazené číslo je, či není řešení.)

- Naproti tomu v druhé rovnosti už „$x$“ intuitivně vnímáme jako zástupný symbol pro některé konkrétní řešení – má tedy *určitou hodnotu*. Ona rovnost podle definice platí (protože jsme dosadili *řešení* rovnice), takže levá strana samozřejmě musí mít jasně určenou hodnotu, a to právě hodnotu pravé strany, tedy 0.

**Rovnice vs. rovnost:** Jestliže se shodneme na tom, že úloha „$x$“ (2.15) se liší od úlohy téhož symbolu v (2.16) – alespoň intuitivně vzato – pak už zbývá jen krůček k tomu, abychom vyslovili definici pojmu *řešení* vhodnějším způsobem.[21] Jak jsme si právě uvědomili, hlavním problémem je totiž svého druhu kolize značení: tentýž symbol zastává dvě různé role.[22] To je ovšem problém snadno řešitelný.

V případě algebraické rovnice můžeme podat lépe srozumitelnou definici takto: Řekneme, že číslo $y \in \mathbb{C}$ je *řešením* rovnice

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

s neznámou $x$, jestliže platí rovnost

$$a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \ldots + a_1 y + a_0 = 0.$$

Všimněte si, že zde už rozlišuji mezi *rovnicí* a *rovností*:

- Rovnost je relace mezi dvěma matematickými objekty.[23] V kontextu matematické analýzy jsou takovými objekty třeba čísla, funkce, vektory, posloupnosti, množiny jiných objektů atd.[24] V tomto případě se bavíme o *rovnosti čísel*; na obou stranách symbolu rovnosti tedy musí stát konkrétní čísla.

[20] které je zcela standardní

[21] A pokud se na tom neshodneme, nic se neděje. I při studiu matematiky je řada věcí otázkou názoru.

[22] Tento případ kolize značení bych označil jako kolizi „měkkou“: striktně vzato ničemu nevadí, přesto se ale zdá, že to není v pořádku. Zdá se to nevhodné přinejmenším z didaktického hlediska.

[23] Zjednodušeně řečeno rovnost mezi dvěma matematickými objekty nastává právě tehdy, když všechno, co se dá pravdivě prohlásit o jeden, je pravdivé i pro druhý.

[24] Všechny tyto pojmy – jakož i všechny ostatní matematické objekty, s nimiž se setkáte – se dají interpretovat jako *množiny*, a tak ve skutečnosti jediný *primitivní pojem*, který naše matematická teorie potřebuje, je *množina*. Více se o tom dozvíte v 5. ročníku v kurzu Logika a teorie množin.

- Rovnice obsahuje neznámou. My za ni můžeme dosazovat různé hodnoty a podle toho, jestli výsledná *rovnost*[25] platí, či neplatí, rozpoznat ty hodnoty, které jsou řešeními, od těch, které jimi nejsou. Rovnici tedy můžeme interpretovat jako *výrokovou funkci*: výroková funkce má proměnnou (jednu nebo více) a až do okamžiku dosazení za všechny proměnné postrádá pravdivostní hodnotu. Okamžikem dosazení se z výrokové funkce stává *výrok* a teprve ten je buďto pravdivý, nebo nepravdivý.

**„Vylepšená definice“** Doufám, že vás předchozí úvahy zaujaly. Přišel nicméně čas na to, abychom z nich vyvodili nějaké relevantní závěry.

**Definice Ř** (Řešení ODR – didakticky čistší verze)**.**
Řekneme, že funkce $\varphi = \varphi(x)$ je na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ *řešením* rovnice

$$y' = f(x, y),$$

jestliže pro všechna $x \in I$ platí rovnost

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)).$$

**V praxi:** Definice Ř je možná snazší na pochopení, existuje ale dobrý důvod, proč jsme Definici 2.18 neuvedli tímto způsobem (tedy s různými symboly pro neznámou a řešení). Tím důvodem je jednoduše každodenní matematická praxe. Při studiu diferenciálních rovnic symbolem „$y$“ zcela běžně označujeme dokonce nejméně tři různé věci: kromě *neznámé* a *řešení* ještě také druhou *souřadnici* bodu v rovině, resp. druhou *proměnnou* funkce dvou proměnných (typické funkce $f(x, y)$, která stojí na pravé straně rovnice (R)). Tato rozsáhlá „měkká kolize značení“ má i své kladné stránky: pomáhá uvědomit si souvislosti a výrazně zjednodušuje značení; k nedorozumění přitom nedochází.[26]

Všimněme si například samotného zápisu diferenciální rovnice

$$y' = f(x, y).$$

Na její levé straně máme derivaci $y$, tedy funkci jediné proměnné; na pravé straně této rovnice stojí funkce dvou proměnných $f(x, y)$. Striktně vzato tedy rovnost nemůže nikdy nastat.[27] My ovšem víme, jak máme (R) správně chápat: pravá strana obsahuje složenou funkci, která má ve výsledku jedinou proměnnou $x$:

$$\text{do vnější funkce } f(\cdot,\cdot) \text{ dosadíme } (x, y(x)),$$

tedy dvě funkce ($x$ a $y(x)$) téže proměnné $x$. Výsledkem je proto funkce jediné proměnné $x$.

## 2.6 Autonomní rovnice

V tomto oddílu se podíváme na autonomní (obyčejné diferenciální) rovnice (1. řádu), tj. na rovnice tvaru

$$y' = g(y), \qquad \text{kde } g \text{ je spojitá na svém def. oboru.} \tag{A}$$

Jak už jsem zmínil, podíváme se na dva základní způsoby, jak přistupovat k řešení těchto rovnic:

- Analytické řešení: (A) chápeme jako speciální případ *rovnice se separovanými proměnnými*, pro kterou obvykle dovedeme najít explicitní vyjádření řešení;

[25] Dosazením do rovnice za neznámou (všechny neznámé) dostáváme *rovnost* mezi dvěma čísly, popřípadě funkcemi atd.
[26] ... zvláště ne, pokud si člověk dobře rozmyslí obsah tohoto oddílu...
[27] Funkce jedné proměnné jsou objekty jiného typu než funkce proměnných dvou; rovnost tedy z principu nenastane.

- kvalitativní řešení: aniž bychom se pokoušeli zjistit explicitní předpis pro řešení, uděláme si dobrou představu o tom, jak různá řešení této rovnice vypadají, a budeme schopni nakreslit rozumný obrázek.

V této sekci se chci zaměřit na kvalitativní analýzu těchto rovnic, tedy na druhý z obou uvedených přístupů – ten nám umožní lépe pochopit některé souvislosti a chování DR vůbec, aniž bychom při tom probírali algoritmické postupy integrace rovnic. Začneme tím, že si odvodíme něco málo obecné teorie, kterou pak budeme moci použít na konkrétní příklady autonomních rovnic.

### 2.6.1 Základní fakta o autonomních rovnicích

**2.27 Věta.** *Libovolné řešení rovnice* (A) *je monotónní.*

Připomeňme, že *monotónní* znamená buďto *neklesající* na svém definičním oboru nebo *nerostoucí* na svém definičním oboru (nebo obojí současně, tj. *konstantní*).

*Důkaz.* Nechť $y = y(x)$ je nějaké řešení rovnice (A) na jistém intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. Už dříve jsme učinili pozorování, že řešení libovolné[28] DR je diferencovatelné, neboli má vlastní derivaci, na svém definičním oboru, zde tedy na intervalu $I$.

Z 1. semestru ovšem víme, že funkce $y$, která má ve všech bodech $x \in I$ derivaci, splňuje

$$\begin{aligned} y \text{ je neklesající na } I \ &\Leftrightarrow\ \forall x \in I: y'(x) \geqslant 0 \quad \text{a} \\ y \text{ je nerostoucí na } I \ &\Leftrightarrow\ \forall x \in I: y'(x) \leqslant 0. \end{aligned}$$

Předpokládejme pro spor, že naše řešení $y$ není na $I$ ani neklesající, ani nerostoucí; podle výše uvedených ekvivalencí to znamená přesně to, že existují body $a, b \in I$ takové, že $y'(a) > 0$ (tedy $y$ není nerostoucí) a $y'(b) < 0$ (tedy $y$ není neklesající).

Zřejmě $a \neq b$ (neboť $y'(a) \neq y'(b)$). Můžeme ale zjistit víc, totiž že

$$g(y(a)) \overset{\text{(A)}}{=} y'(a) \neq y'(b) \overset{\text{(A)}}{=} g(y(b));$$

obě rovnosti výše platí, jak je naznačeno, díky tomu, že $y$ je řešení rovnice (A). Dostali jsme tedy, že $g(y(a)) \neq g(y(b))$, odkud plyne (podobně jako výše), že také

$$y(a) \neq y(b).$$

Vzhledem k tomu, že pevně platí (podle naší volby bodů $a$ a $b$) $y'(a) > 0 > y'(b)$, musíme se nacházet v jedné z následujících čtyř situací:

(i) $a < b$ a zároveň $y(a) < y(b)$;

(ii) $a < b$ a zároveň $y(a) > y(b)$;

(iii) $a > b$ a zároveň $y(a) < y(b)$;

(iv) $a > b$ a zároveň $y(a) > y(b)$.

Důkaz dokončíme pouze za předpokladu, že nastává (i); důkazy ve všech ostatních případech jsou ovšem zcela analogické. Náš cíl je ukázat, že (i) vede ke sporu. Protože spor nastává (s analogickým důkazem) i v případech (ii)–(iv), vede náš počáteční sporopředpoklad, že $y$ není monotónní, ke sporu ve všech čtyřech možných (pod)případech, a $y$ tedy monotónní být musí, což je tvrzení věty.

[28] v kontextu tohoto kurzu analýzy, nikoliv zcela obecně

Předpokládejme tedy, že platí (i), tj. jsme v následující situaci: $y$ je řešení (A) na intervalu $I$, $a, b \in I$ a platí

$$a < b, \quad y(a) < y(b) \quad \text{a} \quad y'(a) > 0 > y'(b). \tag{2.17}$$

Spor odvodíme následovně.

Položme

$$Z := \{t \in I : t \geqslant a \text{ a zároveň } y(t) = y(b)\} \quad \text{a} \quad z := \inf Z.$$

Množina $Z$ je zdola omezená (číslem $a$, jak vidno z definice) a neprázdná (podle (2.17) totiž obsahuje bod $b$); má tedy infimum, a bod $z$ je dobře definován. Zároveň, protože $a$ je dolní závora $Z$ (opět přímo podle definice $Z$) a $z$ je (podle definice infima[29]) *největší* dolní závora $Z$, platí $a \leqslant z$.

*Tvrdím*, že z uvedených faktů plyne $y(z) = y(b)$. (Jinými slovy $z \in Z$.)
*Dokažme toto tvrzení:* Z definice infima snadno plyne existence posloupnosti $\{t_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq Z$, splňující $\lim_{n\to\infty} t_n = \inf Z = z$. Funkce $y$, majíc vlastní derivaci na $I$, je ovšem na $I$ spojitá, tj. $\lim_{x\to z} y(x) = y(z)$. Z Heineho definice spojitosti tedy dostáváme (druhá rovnost plyne z toho, že $t_n \in Z$):

$$y(b) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{y(b)}_{\text{konst. posl.}} = \lim_{n\to\infty} y(t_n) \overset{\text{H.V.}}{=} \lim_{x\to z} y(x) = y(z),$$

tedy $y(z) = y(b)$, a $z \in Z$, spor. △

Tvrzení je dokázáno; z něj a z rovnice (A) (resp. z toho, že $y$ je její řešení) plyne

$$y'(z) = g(y(z)) = g(y(b)) = y'(b),$$

takže (podle (2.17))

$$y'(z) = y'(b) < 0.$$

Tvrzení navíc implikuje, že $a \neq z$, což společně s nám už známou informací $a \leqslant z$ dává, že $a < z$.

Odtud ovšem dále plyne[30], že existuje blízký bod $u$ nalevo od $z$, v němž je hodnota $y$ *větší* než $y(z)$; přesněji (zde používáme, že $a < z$, takže interval $(a, z)$ je neprázdný):

$$\exists u \in (a, z): \ y(u) > y(z).$$

Tj. $y(a) < \beta < y(u)$ kde $\beta := y(z) = y(b)$ hraje roli „mezihodnoty". Protože $y$ je spojitá, podle Bolzanovy věty (o nabývání mezihodnot) existuje bod $w \in (a, u)$, v němž $y(w) = \beta$.

Celkem tedy máme $w > a$ a $y(w) = \beta = y(b)$, takže $w \in Z$. Přitom ale $w < u < z = \inf Z$, což je spor, neboť jsme našli prvek množiny $Z$, který je menší než její infimum. Tímto sporem je důkaz věty dokončen. □

Důkaz této věty se zdá komplikovaný, dá se ale shrnout do několika stručných bodů:

1) Předpokládáme pro spor, že nějaké řešení (A) není monotónní.

2) Postupně (s použitím rovnice) si uvědomíme, že jsou jen 4 případy. BÚNO důkaz provedeme jen v prvním z nich.

3) Definujeme množinu $Z$ a ukážeme, že má minimum $z$. Pozorujeme mj., že $a < z$.

4) Podle (A) a protože platí $y(z) = y(b)$, máme $y'(z) < 0$.

[29] Připomeňte si, že infimum množiny je (ekvivalentně) definováno jako její největší dolní závora.
[30] Snadné cvičení na definici derivace; je to ostatně taky intuitivně zřejmé.

5) To v kombinaci s faktem, že $y(z) = y(b) > y(a)$ dává existenci bodu $u \in (a, z)$, v němž je hodnota $y$ ještě větší.

6) Podle Bolzanovy věty musí existovat bod $w$ mezi $a$ a $u$, že $y(w) = y(z) = y(b)$.

7) Tedy $w \in Z$ a $w < z = \min Z$; to je spor.

**2.28 Poznámka.** Věta 2.27 dává velmi silnou informaci o povaze libovolného řešení libovolné autonomní rovnice: na rozdíl od ostatních typů diferenciálních rovnic máme zaručenu monotonii takového řešení.

Víme-li tedy, že určité řešení dané autonomní rovnice je v nějakém bodě rostoucí (má tam kladnou derivaci), pak víme, že je zaručeně neklesající na celém svém definičním oboru. (A podobně to platí v případě, že je v nějakém bodě klesající.)

**2.29 Lemma.** *Buď $y$ řešení autonomní rovnice (A) na intervalu $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ (kde $a, b \in \mathbb{R}^*$). Nechť $c \in \mathbb{R}$ a funkce $\tilde{y} = \tilde{y}(x)$ je definována předpisem*

$$\tilde{y}(x) = y(x + c).$$

*Pak $\tilde{y}$ je řešení* (A) *na intervalu $(a - c, b - c)$.*

*Důkaz.* Stačí ověřit, že $\tilde{y}$ splňuje rovnost (A) pro libovolné $x \in (a - c, b - c)$; mějme tedy takové $x$ a počítejme:

$$\begin{aligned}\big(\tilde{y}(x)\big)' = \big(y(x + c)\big)' = y'(x + c) \cdot (x + c)' = \\ = y'(x + c) = g(y(x + c)) = g(\tilde{y}(x)),\end{aligned}$$

kde předposlední rovnost platí proto, že $x + c \in (a, b)$ a $y$ je na $(a, b)$ řešením (A). □

**2.30 Poznámka.** Uvedené lemma vlastně říká, že když posunu nějaké řešení jisté autonomní rovnice o libovolnou konstantu doleva (resp. doprava), dostanu opět řešení (stejné) rovnice.

Je dobré si to dát do souvislosti s rovnicemi triviálními (viz výše), jejichž řešení se zase „mohou libovolně posouvat ve svislém směru“:

- *Je-li $y$ řešení rovnice $y' = h(x)$, pak $\tilde{y}(x) = y(x) + C$ je také její řešení.*
  Tento fakt víme vlastně už z prvního a druhého semestru: primitivní funkce lze libovolně posouvat nahoru a dolů (zde $C$ je vlastně integrační konstanta).

- *Je-li $y$ řešení rovnice $y' = g(y)$, pak $\tilde{y}(x) = y(x + c)$ je také její řešení.*
  Toto je obsahem Lemmatu 2.29.

**2.31 Pozorování.** *Uvažujme řešení $y$ úlohy s počáteční podmínkou*

$$y' = g(y), \quad y(x_0) = y_0.$$

*Jestliže $g(y_0) > 0$, pak $y$ je neklesající na $\mathbb{D}_y$.*
*Jestliže $g(y_0) < 0$, pak $y$ je nerostoucí na $\mathbb{D}_y$.*

*Důkaz.* Protože $y$ je řešení naší autonomní rovnice, které splňuje danou počáteční podmínku, platí

$$y'(x_0) = g(y(x_0)) = g(y_0) > 0,$$

kde druhá rovnost platí díky počáteční podmínce. Podle Věty 2.27 je $y$ monotónní a z výše uvedeného je jasné, že není nerostoucí (má totiž kladnou derivaci v bodě $x_0$). Musí tedy být neklesající. Důkaz druhého tvrzení je analogický. □

**2.32 Věta.** *Nechť $g$ je spojitá na $\mathbb{D}_g$. Nechť $g > 0$ na $(a,b)$, $a,b \in \mathbb{R}^*$. Pokud $a \in \mathbb{R}$, nechť dále $g(a) = 0$ a podobně pro $b$. Nechť $y$ je maximální řešení autonomní rovnice (A) s počáteční podmínkou $y(x_0) = y_0 \in (a,b)$. Pak $(a,b) \subseteq \mathbb{H}_y$, kde $\mathbb{H}_y$ je obor hodnot $y$.*

**2.33 Poznámka.** Jsou-li splněny předpoklady věty a navíc $a,b \in \mathbb{R}$, a priori není vůbec jasné, jestli $y$ nabývá hodnot $a$ nebo $b$ (nebo obou). Všimněme si, že $y_1 \equiv a$ a $y_2 \equiv b$ jsou stacionární řešení. Jak tušíme, v některých případech se na $a$ (resp. na $b$) dá „lepit“, jindy ne. V případech, kdy lepení není možné, se příslušná hodnota v oboru hodnot $y$ nevyskytne. Pokud lepení například na $b$ je možné a $y$ je maximální řešení (tj. „neskončí předčasně“), pak $b \in \mathbb{H}_y$ (jak je vidět například přímo z „bodu slepu“).

*Důkaz.* Budeme hledat řešení $y = y(x)$ autonomní rovnice (A), které splňuje danou počáteční podmínku $y(x_0) = y_0 \in (a,b)$, a to vlastně standardní početní metodou. Máme

$$y'(x) = g(y(x)), \qquad x \in \mathbb{D}_y.$$

Uvažujme nyní pouze takové body $x \in \mathbb{D}_y$, pro které $y(x) \in (a,b)$; takové jistě existují, příkladem je bod $x_0$ z počáteční podmínky. Mějme tedy libovolný takový bod $x$; protože $g > 0$ na $(a,b)$, máme $g(y(x)) > 0$ (neb $y(x) \in (a,b)$). Pro takovéto $x$ tedy můžeme rovnici dělit $g(y(x))$:

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = 1, \qquad x \text{ takové, že } y(x) \in (a,b).$$

Integrací rovnosti podle $x$ dostaneme

$$\int \frac{y'(x)}{g(y(x))}\,\mathrm{d}x = x + C_1, \qquad C_1 \in \mathbb{R},$$

kde na pravé straně byla integrace snadná a na straně levé nyní použijeme substituci $y(x) = y$ a $y'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}y$ (samozřejmě bychom mohli volit i jiné písmenko než $y$, v početní praxi to ale není zvykem):

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = x + C_1.$$

Protože pracujeme s obecnou funkcí $g$, nelze ve výpočtu pokračovat „konkrétně“. Místo toho označme $G$ primitivní funkci k $\frac{1}{g}$ na $(a,b)$; ta existuje, neboť $g$ je na $(a,b)$ spojitá a kladná, takže totéž platí pro $\frac{1}{g}$ (v žádném bodě nedělíme nulou), a spojitá funkce má primitivní funkci podle Základní věty kalkulu. Tím pádem máme

$$G(y) + C_2 = x + C_1 \qquad \text{a označme } C := C_1 - C_2 \in \mathbb{R}.$$

Je zřejmé, že rozdíl $C$ obou integračních konstant může nabývat jakékoliv reálné hodnoty, píšeme tedy $C \in \mathbb{R}$. Zbývá „vrátit zpět substituci“ $y(x) = y$:

$$G(y(x)) = x + C, \qquad C \in \mathbb{R}. \tag{2.18}$$

Pro řešení s hodnotami v $(a,b)$[31] jsme tedy dostali rovnici pro $y$, která už není diferenciální (provedli jsme totiž integraci), a vyjádřit z ní explicitní předpis pro $y$ znamená najít inverzní funkci ke $G$. To lze:

Víme, že $G$ je rostoucí na $(a,b)$, neboť jde o primitivní funkci k funkci $\frac{1}{g}$, která je na intervalu $(a,b)$ kladná; jinými slovy $G' = \frac{1}{g} > 0$ na $(a,b)$. Existují proto limity[32]

$$A := \lim_{y \to a+} G(y) \quad \text{a} \quad B := \lim_{y \to b-} G(y).$$

[31] Přesněji: pro $x$ taková, že $y(x) \in (a,b)$.
[32] Monotónní funkce vždy má limitu – 1. semestr.

Protože $G$ je spojitá[33] zobrazuje interval $(a,b)$ na interval podle Bolzanovy věty,[34] a to na interval $(A,B)$, což je zřejmé z toho, že $G$ je rostoucí. Takže celkem dostáváme, že $G\colon (a,b) \to (A,B)$ je bijekce (je prostá, protože je rostoucí, a je *na* $(A,B)$). Má tedy inverzní funkci $G^{-1}\colon (A,B) \to (a,b)$, která je (samozřejmě) také bijekcí.

Nyní jsme schopni dokončit výpočet řešení, který výše dospěl až k rovnici (2.18); dostáváme, že

$$\begin{aligned} G^{-1}(G(y(x)) &= G^{-1}(x+C), \quad \text{tj.} \\ y(x) &= G^{-1}(x+C). \end{aligned} \tag{2.19}$$

Dostali jsme tedy, že řešení rovnice (A), které má hodnoty v intervalu $(a,b)$, je posunutá (doleva, nebo doprava – podle hodnoty $C$) bijekce $G^{-1}\colon (A,B) \xrightarrow{\text{na}} (a,b)$. Vyšlo nám (2.19), přičemž musí být $x+C \in (A,B) = \mathbb{D}_{G^{-1}}$, tj. $x \in (A-C, B-C)$. Celkem jsme zjistili, že funkce

$$y\colon (A-C, B-C) \xrightarrow{\text{na}} (a,b), \quad y(x) = G^{-1}(x+C) \tag{2.20}$$

je obecné řešení s hodnotami (všemi) v $(a,b)$ a že $\mathbb{H}_y = (a,b)$. To je v podstatě to, co jsme chtěli dokázat.

Zbývá si uvědomit, že libovolné *maximální* řešení, má-li nějaké své hodnoty v intervalu $(a,b)$, musí už zahrnovat ve svém oboru hodnot *celý* interval $(a,b)$ (a případně i něco navíc, což nás ovšem teď nezajímá). To lze dokázat pomocí úvahy, že kdyby řešení $y$ nenabývalo *všech* hodnot v $(a,b)$, mohli bychom ho prodloužit podle vzorce (2.20) (pro vhodnou konstantu $C$), což by byl spor s jeho maximalitou. Podrobnější a přesnější vysvětlení této argumentace najdete v Příloze B. □

**2.34 Poznámka.** Je snad jasné, že analogická věta platí i v případě, že „$g > 0$“ nahradíme předpokladem „$g < 0$“; jediný rozdíl bude v tom, že příslušná řešení budou nerostoucí místo neklesající. Mohli bychom tedy Větu 2.32 zformulovat s předpokladem $g \neq 0$ na $(a,b)$: podle Bolzanovy věty je pak (spojitá) funkce $g$ buďto kladná na celém $(a,b)$, nebo záporná na celém $(a,b)$ (nemůže na tom intervalu změnit znaménko, neboť v tom případě by musela být v nějakém bodě $(a,b)$ nulová).

**2.35 Pozorování.** *Nechť $g > 0$ na intervalu $(a,b)$, $a \in \mathbb{R}^*$, $g(b) = 0$. Nechť $G$ je primitivní funkce k $1/g$ na $(a,b)$, která zobrazuje $(a,b)$ na $(A,B)$ ($A, B \in \mathbb{R}^*$). Jestliže $B < +\infty$, pak má rovnice (A) řešení $y$, pro nějž $(a,b] \subseteq \mathbb{H}_y$.*
*Jestliže $A > -\infty$, pak má rovnice (A) řešení $y$, pro nějž $[a,b) \subseteq \mathbb{H}_y$.*
*Platí-li obojí, tj. $-\infty < A < B < \infty$, pak existuje řešení $y$, že $[a,b] \subseteq \mathbb{H}_y$.*
*(Jinými slovy: lze lepit na stacionární řešení $y \equiv b$, resp. na $y \equiv a$, resp. na obojí.)*

*Důkaz.* Funkce $g$ je kladná a spojitá na $(a,b)$, takže totéž platí pro $1/g$ (aritmetika spojitosti; nedělíme nulou). Proto $G \stackrel{c}{=} \int 1/g$ existuje a je rostoucí (má kladnou derivaci); zobrazuje tedy $(a,b)$ na interval

$$\left( \lim_{y\to a_+} G(y), \lim_{y\to b_-} G(y) \right) = (A,B)$$

(rovnost plyne z předpokladu, že $G$ je na $(A,B)$), odkud $B = \lim_{y\to b_-} G(y)$. V první části důkazu Věty 2.32 jsme vypočítali, že funkce tvaru

$$\tilde{y}(x) := G^{-1}(x+C)$$

(kde $C \in \mathbb{R}$ je jakákoliv konstanta) je (obecné) řešení naší rovnice (A), které zobrazuje $(A-C, B-C)$ na $(a,b)$.

[33] Má totiž v každém bodě $y$ vlastní derivaci $\frac{1}{g(y)}$.
[34] Co znamená, že obraz je interval? Intuitivně to, že obraz „nemá žádnou díru“. Obsahem Bolzanovy věty je v podstatě právě to, že v obrazu spojité funkce nemohou být „díry“: tj. *vlastnost nabývání mezihodnot*.

Protože $B - C \in \mathbb{R}$, můžeme definovat (lepit)

$$y(x) = \begin{cases} \tilde{y}(x), & \text{pokud } x \in (A - C, B - C), \\ b, & \text{pokud } x \geqslant B - C. \end{cases}$$

Je vidět, že $\mathbb{H}_y = (a, b]$, takže si stačí uvědomit, že $y$ skutečně je řešením (A). Je zřejmé, že $y$ je řešením na $(A - C, B - C)$, neboť se na tomto intervalu rovná (řešení) $\tilde{y}$. Je řešením i na intervalu $(B - C, \infty)$, protože v předpokladech pozorování stojí $g(b) = 0$. (Takže $y'(x) = (b)' = 0 = g(b) = g(y(x))$ pro všechna $x \in (B - C, \infty)$, a rovnice je na tomto intervalu splněna.)

*Korektnost lepení:* Musíme tedy pouze ověřit, že rovnice je splněna v „bodě slepu" $B - C$, tj. že $y'(B - C) = g(y(B - C))$; hodnotu na pravé straně přitom známe: $g(y(B - C)) = g(b) = 0$, takže vlastně chceme dokázat, že $y'(B - C) = 0$.

Triviálně je vidět, že $y'_+(B - C) = 0$, neboť $y$ je konstantní na $[B - C, \infty)$. Podívejme se tedy na derivaci zleva: funkce $y$ je evidentně spojitá, a to i v bodě $B - C$, takže podle Věty o limitě derivace a Věty o limitě složené funkce (1. semestr) platí

$$y'_-(B - C) \overset{\text{VOLD}}{=} \lim_{x \to B - C_-} y'(x) \overset{\text{(A)}}{=} \lim_{x \to B - C_-} g(y(x)) \overset{\text{VOLSF}}{=} \lim_{y \to b_-} g(y) \overset{g \text{ spoj.}}{=} g(b) = 0.$$

Protože $y'_-(B - C) = y'_+(B - C) = 0$, je $y'(B - C) = 0$, a jsme hotovi: slepená funkce $y$ je řešením naší autonomní rovnice. Analogicky bychom mohli dokázat i zbývající dva body pozorování, tedy lepení na $a$ a lepení na $a$ i $b$ (ve druhém případě bychom museli funkci $y$ definovat pomocí vzorce o třech řádcích (dva body slepu). □

**2.36 Poznámka.** Předchozí důkaz má dvě části:

(1) Uvědomit si, že vůbec přichází v úvahu lepit: nekonstantní řešení $\tilde{y}(x) = G^{-1}(x + C)$ totiž „dosáhne hladiny $b$" ve vlastním bodě. Přesněji, $\lim_{x \to B - C_-} \tilde{y}(x) = b$, kde $B - C \in \mathbb{R}$. K tomu používáme předpoklad $B < \infty$; konstanta $C$, která reprezentuje pravolevý posun našeho řešení (viz též Lemma 2.29), je zde naopak nepodstatná a můžeme si klidně představovat, že $C = 0$.

(2) Vlastní lepení: zde je podstatný předpoklad spojitosti $g$ (tj. pravé strany rovnice) a nejdůležitější složkou je Věta o limitě derivace. Že je vůbec možné „spojitě lepit" je jasné a priori: máme jednu část, $\tilde{y}$, která má v jistém vlastním bodě limitu zleva $b$ a druhou část, konstantní $b$, která má v tomtéž bodě limitu zprava samozřejmě také $b$. Když na sebe tyto dvě spojité funkce napojíme, dostaneme spojitou funkci. Otázka je, jestli tato nová funkce splňuje naši rovnici i v onom bodě slepu.

V druhé části důkazu se dokazuje, že tomu tak je. Je dobré si všimnout, že tento typ argumentu s Větou o limitě derivace bude fungovat ve všech situacích, v nichž pravá strana rovnice je spojitá. V praxi tedy lepení obvykle necháváme bez komentáře, měli bychom však mít na paměti, že za ním je argument tohoto typu.

**2.37 Lemma.** *Buď $g$ spojitá na $[a, b]$ a kladná na $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$. Nechť $d \in (a, b)$ („pomocný bod"). Buď $y$ maximální řešení (A), pro nějž $(a, b) \subseteq \mathbb{H}_y$. Pak platí*

*(i)* $b \in \mathbb{H}_y \;\Leftrightarrow\; \int_d^b \frac{1}{g} < \infty$;

*(ii)* $a \in \mathbb{H}_y \;\Leftrightarrow\; \int_a^d \frac{1}{g} < \infty$.

*Důkaz.* Dokážeme první bod. □

### 2.6.2 Kvalitativní řešení autonomních rovnic

## 2.7 Rovnice se separovanými proměnnými

## 2.8 Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Co jsou to lineární rovnice a proč *zrovna je* umíme spolehlivě řešit? Odpověď na tuto otázku je celkem jasná v případě, že se jedná o lineární rovnice algebraické, v nichž neznámá je *číslo* (a nikoliv *funkce* jako v našem případě): Neznámá se totiž v rovnici „vyskytuje jednoduchým způsobem“, a dá se tedy snadno „vypočítat“.[35] Obtížněji řešitelné rovnice se poznají podle toho, že se v nich neznámá vyskytuje jako argument složitějších funkcí.

Podobně jako u rovnic číselných to funguje i u těch diferenciálních. Ale pozor, u diferenciální rovnice – třeba rovnice tvaru $y' = f(x, y)$ – máme náhle dvě „proměnné“, a to $x$ a $y$, místo jedné. I zde ale platí, že důležitějším faktorem, který rozhoduje o „složitosti“ rovnice, je způsob, jakým se v ní vyskytuje *neznámá*, tj. $y$.

Lineární diferenciální rovnice mají výhodu, že se v nich neznámá $y$ vyskytuje relativně „jednoduchým způsobem“, a právě díky tomu jsou tyto rovnice vcelku dobře řešitelné. Obvykle vlastně záleží jen na naší schopnosti počítat integrály.[36]

**Jak poznáme lineární DR:** K tomu se hodí pomocný pojem *stupně členu* v rovnici. Jak víme, *členy* v rovnici jsou jednotlivé sčítance, které se v ní vyskytují; každý z těchto sčítanců přitom může vzniknout jako součin několika výrazů. Pro určení stupně daného členu stačí sečíst všechny mocniny u $y, y', y'', y''', \ldots$; takže například stupně členů $yx^2$, $y'y''$, $y^3y''x$ jsou 1, 2, 4. Pokud se v daném členu $y$ (ani žádná derivace) vůbec nevyskytuje, definujeme jeho stupeň jako 0. A pokud se $y$ (nebo některá derivace) vyskytuje jako argument složitější funkce (jako třeba $\sin y$ nebo $\ln(y')$), necháme stupeň onoho členu bez definice.

Lineární diferenciální rovnice se pozná podle toho, že obsahuje členy nejvýše *prvního stupně*.

**2.38 Příklad.** Rozhodněte, které z následujících rovnic jsou lineární:

(a) $y'' + y = 0$;

(b) $y' = 1 + y^2$;

(c) $y' + 5x^2y = e^x$;

(d) $y + y'y + x = 0$;

(e) $y'' + y + x = 1 + e^{y'}$;

(f) $x^2y''' + \sin x \cdot y'' + y = e^x + 1337$.

*Řešení:* Lineární jsou právě rovnice (a), (c), (f). Všechny ostatní uvedené rovnice obsahují buďto nějaký člen stupně vyššího než 1 nebo člen nedefinovaného stupně. △

Podívejme se nyní na jeden možný způsob řešení nejjednodušších lineárních DR. Budeme uvažovat lineární rovnici 1. řádu *s konstantními koeficienty* (vysvětlení viz níže).

**2.39 Příklad.** Řešme úlohu s počáteční podmínkou $y' + 5y = 7$, $y(2) = 3$. Tato rovnice je evidentně lineární a je prvního řádu; pro ilustraci ji však vyřešíme přirozeným způsobem[37], aniž bychom aplikovali standardní algoritmus k řešení těchto rovnic, který si ukážeme dále.[38] Úpravami postupně dostáváme:

[35] Totéž platí i pro soustavy lineárních rovnic s více neznámými. I v nich jsou neznámé vzájemně „propleteny“ jednoduchým způsobem, takže se soustava dá jednoduše řešit.

[36] Samozřejmě i zde můžeme narazit: jak víme z druhého semestru, úlohy na výpočty integrálu nejsou (narozdíl od počítání derivací) tak docela algoritmické; často je potřeba mít nápad – a často to prostě vůbec nejde. I tak se ale dá říct, že jsme schopni integrovat poměrně širokou škálu funkcí.

[37] standardním způsobem řešení rovnic se separovanými proměnnými

[38] metoda variace konstanty a metoda integračního faktoru

$$y' = 7 - 5y \qquad y \equiv \tfrac{7}{5} \text{ je stacionární řešení.}$$

Pokud $y \neq \frac{7}{5}$, je dále ekvivalentní:

$$\frac{y'}{7-5y} = 1 \qquad \text{Nyní aplikujeme } \textstyle\int (\dots)\,\mathrm{d}x.$$

Je dobré si rozmyslet, jak přesně chápat integraci levé strany rovnice podle proměnné $x$; při povrchním pohledu se totiž zdá, že levá strana na $x$ vůbec nezávisí. My ovšem víme, že $y$ je ve skutečnosti funkce $y(x)$, takže vlevo integrujeme funkci $\frac{y'(x)}{7-5y(x)}$, a dává tedy dobrý smysl použít sustituci podle vzoru $y = y(x)$, $\mathrm{d}y = y'(x)\,\mathrm{d}x$. Pak už je pochopitelné, že nám vyjde toto:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{5}\ln|7-5y| &= x + C \\ |7-5y| &= e^{-5x-5C} \\ 7-5y &= \pm e^{-5C}\cdot e^{-5x} \qquad \text{Položme } K = \pm e^{-5C}. \end{aligned}$$

Nyní si všimněme, že $K$ může, podle naší volby $+$ či $-$ a naší volby konstanty $C$, nabývat všech nenulových hodnot, tj. $K \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Pro $K = 0$ ale dostáváme $7-5y = 0$, tedy $y = 7/5$, což je námi dříve zakázané (kvůli dělení nulou) stacionární řešení. Nyní ho tedy zahrneme zpět do našich úvah tím, že povolíme i $K = 0$:

$$\begin{aligned} 7-5y &= K\cdot e^{-5x}, && K\in\mathbb{R}, \\ y(x) &= -\frac{1}{5}\big(K\cdot e^{-5x} - 7\big), && x\in\mathbb{R},\ K\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Za vysvětlení možná stojí poslední zápis „$x \in \mathbb{R},\ \ K \in \mathbb{R}$“. To je potřeba chápat tak, že pro libovolné $K \in \mathbb{R}$ nám výše uvedený vzorec pro $y(x)$ dá nějaké jedno řešení naší rovnice; toto řešení je definováno a rovnici splňuje ve všech bodech $x \in \mathbb{R}$. Těch řešení je tedy nekonečně mnoho – pro každou hodnotu $K$ máme jiné a to je (v případě této rovnice) definováno na celém $\mathbb{R}$.

Zbývá ze všech nalezených řešení najít to, které splňuje danou počáteční podmínku $y(2) = 3$; jde tedy o to určit příslušnou konstantu $K$. To je snadné (do předpisu pro řešení dosadíme $x = 2$):

$$3 = y(2) = -\frac{1}{5}\big(K\cdot e^{-10} - 7\big),$$

odkud už snadno vypočítáme, že $K = -8e^{10}$, a řešení naší úlohy s počáteční podmínkou je tedy tato konkrétní funkce definovaná pro $x \in \mathbb{R}$:

$$y(x) = -\frac{1}{5}\big(-8e^{10}\cdot e^{-5x} - 7\big) = \frac{8\cdot e^{10-5x}+7}{5}. \qquad \triangle$$

Mohlo by se tedy zdát, že lineární rovnice se dají snadno řešit docela přirozeným postupem, při němž vlastně není tolik co vymýšlet. Rychle se však ukáže, že nové, pro lineární rovnice specifické, způsoby řešení jsou potřeba: třeba hned rovnici

$$y' + 5y = 7x, \tag{2.21}$$

která se nezdá o mnoho těžší než ta, kterou jsme před chvílí vyřešili, už analogickým postupem nezdoláme. Skutečně, dostali bychom totiž

$$\frac{y'}{7x-5y} = 1$$

a v tento okamžik se zasekneme, protože vůbec není jasné, jak bychom měli integrovat levou stranu podle $x$: explicitní přítomnost proměnné $x$ nám totiž zabraňuje snadno použít substituci, jako jsme to učinili v předchozím příkladě.

Je tedy patrné, že rovnici (2.21) – pokud to vůbec rozumně lze – musíme řešit jiným způsobem. Naštěstí to skutečně lze a dokonce existují hned dvě celkem jednoduché metody, jak tuto (a taky všechny ostatní lineární rovnice 1. řádu) řešit:

- metoda variace konstanty;
- metoda integračního faktoru.

Obě metody probereme, nejprve si však upřesníme, jakými rovnicemi se vlastně chceme zabývat. A zmíníme něco málo související teorie.

### 2.8.1 Vsuvka o prostorech funkcí

**2.40 Značení.** Buďte $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $k \in \mathbb{N}$ a $I \subseteq \mathbb{R}$ libovolný interval. Používáme následující značení množin funkcí.

- Značíme $C((a,b)) = \{f : (a,b) \to \mathbb{R} :\ f \text{ je spojitá na } (a,b)\}$ a analogicky pro jiné typy intervalů (uzavřený, polouzavřený). Lze též psát $C(I)$ pro množinu všech funkcí spojitých na intervalu $I$.
- Značíme $C^1((a,b)) = \{f : (a,b) \to \mathbb{R} :\ f' \text{ je spojitá na } (a,b)\}$. Je zřejmé, že ekvivalentně lze psát $C^1((a,b)) = \{f : (a,b) \to \mathbb{R} :\ f' \in C((a,b))\}$.
- Značíme $C^k((a,b)) = \{f : (a,b) \to \mathbb{R} :\ f^{(k)} \in C((a,b))\}$. (Jde o zobecnění předchozího případu; pro $k = 1$ jsem tedy napsal tutéž definici dvakrát.)
- Značíme $C^\infty((a,b)) = \{f : (a,b) \to \mathbb{R} :\ \forall k \in \mathbb{N} :\ f^{(k)} \in C((a,b))\}$.

Interval jiného typu (uzavřený, polouzavřený) můžeme uvažovat ve všech případech, při práci s derivací v krajních bodech je pochopitelně potřeba uvažovat derivace jednostranné. Pokud máme, jako výše, otevřený interval $(a,b)$, je zvykem vynechávat jeden pár závorek a psát $C(a,b)$ místo $C((a,b))$ apod.

Tyto definice by neměly být těžké na pochopení, možná ale pomůže je přeložit do češtiny:

- $C(a,b)$ je množina všech funkcí spojitých na $(a,b)$.[39]
- $C^k(a,b)$ je množina všech funkcí se spojitou $k$-tou derivací na $(a,b)$.
- $C^\infty(a,b)$ je množina všech funkcí se spojitými derivacemi všech řádů.

**2.41 Poznámka.** Právě uvedené značení je zcela standardní a můžete na něj narazit v různých oblastech vyšší matematiky. Ve skutečnosti existuje celá řada dalších tříd funkcí, které se značí různými jinými písmenky s indexy (třeba prostory $L_p$, $W^{k,p}$, $H^p$, Lip, $C_0$, $C^\omega$, $D$, atd.). Tyto prostory funkcí (a řada dalších) mají různorodé vlastnosti a tomu odpovídá různorodost jejich aplikací.

**2.42 Pozorování.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$. Platí následující inkluze:*

$$C(a,b) \supseteq C^1(a,b) \supseteq C^2(a,b) \supseteq \ldots \supseteq C^k(a,b) \supseteq \ldots \supseteq C^\infty(a,b).$$

[39] A definovaných přesně na $(a,b)$; tatáž poznámka platí i na zbývající případy.

*Důkaz.* Dokažme první z uvedených inkluzí $C^1(a,b) \subseteq C(a,b)$; máme tedy dokázat, že kdykoliv $f \in C^1(a,b)$, pak $f \in C(a,b)$.[40] Budiž tedy dána libovolná funkce $f \in C^1(a,b)$, tj. (podle definice $C^1(a,b)$) libovolná funkce se spojitou první derivací. Ovšem jestliže $f'$ je spojitá na $(a,b)$, je automaticky v každém bodě konečná neboli vlastní.[41] Má-li funkce v nějakém bodě vlastní derivaci, je v tom bodě spojitá (1. semestr), takže $f$ je spojitá v každém bodě $(a,b)$, tj. $f \in C(a,b)$, a jsme hotovi.

Zcela stejně se dokáže libovolná další inkluze tvaru $C^k(a,b) \subseteq C^{k-1}(a,b)$ ($k \geqslant 2$): Je-li $f \in C^k$, pak $f^{(k)} = \left(f^{(k-1)}\right)'$ je vlastní (díky své spojitosti), takže $f^{(k-1)}$ je spojitá (opět podle onoho tvrzení z 1. sem.), tj. $f \in C^{k-1}(a,b)$.

Zbývá dokázat inkluzi poslední, tj. že $C^\infty(a,b) \subseteq C^k(a,b)$ pro libovolné $k \in \mathbb{N}$. K tomu si stačí pořádně uvědomit, jak je množina $C^\infty(a,b)$ definovaná:

$$\begin{aligned}
C^\infty(a,b) &= \{f : (a,b) \to \mathbb{R} :\ \forall k \in \mathbb{N} : f^{(k)} \in C(a,b)\} \\
&= \{f : (a,b) \to \mathbb{R} :\ \forall k \in \mathbb{N} : f \in C^k(a,b)\} \\
&= \bigcap_{k=1}^{\infty} \{f : (a,b) \to \mathbb{R} :\ f \in C^k(a,b)\} \\
&= \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(a,b).
\end{aligned}$$

Z toho už je požadovaná inkluze jasná, protože průnik je podmnožinou každé z „pronikaných“ množin. Všimněte si, že první uvedená rovnost je prostě definice $C^\infty(a,b)$ a poslední rovnost je zcela triviální (na předposledním řádku máme prostě jen nešikovně zapsané totéž, co na řádku posledním).

Za pozornost stojí pouze rovnost třetí, kterou je dobré si pořádně rozmyslet. Viz následující poznámku. $\square$

**2.43 Poznámka.** *Množina všech prvků splňujících nějakou „sadu podmínek“ je rovna průniku odpovídající „sady množin“, z nichž každá je definována jednou z těchto podmínek.*

Jako příklad na toto tvrzení lze použít následující zřejmou rovnost:

$$\{x \in \mathbb{R} : x \geqslant 1 \land x < 5\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant 1\} \cap \{x \in \mathbb{R} : x < 5\}.$$

Zde na levé straně máme množinu všech prvků $x$, které současně splňují dvě podmínky (a to $x \geqslant 1$ a $x < 5$). Napravo máme průnik dvou množin, z nichž jedna je určena první podmínkou a druhá druhou podmínkou. V tomto kontextu je zřejmé, že rovnost platí, zvlášť pokud ji napíšeme takto:

$$[1,5) = [1,\infty) \cap (-\infty,5).$$

Podmínky, které uvažujeme, však pochopitelně nemusí být pouze dvě, může jich být i nekonečně mnoho; přesněji, pomocí univerzálního kvantifikátoru jsme schopni zapsat nekonečně mnoho vztahů do jediného výroku. Například platí (rozmyslete si):

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} :\ \forall n \in \mathbb{N} : x < \frac{1}{n}\right\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x \in \mathbb{R} : x < \frac{1}{n}\right\}. \tag{2.22}$$

[40] Připomeňte si, že $A \subseteq B$ znamená totéž, co výrok $\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B$.

[41] Spojitost „funkcí s nekonečnými hodnotami“ jsme nijak nedefinovali a nikdy ji neuvažujeme. Jestliže se tedy v definici $C^1(a,b)$ požaduje spojitost derivací, myslí se tím automaticky i to, že tyto derivace jsou konečné.

Pojďme ještě o kousek dál a definujme nyní druhou množinu reálných čísel pomocí negace podmínky použité v (2.22). Je jasné, že musíme dostat komplement množiny $A$ do $\mathbb{R}$, tj. $\mathbb{R} \setminus A$. Platí[42]

$$B = \left\{x \in \mathbb{R}\colon \ \exists n \in \mathbb{N}\colon x \geqslant \frac{1}{n}\right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x \in \mathbb{R}\colon x \geqslant \frac{1}{n}\right\}.$$

Vidíte tedy, a snadno si rozmyslíte, že zatímco univerzální kvantifikátor $\forall$ „se přeloží" na $\bigcap$, existenční kvantifikátor $\exists$ „se přeloží" na $\bigcup$. Z cvičných důvodů si také rozmyslete, že $A = (-\infty, 0]$ a $B = (0, \infty)$.

Vrátíme-li se nyní k předchozímu důkazu, ona diskutovaná rovnost

$$\{f\colon (a,b) \to \mathbb{R}\colon \ \forall k \in \mathbb{N}\colon \ f \in C^k(a,b)\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{f\colon (a,b) \to \mathbb{R}\colon \ f \in C^k(a,b)\}$$

by už nyní měla být zřejmá.

**2.44 Lemma.** *Opatříme-li množiny $C(a,b)$, $C^k(a,b)$ ($k \in \mathbb{N}$), $C^\infty(a,b)$ přirozenými operacemi $+$ (sčítání funkcí), $c\cdot$ (násobení skalárem), jedná se o vektorové prostory (roli $0$ hraje pochopitelně konstantní nulová funkce na $(a,b)$).*

*Důkaz.* Všechny uvedené množiny jsou podmnožinami množiny všech funkcí intervalu $(a,b)$ do $\mathbb{R}$, o níž je snadné ukázat, že (opatříme-li ji uvedenými operacemi) jde o vektorový prostor. (Podrobné ověření všech axiomů vektorového prostoru je triviální cvičení z lineární algebry – stačí prostě projít ty axiomy jeden po druhém a ujistit se, že platí.) Jak známo z lineární algebry, libovolná podmnožina vektorového prostoru je sama vektorovým prostorem, právě když je uzavřená na obě vektorové operace; chceme-li tedy dokázat, že například $C(a,b)$ je vektorový prostor, stačí nám uvědomit si, že kdykoliv $f, g \in C(a,b)$ a $c \in \mathbb{R}$, pak $f + g \in C(a,b)$ a $c \cdot f \in C(a,b)$. Množina $C(a,b)$ tedy je uzavřená na vektorové operace, takže je vektorovým prostorem. (Všimněte si, že zde používáme aritmetiku limit, respektive „aritmetiku spojitosti": součet spojitých je spojitá apod.)

Ukážeme nyní, že pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ je $C^k(a,b)$ vektorový prostor. K tomu si indukcí dokážeme jednoduché pomocné tvrzení: pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ platí $(f+g)^{(k)} = f^{(k)} + g^{(k)}$ a $(c \cdot f)^{(k)} = cf^{(k)}$. Nuže, pro $k = 1$ tyto vzorce známe z prvního semestru. Předpokládejme tedy, že vzorce platí pro jisté $k$ a dokažme jejich platnost pro $k+1$:

$$(f+g)^{(k+1)} = \left((f+g)^{(k)}\right)' \overset{\text{I.P.}}{=} \left(f^{(k)} + g^{(k)}\right)' = \left(f^{(k)}\right)' + \left(g^{(k)}\right)' = f^{(k+1)} + g^{(k+1)}.$$

Podobně také

$$(c \cdot f)^{(k+1)} = \left((c \cdot f)^{(k)}\right)' \overset{\text{I.P.}}{=} \left(c \cdot f^{(k)}\right)' = c \cdot \left(f^{(k)}\right)' = c \cdot f^{(k+1)}.$$

Vezměme tedy libovolné funkce $f, g \in C^k(a,b)$ a libovolný skalár $c \in \mathbb{R}$. Podle definice je $f^{(k)}, g^{(k)} \in C(a,b)$, takže i

$$(f+g)^{(k)} = f^{(k)} + g^{(k)} \in C(a,b)$$

a stejně i $(c \cdot f)^{(k)} = c \cdot f^{(k)} \in C(a,b)$, což ovšem (opět podle definice) znamená přesně to, že funkce $f + g$ a $c \cdot f$ jsou prvky $C^k(a,b)$, takže množina $C^k(a,b)$ je uzavřená na vektorové operace, a jde tedy o vektorový podprostor (vektorového prostoru všech reálných funkcí na $(a,b)$).

Zbývá dokázat, že i $C^\infty(a,b)$ je vektorový prostor. Buďte tedy dány libovolné funkce $f, g \in C^\infty(a,b)$ a libovolný skalár $c \in \mathbb{R}$. Máme

$$f, g \in C^\infty(a,b) = \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(a,b),$$

[42] Připomeňte si, že výrok s kvantifikátory negujeme tak, že každý z kvantifikátorů nahradíme „opačným" a znegujeme závěrečný výrok.

tj., je-li dáno libovolné $k \in \mathbb{N}$, pak $f, g \in C^k(a,b)$. Protože (jak jsme výše dokázali indukcí) $C^k(a,b)$ je vektorový prostor, jest $f + g, c \cdot f \in C^k(a,b)$. To platí pro libovolné $k \in \mathbb{N}$, takže celkem $\forall k \in \mathbb{N}\colon f + g, c \cdot f \in C^k(a,b)$, odkud

$$f + g, c \cdot f \ \in \ \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(a,b) = C^\infty(a,b).$$

I množina $C^\infty(a,b)$ je tak uzavřená na vektorové operace, jde tedy o vektorový prostor, a důkaz je dokončen. □

## 2.8.2 O LDR 1. řádu obecně

Nyní si upřesníme, jaké přesně rovnice nás budou zajímat:

**2.45 Úloha** (Lineární diferenciální rovnice 1. řádu)**.** Nechť $p$, $q$ jsou spojité funkce na jistém intervalu $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ (kde $a, b \in \mathbb{R}^*$). Budeme řešit rovnice tvaru

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{L1}$$

Chceme umět řešit rovnice ve tvaru (L1) a případně některé další, které se do tvaru (L1) dají převést. Nejprve dvě základní tvrzení o vlastnostech řešení (L1):

**2.46 Lemma.**

*(i) Nechť $y$ je řešení rovnice* (L1) *na $(a,b)$. Pak $y \in C^1(a,b)$.*

*(ii) Nechť $p \in C(a,b)$ a zobrazení $L$ je pro $y \in C^1(a,b)$ definováno předpisem*

$$L(y) = y' + py.$$

*Pak $L\colon C^1(a,b) \to C(a,b)$ je lineární zobrazení (mezi vektorovými prostory funkcí).*

*Důkaz.* (i): Předpokládejme, že pro $x \in (a,b)$ je splněna rovnost

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x).$$

(Tj. $y$ je řešení (L1) na intervalu $(a,b)$.) Pro všechna $x \in (a,b)$ tedy platí

$$y'(x) = \underbrace{q(x)}_{\in\mathbb{R}} - \underbrace{p(x)}_{\in\mathbb{R}} \cdot \underbrace{y(x)}_{\in\mathbb{R}} \in \mathbb{R},$$

neboli $y'(x)$ je vlastní, a $y$ je proto spojitá, na $(a,b)$.

Nyní se na naši rovnici podívejme znovu, tentokrát bez proměnných. Jest

$$y' = \underbrace{q}_{\text{spoj.}} - \underbrace{p}_{\text{spoj.}} \cdot \underbrace{y}_{\text{spoj.}},$$

takže (podle „aritmetiky spojitosti“) je $y'$ spojitá na $(a,b)$, tj. $y \in C^1(a,b)$.

(ii): Je jasné, že kdykoliv $y \in C^1(a,b)$, pak $L(y) = y' + p \cdot y \in C(a,b)$ (opět díky „aritmetice spojitosti“). Tedy skutečně $L\colon C^1(a,b) \to C(a,b)$. Zbývá tedy pouze ověřit linearitu $L$.

Buďte tedy $y, z \in C^1(a,b)$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pak platí

$$\begin{aligned} L(\alpha y + \beta z) &= \big(\alpha y + \beta z\big)' + p \cdot \big(\alpha y + \beta z\big) \\ &= \alpha y' + \beta z' + \alpha p y + \beta p z \\ &= \alpha(y' + py) + \beta(z' + pz) \\ &= \alpha L(y) + \beta L(z). \end{aligned}$$

□

**2.47 Věta.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$ a nechť $p, q \in C(a, b)$, $x_0 \in (a, b)$ a $y_0 \in \mathbb{R}$. Pak existuje právě jedno maximální řešení rovnice (L1) s počáteční podmínkou $y(x_0) = y_0$. Toto řešení je definované na celém intervalu $(a, b)$.*

**2.48 Poznámka.** Podrobný důkaz této věty vynecháme, v hrubých rysech se nicméně dokazuje takto: Jednoznačnost a existence řešení je snadným důsledkem Picardovy věty (rozmyslete si).

Důležitá součást tvrzení této věty však je onen dodatek: řešení je definováno na celém intervalu $(a, b)$, tedy na maximálním možném intervalu, kde to vůbec přichází v úvahu (vzhledem k definičnímu oboru $(a, b)$ funkcí $p, q$, které v rovnici vystupují). K důkazu toho jsou zapotřebí dvě složky:

- Maximální řešení se nemůže „zastavit někde uprostřed“; musí mít buďto nekonečnou limitu, nebo musí být definováno až do krajního bodu intervalu $(a, b)$. Formálněji se toto (poněkud nepřesné tvrzení) dá říci tak, že maximální řešení „na obou koncích opustí“ libovolný uzavřený omezený obdélník obsažený v množině $(a, b) \times \mathbb{R}$.

- Řešení nemůže mít singularitu uvnitř intervalu $(a, b)$; singularita (tj. nekonečná limita) může být pouze u krajních bodů toho intervalu. Tento fakt se dokáže pomocí šikovného odhadu rychlosti růstu: řešení lineární rovnice zkrátka nemůže růst (klesat) dostatečně rychle na to, aby se dostalo do nekonečna (minus nekonečna) uvnitř $(a, b)$.[43] Tento odhad se nazývá Gronwallovo lemma a my ho z časových důvodů vynecháváme.

### 2.8.3 Metoda integračního faktoru

### 2.8.4 Metoda variace konstanty

## 2.9 Lineární diferenciální rovnice vyšších řádů

V tomto oddílu budeme studovat následující diferenciální rovnici:[44]

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f(t), \tag{Ln}$$

kde $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ a funkce $f$ je spojitá na jistém intervalu $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ (připouštíme $a, b \in \mathbb{R}^*$). Nejučenější název pro tuto rovnici je *lineární (obyčejná) diferenciální rovnice $n$-tého řádu s konstantními koeficienty*. Pokud $f \equiv 0$, můžeme navíc představit přívlastek *homogenní*, tj. s nulovou pravou stranou.

Pojďme probrat ostatní slova ve výše uvedeném dlouhém názvu rovnice (Ln). *Linearita* je obsahem následujícího lemmatu: levá strana rovnice se chová jako lineární zobrazení, které funkci $y$ přiřadí jinou funkci. Rovnice je *obyčejná*, protože neznámou je funkce jediné proměnné (jiné rovnice nás ani nezajímají, takže tento přívlastek uvádím v závorce). Jde o diferenciální rovnici *$n$-tého řádu*, neboť nejvyšší derivace v rovnici se vyskytující je derivace $n$-tá. A konečně rovnice má *konstantní koeficienty* $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$. Obecněji bychom místo čísel mohli uvažovat (nekonstantní) funkce; taková situace je však přirozeně složitější, a my se jí nebudeme zabývat.

**2.49 Lemma.**

*(i) Každé řešení rovnice (Ln) je třídy $C^n$ na svém definičním oboru.*

*(ii) Zobrazení $L$, které funkci $y$ přiřadí funkci*

$$L(y) = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y, \tag{2.23}$$

*je lineární, $L\colon C^n(a, b) \to C(a, b)$.*

---

[43] Snad ani není potřeba zde konstatovat, že toto je pouze nepřesné vyjádření, které, doufejme, dává aspoň nějakou představu.

[44] V tomto oddílu budeme nezávisle proměnnou značit $t$ místo $x$.

*Důkaz.* Postup je stejný jako v případě Lemmatu 2.46. Budiž $y$ nějaké řešení rovnice (Ln) definované na intervalu $(a,b)$. Tj. pro každé $t \in (a,b)$ jest

$$y^{(n)}(t) = -a_{n-1}y^{(n-1)}(t) - \ldots - a_1 y'(t) - a_0 y(t) + f(t),$$

odkud $\big(y^{(n-1)}(t)\big)' = y^{(n)}(t) \in \mathbb{R}$, tj. funkce $y^{(n-1)}$ má na $(a,b)$ vlastní derivaci, a je tedy spojitá. To jinak řečeno znamená, že $y \in C^{n-1}(a,b)$, a podle Pozorování 2.42 je spojitá nejen $y^{(n-1)}$, ale i všechny nižší derivace a také sama funkce $y$. Protože (podle předpokladů, které jsme uvedli hned pod rovnicí (Ln)) je spojitá i funkce $f$, je spojitá funkce na pravé straně, a tedy i ta na straně levé, v platné rovnosti

$$y^{(n)} = f - a_{n-1}y^{(n-1)} - \ldots - a_1 y' - a_0 y.$$

To ovšem znamená, že skutečně $y \in C^n(a,b)$, jak jsme chtěli dokázat.

Druhý bod lemmatu je jasný z „linearity derivování“, tj. ze vzorce $(\alpha g + \beta h)' = \alpha g' + \beta h'$, a z faktu, že pro libovolnou funkci $y \in C^n(a,b)$ (nikoliv nezbytně řešení naší rovnice) jsou všechny sčítance vpravo v rovnosti (2.23) (alespoň) spojité funkce (takže i $L(y)$ je spojitá podle „aritmetiky spojitosti“). □

**2.50 Věta** (Existence a jednoznačnost řešení (Ln))**.** *Nechť $f \in C(a,b)$ a $t_0 \in (a,b)$ (kde $a,b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$). Nechť jsou dále dána čísla $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1} \in \mathbb{R}$. Pak existuje právě jedno maximální řešení $y$ rovnice* (Ln) *splňující počáteční podmínky*

$$y(t_0) = z_0, \quad y'(t_0) = z_1, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = z_{n-1}.$$

*Toto maximální řešení je zaručeně definováno na celém intervalu $(a,b)$.*

*Důkaz.* Vynecháme. □

**2.51 Poznámka.** Všimněme si, že pro $n = 1$ je poslední věta slabší než Věta 2.47, která připouští i nekonstantní koeficienty.

## 2.9.1 Prostor řešení

Nyní známe některé základní vlastnosti rovnice (Ln). Zejména jsme upřesnili, co vlastně znamená její *linearita*, a uvedli jsme některé vlastnosti jejích řešení (existují a vždy jsou třídy $C^n$). Protože tušíme, že řešení bude obvykle „mnoho“, přišel nyní čas se zamyslet nad tím, jak se v nich vyznat. Učeně řečeno: popíšeme strukturu množiny řešení rovnice (Ln).

**2.52 Poznámka.** Buďte $X, Y$ vektorové prostory a $L\colon X \to Y$ lineární zobrazení. Pak

$$\operatorname{Ker} L = L^{-1}(\{0\}) = \{x \in X : L(x) = 0\}, \quad \text{„jádro } L\text{“},$$

je vektorový podprostor prostoru $X$.

*Důkaz.* Jde o snadné cvičení z lineární algebry. Jest $\operatorname{Ker} L \subseteq X$ a $X$ je vektorový prostor, takže stačí dokázat uzavřenost množiny $\operatorname{Ker} L$ na vektorové operace prostoru $X$. Nechť tedy $x, y \in \operatorname{Ker} L$ a $\alpha, \beta$ jsou skaláry. Pak

$$L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0,$$

a $\alpha x + \beta y \in \operatorname{Ker} L$. □

Pro naše účely bude $X = C^n(\mathbb{R})$, $Y = C(\mathbb{R})$ a $L\colon X \to Y$ bude definované (2.23), tj. bude to levá strana studované rovnice (Ln). S těmito definicemi rovnost

$$L(y) = 0$$

není nic jiného než obecná homogenní lineární DR $n$-tého řádu s konst. koef. (tj. verze (Ln) s nulovou pravou stranou $f \equiv 0$). Podle definice jádra lineárního zobrazení je $\operatorname{Ker} L = \{y \in X : L(y) = 0\}$ množina všech řešení této (homogenní) rovnice, *která jsou prvky prostoru* $X = C^n(\mathbb{R})$. Podle Věty 2.50 jsou ale *všechna* maximální řešení rovnice $L(y) = 0$ definována na celém $\mathbb{R}$[45] a jsou třídy $C^n$ podle Lemmatu 2.49, takže $\operatorname{Ker} L$ obsahuje skutečně všechna.

**2.53 Věta.** *Nechť $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ (koeficienty). Všechna maximální řešení homogenní rovnice*

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0 \tag{Hn}$$

*jsou definována na $\mathbb{R}$ a společně tvoří vektorový podprostor prostoru $C^n(\mathbb{R})$. Tento podprostor má dimenzi $n$.*

*Nechť $y_p$ je nějaké (konkrétní) maximální řešení rovnice* (Ln) *(„partikulární řešení"). Pak množina všech maximálních řešení rovnice* (Ln) *je*

$$\big\{y_p + y_h : y_h \text{ je řešení homogenní rovnice (Hn)}\big\}.$$

**2.54 Poznámka.** Nejpodstatnějším sdělením první části věty je, že prostor řešení má dimenzi přesně $n$, tedy rovnu řádu rovnice. Skutečnost, že řešení homogenní rovnice tvoří vektorový prostor, už víme z Poznámky 2.52.

Druhá část věty říká přesně to, že libovolné maximální řešení („nehomogenní") rovnice (Ln) je ve tvaru součtu $y_p + y_h$. Abychom tedy našli *všechna* maximální řešení, stačí k tomu dvě věci:

- najít *jedno* maximální řešení $y_p$ této nehomogenní rovnice; to se zove „partikulární řešení";
- najít *všechna* řešení příslušné homogenní rovnice (Hn).

*Důkaz.* Označme $L(y)$ levou stranu rovnice (Hn) (stejně jako výše). Podle Lemmatu 2.49 je $L : C^n(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$ lineární zobrazení. Totéž lemma nám říká také to, že každé řešení (Hn) je třídy $C^n$ na svém definičním oboru. Věta 2.50 dále implikuje, že každé maximální řešení (Hn) je definované na $\mathbb{R}$. Z těchto informací celkem vyplývá, že všechna maximální řešení naší rovnice (Hn) jsou prvky $C^n(\mathbb{R})$, jsou tedy prvky definičního oboru zobrazení $L$; a protože jde o řešení rovnice (Hn), každé z nich splňuje rovnost $L(y) = 0$. Tj.

$$\operatorname{Ker} L = \{y \in C^n(\mathbb{R}) : L(y) = 0\} = \{y : y \text{ je maximální řešení (Hn)}\}.$$

Podle Poznámky 2.52 tedy množina všech maximálních řešení (Hn) tvoří vektorový prostor (neboť jádro libovolného lineárního zobrazení je vektorový prostor).[46]

Pojďme nyní dokázat, že $\dim(\operatorname{Ker} L) = n$; k tomu stačí najít $n$-prvkovou bázi $\operatorname{Ker} L$. Podle Věty 2.50 existují maximální řešení (Hn) $y_1, y_2, \ldots, y_n \in C^n(\mathbb{R})$ splňující následující počáteční podmínky:

$$\begin{array}{ccccc}
y_1(0) = 1 & y_2(0) = 0 & y_3(0) = 0 & \cdots & y_n(0) = 0 \\
y_1'(0) = 0 & y_2'(0) = 1 & y_3'(0) = 0 & \cdots & y_n'(0) = 0 \\
y_1''(0) = 0 & y_2''(0) = 0 & y_3''(0) = 1 & \cdots & y_n''(0) = 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
y_1^{(n-1)}(0) = 0 & y_2^{(n-1)}(0) = 0 & y_3^{(n-1)}(0) = 0 & \cdots & y_n^{(n-1)}(0) = 1
\end{array} \tag{2.24}$$

[45] Věta 2.50 říká, že maximální řešení jsou definovaná na intervalu $(a, b)$, což je interval, na němž je definovaná (a spojitá) funkce pravé strany $f$. V případě homogenní rovnice je ovšem $f \equiv 0$, takže $(a, b) = \mathbb{R}$.

[46] Uvedené vysvětlení tohoto faktu se může zdát příliš složité. Nestačilo by říct prostě, že (Hn) je ekvivalentní rovnici $L(y) = 0$, kterou (z definice) splňují právě všechny prvky $\operatorname{Ker} L$? Odpověď je, že nestačilo. Ony rovnice totiž *nejsou ekvivalentní*, neboť (Hn) nenese žádnou apriorní informaci o definičním oboru a kvalitě řešení, zatímco v rovnici $L(y) = 0$ jsou implicitně obsaženy požadavky, že řešení musí být prvek definičního oboru $L$, tedy prostoru $C^n(\mathbb{R})$. Naštěstí platí nesamozřejmý fakt, že libovolné maximální řešení (Hn) skutečně je třídy $C^n$ a je def. na $\mathbb{R}$ – tj. je prvkem $C^n(\mathbb{R})$.

Je jasné, že mezi řešeními $y_1, y_2, \ldots, y_n$ nejsou žádná dvě stejná. Nyní ukážeme, že jsou dokonce lineárně nezávislá a generují $\operatorname{Ker} L$. Tj. dokážeme, že $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ je báze $\operatorname{Ker} L$, čímž bude hotov důkaz první části věty.

*Lineární nezávislost:* Buďte $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ libovolné koeficienty lineární kombinace takové, že

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n = 0. \tag{2.25}$$

Podle definice lineární nezávislosti množiny vektorů stačí dokázat, že nutně $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$.

Dosaďme $t = 0$ do rovnosti funkcí (2.25). Dostaneme

$$\begin{aligned} c_1 y_1(0) + c_2 y_2(0) + \ldots + c_n y_n(0) &= 0, \quad \text{tj. podle (2.24)} \\ c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 + \ldots + c_n \cdot 0 &= 0, \end{aligned}$$

neboli $c_1 = 0$. Nyní rovnost (2.25) zderivujeme:

$$c_1 y_1' + c_2 y_2' + \ldots + c_n y_n' = 0',$$

a dosazením $t = 0$ dostáváme

$$\begin{aligned} c_1 y_1'(0) + c_2 y_2'(0) + \ldots + c_n y_n'(0) &= 0, \quad \text{tj. podle (2.24)} \\ c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 1 + \ldots + c_n \cdot 0 &= 0, \end{aligned}$$

takže $c_2 = 0$. Opakováním tohoto triku postupně dostaneme i $c_3 = 0$, $c_4 = 0$ atd. až po

$$\begin{aligned} c_1 y_1^{(n-1)}(0) + c_2 y_2^{(n-1)}(0) + \ldots + c_n y_n^{(n-1)}(0) &= 0, \quad \text{tj. podle (2.24)} \\ c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 + \ldots + c_n \cdot 1 &= 0, \end{aligned}$$

takže i $c_n = 0$. Dostali jsme tedy, že $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$, takže vektory (funkce) $y_1, y_2, \ldots, y_n$ opravdu jsou lineárně nezávislé.

*Generování:* K tomu, abychom věděli, že množina $B := \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ je báze $\operatorname{Ker} L$, zbývá dokázat, že $B$ generuje $\operatorname{Ker} L$. Budiž tedy dán libovolný prvek $w \in \operatorname{Ker} L$; chceme najít koeficienty lineární kombinace $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ takové, že $c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n = w$.

Definujme čísla

$$c_1 = w(0), \quad c_2 = w'(0), \quad \ldots \quad c_n = w^{(n-1)}(0)$$

a uvažujme funkci

$$y := c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n.$$

Víme, že $y$ je maximální řešení (Hn), neboť se jedná o lineární kombinaci maximálních řešení. Pojďme se podívat, jaké počáteční podmínky (v bodě $t = 0$) toto řešení splňuje:

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 y_1(0) + c_2 y_2(0) + \ldots c_n y_n(0) = c_1 = w(0); \\ y'(0) &= c_1 y_1'(0) + c_2 y_2'(0) + \ldots c_n y_n'(0) = c_2 = w'(0); \end{aligned}$$

a tak dále až po

$$y^{(n-1)}(0) = c_1 y_1^{(n-1)}(0) + c_2 y_2^{(n-1)}(0) + \ldots c_n y_n^{(n-1)}(0) = c_n = w^{(n-1)}(0);$$

Dostáváme tedy, že $y$ splňuje tutéž sadu počátečních podmínek jako $w$; obě funkce jsou přitom maximální řešení rovnice (Hn). Podle Věty 2.50 však pro takovouto sadu počátečních podmínek existuje *právě jedno* maximální řešení, a musí tedy platit $y = w$.

Funkce $y$ byla ovšem definována jako jistá lineární kombinace $y_1, y_2, \ldots, y_n$, takže i naše předem dané (libovolné) řešení $w$ je (tou samou) jejich lineární kombinací. Tím je dokázáno, že skutečně $B$ generuje $\operatorname{Ker} L$, a je to tedy báze.

*Druhá část věty:* Buď $y_p$ určité maximální řešení rovnice (Ln). Připomeňme, že pravá strana rovnice, tedy funkce $f$ je definovaná (a spojitá) na jistém intervalu $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$, nikoliv nezbytně na $\mathbb{R}$. Podle Věty 2.50 je řešení $y_p$ definováno na celém tomto $(a,b)$ (je totiž maximální). Označme

$$\begin{aligned} A &:= \{y_p + y_h \colon y_h \text{ je maximální řešení (Hn)}\} \quad \text{a} \\ B &:= \{y \colon y \text{ je maximální řešení (Ln)}\}. \end{aligned}$$

Máme dokázat, že $A = B$, což učiníme skrze důkaz jedné i druhé inkluze.

Dokažme nejprve inkluzi $A \subseteq B$; buď tedy dán libovolný prvek $y \in A$, chceme $y \in B$. Podle definice $A$ je $y$ tvaru $y = y_p + y_h$, kde $y_h$ je nějaké maximální řešení homogenní rovnice. Všimněme si, že řešení homogenní rovnice $y_h$ je definováno na celém $\mathbb{R}$, kdežto $y_p$ na $(a,b)$; součet $y_p + y_h$ je tedy definován na $(a,b)$.

Uvažujme lineární zobrazení $L$ definované stejným vzorcem jako výše, tj. jako levá strana rovnice (Ln) (resp. (Hn)), ovšem tentokrát jako zobrazení $L\colon C^n(a,b) \to C(a,b)$.[47] Pak

$$L(y) = L(y_p + y_h) = L(y_p) + L(y_h) = f + 0 = f,^{48}$$

kde poslední rovnost plyne z toho, že $y_p$ (resp. $y_h$) je řešením rovnice s pravou stranou $f$ (resp. 0); takže $y$ je řešení (Ln), a $y \in B$.

Zbývá dokázat inkluzi $B \subseteq A$; zvolme tedy libovolný prvek $y \in B$ a dokažme, že $y \in A$. Tj. chceme dokázat, že $y$ je tvaru $y_p + y_h$. Definujme tedy $\tilde{y}_h = y - y_p$. Tato funkce $\tilde{y}_h$ je definovaná na $(a,b)$, protože obě funkce $y$ i $y_p$ jsou definované právě na tomto intervalu (jakožto maximální řešení (Ln)). Dokažme nejprve, že jde o řešení homogenní rovnice (Hn).[49] To plyne z jednoduchého výpočtu

$$L(\tilde{y}_h) = L(y - y_p) = L(y) - L(y_p) = f - f = 0.$$

Podle Věty 2.20 existuje prodloužení řešení $\tilde{y}_h$ na maximální řešení $y_h$ (pokud $(a,b) = \mathbb{R}$, položme prostě $y_h = \tilde{y}_h$).[50] Platí

$$y_p + y_h = y_p + \tilde{y}_h = y_p + (y - y_p) = y,$$

kde první rovnost nastává díky tomu, že $y_p + y_h$ je def. právě na $(a,b)$, na kterémžto intervalu ovšem platí $y_h = \tilde{y}_h$, neboť $y_h$ je prodloužení $\tilde{y}_h$.[51] Řešení $y$ je tedy skutečně tvaru $y_p + y_h$, kde $y_h$ je maximální řešení příslušné homogenní rovnice, tj. $y \in A$, a jsme hotovi.

Dokázali jsme $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$, nastává tedy rovnost $A = B$, a důkaz věty je dokončen. □

**2.55 Poznámka.** Právě dokázaná věta nám říká, že dimenze (vektorového) prostoru maximálních řešení rovnice (Hn) je právě $n$, tedy přesně řád této rovnice. Tedy:

---

[47] místo $L\colon C^n(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$

[48] Výrazem $L(y_h)$ máme pochopitelně na mysli $L(y_h|_{(a,b)})$, neboť do $L$ nyní dosazujeme funkce definované na $(a,b)$ místo původního $\mathbb{R}$.

[49] Pokud jsme náhodou v situaci, že $(a,b) = \mathbb{R}$, pak je toto řešení $\tilde{y}_h$ automaticky maximální (neboť není kam ho prodloužit); v opačném případě ovšem maximální není, protože maximální řešení homogenní rovnice jsou definována vždy na celém $\mathbb{R}$ podle Věty 2.50.

[50] Toto prodloužení je, jak snadno plyne z Věty 2.50, jednoznačně určené a definované na $\mathbb{R}$, to nás ovšem v tento moment nezajímá.

[51] Zkrátka jde o sérii rovností mezi funkcemi definovanými na $(a,b)$; to platí i pro součet na levé straně první rovnosti, neboť $y_h$ je sice def. na $\mathbb{R}$, $y_p$ ale pouze na $(a,b)$.

- Pokud $y_1, y_2, \ldots, y_n$ jsou lineárně nezávislá maximální řešení (Hn), pak množina $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ je báze prostoru všech max. řešení.
- Libovolnou takovou bázi nazýváme *fundamentální systém* rovnice (Hn).

Věta 2.53 dále znamená, že řešit libovolnou (typicky nehomogenní) rovnici tvaru

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f(t) \tag{Ln}$$

lze ve dvou krocích:

(i) Najdeme fundamentální systém příslušné homogenní rovnice (tj. rovnice (Hn)).

(ii) Najdeme jedno (partikulární) maximální řešení $y_p$ rovnice s pravou stranou, tj. rovnice (Ln).

Libovolné maximální řešení (Ln) je potom tvaru $y_p + y_h$, kde $y_h$ je nějaké max. řešení (Hn), tj. libovolná lineární kombinace prvků FS.

Jinými slovy: najdeme-li FS příslušné homogenní rovnice, nechť je to $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$, známe už vlastně *všechna* její řešení: jsou tvaru

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n.$$

Poté (nebo před tím) stačí najít *jedno jediné* maximální řešení naší „nehomogenní" rovnice (Ln) a okamžitě známe i všechna ostatní řešení.

### 2.9.2 Hledání fundamentálního systému

Tato část obsahuje především úvahy, které vedou k odvození algoritmu na hledání fundamentálního systému (neboli báze prostoru řešení) rovnice

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0. \tag{Hn}$$

Kdo se zajímá pouze o samotný algoritmus, může přeskočit na závěr tohoto oddílu a přečíst si pouze odstavce „Shrnutí" a „Algoritmus k určení FS".

Pojďme se zamyslet, jestli se (aspoň v některých případech) některá řešení nedají uhodnout, resp. odvodit.

Je-li $\lambda \in \mathbb{R}$ libovolné pevné číslo, uvažujme funkci

$$y(t) = e^{\lambda t}, \quad t \in \mathbb{R} \tag{2.26}$$

a všimněme si, jak vypadají její derivace:

$$y'(t) = \lambda e^{\lambda t}, \quad y''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}, \quad y'''(t) = \lambda^3 e^{\lambda t} \quad \text{atd.}$$

Je tedy snadné tuto funkci dosadit do rovnice (Hn), tj. provést „zkoušku".[52] Dostaneme (pro všechna $t \in \mathbb{R}$) rovnost:

$$\begin{aligned} \lambda^n e^{\lambda t} + a_{n-1}\lambda^{n-1}e^{\lambda t} + \ldots + a_1\lambda e^{\lambda t} + a_0 e^{\lambda t} = 0 \quad &\Leftrightarrow \\ e^{\lambda t}\left(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0\right) = 0 \quad &\Leftrightarrow \\ \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0; & \end{aligned} \tag{2.27}$$

vidíme tedy, že funkce $y = e^{\lambda t}$ je řešením (Hn), právě když $\lambda$ je kořenem polynomu na levé straně poslední rovnice výše. Tato úvaha dává vzniknout novému pojmu.

[52] Zkoušku obvykle provádíme pro řešení nebo kandidáty na řešení, které jsme dostali nějakým postupem, který dává dobrou šanci (popřípadě dokonce jistotu), že výsledek je řešení. Metodu „pokus, omyl" mezi takové postupy obvykle nepočítáme, nic nám ovšem nebrání do rovnice dosadit jakoukoliv funkci a podívat se, jestli náhodou nejde o řešení.

**Charakteristický polynom:** výraz

$$\chi(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 \tag{2.28}$$

se nazývá *charakteristický polynom rovnice* (Hn); značíme ho $\chi(\lambda)$.

Je snadno vidět, jak utvoříme polynom (2.28) z příslušné rovnice: jednoduše $y^{(n)}$ nahradíme $\lambda^n$ a tak dále; $y'$ nahradíme $\lambda$ a konečně $y$ nahradíme konstantou 1 (takže z $a_0 y$ vznikne konstanta $a_0$). Všimněme si, že samozřejmě *stupeň jejího charakteristického polynomu je roven řádu rovnice*, tj. $n$.

Označíme-li – jak jsme zvyklí – $L(y)$ levou stranu rovnice, jejíž charakteristický polynom je $\chi(\lambda)$, výpočet (2.27) dává

$$L\big(e^{\lambda t}\big) = e^{\lambda t} \cdot \chi(\lambda),$$

odkud je ještě lépe vidět, že

$$e^{\lambda t} \text{ je řešení (Hn)} \;\Leftrightarrow\; L(e^{\lambda t}) = 0 \;\Leftrightarrow\; \chi(\lambda) = 0, \text{ tj. } \lambda \text{ je kořen } \chi.$$

**Jednonásobné reálné kořeny:** V situacích, kdy charakteristický polynom má $n$ různých reálných kořenů $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, nám tedy výše uvedená úvaha dá $n$ různých řešení rovnice (Hn), a to

$$y_1(t) = e^{\lambda_1 t}, \quad y_2(t) = e^{\lambda_2 t}, \quad \ldots, \quad y_n(t) = e^{\lambda_n t}. \tag{2.29}$$

Jak víme z Věty 2.53, dimenze prostoru řešení (Hn) je přesně $n$, a tedy množina $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ má ten správný počet prvků k tomu, aby mohla tvořit FS. Musíme ale ověřit, že uvedené funkce $y_1, y_2, \ldots, y_n$ jsou lineárně nezávislé (pokud tomu tak je, pak už jistě tvoří bázi).

**2.56 Pozorování.** *Nechť $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ jsou různá. Pak funkce $y_1, y_2, \ldots, y_n$ definované rovnostmi* (2.29) *jsou lineárně nezávislé.*[53]

*Důkaz.* Uvažujme nějakou takovou lineární kombinaci funkcí (2.29), která dá konstantní nulovou funkci, tj. mějme koeficienty $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ takové, že platí rovnost (funkcí)

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n = 0 \qquad \text{na } \mathbb{R}.$$

Ukážeme, že pak nutně $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$, čímž bude dokázána lineární nezávislost funkcí $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_n$. Pak pro všechna $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} 0 &= c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \ldots + c_n y_n(t) \\ &= c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \ldots + c_n e^{\lambda_n t} \\ &= e^{\lambda_1 t}\big(c_1 + c_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} + \ldots + c_n e^{(\lambda_n - \lambda_1)t}\big), \end{aligned}$$

odkud (protože $e^{\lambda_1 t} \neq 0$, $t \in \mathbb{R}$) vidíme, že

$$c_1 + c_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} + \ldots + c_n e^{(\lambda_n - \lambda_1)t} = 0 \qquad \text{na } \mathbb{R},$$

takže limita tohoto součtu je také rovna 0; limitu však upravíme pomocí aritmetiky limity a dostaneme:[54]

$$0 = \lim_{t \to \infty} \big(c_1 + c_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} + \ldots + c_n e^{(\lambda_n - \lambda_1)t}\big) = c_1 + c_2 \cdot 0 + \ldots + c_n \cdot 0.$$

Tedy $c_1 = 0$. Nyní tedy můžeme ignorovat první sčítanec z naší lineární kombinace a analogickým postupem dostaneme i $c_2 = 0$. Takto pokračujeme, až se ukáže, že skutečně všechny koeficienty lineární kombinace jsou nulové, a naše funkce tedy jsou lineárně nezávislé. □

[53] jakožto prvky vektorového prostoru se standardními operacemi sčítání funkcí a násobení funkce reálným číslem (skalárem)

[54] Všimněme si, že $\lim_{t\to\infty} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} = 0$, protože $\lambda_1 > \lambda_2$. Podobně i pro další členy.

**Vícenásobné reálné kořeny:** Uvažujme nyní například rovnici

$$y'' - 2y' + y = 0; \tag{2.30}$$

její charakteristický polynom je

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2,$$

jehož jediným kořenem je číslo 1. Na základě úvah na začátku této části tedy vidíme, že funkce

$$y_1(t) = e^{1\cdot t} = e^t$$

je řešením naší rovnice. Uhodli jsme tedy *jedno* řešení; rovnice je ale řádu *dvě*. To znamená, že její (libovolný) fundamentální systém má dva prvky.

Zkusíme tedy najít ještě jiné řešení než $y_1$. Vezměme třeba funkci $y_2(t) = 7e^t$, o níž se snadno přesvědčíme, že je řešením: můžeme provést zkoušku, jednodušší však je vzpomenout si, že máme lineární rovnici, takže násobek řešení (číslem) je opět řešení. Tedy množina $\{y_1, y_2\} = \{e^t, 7e^t\}$ obsahuje dvě různá řešení. Je ale snad jasné, že nejde o FS: snadno totiž najdeme netriviální lineární kombinaci obou funkcí, která je nulová, např. $7y_1 - y_2 \equiv 0$ – jinak řečeno, prvky této množiny nejsou lineárně nezávislé, a nemohou tedy tvořit bázi (čehokoliv).

Abychom získali FS rovnice (2.30), musíme přijít s něčím originálním; pro nějaký parametr $\lambda \in \mathbb{R}$ tedy vyzkoušíme funkci

$$y(t) = te^{\lambda t}.$$

Derivace této funkce jsou následující:

$$y'(t) = e^{\lambda t} + \lambda te^{\lambda t}, \quad y''(t) = \lambda e^{\lambda t} + \lambda\big(e^{\lambda t} + \lambda te^{\lambda t}\big) = 2\lambda e^{\lambda t} + \lambda^2 te^{\lambda t}$$
$$y'''(t) = 2\lambda^2 e^{\lambda t} + \lambda^2\big(e^{\lambda t} + \lambda te^{\lambda t}\big) = 3\lambda^2 e^{\lambda t} + \lambda^3 te^{\lambda t} \quad \text{atd.}$$

Můžeme si všimnout, že se opakovaně vyskytuje výraz $te^{\lambda t}$, neboli $y(t)$. Výše uvedené se tedy dá přepsat takto:

$$y'(t) = e^{\lambda t} + \lambda y(t), \quad y''(t) = 2\lambda e^{\lambda t} + \lambda^2 y(t), \quad y'''(t) = 3\lambda^2 e^{\lambda t} + \lambda^3 y(t) \quad \text{atd.}$$

Je snadno vidět (a matematickou indukcí bychom mohli dokázat), že obecně pro $n \in \mathbb{N}$ jest

$$y^{(n)}(t) = n\lambda^{n-1}e^{\lambda t} + \lambda^n y(t),$$

odkud plyne, že po dosazení funkce $y(t) = te^{\lambda t}$ do levé strany rovnice (Hn) (tu značíme $L(y)$), dostaneme

$$\begin{aligned}
L(y(t)) &= a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) \\
&= a_n\big(n\lambda^{n-1}e^{\lambda t} + \lambda^n y(t)\big) + a_{n-1}\big((n-1)\lambda^{n-2}e^{\lambda t} + \lambda^{n-1}y(t)\big) \\
&\quad + \ldots + a_2\big(2\lambda e^{\lambda t} + \lambda^2 y(t)\big) + a_1\big(e^{\lambda t} + \lambda y(t)\big) \\
&= \big(a_n \cdot n\lambda^{n-1} + a_{n-1}\cdot(n-1)\lambda^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot 2\lambda + a_1\big)e^{\lambda t} + \\
&\quad + \big(a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0\big)y(t) \\
&= \chi'(\lambda)\cdot e^{\lambda t} + \chi(\lambda)\cdot y(t),
\end{aligned}$$

kde $\chi$ je charakteristický polynom naší rovnice a $\chi'$ je derivace tohoto polynomu.[55] Pokud je tedy číslo $\lambda$ kořenem obou polynomů $\chi, \chi'$, pak jsou oba sčítance na konci výpočtu nulové, tj.

$$L(y) \equiv 0, \quad \text{kdykoliv} \quad \chi(\lambda) = \chi'(\lambda) = 0;$$

[55] Ale pozor, zde bychom se měli zastavit. Derivacemi se nám to tu jen hemží, dosud to však vždy byly pouze derivace podle proměnné $t$ (resp. $x$ v předchozích oddílech tohoto textu). V případě $\chi'$ máme ovšem na mysli derivaci polynomu $\chi$ v proměnné $\lambda$ *podle této proměnné*, neboli $\chi' = \frac{d\chi}{d\lambda}$. Takže například pro $\chi(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 + 6$ máme na mysli $\chi'(\lambda) = 3\lambda^2 + 4\lambda$. Není potřeba dumat nad tím, proč se zde náhle vyskytla derivace podle zcela jiné proměnné; že jde o derivaci polynomu $\chi$ podle jeho proměnné $\lambda$, je totiž vidět až a posteriori. Provedli jsme nějaký výpočet, konkrétně dosazení funkce $y$ do levé strany rovnice, a po vhodném přeskupení a vytknutí členů se – jakoby náhodou – objevily nějaké polynomy. A my jsme si všimli, že jde o $\chi$ a $\chi' = \frac{d\chi}{d\lambda}$.

platí navíc i opačná implikace, neboť funkce $e^{\lambda t}$ a $y(t) = te^{\lambda t}$ jsou lineárně nezávislé.

Z druhého semestru ale v podstatě víme, že $\chi(\lambda) = \chi'(\lambda) = 0$, právě když $\lambda$ je kořen polynomu $\chi$ s násobností nejméně 2. (Tento fakt je podrobně vysvětlen níže (drobnější text).) Celkem tedy dostáváme

**2.57 Tvrzení.** *Funkce $y(t) = te^{\lambda t}$ je řešením rovnice (Hn) (na $\mathbb{R}$), právě když číslo $\lambda$ je aspoň dvojnásobný kořen charakteristického polynomu rovnice.*

*Důkaz.* „$\Leftarrow$“: Nechť $\lambda$ je aspoň dvojnásobný kořen charakteristického polynomu $\chi$ naší rovnice. Potom (podle výpočtu výše v textu) jest

$$L(te^{\lambda t}) = \chi'(\lambda)e^{\lambda t} + \chi(\lambda)te^{\lambda t} = 0 \cdot e^{\lambda t} + 0 \cdot te^{\lambda t} \equiv 0,$$

kde $L(y)$ je levá strana rovnice. Tedy $te^{\lambda t}$ je řešení.

„$\Rightarrow$“: Naopak, nechť $y(t) = te^{\lambda t}$ je řešení; pak

$$\chi'(\lambda)e^{\lambda t} + \chi(\lambda)te^{\lambda t} = L(te^{\lambda t}) \equiv 0,$$

tedy lineární kombinace funkcí $e^{\lambda t}$ a $te^{\lambda t}$ s koeficienty $\chi'(\lambda)$ a $\chi(\lambda)$ je nulová. Protože jsou však tyto funkce lineárně nezávislé,[56] musí být oba koeficienty nulové, neboli $\chi'(\lambda) = \chi(\lambda) = 0$, a $\lambda$ je tedy aspoň dvojnásobným kořenem polynomu $\chi$. □

---

**2.58 Pozorování.** *Buď $P$ polynom nad $\mathbb{R}$ (resp. polynomiální funkce), $a \in \mathbb{R}$ číslo. Pak NVJE:*

*(i) Číslo $a$ je kořen násobnosti $n \in \mathbb{N}$ polynomu $P$;*

*(ii) $P(a) = P'(a) = P''(a) = \ldots = P^{(n-1)}(a) = 0$ a zároveň $P^{(n)}(a) \neq 0$.*

*Speciálně:*

- *pokud $a$ je kořen násobnosti 1, pak $P(a) = 0$ a $P'(a) \neq 0$;*
- *pokud $a$ je kořen násobnosti 2, pak $P(a) = P'(a) = 0$ a $P''(a) \neq 0$;*
- *pokud $a$ je kořen násobnosti 3, pak $P(a) = P'(a) = P''(a) = 0$ a $P^{(3)}(a) \neq 0$;*
- *atd.*

*Důkaz.* „(i)$\Rightarrow$(ii)“: Stačí si vzpomenout, že pokud $a$ je kořen $P$ násobnosti $n$, pak existuje polynom $Q$ takový, že

$$P(x) = (x-a)^n \cdot Q(x) \quad \text{a} \quad Q(a) \neq 0.$$

Nyní ovšem dostáváme postupně:

$$\begin{aligned} P'(x) &= n(x-a)^{n-1} \cdot Q(x) + (x-a)^n \cdot Q'(x), \\ P''(x) &= n(n-1)(x-a)^{n-2} \cdot Q(x) + 2n(x-a)^{n-1} \cdot Q'(x) + (x-a)^n \cdot Q''(x), \\ P'''(x) &= n(n-1)(n-2)(x-a)^{n-3} \cdot Q(x) + 3n(n-1)(x-a)^{n-2} \cdot Q'(x) \\ &\quad + 3n(x-a)^{n-1} \cdot Q''(x) + (x-a)^n \cdot Q'''(x) \quad \text{atd.} \end{aligned}$$

Zde samozřejmě první rovnost platí, pokud $n \geqslant 1$, druhá rovnost platí, pokud $n \geqslant 2$, třetí rovnost platí, pokud $n \geqslant 3$ atd. Pokud vám uvedené vzorce připomínají binomickou větu (všimněte si koeficientů), není to náhoda, platí totiž tzv. Leibnizovo pravidlo pro výpočet $n$-té derivace součinu dvou funkcí:

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

---

[56] To je snadné cvičení. Podobně jako výše se zamyslete, co se děje s limitami v $\pm\infty$ jejich lineární kombinace $c_1 \cdot e^{\lambda t} + c_2 \cdot te^{\lambda t}$; snadno si uvědomíte, že obě limity jsou nulové, právě když $c_1 = c_2 = 0$.

Položíme-li $f(x) = (x-a)^n$ a $g(x) = Q(x)$, je vidět, že tři výše uvedené výpočty derivace $P$ jsou jen speciální případy Leibnizova vzorce.[57]

Pro nás je podstatné si všimnout, že pokud $P$ derivujeme nejvýše $(n-1)$-krát (tedy o jedna méněkrát, než je násobnost kořenu $a$), potom z výsledku vždy lze vytknout $(x-a)$. Skutečně, například pokud $n = 4$, je skutečně možné z výše uvedeného vyjádření $P'''(x)$ vytknout $(x-a)$ (a ze všech nižších derivací také). Odtud je vidět, že všechny derivace $P$ až do řádu $n-1$ jsou v bodě $a$ nulové. Zároveň si snadno můžeme všimnout, že hned derivace $n$-tá bude v bodě $a$ nenulová. Tím je pozorování dokázáno.

„(ii)⇒(i)“: Druhou implikaci je nyní snadné dokázat nepřímo; tj. dokážeme její obměnu. Předpokládejme tedy, že neplatí (i) a dokažme negaci (ii).

Co znamená, že neplatí (i)? To, že číslo $a$ není kořenem násobnosti $n$ polynomu $P$. Buďto tedy vůbec není kořenem $P$, nebo jde o kořen jiné násobnosti. Pokud není kořenem, pak $P(a) \neq 0$, a (ii) neplatí, protože (ať už je $n$ jakékoliv přirozené číslo) z (ii) každopádně plyne $P(a) = 0$.

Předpokládejme tedy, že nastává druhá možnost, tj. $a$ sice je kořenem $P$, jeho násobnost $k$ je ale různá od $n$. V tom případě podle už dokázané implikace (i)⇒(ii) platí

$$P(a) = P'(a) = P''(a) = \ldots = P^{(k-1)}(a) = 0 \quad \text{a} \quad P^{(k)}(a) \neq 0,$$

takže nemůže platit (ii), protože pak by ona „série nul“ byla dlouhá $n$ a ne $k$. □

*Jiný důkaz.* Při studiu Taylorova polynomu jsme si uvědomili, že pro libovolný polynom $P$ stupně nejvýše $m$ a pro libovolný bod $a \in \mathbb{R}$ jest $P = T_m^{P,a}$, tj. polynom (přesněji: polynomiální funkce definovaná na $\mathbb{R}$ polynomem) je roven svému Taylorovu polynomu aspoň takového řádu, jako je stupeň $P$. Podrobně rozepsáno to znamená následující rovnost, kde na pravé straně není nic jiného než Taylorův polynom řádu $m$ funkce $P$ v bodě $a$.

$$P(x) = P(a) + P'(a)(x-a) + \frac{P''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{P^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^m.$$

Je-li $a$ kořenem $P$, pak $P$ musí být dělitelný příslušným kořenovým činitelem $(x-a)$, tj. první člen ve výše uvedeném vyjádření $P$ je nulový a po vytknutí $(x-a)$ dostáváme

$$P(x) = (x-a)\Big(P'(a) + \frac{P''(a)}{2!}(x-a) + \ldots + \frac{P^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^{m-1}\Big).$$

Nyní se zamysleme, co nastává, je-li $a$ vícenásobným, například dvojnásobným, kořenem $P$. V tom případě je $P$ dělitelný nejen $(x-a)$, ale dokonce i $(x-a)^2$, a z poslední rovnice je zřejmé, že to nutně znamená $P'(a) = 0$, aby ze závorky napravo šla vytknout „další kopie“ kořenového činitele $(x-a)$:

$$P(x) = (x-a)^2\Big(\frac{P''(a)}{2!} + \ldots + \frac{P^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^{m-2}\Big).$$

Je jasné, že v případě vyšší násobnosti kořene můžeme pokračovat analogickým způsobem: aby šlo znovu vytknout kořenový činitel $(x-a)$, musí být i následující derivace $P$ nulová atd. Tím je tedy znovu a jinak dokázána implikace (i)⇒(ii).

Opačná implikace je při této metodě důkazu podobně snadná jako u předchozího důkazu. Stejně jako výše vyjádříme $P$ pomocí jeho Taylorova polynomu dostatečně vysokého řádu (a to řádu $m = \mathrm{st}(P)$). Pokud platí (ii), pak

$$\begin{aligned}
P(x) &= P(a) + P'(a)(x-a) + \ldots + \frac{P^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots \\
&= 0 + 0(x-a) + \ldots + \frac{0}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots \\
&= 0 + 0 + \ldots + 0 + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots + \frac{P^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^m \\
&= (x-a)^n \cdot \Big(\frac{P^{(n)}(a)}{n!} + \frac{P^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a) + \ldots + \frac{P^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^{m-n}\Big),
\end{aligned}$$

odkud je okamžitě zřejmé, že $a$ je kořen násobnosti aspoň $n$; podíváme-li se však pořádně na náš předpoklad (ii), připomeneme si, že $P^{(n)}(a) \neq 0$, a tedy polynom v závorce na posledním řádku výpočtu už nemá číslo $a$ mezi svými kořeny: dosadíme-li totiž do něj $a$ za proměnnou $x$, dostaneme

$$\frac{P^{(n)}(a)}{n!} + \frac{P^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(a-a) + \ldots + \frac{P^{(m)}(a)}{m!}(a-a)^{m-n} = \frac{P^{(n)}(a)}{n!} + 0 + \ldots + 0 \neq 0.$$

[57] Důkaz tohoto vzorce je celkem snadné cvičení na kombinační čísla a matematickou indukci.

Stručně řečeno, v tomto důkazu implikace (ii)⇒(i) jde o to, že z Taylorova polynomu $P$ řádu st$(P)$ v bodě $a$ (tedy, jak víme, jen z jinak zapsaného polynomu $P$) lze vytknout $n$ „kopií“ kořenového činitele $(x-a)$ a ani o jednu více. To je ovšem triviální, protože podle předpokladu nulovosti $P(a), P'(a), \ldots, P^{(n-1)}$ je prvních $n$ sčítanců nulových a první nenulový je až sčítanec $\frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ a pak případně nějaké další, u nichž je exponent u $(x-a)$ ještě vyšší. To jest, všechny členy, z nichž obecně nelze vytknout $(x-a)^n$, jsou za předpokladu (ii) nulové. Takže $(x-a)^n$ vytknout lze, a jsme hotovi. □

---

Je snadné si uvědomit, že řešení $e^{\lambda t}$ a $te^{\lambda t}$ jsou lineárně nezávislá. Dokonce ale, přidáme-li další řešení „příslušná“ jiným kořenům charakteristického polynomu, lineární nezávislost se opět neporuší.[58] Pokud jde o dvojnásobné kořeny, jsme tedy plně spokojeni; každému takovému kořenu jsme schopni přiřadit dva prvky fundamentálního systému. Jinými slovy, má-li charakteristický polynom všechny kořeny násobnosti nejvýše dva, jsme nyní schopni napsat fundamentální systém rovnice.

Pokud jistý kořen $\lambda$ charakteristického polynomu $\chi$ má dokonce násobnost 3 (nebo vyšší), musíme pro něj najít tři prvky (nebo více) fundamentálního systému. Lze ukázat, že pro násobnost $k$ jsou těmi správnými řešeními funkce

$$e^{\lambda t}, \quad te^{\lambda t}, \quad t^2 e^{\lambda t}, \quad \ldots, \quad t^{k-1}e^{\lambda t}.$$

**Kořeny z $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$:** O něco složitější situace nastává v případě, že charakteristický polynom má některé kořeny komplexní.[59] Připomeňte si, že kdykoliv

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$$

je polynom s reálnými koeficienty (tj. $a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$) a $\lambda = a + b\mathrm{i}$ je jeho kořen, potom i $\overline{\lambda} = a - b\mathrm{i}$ je kořen tohoto polynomu; tj. komplexní kořeny se vyskytují v komplexně sdružených dvojicích.

Když dáváme dohromady fundamentální systém nějaké rovnice, musíme pamatovat na to, abychom za každou dvojici komplexních kořenů dodali dvě funkce do FS. A samozřejmě také nesmíme zapomenout na násobnost. Je-li $\lambda = a + b\mathrm{i}$ $(b \neq 0)$ kořen násobnosti $k \in \mathbb{N}$ charakteristického polynomu (a tedy i $\overline{\lambda} = a - b\mathrm{i}$ je kořen násobnosti $k$), pak do FS započítáme následujících $2k$ funkcí:

$$e^{at}\cos bt,\ e^{at}\sin bt,\ te^{at}\cos bt,\ te^{at}\sin bt, \ldots,\ t^{k-1}e^{at}\cos bt,\ t^{k-1}e^{at}\sin bt.$$

Pro zájemce následuje drobným textem vysvětlení, proč právě tyto funkce; podrobné důkazy ale vynecháme.

---

Pracujeme-li pouze v reálném oboru (což pro nás obyčejně platí), je velmi těžké dokázat, že uvedené funkce skutečně jsou řešení naší rovnice, a to navíc lineárně nezávislá. Pro pohodlnější důkaz je vhodné pracovat s *komplexními funkcemi reálné proměnné* a příslušně uzpůsobit značnou část dosud uvedené teorie diferenciálních rovnic. To zní jako velká komplikace, je to ale jednodušší, než se na první pohled zdá. Idea, která zahrnuje práci s komplexními funkcemi, je následující:

Pro číslo $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda = a + b\mathrm{i}$ (kde $a, b \in \mathbb{R}$) definujeme komplexní funkci (reálné proměnné $t \in \mathbb{R}$)

$$y_\lambda(t) = e^{at}(\cos bt + \mathrm{i}\sin bt).$$

Z tak zvaných Eulerových vzorců spojujících komplexní exponenciálu s funkcemi sin a cos plyne, že ve skutečnosti $y_\lambda(t) = e^{(a+b\mathrm{i})t} = e^{\lambda t}$, tento fakt ovšem není potřeba k tomu, abychom mohli v úvahách pokračovat. Všimněme si, že $y_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, je to tedy funkce jedné reálné proměnné (kterou značíme $t$) a má komplexní hodnoty, tj. má reálnou a imaginární složku. Chceme-li funkci $y_\lambda$ derivovat, stačí přirozeným způsobem derivovat reálnou i imaginární složku zvlášť, tj.

$$\big(y_\lambda(t)\big)' = \big(e^{at}\cos bt + \mathrm{i}e^{at}\sin bt)\big)' = \big(e^{at}\cos bt\big)' + \mathrm{i}\big(e^{at}\sin bt\big)'.$$

---

[58] To lze ukázat analogickým postupem, jako jsme to učinili výše s funkcemi $e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}$: stačí všechna řešení seřadit podle asymptotické rychlosti růstu (resp. poklesu): například „$e^{2t} \succ t^2e^t \succ te^t \succ e^t \succ te^{-3t} \succ e^{-3t}$“ apod. Podrobný důkaz ovšem vynecháme pro absenci nových myšlenek. Navíc existuje obecnější důkaz pomocí tzv. Wronského determinantu, wronskiánu. Složitost této metody je pro nás zvládnutelná, věnovat se jí ale nebudeme.

[59] I reálná čísla jsou komplexní; pochopitelně tímto vyjádřením máme na mysli kořeny s netriviální imaginární částí, neboli kořeny z $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Tento výpočet nyní může pokračovat už podle nám dobře známých pravidel pro derivování reálných funkcí; celkem snadno se doberete k závěru, že

$$\big(y_\lambda(t)\big)' = \lambda y_\lambda(t). \tag{2.31}$$

Pokud znáte komplexní exponenciálu a Eulerovy vzorce, je tento závěr věru málo překvapivý, neboť neříká nic jiného než $(e^{\lambda t})' = \lambda e^{\lambda t}$ ($\lambda \in \mathbb{C}$) – to je každopádně v souladu s naší zkušeností s reálnou exponenciálou, platnost tohoto vztahu je nám dávno známa pro $\lambda \in \mathbb{R}$. Znovu ovšem opakuji, že znalost těchto souvislostí zde není potřeba, rovnost (2.31) se dá odvodit i zcela elementárním výpočtem na pár řádků (cvičení pro vás).

Je celkem jasné, že opakovaným derivováním nám rovnost (2.31) dá pro $n \in \mathbb{N}$

$$\big(y_\lambda(t)\big)^{(n)} = \lambda^n y_\lambda(t), \quad \text{neboli} \quad y_\lambda^{(n)} = \lambda^n y_\lambda,$$

takže dosazením $y_\lambda$ do levé strany rovnice (Hn) dostaneme

$$\begin{aligned} L(y_\lambda) &= y_\lambda^{(n)} + a_{n-1} y_\lambda^{(n-1)} + \ldots + a_1 y_\lambda' + a_0 y_\lambda \\ &= \lambda^n y_\lambda + a_{n-1}\lambda^{n-1} y_\lambda + \ldots + a_1 \lambda y_\lambda + a_0 y_\lambda \\ &= \underbrace{(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0)}_{\chi(\lambda)}\, y_\lambda, \end{aligned}$$

odkud je snadno vidět, že pokud $\lambda$ je kořen charakteristického polynomu $\chi$, pak $L(y_\lambda) = 0$, neboli $y_\lambda$ je řešení naší rovnice.

(i) Jako neznámou diferenciální rovnice nyní použijeme komplexní funkci reálné proměnné (místo funkce reálné, jako tomu bylo dosud), tj. $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ místo $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(ii) Tím pádem máme $y = y_1 + \mathrm{i}\, y_2$, kde $y_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; nebo jinak, $y_1 = \mathrm{Re}(y)$ $y_2 = \mathrm{Im}(y)$.

(iii) Derivaci definujeme předpisem $y' := y_1' + \mathrm{i}\, y_2'$; jinak řečeno, derivovat funkci $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ znamená zvlášť derivovat obě její složky (tedy reálnou a imaginární). Takže stačí umět derivovat funkce reálné, a to my umíme.

(iv) Indukcí se snadno ukáže, že i derivace vyšších řádů probíhají po složkách: $y^{(n)} = y_1^{(n)} + \mathrm{i}\, y_2^{(n)}$. Podobně snadno se ukáže, že dokonce pro dvě funkce $y, z : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ platí $(y + z)^{(n)} = y^{(n)} + z^{(n)}$, jak jsme zvyklí.

(v) Dále si uvědomíme, jak funguje násobení komplexního čísla reálným: pro $a, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ platí $a(\alpha + \beta\mathrm{i}) = a\alpha + a\beta\mathrm{i}$. Jiný zápis téhož je, že pro libovolné $\lambda \in \mathbb{C}$ jest $\mathrm{Re}(a\lambda) = a\,\mathrm{Re}(\lambda)$ a $\mathrm{Im}(a\lambda) = a\,\mathrm{Im}(\lambda)$. (Všimněte si, že tyto rovnosti obecně neplatí pro komplexní $a$.) Stejně funguje i násobení komplexní funkce reálným skalárem: $\mathrm{Re}(a \cdot y) = a\,\mathrm{Re}(y)$ a stejně pro Im.

(vi) Uvažovaná diferenciální rovnice bude formálně stále stejná, tedy (Hn); nyní ovšem hledáme $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Abychom mohli definovat takovéto řešení naší rovnice, musíme vědět, co to vlastně znamená takovou funkci (opakovaně) derivovat; to je uvedeno v předchozích bodech.

(vii) Pomocná definice řešení: Řekneme, že $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ je *komplexní řešení* (Hn), jestliže $\forall t \in \mathbb{R}$ jest

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0.$$

To vypadá jako docela obyčejná definice řešení (definovaného na $\mathbb{R}$ místo obecného intervalu $I$) této konkrétní rovnice; rozdíl oproti Definici 2.18 je ale hlavně v tom, že zde uvažujeme jiný typ neznámé (a to funkci $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$), a derivace v rovnosti se vyskytující mají proto jiný význam (definovaný výše).

(viii) Nyní si všimneme, že když jisté konkrétní komplexní řešení $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ má všechny hodnoty reálné (to se může stát: nereálné komplexní hodnoty jsou sice povolené, ale ne povinné), pak $y$ je reálná funkce a je ve skutečnosti řešením rovnice (Hn) v běžném smyslu Definice 2.18.

(ix) Podobně jako dříve si levou stranu rovnice označíme

$$L(y) := y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 y'(t) + a_0 y(t).$$

Nyní ovšem chápeme $L$ jako zobrazení na prostoru komplexních funkcí reálné proměnné se spojitou $n$-tou derivací; tento vektorový prostor je nad tělesem $\mathbb{C}$ a označíme ho $C^n(\mathbb{R}; \mathbb{C})$. Sčítání funkcí funguje stejně, jak jsme zvyklí: sečteme reálnou i imaginární složku. Násobení funkcí skalárem se liší pouze v tom směru, že skaláry jsou nyní obecné komplexní, nikoliv pouze reálné.

(x) Je tedy $\mathbb{D}_L = C^n(\mathbb{R};\mathbb{C})$ a ve skutečnosti $L\colon C^n(\mathbb{R};\mathbb{C}) \to C(\mathbb{R};\mathbb{C})$, kde cílový prostor je samozřejmě komplexní vektorový prostor spojitých funkcí $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Co je podstatné, opět se snadno ukáže, že $L$ je lineární zobrazení. K tomu se použije už dříve vyslovený postřeh, že pro $y = y_1 + \mathrm{i}y_2$ (kde $y_1, y_2$ jsou reálné funkce) je $y^{(n)} = y_1^{(n)} + \mathrm{i}y_2^{(n)}$. Stačí zcela přímočaře ověřit, že $L(\alpha \cdot y + \beta \cdot z) = \alpha \cdot L(y) + \beta \cdot L(z)$ pro libovolná čísla $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ a funkce $y, z \in C^n(\mathbb{R};\mathbb{C})$.

(xi) Nyní je tedy zřejmé, že funkce $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ je komplexní řešení (Hn), právě když $L(y) = 0$, neboli $y \in \operatorname{Ker}(L)$. Vidíme tedy, že všechna komplexní řešení této rovnice tvoří vektorový podprostor $\operatorname{Ker}(L)$ prostoru $C^n(\mathbb{R};\mathbb{C})$. Speciálně tedy libovolná lineární kombinace takových řešení je opět řešení.

(xii) Způsobem už dříve neformálně naznačeným ukážeme, že pro $\lambda = a + b\mathrm{i}$ je funkce

$$y_\lambda(t) = e^{at}(\cos(bt) + \mathrm{i}\sin(bt))$$

*komplexním* řešením naší rovnice, právě když $\lambda$ je kořen charakteristického polynomu. Protože nás ale zajímá situace, kdy $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ (tj. $b \neq 0$), funkce $y_\lambda$ není reálná (tj. nemá všechny hodnoty reálné). Kdyby reálná byla, věděli bychom, že jde o řešení ve standardním smyslu Definice 2.18, a byli bychom hotovi; takto víme pouze, že se jedná o *komplexní* řešení ve smyslu výše uvedené pomocné definice.

(xiii) Připomeňme, že ačkoliv se nyní díváme na komplexní řešení, rovnici (Hn) uvažujeme stále v původním tvaru, takže všechny koeficienty $a_0, \dots, a_{n-1}$ jsou reálná čísla. Takže i příslušný charakteristický polynom $\chi$, který má tytéž koeficienty, má koeficienty reálné. My ovšem víme, že všechny komplexní kořeny polynomu s reálnými kořeny se vyskytují v komplexně sdružených dvojicích: tj., je-li $\lambda = a + b\mathrm{i}$ kořen, pak také $\overline{\lambda} = a - b\mathrm{i}$ je kořen.

(xiv) Máme tedy dva různé kořeny $\lambda = a + b\mathrm{i}$ a $\overline{\lambda} = a - b\mathrm{i}$ charakteristického polynomu $\chi$. Těm podle výše uvedených úvah odpovídají dvě různá *komplexní* řešení:

$$\begin{aligned} y_\lambda(t) &= e^{at}(\cos(bt) + \mathrm{i}\sin(bt)) \quad \text{a} \\ y_{\overline{\lambda}}(t) &= e^{at}(\cos(-bt) + \mathrm{i}\sin(-bt)) = e^{at}(\cos(bt) - \mathrm{i}\sin(bt)). \end{aligned}$$

(xv) Závěrečný trik spočívá v tom, že místo funkcí $y_\lambda$ a $y_{\overline{\lambda}}$ do FS naší rovnice zařadíme jejich vhodné lineární kombinace, zvolené tak, aby šlo o reálné funkce. Definujeme:

$$y_1(t) := \frac{y_\lambda(t) + y_{\overline{\lambda}}(t)}{2}, \qquad y_2(t) := \frac{y_\lambda(t) - y_{\overline{\lambda}}(t)}{2\mathrm{i}}.$$

Vidíme, že

$$y_1(t) = e^{at}\cos(bt) \quad \text{a} \quad y_2(t) = e^{at}\sin(bt). \tag{2.32}$$

Je dobré si povšimnout podobnosti s definicí hyperbolických funkcí, to však momentálně není podstatné.

(xvi) Zbývá dát dohromady všechny výše uvedené postřehy a uvědomit si, že o funkcích $y_1, y_2$ víme následující:

- Protože jsou to lineární kombinace komplexních řešení rovnice (Hn), jde opět o komplexní řešení této rovnice (víme, že komplexní řešení tvoří vektorový prostor);
- funkce ale mají reálné hodnoty (to je zjevné z (2.32)), takže jde současně o řešení (Hn) ve standardním smyslu (to jsme si uvědomili výše);
- je navíc zřejmé, že funkce $y_1, y_2$ jsou lineárně nezávislé.

**Shrnutí:** V předchozích odstavcích jsme nahlédli, že řešení rovnice (Hn), kterou v této části studujeme, souvisí s kořeny charakteristického polynomu (2.28) této rovnice. Postupně jsme probrali všechny základní možnosti, jak můžou vypadat kořeny polynomu a pro každou z nich jsme popsali příslušná maximální řešení diferenciální rovnice. Pojďme si získané poznatky stručně shrnout.

- Charakteristický polynom má stupeň rovný řádu rovnice, jíž přísluší. My studujeme obecnou rovnici $n$-tého řádu, příslušný polynom je tedy stupně $n$ (kde $n$ je přirozené číslo).
- Z Věty 2.53 víme, že množina maximálních řešení rovnice (Hn) je vektorový prostor dimenze $n$, kde $n$ je řád rovnice. Báze tohoto prostoru (libovolná) má tedy přesně $n$ prvků. (Každou bázi prostoru řešení nazýváme fundamentální systém (FS) rovnice.)

- Pamatujeme si obecný poznatek o polynomech, že *součet všech násobností všech jeho kořenů je roven stupni polynomu.* Součet násobností kořenů polynomu stupně $n$ je tak přesně $n$.

- K nalezení nějakého FS naší rovnice by tedy stačilo ke každému kořenu char. polynomu přiřadit právě tolik maximálních řešení naší diferenciální rovnice, kolik je násobnost onoho kořenu; samozřejmě ale nestačí ta řešení přiřadit nějakým libovolným způsobem. Musí to být tak, aby:

  (a) se žádné řešení neopakovalo;

  (b) a tato řešení byla dokonce lineárně nezávislá.

  Splnění požadavku (a) stačí na to, abychom tímto způsobem získali přesně tolik řešení diferenciální rovnice, kolik je součet násobností všech kořenů char. polynomu, tj. $n$. Ve skutečnosti ale potřebujeme ještě víc, a to splnění (b) – potom těchto $n$ různých řešení tvoří bázi $n$-dimenzionálního (jak víme) prostoru všech řešení (Hn).

- Je-li tedy $\lambda$ kořen násobnosti $k$ char. polynomu, chceme mu *vhodným způsobem* přiřadit $k$ maximálních řešení naší DR. Tento vhodný způsob nyní shrneme.

Ještě jednou zdůrazňuji, že libovolný *fundamentální systém má právě tolik prvků, kolik je řád příslušné rovnice*.

**Algoritmus k určení FS:** Pokud $\lambda$ je *reálný kořen* char. polynomu rovnice (Hn), který má násobnost $k$, do hledaného FS započítáme těchto $k$ funkcí.

$$e^{\lambda t}, \quad te^{\lambda t}, \quad t^2e^{\lambda t}, \quad \dots, \quad t^{k-1}e^{\lambda t}.$$

Pokud $\lambda = a + bi$ (kde $a, b \in \mathbb{R}$, $b > 0$) je *komplexní kořen* char. polynomu, který má násobnost $k$, pak i $\overline{\lambda} = a - bi$ je kořen násobnosti $k$. Do hledaného FS pro tyto dva komplexní kořeny započítáme následujících $2k$ funkcí.

$$e^{at}\cos bt,\ e^{at}\sin bt,\ te^{at}\cos bt,\ te^{at}\sin bt, \dots,\ t^{k-1}e^{at}\cos bt,\ t^{k-1}e^{at}\sin bt.$$

Lze dokázat, že každá z uvedených funkcí je maximální řešení naší DR a že tato všech $n$ těchto řešení (kde $n$ je řád rovnice, resp. stupeň char. polynomu) společně tvoří lineárně nezávislou množinu, a tedy FS rovnice.[60]

**2.59 Příklad.** Najděme všechna maximální řešení rovnice

$$y''' - 7y'' + 11y' - 5y = 0.$$

Jde o lineární diferenciální rovnici 3. řádu s konstantními koeficienty; protože její pravá strana je nulová, je tato rovnice navíc *homogenní*. Proto její maximální řešení tvoří celý lineární prostor, a to nejlepší, co můžeme udělat, abychom ho popsali, je najít jeho bázi, neboli fundamentální systém této rovnice.

Rovnice má charakteristický polynom

$$\chi(\lambda) = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 11\lambda - 5.$$

Není těžké si všimnout, že jeden jeho kořen je 1 a po dělení $\chi(\lambda)$ kořenovým činitelem $(\lambda - 1)$ dostaneme

$$\chi(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 6\lambda + 5) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 5),$$

[60] Fakt, že jde o řešení, jsme poměrně podrobně naznačili výše. Lineární nezávislost jsme dokázali pouze pro různé jednonásobné reálné kořeny a naznačili pro obecné reálné kořeny.

takže char. polynom rovnice má dvojnásobný kořen 1 a jednonásobný kořen 5. Tomu odpovídá následující FS:

$$\{e^t,\ te^t,\ e^{5t}\},$$

takže obecné řešení rovnice je lineární kombinací těchto tří funkcí, tj. je tvaru

$$y(t) = c_1e^t + c_2te^t + c_3e^{5t}, \quad t \in \mathbb{R},\ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}. \qquad \triangle$$

**2.60 Příklad.** Najděme všechna maximální řešení rovnice

$$y^{(4)} + 4y''' + 8y'' + 8y' + 4y = 0.$$

Jde o homogenní rovnici 4. řádu, FS tedy bude mít 4 prvky. Charakteristický polynom rovnice je stupně 4 a je to

$$\lambda^4 + 4\lambda^3 + 8\lambda^2 + 8\lambda + 4.$$

Ponechme nyní stranou skutečnost, že určit kořeny kvartického polynomu nemusí být snadné,[61] zde nám jde pouze o ilustraci. Můžeme si všimnout, že

$$\lambda^4 + 4\lambda^3 + 8\lambda^2 + 8\lambda + 4 = (\lambda^2 + 2\lambda + 2)^2,$$

odkud už snadno dostaneme finální rozklad na kořenové činitele

$$\big(\lambda - (\mathrm{i} - 1)\big)^2\big(\lambda + (\mathrm{i} + 1)\big)^2.$$

Charakteristický polynom naší rovnice má tedy dva komplexní kořeny. Ty jsou automaticky komplexně sdružené, neboli liší se pouze znaménkem imaginární části, protože polynom má pouze reálné koeficienty. V tomto případě jsou oba kořeny dvojnásobné. Podle našeho algoritmu tedy dostáváme následující FS:

$$\{e^{-t}\cos t,\ e^{-t}\sin t,\ te^{-t}\cos t,\ te^{-t}\sin t\}.$$

Obecné maximální řešení je proto tvaru

$$y(t) = c_1e^{-t}\cos t + c_2e^{-t}\sin t + c_3te^{-t}\cos t + c_4te^{-t}\sin t, \quad t \in \mathbb{R}, \qquad \triangle$$

kde $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ jsou konstanty (koeficienty lineární kombinace).

### 2.9.3 Variace konstant

Stojí za povšimnutí, že v posledních příkladech předchozí sekce se vyskytovalo více konstant: v okamžiku, kdy jsme získali fundamentální systém homogenní rovnice tvaru (Hn), jsme mohli konstatovat – a taky jsme tak učinili – že maximální řešení rovnice jsou právě všechny lineární kombinace prvků FS. Tyto lineární kombinace mají nějaké koeficienty, a to jsou ty konstanty, o nichž je řeč a kterých je více než jedna (pro rovnici řádu aspoň 2): je jich právě tolik, kolik je prvků FS (jejichž lineární kombinaci děláme), tj. právě tolik, kolik je řád rovnice.

Podobně jako u metody variace konstanty pro lineární rovnice 1. řádu je možné tyto konstanty začít považovat za funkce (provést „variaci těchto konstant“) a pokusit se určit, jak se tyto funkce musí chovat, abychom dostali řešení původní rovnice (Ln) (s netriviální pravou stranou).

[61] Jak víme, obecné vzorce pro polynomy 4. sice ještě existují (zatímco pro stupeň 5 už ne), vzorce jsou ale složité a často navíc davají výsledek (tj. kořeny) ve velmi složitém tvaru.

### 2.9.4 Speciální pravá strana

Metoda variace konstant sice vede k cíli obecně, může však být velmi pracná (někdy příliš). Vznikly proto způsoby, jak si v některých případech ušetřit práci; jedním z nich je identifikovat tzv. *speciální pravou stranu* a podle „kuchařky“, kterou za nás odvodili (a její platnost dokázali) jiní, určit *v jakém tvaru* musí být nějaké řešení naší rovnice. Nedostaneme tedy řešení naservírované na stříbrném podnose, už ale nepůjde o hledání jehly v kupce sena, vlastně nám postačí určit konkrétní hodnoty několika neurčitých koeficientů a dostaneme konkrétní – *partikulární* – řešení. Jak víme z Věty 2.53, pro nehomogenní rovnici[62] nám stačí znát prostor řešení příslušné rovnice homogenní a *partikulární* řešení naší rovnice „s pravou stranou“. Zmíněná metoda hledání partikulárního řešení je obsahem následující věty.

**2.61 Věta.** *Nechť $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ jsou čísla, $P, Q$ jsou polynomy a nechť (pravá strana rovnice je tvaru)*

$$f(t) = e^{\mu t}\big(P(t)\cos(\nu t) + Q(t)\sin(\nu t)\big).$$

*Pak existuje („partikulární“) řešení rovnice* (Ln)*, tj. rovnice*

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f(t),$$

*ve tvaru*

$$y_p(t) = t^m e^{\mu t}\big(R(t)\cos(\nu t) + S(t)\sin(\nu t)\big),$$

*kde $R, S$ jsou polynomy stupně nejvýše* $\max\{\mathrm{st}(P), \mathrm{st}(Q)\}$ *a $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ je násobnost čísla $\mu + \nu\mathrm{i}$ jakožto kořene charakteristického polynomu $\chi(\lambda)$ příslušné homogenní rovnice.*

[62]Podrobněji: stále je řeč o lineární diferenciální rovnici (vyššího řádu) s konstantními koeficienty.

# Příloha A

# Dodatek k zobecněnému Riemannovu integrálu

## A.1 Korektnost definice

Připomeňme definici zobecněného Riemannova integrálu:

**1.1 Definice.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$. Nechť $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ je funkce (nemusí být omezená). Předpokládejme, že pro každý podinterval $[x, y] \subseteq (a, b)$ existuje integrál $(\mathrm{R})\int_x^y f(x)\,\mathrm{d}x$. Nechť dále existuje $c \in (a, b)$ takové, že pravá strana níže má smysl. Pak definujeme*

$$(\mathrm{ZR})\int_a^b f = \lim_{x \to a_+} (\mathrm{R})\int_x^c f + \lim_{y \to b_-} (\mathrm{R})\int_c^y f. \tag{A.1}$$

Tato definice je intuitivně snadno pochopitelná: jednoduše si integrační obor rozdělíme v nějakém „vhodném“ bodě $c$ a pak počítáme limitu zvlášť v každém krajním bodě celého integračního oboru. Je zde ovšem skrytý formální problém týkající se volby onoho „vhodného“ dělicího bodu. Co když jich je více takových, pro něž pravá strana rovnice dává smysl? V následujícím si rozmyslíme dvě věci:

- Pokud existuje $c \in (a, b)$ takové, že pravá strana definice má smysl (tj. obě limity existují a dají se sečíst), pak už tuto vlastnost má každý bod $c \in (a, b)$;

- je jedno, který bod $c \in (a, b)$ si zvolíme, protože součet na pravé straně vyjde vždy stejný. Definice je tedy korektní, nemůže dávat dvě různé hodnoty integrálu $(\mathrm{ZR})\int_a^b f$.

Skutečně tomu tak je: Mějme nějaká dvě čísla $c_1, c_2 \in (a, b)$; dokážeme, že následující rovnost platí, má-li jedna její strana smysl:

$$\lim_{x \to a_+} (\mathrm{R})\int_x^{c_1} f + \lim_{y \to b_-} (\mathrm{R})\int_{c_1}^y f = \lim_{x \to a_+} (\mathrm{R})\int_x^{c_2} f + \lim_{y \to b_-} (\mathrm{R})\int_{c_2}^y f.$$

Předpokládejme, že levá strana má smysl. Přičtením a odečtením integrálu $\int_{c_1}^{c_2} f$ ji dostaneme v následujícím tvaru a můžeme dál upravovat:

$$\begin{aligned}
&\Big(\lim_{x \to a_+} \int_x^{c_1}\Big) + \int_{c_1}^{c_2} f + \int_{c_2}^{c_1} f + \Big(\lim_{y \to b_-} \int_{c_1}^y f\Big) \\
&= \lim_{x \to a_+} \Big(\int_x^{c_1} + \int_{c_1}^{c_2} f\Big) + \lim_{y \to b_-} \Big(\int_{c_2}^{c_1} f + \int_{c_1}^y f\Big) \\
&= \lim_{x \to a_+} \int_x^{c_2} f + \lim_{y \to b_-} \int_{c_2}^y f
\end{aligned}$$

Tento výpočet ukazuje, že na volbě dělicího bodu nesejde. Všechny zúčastněné integrály existují, neboť přímo definice (ZR)$\int_a^b f$ požaduje existenci (R)$\int_x^y f$ pro všechny podintervaly $[x, y] \subseteq (a, b)$, tedy např. existuje integrál (R)$\int_{c_1}^{c_2} f$ (automaticky má konečnou hodnotu) atd. Svou roli ve výpočtu výše hrálo také jednoduché použití „aritmetiky limit“. Tímto je dokázáno, že definice zobecněného Riemannova integrálu nezávisí na volbě dělicího bodu, a je tedy korektní.

## A.2 Srovnávací kritérium

Připomeňme znění srovnávacího kritéria, které jsme v hlavním textu nedokázali v nejobecnějším případě.

**1.10 Věta** (Srovnávací kritérium)**.** *Buď $I \subseteq \mathbb{R}$ libovolný interval s kraji* $\inf I = a$*,* $\sup I = b$*. Mějme funkce $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ takové, že pro každý podinterval $[c, d] \subseteq I$ platí $f, g \in \mathcal{R}([c, d])$. Nechť $|f(x)| \leqslant g(x)$ pro všechna $x \in I$. Pak platí implikace:*

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x < \infty \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x < \infty.$$

K dokončení důkazu se nám bude hodit následující zajímavé tvrzení, které má širší možné využití:

**A.1 Věta.** *Nechť $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$. Pak* $\max\{f, g\} \in \mathcal{R}([a, b])$.

*Důkaz.* Vzpomeňme nejprve na tvrzení z 2. semestru, tzv. Bolzanovu-Cauchyovu podmínku existence integrálu (též „Klíčové lemma“), podle níž Riemannův integrál $\int_a^b h$ nějaké omezené funkce $h\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ existuje, právě když

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists D \text{ dělení } [a, b]\colon\ S(h, D) - s(h, D) < \varepsilon.$$

Označme tedy $h := \max\{f, g\}$ a budiž dáno libovolné $\varepsilon > 0$; naším cílem je najít dělení $D = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ intervalu $[a, b]$ takové, že $S(h, D) - s(h, D) < \varepsilon$, čímž bude existence integrálu $\int_a^b h$ dokázána podle výše připomenutého tvrzení.

Vhodné dělení $D$ najdeme standardní metodou společného zjemnění dvou dělení: Podle Klíčového lemmatu existují dělení $D_1$ a $D_2$ intervalu $[a, b]$ taková, že

$$S(f, D_1) - s(f, D_1) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{a} \quad S(g, D_2) - s(g, D_2) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Budiž tedy $D$ společné zjemnění $D_1$ a $D_2$ definované jako $D := D_1 \cup D_2$. Podle lemmatu z 2. semestru víme, že pak obě nerovnosti výše zůstanou v platnosti, pokud v nich nahradíme $D_1$, resp. $D_2$, jemnějším dělením $D$. Ukážeme, že toto dělení $D$ skutečně splňuje nerovnost $S(h, D) - s(h, D) < \varepsilon$.

K tomu nejprve odvodíme pomocný odhad: uvažujme libovolnou množinu $I \subseteq \mathbb{D}_h$. Pak

$$\sup_{x\in I} h(x) - \inf_{x\in I} h(x) \leqslant \max\left\{ \sup_{x\in I} f(x) - \inf_{x\in I} f(x),\ \sup_{x\in I} g(x) - \inf_{x\in I} g(x) \right\}. \tag{A.2}$$

Dokažme to. Zvolme libovolně číslo $\eta > 0$. Podle definice suprema a infima existují body $y, z \in I$, pro které platí[1]

$$h(y) > \sup_{x\in I} h(x) - \eta \quad \text{a} \quad h(z) < \inf_{x\in I} h(x) + \eta.$$

Připomeňme si, že $h(y) = \max\{f(y), g(y)\}$, takže platí $h(y) = f(y)$ nebo $h(y) = g(y)$ (popř. obojí). Nastane-li první možnost, všimneme si, že $h(z) = \max\{f(z), g(z)\} \geqslant f(z)$, z čehož plyne nerovnost

[1]Kdyby například neexistovalo takové $y$, znamenalo by to, že $\sup_{x\in I} h(x) - \eta$ je horní závorou všech hodnot $h$ na $I$, což by byl spor s definicí suprema; podobně zdůvodníme i existenci bodu $z$.

$h(y)-h(z) = f(y)-h(z) \leqslant f(y)-f(z)$. Nastane-li druhá z obou možností, tj. $h(y) = g(y)$, analogickým argumentem odvodíme nerovnost $h(y) - h(z) \leqslant g(y) - g(z)$. Spojením těchto dvou větví dostáváme, že (v obou případech) platí

$$h(y) - h(z) \leqslant \max\big\{f(y) - f(z), g(y) - g(z)\big\}.$$

Odtud dostaneme (první nerovnost plyne z naší volby $y$ a $z$, druhá je triviální z předchozího odhadu)

$$\sup_{x\in I} h(x) - \inf_{x\in I} h(x) - 2\eta < h(y) - h(z) \leqslant \max\Big\{\sup_{x\in I} f(x) - \inf_{x\in I} f(x),\ \sup_{x\in I} g(x) - \inf_{x\in I} g(x)\Big\}.$$

Protože ale $\eta > 0$ bylo zvoleno libovolně, platí tato nerovnost pro všechna $\eta$, což znamená, že skutečně platí požadovaná nerovnost (A.2). Tu budeme nyní využívat na všech jednotlivých intervalech dělení $D$, které jsme už výše zafixovali.

Jsme připraveni provést závěrečný výpočet, v němž první nerovnost dostaneme aplikací (A.2) na každý sčítanec uvažované sumy (za $I$ v (A.2) tak bereme postupně všechny intervaly dělení $D$):

$$\begin{aligned}
S(h,D) - s(h,D) &= \sum_{i=1}^{n} \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} h(x)\cdot(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} h(x)\cdot(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\Big(\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} h(x) - \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} h(x)\Big)\cdot(x_i - x_{i-1}) \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} \max\big\{\sup f(x) - \inf f(x),\ \sup g(x) - \inf g(x)\big\}\cdot(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\big(\sup f(x) - \inf f(x) + \sup g(x) - \inf g(x)\big)\cdot(x_i - x_{i-1}) \\
&= S(f,D) - s(f,D) + S(g,D) - s(g,D) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

**A.2 Poznámka.** Pomocí Věty A.1 lze snadno dokázat, že kdykoliv existuje (R)$\int_a^b f$, existuje i (R)$\int_a^b |f|$.

Skutečně: Předně si uvědomme, že pokud existuje (R)$\int_a^b f$, samozřejmě existuje (R)$\int_a^b (-f)$ (má jen opačné znaménko); jinými slovy máme $f, -f \in \mathcal{R}([a,b])$. Podle Věty A.1 tedy i $\max\{f,-f\} \in \mathcal{R}([a,b])$. Ovšem $\max\{f,-f\} = |f|$, takže jinými slovy nám tato věta říká, že existuje (R)$\int_a^b |f|$.

*Dokončení důkazu Věty 1.10.* Budiž nyní $f$ *libovolná* (tj. už ne nezbytně nezáporná) funkce na $I = [a,b)$ splňující předpoklady věty. Chceme dokázat, že i v tomto případě je integrál $\int_a^b f$ konečný. Pomůžeme si následujícím značením:[2]

$$f^+ := \max\{f, 0\} \quad \text{a} \quad f^- := \max\{-f, 0\}.$$

Princip je, že funkce $f^+$ představuje „kladnou část“ funkce $f$, přičemž v bodech, kde $f$ je záporná, má $f^+$ hodnotu 0. Naproti tomu $f^-$ odpovídá záporné části $f$ (kterou ovšem „překlopí do plusu“). Je tedy snadno vidět, že na celém intervalu $[a,b)$ platí

$$f = f^+ - f^- \quad \text{a} \quad |f| = f^+ + f^-, \qquad \text{přičemž} \quad f^+ \geqslant 0,\ f^- \geqslant 0. \tag{A.3}$$

Chceme použít už dokázanou část věty (pro nezáporné funkce jsme ji už dokázali v hlavním textu) na funkce $f^+$ a $f^-$ (obě budeme „srovnávat“ s funkcí $g$) a v podstatě tak problém obecné funkce rozdělit na

[2] Můžete si vzpomenout, že totéž značení jsme použili v prvním semestru k důkazu důležité věty, že každá absolutně konvergentní řada je konvergentní.

dvě části; funkce $f^+$ i $f^-$ jsou, jak jsme si všimli, nezáporné, takže se na ně už dokázaná část věty vztahuje. Abychom ji však mohli skutečně aplikovat, potřebujeme ověřit také druhý předpoklad, totiž že pro každé $x \in [a, b)$ existují Riemannovy integrály $\int_a^x f^+$ a $\int_a^x f^-$ (tj. $f^+, f^- \in \mathcal{R}([a, x])$). Podle předpokladu věty ale pro libovolné $x \in [a, b)$ jest $f \in \mathcal{R}([a, x])$; tím pádem také $-f \in \mathcal{R}([a, b])$ a samozřejmě také $0 \in \mathcal{R}([a, b])$ (kde „0“ zde značí konstantní nulovou funkci). Podle Věty A.1 tedy i $\max\{f, 0\} \in \mathcal{R}([a, x])$ a také $\max\{-f, 0\} \in \mathcal{R}([a, x])$. Protože $x \in [a, b)$ bylo libovolné, je tím dokázáno, že $f^+, f^-$ splňují příslušný předpoklad věty.

Konečně si všimněme, že z (A.3) bezprostředně vyplývá, že $0 \leqslant f^+ \leqslant |f| \leqslant g$ na $[a, b)$, a podobně pro $f^-$. Dvojím použitím věty pro nezáporné funkce na $f^+$, resp. $f^-$, s majorantou $g$ dostaneme, že oba integrály $\int_a^b f^+$, resp. $\int_a^b f^-$, jsou konečné. Tím pádem i integrál

$$\int_a^b f = \int_a^b (f^+ + f^-) = \int_a^b f^+ + \int_a^b f^-$$

existuje a je konečný, což jsme měli dokázat. □

# Příloha B

# Dodatek k autonomním rovnicím

V části o autonomních rovnicích jsme nedokončili důkaz Věty 2.32, která hraje při kvalitativní analýze autonomních diferenciálních rovnic důležitou roli. V hlavním textu jsme pouze podrobně dokázali, že přirozený výpočet vede na řešení (dané vzorcem (2.20)), které nabývá všech hodnot v intervalu $(a, b)$. Zatím však pouze intuitivně cítíme, že totéž musí platit pro libovolné maximální řešení, protože každé takové maximální řešení musí „zahrnovat“ i ono spočtené řešení (2.20). Nyní tuto skutečnost dokážeme podrobně.

**Lemma A.** *Nechť $y$ a $z$ jsou dvě řešení rovnice* (A) *(v níž $g$ je spojitá a kladná na $(a, b)$), která splňují tutéž počáteční podmínku:*

$$y(x_1) = z(x_1) = y_1 \in (a, b).$$

*Pak existuje $\delta > 0$ takové, že $y(x) = z(x)$ pro všechna $x \in (x_1 - \delta, x_1 + \delta)$.*

*Jinak řečeno: pokud dvě řešení* (A) *prochází týmž bodem $(x_1, y_1)$, kde $y_1 \in (a, b)$, potom se tato řešení shodují nejen v bodě $x_1$ samotném, ale dokonce na nějakém jeho okolí.*

*Důkaz.* Hodnota $y_1$ podle předpokladu leží v (otevřeném) intervalu $(a, b)$, takže zřejmě existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $B(y_1, \varepsilon) = (y_1 - \varepsilon, y_1 + \varepsilon) \subseteq (a, b)$. Funkce $y$ je spojitá; pro toto $\varepsilon$ tedy najdeme příslušné $\delta_y > 0$ splňující, že $B(x_1, \delta_y) \subseteq \mathbb{D}_y$ (to díky tomu, že $\mathbb{D}_y$ je podle Definice 2.18 otevřený interval) a zároveň tak malé, že

$$\forall x \in B(x_1, \delta_y): \ y(x) \in B(y(x_1), \varepsilon) = B(y_1, \varepsilon).$$

Analogicky, díky spojitosti $z$, najdeme $\delta_z > 0$, aby platil analogický výrok pro $z$. Položme nyní $\delta := \min\{\delta_y, \delta_z\}$ a uvažujme interval

$$I := B(x_1, \delta) = (x_1 - \delta, x_1 + \delta);$$

pak platí

$$\forall x \in I = B(x_1, \delta): \ y(x), z(x) \in B(y_1, \varepsilon) \subseteq (a, b). \tag{B.1}$$

Ukázali jsme tedy, že existuje netriviální otevřený interval $I$ obsahující $x_1$, na němž mají obě řešení (tedy $y$ i $z$) hodnoty v $(a, b)$.

Omezme se nyní pouze na interval $I = (x_1 - \delta, x_1 + \delta)$:

$$\tilde{y} := y|_I, \quad \tilde{z} := z|_I.$$

Pak $\tilde{y}$ i $\tilde{z}$ mají všechny svoje hodnoty v intervalu $(a, b)$ (viz (B.1)); podle výpočtu řešení s hodnotami v $(a, b)$, který jsme provedli výše, existují konstanty $C_y$, $C_z$ takové, že platí

$$\forall x \in I: \ \tilde{y}(x) = G^{-1}(x + C_y) \quad \text{a} \quad \tilde{z}(x) = G^{-1}(x + C_z).$$

Nyní využijeme faktu, že obě řešení splňují tutéž počáteční podmínku, a postupně dostaneme, že nutně platí $C_y = C_z$:

$$G^{-1}(x_1 + C_y) = \tilde{y}(x_1) = y(x_1) = y_1 = z(x_1) = \tilde{z}(x_1) = G^{-1}(x_1 + C_z),$$

odkud (díky prostotě $G^{-1}$) vidíme $x_1 + C_y = x_1 + C_z$, takže skutečně $C_y = C_z$. Označme $C := C_y$ (tj. zároveň $C = C_z$).

Dostali jsme celkem, že

$$\forall x \in I: \; y(x) = \tilde{y}(x) = G^{-1}(x + C) = \tilde{z}(x) = z(x),$$

jinými slovy řešení $y$ a $z$ se shodují na jistém okolí bodu $x_1$, konkrétně na intervalu $I = (x_1-\delta, x_1+\delta)$. △

Uvažujme libovolné *maximální* řešení $y$ naší rovnice (A), které splňuje počáteční podmínku $y(x_0) = y_0 \in (a, b)$ (předpoklad lemmatu).

Položíme-li

$$C := G(y_0) - x_0,$$

jde o korektní definici, neboť $G\colon (a,b) \to (A, B)$ a $y_0 \in (a, b)$. Pak je ovšem snadno vidět, že řešení (jak jsme vypočítali výše) $z\colon (A - C, B - C) \xrightarrow{\text{na}} (a, b)$ definované vzorcem

$$z(x) := G^{-1}(x + C), \quad x \in (A - C, B - C),$$

splňuje tutéž počáteční podmínku:

$$z(x_0) = G^{-1}(x_0 + C) = G^{-1}(x_0 + G(y_0) - x_0) = G^{-1}(G(y_0)) = y_0.$$

Chceme ukázat, že $y = z$ na $(A - C, B - C)$, protože to triviálně implikuje vytouženou inkluzi $(a, b) = \mathbb{H}_z \subseteq \mathbb{H}_y$. Dokážeme, že $y = z$ na $[x_0, B - C)$ a na $(A - C, x_0]$; oba důkazy jsou v podstatě stejné, takže nám bude stačit rovnost dokázat (třeba) na prvním z obou uvedených intervalů. Nuže:

Podle Sublemmatu existuje $\delta > 0$ tak, že

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta): \; y(x) = z(x),$$

tj. obě řešení se shodují nejen v bodě $x_0$, nýbrž i na nějakém jeho okolí. Následující množina je díky tomuto faktu neprázdná:

$$M := \{t \in (x_0, B - C]: \; y = z \text{ na } [x_0, t)\}.$$

Náš cíl je ukázat, že $B - C \in M$, neboli $y = z$ na $[x_0, B - C)$. Množina $M$ je neprázdná (víme $\delta \in M$) a z definice také shora omezená, takže existuje $s := \sup M \in [\delta, B - C]$.

Všimněme si, že $s \in M$. Skutečně, z definice suprema snadno plyne existence neklesající posloupnosti $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq M$, $\lim_{n\to\infty} s_n = s$. A protože $s_n \in M$, jest (podle definice $M$) $y = z$ na $[x_0, s_n)$ (a toto platí pro všechna $n$), dostáváme

$$y = z \quad \text{na} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} [x_0, s_n) = [x_0, s), \tag{B.2}$$

takže $s \in M$.

Nyní si všimněme, že

$$\lim_{x \to s_-} y(x) = \lim_{x \to s_-} z(x) = \lim_{x \to s_-} G^{-1}(x + C) =: L,$$

kde první rovnost plyne díky tomu, že $s \in M$ (a tedy $y = z$ na $[x_0, s)$), druhá rovnost z definice $z$ a limita existuje díky monotonii $G^{-1}$.

Předpokládejme nyní pro spor, že $s < B - C$. Pak $L = \lim_{x \to s_-} z(x) = z(s)$ ze spojitosti $z$. Uvědomme si, že v tom případě nutně i $L = \lim_{x \to s_-} y(x) = y(s)$: kdyby totiž řešení $y$ nebylo definováno v bodě $s$, byl by to spor s jeho maximalitou, neboť by bylo možné ho „prodloužit doprava" pomocí funkce $z$ (tj. existovalo by prodloužení $y$). To znamená, že $s \in \mathbb{D}_y$ a ze spojitosti $y$ platí výše uvedená rovnost; celkem:

$$y(s) = L = z(s).$$

Podle Sublemmatu aplikovaného tentokrát v bodě $s$ (místo $x_0$) tedy existuje nějaké $\delta_1 > 0$ takové, že $z = y$ na $(s - \delta_1, s + \delta_1)$. Díky (B.2) to ovšem znamená, že $z = y$ nejméně na $[x_0, s + \delta_1)$, takže

$$\sup M = s < s + \delta_1 \in M,$$

což je pochopitelně spor s definicí suprema. Je tedy nutně $s = B - C$ a (jak jsme dokázali výše) $s \in M$, takže jsme hotovi.

# Příloha C

# Dodatek k nekonečným řadám

## C.1 Další kritéria relativní konvergence

Připomeňme nejprve v úvodu kapitoly už zmiňované Leibnizovo kritérium, které se hodí výhradně na vyšetřování relativní konvergence řad.

**C.1 Věta** (Leibnizovo kritérium)**.** *Budiž* $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ *monotónní posloupnost reálných čísel s limitou* 0*. Potom řada* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\mu_n$ *konverguje.*

**C.2 Příklad.** Řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ je relativně konvergentní.

- Každý se snadno přesvědčí, že řada není absolutně konvergentní.
- Řada ale je konvergentní. Skutečně, položíme-li $\mu_n = \frac{1}{n}$, pak posloupnost $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňuje předpoklady Leibnizova kritéria (je klesající a má limitu 0). Tím pádem konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\mu_n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$, což je přesně vyšetřovaná řada.

Vidíme tedy, že ne každá konvergentní řada je absolutně konvergentní, a tedy absolutní konvergence je ostře silnější vlastnost než konvergence. Vzpomeňme, že každá absolutně konvergentní řada je automaticky konvergentní[1], zde jsme si však znovu uvědomili, že opačná implikace neplatí. △

Výrazným zobecněním Leibnizova kritéria je následující kritérium Dirichletovo; místo posloupnosti čísel $(-1)^n$ totiž stačí mít libovolnou posloupnost $a_n$ takovou, že příslušná posloupnost částečných součtů $\sum_{n=1}^{N}a_n$ je omezená. (Všimněte si, že posloupnost $(-1)^n$ tuto vlastnost má, neboť jí příslušné částečné součty jsou $-1, 0, -1, 0, \ldots$. Užitečným doplňkem Dirichletova kritéria je pak kritérium Abelovo, které umožňuje vyšetřovat mnohem složitější řady.

**C.3 Věta** (Dirichletovo kritérium)**.** *Nechť má řada* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *omezenou posloupnost částečných součtů a nechť* $\mu_n \searrow 0$ *(tj.* $\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \mu_3 \geqslant \ldots$ *a platí* $\lim_{n\to\infty}\mu_n = 0$*). Potom* $\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n\cdot a_n$ *konverguje.*

**C.4 Věta** (Abelovo kritérium)**.** *Nechť je posloupnost* $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ *omezená a monotónní. Jestliže* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *konverguje, potom konverguje i řada* $\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n\cdot a_n$*.*

*Pokud navíc* $\lim_{n\to\infty}\omega_n \neq 0$*, pak platí i opačná implikace, tj. přesněji: řada* $\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n\cdot a_n$ *konverguje, právě když konverguje řada* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$*.*

[1] Rozmyslete si, co přesně toto tvrzení říká!

Důkazy těchto dvou kritérií jsou poněkud technicky náročnější (i když rozhodně ne těžké), takže je vynecháme. Povšimněme si nicméně toho, co mají obě kritéria společné. V obou případech předpokládáme (poprvé implicitně, podruhé explicitně), že posloupnost $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ (resp. $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$) je omezená a monotónní. Stejně tak v obou případech předpkládáme (poprvé explicitně, podruhé implicitně), že posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je omezená. Tyto dva předpoklady však samy o sobě na konvergenci řady součinů, která se v kritériích tvrdí, nestačí. V obou kritériích tedy do předpokladů přidáváme ještě kousek navíc: V případě Dirichletova kritéria to je požadavek, aby posloupnost $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ byla nejen omezená a monotónní, ale dokonce aby měla limitu 0; v případě Abelova kritéria zase předpokldádáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nejen že má omezené částečné součty, ale dokonce konverguje. Obě tato zesílení předpokladů už na konvergenci stačí (jak nám říkají Věty C.3 a C.4).

**C.5 Příklad.** Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{arctg} n}{n}. \tag{C.1}$$

Vyšetříme nejprve absolutní konvergenci:

$$\left| \frac{(-1)^n \operatorname{arctg} n}{n} \right| = \frac{\operatorname{arctg} n}{n} \geqslant \frac{1}{2n};$$

našli jsme tedy divergentní minorantu. (Uvedená nerovnost platí pro všechna $n$, protože funkce arctg je rostoucí a už pro $n = 1$ platí $\operatorname{arctg} n = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} > \frac{1}{2}$.) Vyšetřovaná řada tedy nekonverguje absolutně podle srovnávacího kritéria.

Neabsolutní konvergence: Nejprve si všimněme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konverguje (to víme už dávno z Leibnizova kritéria, mohli bychom ovšem použít i kritérium Dirichletovo). Protože funkce arctg je rostoucí, je posloupnost $\{\operatorname{arctg} n\}_{n=1}^{\infty}$ také rostoucí, a je tedy každopádně monotónní. Protože každá posloupnost s vlastní limitou je omezená, vidíme, že i tato naše posloupnost je omezená: jest totiž $\lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg} n = \frac{\pi}{2} \in \mathbb{R}$. Tím pádem jsou splněny předpoklady Abelova kritéria s $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ a $\omega_n = \operatorname{arctg} n$; kritérium říká, že konverguje řada součinů, tedy naše vyšetřovaná řada. Závěr tedy je, že řada konverguje relativně.

Všimněme si také, že Abelovo kritérium se dá používat opakovaně a dostávat tak konvergenci složitějších a složitějších řad. Například řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{arctg} n}{n} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \sqrt[n]{666} \tag{C.2}$$

je na vyšetření mnohem jednodušší, než by se mohlo zdát na první pohled. Už víme, že konverguje řada čísel $\frac{(-1)^n \operatorname{arctg} n}{n}$. Protože ale posloupnost $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ je monotónní a má limitu $e$ (takže je omezená), konverguje podle Abelova kritéria i řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{arctg} n}{n} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \tag{C.3}$$

Nyní se podíváme na další činitel $\sqrt[n]{666}$: i posloupnost těchto čísel je monotónní a omezená (má limitu 1). Použijeme-li tedy Abelovo kritérium na řadu (C.3) a posloupnost $\left\{\sqrt[n]{666}\right\}_{n=1}^{\infty}$, dostaneme konvergenci řady (C.2).

Nakonec poznamenejme, že konvergence řady (C.1) (jakož i řady (C.2)) se dá vyšetřit i bez použití Abelova kritéria, pouze se znalostí kritéria Leibnizova. Takové řešení by bylo o poznání početně náročnější a probíhalo by takto: Máme vyšetřit konvergenci řady tvaru $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \mu_n$, kde $\mu_n = \frac{\operatorname{arctg} n}{n}$ (tj. řady (C.1)); podle Leibnizova kritéria pro ověření konvergence této řady stačí vědět, že posloupnost $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí a $\lim_{n\to\infty} \mu_n = 0$. Toho lze docílit například použitím derivace.

Uvažujme funkci $f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$ na intervalu $[1, \infty)$ (případně na nějakém intervalu tvaru $[K, \infty)$, kde $K > 1$ – tím bychom ověřovali monotonii „od tohoto $K$ dále“, což by nám také postačilo). Jest

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{1+x^2} \cdot x - \operatorname{arctg} x \cdot 1}{x^2} = \frac{\frac{x}{1+x^2} - \operatorname{arctg} x}{x^2}.$$

Protože jmenovatel je vždy kladný, stačí se podívat na znaménko čitatele: Zpozorujeme, že pro $x \geqslant 2$ platí

$$\frac{x}{1+x^2} - \operatorname{arctg} x \leqslant \frac{x}{1+x^2} - \operatorname{arctg} 1 = \frac{x}{1+x^2} - \frac{\pi}{4} \leqslant \frac{x}{x^2} - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{x} - \frac{\pi}{4} \leqslant \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} < 0.$$

Derivace funkce $f$ je tedy na intervalu $[2, \infty)$ záporná, funkce $f$ sama je na tomto intervalu klesající, takže je klesající i posloupnost $\{f(n)\}_{n=2}^{\infty} = \left\{\frac{\operatorname{arctg} n}{n}\right\}_{n=2}^{\infty} = \{\mu_n\}_{n=2}^{\infty}$. Ověřili jsme tedy monotonii posloupnosti $\{\mu_n\}_{n=2}^{\infty}$, a jsme hotovi: řada začínající indexem 2 konverguje podle Leibnizova kritéria a my víme, že konečně mnoho členů nehraje z hlediska konvergence roli, takže konverguje i řada (C.1). △

**C.6 Poznámka.** Obě právě probrané věty, tedy Dirichletovo a Abelovo kritérium, se používají takřka výhradně na vyšetřování relativní konvergence: pro studium absolutní konvergence se hodí především kritéria probraná v sekci o řadách s nezápornými členy. Tj. srovnávací, odmocninové a podílové, resp. jejich limitní verze, a případně též integrální kritérium, ba i Raabeovo.

Dále si všimněte, že Dirichletovo kritérium triviálním způsobem implikuje kritérium Leibnizovo. Jinými slovy, máme-li už dokázané Dirichletovo kritérium, dostaneme Leibnizovo kritérium jako snadný důsledek.

Je-li dána situace splňující předpoklady Leibnizova kritéria, to jest, je dána řada tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \mu_n,$$

kde $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónní a má limitu 0, potom, označíme-li $a_n = (-1)^n$, jsou splněny předpoklady Věty C.3: je totiž snadno vidět (a už jsme si toho několikrát všimli), že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ má omezenou posloupnost částečných součtů. Dirichletovo kritérium v této situaci konstatuje, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \mu_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \mu_n$ konverguje, což je obsahem tvrzení Leibnizova kritéria. Opravdu tedy Leibnizovo kritérium snadno plyne z Dirichletova.

**C.7 Věta.** *Nechť $t \in \mathbb{R}$ a $t \neq 2k\pi$ pro všechna $k \in \mathbb{Z}$. Potom řady*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(nt) \quad a \quad \sum_{n=1}^{\infty} \cos(nt)$$

*nemají součet, ale každá z nich má omezenou posloupnost částečných součtů.*

**C.8 Příklad.** Řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}$ konvergují podle vět C.3 a C.7. △

*Důkaz.* □

*Důkaz Věty C.7.* □

**C.9 Příklad.** Vyšetřete konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(666n)}{\sqrt{n}}$. △

# Příloha D

# Průvodce základy ODR

Tento průvodce se od těch z minulého semestru liší tím, že tentokrát jsou k dispozici i výsledky, případně podrobnější nápovědy. Ty odstavce, pro které je uvedeno i řešení (vysvětlení, nápověda) jsou opatřeny hypertextovým odkazem.

Doporučuji vám nabízené úvahy rozmýšlet nejdřív samostatně. Do výsledků se ale podívejte v každém případě, třeba vám něco uniklo. A občas jsou tam doplňující komentáře.

---

**1** Uvědomte si, že $y(x) = x^2$ je řešením rovnice

$$y' = 2x. \tag{D.1}$$

Stačí do rovnice dosadit, tj. vlastně provést zkoušku. Proveďte ji. Pro která $x$ rovnost platí? (Neboli: na jakých intervalech se jedná o řešení?)

**2** Uvažujme diferenciální rovnici

$$y' = \sqrt{1 - y^2}. \tag{D.2}$$

Dokažte, že funkce $y(x) = \sin x$ je řešením této rovnice na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, ale ne na $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$.

**3** Na jakých intervalech je řešením rovnice (D.2) funkce $y(x) = \cos x$? Víme-li, že na jistém intervalu je řešením funkce $\sin x$, lze bez opětovného dosazování nahlédnout, že i funkce $\cos x$ musí být někde řešením (D.2)? (Nápověda: vzpomeňte, co platí pro řešení autonomních rovnic.)

**4** (Obecně o diferenciálních rovnicích)
Uvažujme diferenciální rovnici obecného[1] tvaru

$$y'(x) = f(x, y(x)), \tag{D.3}$$

kde $y$ je hledaná funkce a $f$ je nějaká funkce dvou proměnných. Rozhodněte o pravdivosti následujících výroků a své závěry zdůvodněte.

(i) Nechť $f \geqslant 0$ na svém definičním oboru ($\mathbb{D}_f \subseteq \mathbb{R}^2$). Pak každé řešení rovnice (D.3) je rostoucí.

(ii) Nechť $f > 0$ na $\mathbb{D}_f$. Pak každé maximální řešení (D.3) je neklesající.

(iii) Nechť $f \geqslant 0$ na $\mathbb{D}_f$. Pak každé řešení (D.3) je neklesající.

[1] Toto je obecný tvar DR 1. řádu, o které se zajímáme. Existují i jiné DR 1. řádu, o ty se však nebudeme zajímat.

(iv) Nechť $f < 0$ na $\mathbb{D}_f$. Pak každé řešení (D.3) je klesající.

(v) Buď $y$ řešení (D.3). Pak $\mathbb{D}_y$ je interval.

(vi) Buď $y$ řešení (D.3). Pak $y$ má na $\mathbb{D}_y$ derivaci.

$\boxed{5}$ Zkuste si znovu uvědomit, co rovnice (D.3) vlastně vypovídá o svých řešeních. Je jasné, že určuje, které funkce jsou její řešení a které ne; náš ideální cíl je tyto dvě kategorie odlišit, tj. najít všechna řešení.

Řešení z rovnice není ihned vidět ve své celistvosti (*integritě*[2]) – například ve formě vzorce – v jednotlivých bodech ale apriorní informaci máme:

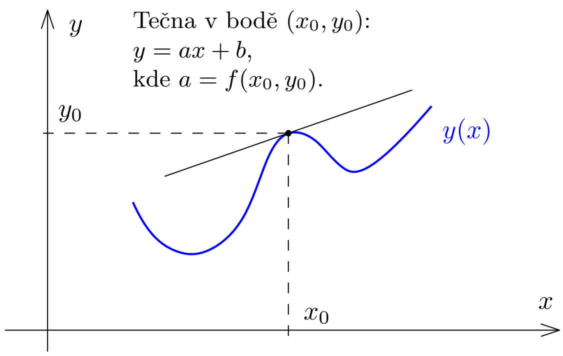
Mějme nějaké konkrétní řešení $y$ rovnice (D.3) a buď $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ některý z bodů, jimiž toto řešení prochází, tj. nechť platí $y(x_0) = y_0$. Rovnice (D.3) implikuje, že

$$y'(x_0) = f(x_0, y(x_0)),$$

neboli

$$y'(x_0) = f(x_0, y_0).$$

Tím pádem (jakékoliv) řešení (D.3) procházející bodem $(x_0, y_0)$ jím prochází takovým směrem, že derivace (tj. směrnice příslušné tečny) je $f(x_0, y_0)$ – viz obr.




Obrázek D.1: Tečna ke grafu.

$\boxed{6}$ Vezměme konkrétní příklady rovnice (D.3) a konkrétní body $(x_0, y_0)$; otázky jsou:

- Jaká je směrnice tečny k řešení dané rovnice, jež prochází daným bodem $(x_0, y_0)$?
- A jaký úhel tato tečna svírá s osou $x$ (v radiánech i ve stupních)?

Příklady:

(i) Rovnice (D.1), bod $(-1, 6)$;

(ii) rovnice (D.1), bod $(-1, 28)$;

(iii) rovnice (D.2); uvažujte postupně body:

$$\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right),\ \left(496, \sqrt{\frac{2}{3}}\right),\ \left(8128, \sqrt{\frac{2}{3}}\right),\ (1, 2);$$

(iv) rovnice $y' = \sin^2 x \cdot (y^4 + 2y^3 - 5y^2 + 4)$, uvažujte bod $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$.

[2]Připomeňte si alternativní terminologii, v níž [*řešit DR = integrovat DR*] a [*řešení DR = integrální křivka*].

$\boxed{7}$ V zadáních DR často najdeme nejen rovnici samu, ale také informaci o tom, *kterým bodem roviny prochází hledané řešení*:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Zde tedy hledaná funkce $y$ prochází bodem $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$; této informaci říkáme *počáteční podmínka*. V odstavci výše jsme si rozmýšleli, jaký směr má tečna k řešení v daném bodě. Nyní nám jde o něco jiného: chceme z množiny všech řešení vybrat to (nebo ta, je-li jich více), které daným bodem prochází.

Všechna maximální[3] řešení rovnice

$$y' = y$$

jsou tvaru

$$y(x) = K \cdot e^x,$$

kde $K$ může být libovolná reálná konstanta. (Tedy pro libovolné $K \in \mathbb{R}$ vám vzorec dá jedno konkrétní řešení, třeba $y(x) = 666 \cdot e^x$ je řešení.) Tímto způsobem zapisujeme v jistém smyslu „všechna řešení současně“.

Pro jednoduchou úlohu s počáteční podmínkou

$$y' = y, \quad y(2) = 17$$

nyní najděte konkrétní řešení (tj. určete $K$).

$\boxed{8}$ Při studiu diferenciálních rovnic není těžké učinit pozorování, že rovnice sama obvykle neurčuje hledanou funkci jednoznačně. Je tedy přirozené ptát se, jestli dodatečná informace poskytnutá v *počáteční podmínce* už řešení vymezí přesně. Asi tušíte, že odpověď je často záporná v případech, kdy lze lepit: pak obvykle přichází v úvahu více možností, jak „se řešení může dostat do daného bodu $(x_0, y_0)$“.

V této souvislosti doporučuji zopakovat si *Picardovu větu o existenci a jednoznačnosti řešení DR* (Věta 4) – ta nám za jistých předpokladů zaručí, že řešení se nemůže větvit (tj. nelze nijak „lepit“), a to třeba v případě, že požadavky ve Větě kladené na $f$ jsou splněny na celém $\mathbb{D}_f$. Touto otázkou se však nyní nebudeme podrobněji zabývat, místo toho se na počáteční podmínku a její schopnost dodatečně vymezit řešení podíváme z jiného úhlu.

$\boxed{9}$ Vzpomeňte, že už při řešení tzv. *triviálních* rovnic tvaru $y'(x) = g(x)$[4] je hledaných primitivních funkcí více: liší se integrační konstantou.

Integrační konstanta je parametr, za nějž můžeme dosadit libovolné reálné číslo a pokaždé dostaneme jedno řešení naší úlohy. Kupříkladu řešení rovnice

$$y' = 2x \quad \text{je} \quad \int 2x \, \mathrm{d}x = x^2 + C,$$

tedy všechny funkce jako $x^2$, $x^2 - 8$, $x^2 + 729$ atd. jsou řešení. Vidíme, že množina všech (maximálních) řešení má *jeden stupeň volnosti*, jejž představuje konstanta $C$, kterou lze libo*volně* měnit. Přítomnost *jednoho* stupně volnosti je při tom dána *jedinou* integrací, kterou jsme k výpočtu museli provést.

Uvažujme nyní nějakou rovnici 2. řádu, třeba:

$$y'' = 2. \tag{D.4}$$

Tuto rovnici jsem nevybral náhodně: všimněte si, že všechna řešení rovnice předchozí, tedy $y(x) = x^2 + C$ ($C \in \mathbb{R}$) jsou současně řešeními (D.4). Skutečně, platí totiž

$$(x^2 + C)'' = (2x + 0)' = 2.$$

[3] Tj. nemají prodloužení, tj. jsou definovaná na maximálním možném intervalu

[4] tj. řešení neurčitých integrálů (čemuž jsme věnovali nemalou část minulého semestru)

Asi si ale uvědomujete, že se nejedná o *všechna* řešení. Vyjdeme-li ze zadání (D.4), je zřejmě potřeba dvou integrací, abychom se dostali od $y''$ k $y$. Proveďme je postupně:

$$y'(x) \overset{c}{=} \int 2\,\mathrm{d}x = 2x + C_1,$$

a dále tedy

$$y(x) \overset{c}{=} \int (2x + C_1)\,\mathrm{d}x = x^2 + C_1 x + C_2, \tag{D.5}$$

kde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ jsou na sobě zcela nezávislé integrační konstanty, které v tomto obecném zápisu všech řešení fungují jako parametry: konkrétní řešení dostaneme dosazením libovolných hodnot za $C_1$ a $C_2$, a řešeními naší rovnice tak jsou funkce jako $x^2 + 7x + 11$, $x^2 + 13$, $x^2 - 1024x$ atd.

$\boxed{10}$ Pojďme si nyní úlohu (D.4) obohatit o počáteční podmínku:

(a) $y(0) = 0$ (hledáme tedy řešení procházející počátkem);

(b) $y(-3) = 2$ (řešení prochází bodem $(-3, 2)$).

Zjistěte sami, co nám tyto informace o řešení vypoví (dosaďte je do (D.5)).

$\boxed{11}$ Najděte řešení (D.4) splňující současně obě podmínky ((a) i (b)) ze závěru předchozího odstavce. Existuje takové řešení? Existuje jich dokonce více?

$\boxed{12}$ V obecné rovině lze očekávat, že každému stupni volnosti by měla odpovídat jedna informace v počáteční podmínce. Ovšem pozor, tyto informace nejsou vždy kompatibilní! Pokud například úlohu (D.4) obohatíme o počáteční podmínku takto:

$$y'' = 2, \quad y(1) = 5 \wedge y(1) = 6,$$

je ihned zřejmé, že dostáváme úlohu, která nemá žádné řešení. (Než budete pokračovat ve čtení, ujistěte se, že onen jednoduchý důvod pro tento fakt je vám zřejmý.)

$\boxed{13}$ Po plném pochopení předchozího by pro vás mělo být v podstatě snadné nahlédnout následující tvrzení.

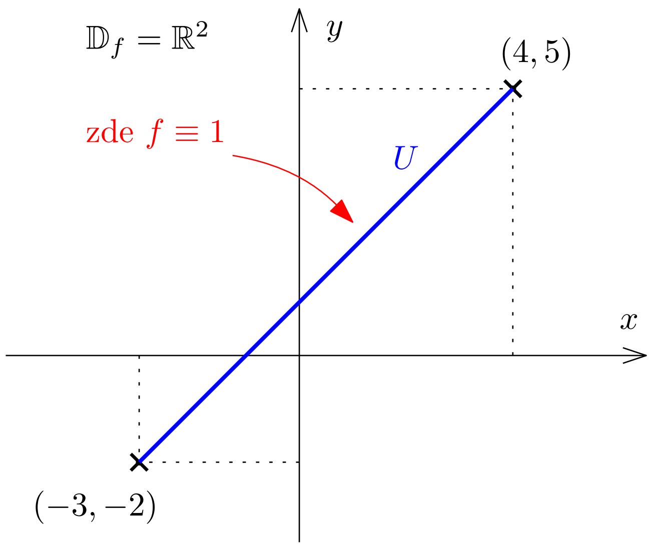
*Nechť $f$ je funkce dvou proměnných, která má nulovou hodnotu na nějaké netriviální vodorovné úsečce $\overline{AB}$ obsažené v $\mathbb{D}_f$. Pak „otevřená úsečka“ $U \setminus \{A, B\}$*[5] *je obsažena v grafu nějakého řešení $y$ rovnice* (D.3)*, neboli rovnice*

$$y' = f(x, y).$$

$\boxed{14}$ V podobném duchu bychom se mohli pokusit zformulovat tvrzení pro řešení se směrnicí 1 místo 0. Následující tvrzení také platí; tentokrát formulujeme silnější požadavky na funkci $f$, díky čemuž není nutné formulaci komplikovat odebíráním koncových bodů úsečky (podrobnosti ve výsledcích). Tvrzení dokažte alespoň ve vnitřních bodech úsečky! (V krajních bodech je to o dost těžší, ale nadšenci se mezi vámi jistě najdou!)

*Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce (dvou proměnných), která má hodnotu 1 ve všech bodech úsečky $U$ spojující body $(-3, -2) \in \mathbb{R}^2$ a $(4, 5) \in \mathbb{R}^2$. Pak existuje řešení $y$ rovnice* (D.3)*, pro nějž $U \subseteq \operatorname{graf}(y)$.*

[5] Od $U$ odebereme oba krajní body $A$ a $B$, všechny ostatní – „vnitřní“ – body ponecháme.




Obrázek D.2: Předpoklady tvrzení.

$\boxed{15}$ Platilo by tvrzení z předchozího odstavce i s úsečkou $V$ s koncovými body $(8,16)$ a $(32,64)$? (S analogickým předpokladem na $f$, tj. že $f = 1$ ve všech bodech $V$.) Své tvrzení zdůvodněte.

$\boxed{16}$ Nyní na okamžik zapomeňte na diferenciální rovnice a dívejte se na $y(x)$ docela obyčejně jako na funkci proměnné $x$ (řešení DR ostatně nic jiného není). V prvním semestru jsme místo písmenka $y$ obvykle používali $f$ apod., princip je ale stejný. Proměnná $x$ je *nezávisle proměnná* a znázorňujeme ji vodorovnou osou, proměnná $y$ je *závisle proměnná* (závisí na $x$ a tato závislost je dána předpisem funkce $y$) a znázorňujeme ji svislou osou[6].

Připomeňme si klíčovou terminologii, kterou (jak jste si, doufám, všimli) důsledně používám:

- Body na ose $x$ nazýváme prostě *body*;
- body na ose $y$ nazýváme *hodnoty*.

Zde podstatná je zejména druhá informace. Říkáme tak třeba, že funkce $y(x) = \sin x$ v *bodě* $\frac{\pi}{2}$ (míněno $x = \frac{\pi}{2}$) má *hodnotu* 1. Nebo exponenciála má v *bodě* 2 hodnotu $e^2$ apod. Těmto faktům samozřejmě odpovídá znázornění pomocí grafu v souřadnicovém systému, např.:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{\pi}{2}, 1\right) \in \text{graf}(\sin);$$
$$\exp(2) = e^2 \quad \Leftrightarrow \quad (2, e^2) \in \text{graf}(\exp).$$

Zaměřte se na to, že druhá, tedy „$y$-ová“, souřadnice daného bodu grafu (třeba pro bod $(2, e^2)$) je *hodnota* naší funkce (zde exponenciály) v *bodě* daném první souřadnicí onoho bodu grafu.[7]

To jest, všechny body grafu jsou vlastně uspořádané dvojice tvaru

$$\Big(\textit{bod} \text{ def. oboru}\textbf{,} \ \text{příslušná } \textit{hodnota}\Big) \in \mathbb{R}^2$$

jako třeba $(2, e^2)$ atd.

Toto vše je důvěrně známé už na SŠ, dělali jsme to tak v prvním semestru a děláme to takto i nyní při studiu diferenciálních rovnic.

[6] Je zde tedy jistá kolize značení: písmenem $y$ značíme jak funkci – neznámou rovnice, tj. závisle proměnnou – tak také jednu ze dvou os souřadnicového systému. Při dobrém pochopení tato kolize nevede k nedorozuměním a naopak usnadňuje vyjadřování.

[7] Zde se bohužel nevyhneme další nejednoznačnosti vyjadřování: v této větě je prvním výskytem slova „bod“ míněn bod v $\mathbb{R}^2$, zatímco v druhém případě (kurzívou) máme na mysli bod na ose $x$.

**17** Jen několik kontrolních otázeček; které z následujících funkcí nabývají pouze *hodnot* v intervalu $(0, \infty)$ a které v $[-1, 1]$? (Všimněte si, že pro funkce níže záměrně používám různé způsoby vyjádření.)

(i) $y = \sqrt{x}$;

(ii) $y = \sqrt{1 - x^2}$;

(iii) $f(x) = \log(x)$;

(iv) $y(x) = e^x$;

(v) sin;

(vi) $\sin|_{[0, \frac{\pi}{2}]}$;

(vii) $\sin|_{(0, \frac{\pi}{2}]}$;

(viii) $y = |x^{-1}|$;

(ix) $f(x) = \sin(x^{-1})$;

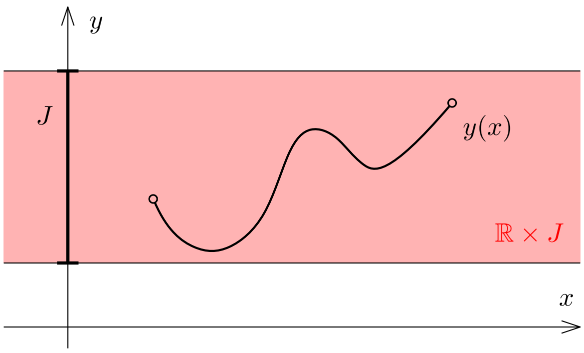
(x) $y(x) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x$;

(xi) $\operatorname{tg}|_{[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]}$;

**18** Jak tedy rozumět výroku, že

*funkce $y$ má hodnoty v intervalu $J$?*

Obvykle tím máme na mysli, že pro všechna $x$ z definičního oboru $y$ je hodnota $y(x)$ prvkem $J$, neboli $\mathbb{H}_y \subseteq J$. Protože $J$ je „*hodnotový* interval“, měli bychom ho vyznačit na svislé ose. Graf funkce s hodnotami v $J$ pak musí ležet ve vodorovném pásu určeném právě tímto intervalem na svislé ose. (Tento pás je množina $\mathbb{R} \times J$ v $\mathbb{R}^2$.)

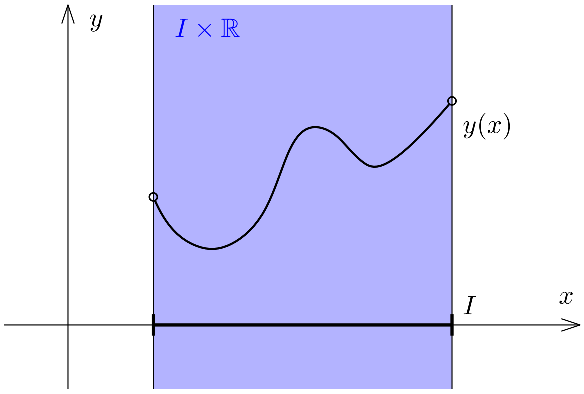



Obrázek D.3: Funkce s hodnotami v $J$.

**19** Naproti tomu, prohlásíme-li, že

*funkce $y$ je definována na intervalu $I$,*

chceme obvykle říci, že definiční obor $y$ je $I$. (Podle kontextu to někdy může znamenat, že $y$ je definována aspoň na $I$, tj. $\mathbb{D}_y \supseteq I$.) Protože $I$ je definiční obor funkce $y$, vyznačíme tento interval na vodorovné ose, a odpovídá mu tedy svislý pás v rovině (jde o množinu $I \times \mathbb{R}$). Graf funkce $y$ je obsažen v tomto svislém pásu.

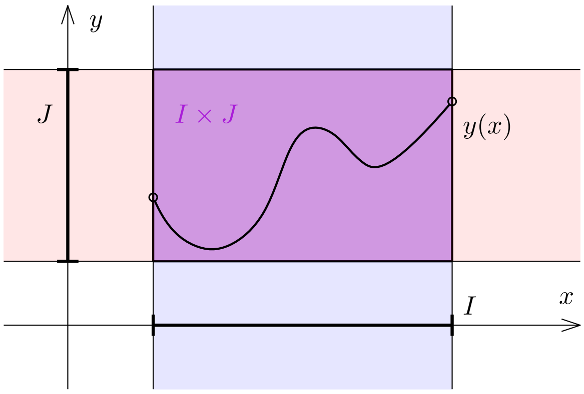



Obrázek D.4: Funkce definovaná na $I$.

**20** Z předchozích dvou odstavců vyplývá, že je-li funkce $y$ *definována* na $I$ a *má hodnoty* v $J$, platí

$$\operatorname{graf}(y) \subseteq (I \times \mathbb{R}) \cap (\mathbb{R} \times J) = I \times J,$$

to jest, graf $y$ je obsažen v obdélníku, který je průnikem svislého pásu (určeného intervalem $I$) a vodorovného pásu (určeného intervalem $J$). Je jasné (z definice kartézského součinu množin), že tento obdélník je právě množina $I \times J$.




Obrázek D.5: Funkce splňující obojí zároveň.

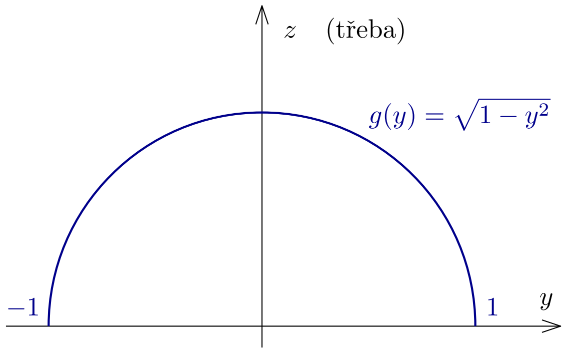
**21** Uvažujme autonomní diferenciální rovnici

$$y' = g(y), \quad \text{resp.} \quad y'(x) = g(y(x)) \tag{D.6}$$

kde $g$ je spojitá funkce definovaná na jistém intervalu. Znovu si teď uvědomte, že tato rovnice je pouze speciálním případem rovnice (D.3): pravou stranu interpretujeme jako funkci dvou proměnných $x$ a $y$, jejíž hodnota však na proměnné $x$ nezávisí – $f(x, y) = g(y)$.

Jako konkrétní příklad může posloužit třeba rovnice (D.2) – v tomto případě je $f(x, y) = g(y) = \sqrt{1 - y^2}$.

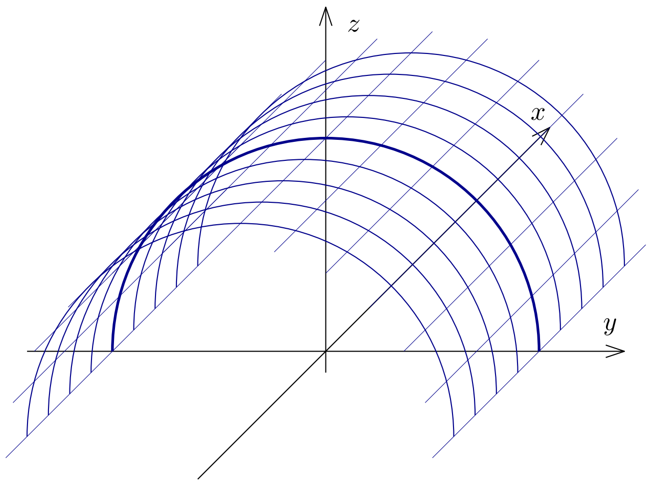
Graf funkce $g(y) = \sqrt{1 - y^2}$ (tedy funkce jediné proměnné) je, jak známo, horní jednotková půlkružnice:




Obrázek D.6: $\sqrt{1-y^2}$ jako funkce jedné proměnné.

Protože hodnota funkce $f(x, y) = \sqrt{1-y^2}$ nezávisí na $x$, je funkce konstantní na každé přímce rovnoběžné s osou $x$: Skutečně, stačí si uvědomit, jak vypadá rovnice libovolné přímky v $\mathbb{R}^2$ rovnoběžné s osou $x$.[8]

Odtud už není těžké nahlédnout, že graf funkce $f(x, y)$ je horní polovina nekonečné válcové plochy, jejíž osa je osa $x$ a poloměr je 1:
*Pozor, na obrázku jsou oproti standardu prohozené osy $x$ a $y$.*




Obrázek D.7: $\sqrt{1-y^2}$ jako funkce 2 proměnných.

**22** Pro další procvičení se ještě podívejme na $\sin y$ jako na funkci proměnných $x, y$, tj. $f(x, y) = \sin y$, jejíž hodnota na $x$ nezávisí. Jak vypadá graf $f$? Zkuste si to představit.

Obecně si uvědomte, jak vypadá jakákoliv funkce dvou proměnných $x, y$, jejíž hodnota zůstává stejná, ať se $x$ mění jakkoliv, tj. závisí pouze na $y$. A jak by vypadala funkce proměnných $x, y$, jejíž hodnota závisí pouze na $x$?

**23** Nyní se můžeme vrátit k diferenciálním rovnicím. Místo o obecných *funkcích*, nyní budeme mluvit o *řešeních* jistých diferenciálních rovnic. To jsou ovšem také příklady *funkcí*, takže se na ně vztahuje tatáž terminologie a tentýž způsob uvažování o *bodech* a *hodnotách*.

**24** Buď funkce $y$ jedno konkrétní řešení rovnice (D.6), které je neklesající. Může se stát, že nějaké jiné řešení je klesající?

[8] Pokud vám připadá zvláštní tento předpis $\sqrt{1-y^2}$ vnímat jako funkci dvou proměnných $x, y$, zamyslete se nad konstantní funkcí jedné proměnné, třeba $h(x) = 5$: jde o funkci (jediné) proměnné $x$, jejíž hodnota na $x$ nezávisí. V obou případech funkční hodnota závisí na méně proměnných, než kolik jich celkem je.

## Nápovědy a řešení:

[ 1 ] Stačí do rovnice dosadit $x^2$ za $y(x)$. Všimněte si, že $y(x)$ je v uvedeném zápisu rovnice (D.1) přítomno pouze implicitně: proměnnou $x$ jsme „zamlčeli“. Rovnici je nicméně potřeba číst tak, jako by tam proměnná byla explicitně zapsána, tj. jako rovnici

$$y'(x) = 2x \quad \text{nebo i} \quad \big(y(x)\big)' = 2x.$$

Dosazení je nyní jednoduché:

$$\big(y(x)\big)' = \big(x^2\big)' = 2x.$$

Rovnice tedy platí, a to pro všechna $x \in \mathbb{R}$ (jak víme z prvního semestru). Závěr tedy je, že $y(x) = x^2$ je řešením rovnice (D.1) na (celém) $\mathbb{R}$.

[ 2 ] Uvědomte si, že $\sqrt{a^2} = |a|$, takže samozřejmě $\sqrt{\cos^2 x} = |\cos x|$.

[ 3 ] Stačí si uvědomit, že funkce $\cos x$ je pouze posunutí funkce $\sin x$ (a to podle vzorce $\cos x = \sin\big(\frac{\pi}{2} + x\big)$), a vzpomenout si na Lemma 6 z přednášky (najděte si ho).

[ 4 ] (i)–(iv): neplatí, platí, platí, platí.
(v) Definiční obor libovolného řešení libovolné ODR je (podle naší definice pojmu *řešení*) otevřený interval. Tj. výrok (v) platí přímo podle definice.
(vi) K tomu aby jakákoliv rovnost, třeba $\alpha = \beta$, mohla platit, je potřeba, aby $\alpha, \beta$ existovaly. Máme-li tedy nějaké řešení $y$ rovnice (D.3), což znamená že rovnost (D.3) nastává pro všechna $x \in \mathbb{D}_y$, obě strany rovnosti musí existovat. Existuje tedy i její levá strana, tj. $y'(x)$. Takže tvrzení (vi) také platí.

[ 6 ] (i), (ii): Stačí dosadit do pravé strany rovnice ($2x$); v obou případech dostaneme $-2$.

(iii) V těchto případech máme rovnici (D.3), jejíž pravá strana je $f(x, y) = \sqrt{1 - y^2}$, takže

$$f\Big(\frac{\pi}{2}, \sqrt{\frac{2}{3}}\Big) = f\Big(496, \sqrt{\frac{2}{3}}\Big) = \\ = f\Big(8128, \sqrt{\frac{2}{3}}\Big) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Protože $\sqrt{1 - y^2}$ nezávisí na $x$, stačí nám pro všechny tři body jeden snadný výpočet; z něj vychází, že pokud $y$ je řešení naší rovnice, pro které $y(8128) = \sqrt{\frac{2}{3}}$, potom $y'(8128) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.[9] Přitom víme, že „derivace je směrnice tečny“, takže tečna k funkci $y$ v bodě $\Big(8128, \sqrt{\frac{2}{3}}\Big)$ má směrnici $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Zbývá spočítat úhel, který tečna svírá s osou $x$. To už samozřejmě dávno umíte, ale pro jistotu uvádím řešení: Pro přímku s rovnicí $y = ax + b$, která svírá s osou $x$ (orientovaný) úhel $\gamma \in \big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big)$ platí

$$a = \operatorname{tg} \gamma.$$

V našem případě tedy máme

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \operatorname{tg} \gamma,$$

[9] A podobně pro oba zbývající body.

takže (díky tomu, že $\gamma \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$)

$$\gamma = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$$

a jsme hotovi.

Pokud jde o bod $(1, 2)$, jistě jste si všimli, že není v definičním oboru pravé strany rovnice, takže tímto bodem vůbec žádné řešení neprochází.

(iv) Po dosazení vyjde 1, tedy $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$, kdykoliv $y$ je řešení procházející tím bodem.

[ **7** ] Vychází $K = 17e^{-2}$.

[ **10** ] (a) Rovnice (D.4) s počáteční podmínkou

$$y(0) = 0$$

řešení jednoznačně neurčuje. Dosazením do obecného tvaru řešení (D.5) totiž dostaneme

$$0 = y(0) = 0 + C_1 \cdot 0 + C_2,$$

což nastává, právě když $C_2 = 0$ (a $C_1 \in \mathbb{R}$). Zbavili jsme se tedy jednoho stupně volnosti, druhý však zůstává. Obecné řešení je

$$y(x) = x^2 + C_1 x.$$

(b) Podívejme se nyní na podmínku

$$y(-3) = 2.$$

Podobně jako v prvním případě dostaneme

$$2 = y(-3) = (-3)^2 - C_1 \cdot (-3) + C_2,$$

odkud jednoduchou úpravou vyjde

$$C_2 = 3C_1 - 7. \tag{D.7}$$

Nyní to vypadá, že na rozdíl od prvního případu jsme se nezbavili ani jednoho stupně volnosti. Konstanty $C_1, C_2$ jsou však bez počáteční podmínky zcela nezávislé, kdežto v tomto případě jsou jejich hodnoty svázány vztahem (D.7). Je zřejmé, že v obecném vyjádření můžeme (třeba) za $C_2$ dosadit a dostaneme následující tvar řešení (při počáteční podmínce $y(-3) = 2$)

$$y(x) = x^2 + C_1 x + 3C_1 - 7,$$

ve kterém je pouze jeden stupeň volnosti, a to $C_1 \in \mathbb{R}$.

[ **11** ] Jednoduchým výpočtem (využívajícím kterýkoliv z obou výsledků výše) dostanete, že řešení rovnice (D.4) procházející body $(0, 0)$ a $(-3, 2)$ je právě

$$y(x) = x^2 + \frac{7}{3}x.$$

Řešení tedy existuje a z postupu, při němž se jednoznačně určí, čemu obě konstanty *musí* být rovny (a sice $C_1 = 7/3$, $C_2 = 0$), je zřejmé, že řešení je jen jedno.

[ **13** ] Předpoklad tvrzení lze přeložit takto: existuje interval $I \subseteq \mathbb{R}$ takový, že pro jisté (pevné) $y_0 \in \mathbb{R}$ a pro všechna $x \in I$ jest $f(x, y_0) = 0$. Takže skutečně $U := I \times \{y_0\}$ je vodorovná úsečka[10] na níž je $f = 0$. Nyní je ovšem zřejmé, že funkce

$$y(x) = y_0, \quad x \in I$$

(tj. konstantní funkce s hodnotou $y_0$ definovaná na intervalu I) skutečně řeší naši rovnici (D.3), a to ve všech bodech intervalu $I$, *v nichž má derivaci* – pozor na krajní body! V levém krajním bodě $U$ nemáme žádnou informaci o tom, co se děje nalevo od něj, takže nemůžeme hovořit o oboustranné derivaci funkce $y$, známe jen derivaci zprava. V diferenciální rovnici se však vždy uvažuje oboustranná derivace, její existenci tedy musíme mít zaručenu, a to v tomto případě (bez dalších předpokladů) nelze. Symetrický problém nastane i v pravém krajním bodě $U$ (tam zase nevíme nic o derivaci zprava). Ve všech ostatních bodech úsečky ale víme, že nulová derivace je oboustranná, a konstantní funkce $y \equiv y_0$ je řešení uvnitř intervalu $I$ (grafem tohoto řešení je podle definice právě úsečka $U$).

[ **14** ] Jak uvidíme, v tomto případě nám nebudou činit potíže krajní body úsečky; je to dáno spojitostí funkce $f$. Zopakujme tvrzení, které máme dokázat:

*Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce (dvou proměnných), která má hodnotu 1 ve všech bodech úsečky $U$ spojující body $(-3, -2) \in \mathbb{R}^2$ a $(4, 5) \in \mathbb{R}^2$. Pak existuje řešení $y$ rovnice*

$$y' = f(x, y)$$

*pro nějž* $U \subseteq \operatorname{graf}(y)$.

*Důkaz.* Máme dokázat, že úsečka $U$ je obsažena v grafu nějakého řešení. Je snadno vidět, že $U$ má směrnici 1; skutečně:

$$\frac{5 - (-2)}{4 - (-3)} = \frac{7}{7} = 1.$$

Přitom právě tuto směrnici máme v bodech $U$ rovnicí předepsánu (protože $f(x, y) = 1$ na $U$): každé řešení procházející libovolným bodem $U$ musí mít v tom bodě směrnici 1.

Projekce úsečky $U$ na osu $x$ je interval $[-3, 4] \subseteq \mathbb{R}$; definujme tedy na intervalu $(-3, 4)$ (zatím bez krajních bodů) funkci $y$ předpisem

$$y(x) = x + 1.$$

Grafem této funkce je právě úsečka $U$ bez krajních bodů a platí $y' \equiv 1$. Tedy pro $x \in (-3, 4) = \mathbb{D}_y$ je

$$y'(x) = 1 = f(x, y(x)),$$

kde druhá rovnost plyne z toho, že $(x, y(x)) = (x, x + 1) \in U$ a $f \equiv 1$ na $U$. Vidíme tedy, že $y$ splňuje naši diferenciální rovnici, jak jsme ostatně čekali. Tím je vysvětlena hlavní myšlenka, kterou byste všichni měli pochopit. Dokončení důkazu sice není nijak těžké, pro základní pochopení ale není nezbytně nutné zbytek tohoto odstavce číst (včetně poznámky pod důkazem).

Pro dokončení důkazu zbývá se podívat, co se děje v krajních bodech $U$. Nemůže se stát, že řešení $y = x + 1$ definované na intervalu $(-3, 4)$ je maximální (tj. nemá žádné prodloužení)? Odpověď je záporná – tento problém nastat nemůže.

Podívejme se například na situaci v bodě $(-3, -2)$ (to je jeden z obou krajních bodů naší úsečky $U$; v druhém krajním bodě je situace analogická). Naším cílem je stávající „úsečkové řešení“ $y$ prodloužit aspoň malý kousek za tento bod.

[10] ve výšce $y_0$; zopakujte si definici kartézského součinu, není-li vám to jasné

Podle Peanovy věty (Věta 3), díky spojitosti funkce $f$, bodem $(-3,-2)$ prochází nějaké řešení – označme toto řešení třeba $\tilde{y}$. Protože je toto řešení definováno v bodě $-3$ (a má tam hodnotu $-2$), má tam nutně také *oboustrannou* derivaci (to plyne automaticky z toho, že jde o řešení DR), a to

$$\tilde{y}\,'(-3) = f(-3, \tilde{y}(-3)) = f(-3,-2) = 1.$$

Z definice derivace (v níž se vyskytuje *oboustranná* limita) je jasné, že funkce $\tilde{y}$ je definována na jistém (*oboustranném*) okolí bodu $-3$ (protože v tomto bodě má derivaci), řekněme aspoň na okolí $(-3-\delta, -3+\delta)$ (kde $\delta$ je nějaké kladné číslo). Speciálně tedy vidíme, že $\tilde{y}$ je definována i „kousek nalevo od $-3$“, což potřebujeme, abychom tím směrem mohli prodloužit naše „úsečkové řešení“ $y = x + 1$.

Definujme tedy

$$y(x) = \begin{cases} \tilde{y}(x), & \text{pokud } x \in (-3-\delta, -3], \\ x+1, & \text{pokud } x \in (-3, 4). \end{cases}$$

Už víme, že $y$ je řešení na intervalu $(-3,4)$ (to jsme si uvědomili v první části důkazu) a $\tilde{y}$ je zase řešení nejméně na (otevřeném) intervalu $(-3-\delta, -3)$. Zbývá tedy ověřit, že tato funkce splňuje naši rovnici i pro $x = -3$. To ale platí:

$$\begin{aligned} y'_-(-3) &= \tilde{y}\,'_-(-3) = 1 \quad \text{a} \\ y'_+(-3) &= (x+1)'(-3) = 1. \end{aligned}$$

Existuje tedy oboustranná derivace $y'(-3) = 1$, je tedy

$$y'(-3) = 1 = f(-3,-2) = f(-3, y(-3)),$$

a platnost rovnice je ověřena i přímo v bodě $-3$. Protože v druhém koncovém bodě úsečky $U$ lze „úsečkové řešení“ $y = x + 1$ prodloužit doprava analogickým způsobem, jako jsme to zde udělali doleva, je vidět, že skutečně existuje řešení, které jehož graf obsahuje celou úsečku $U$, a to včetně jejích krajních bodů. □

Na závěr ještě poznamenám, že důkaz je o něco složitější, než se na první pohled zdá nutné: mohlo by vás totiž napadnout, že řešení $\tilde{y}$ napravo od bodu $-3$ pokračuje po úsečce $U$, takže $\tilde{y}$ se shoduje s $y = x + 1$ na nějakém netriviálním intervalu tvaru $(-3, -3+\delta)$, tj. obě řešení se aspoň na nějakém kousku „překrývají“. Toto však není zaručeno, graf řešení $\tilde{y}$ se v bodě $(-3,-2)$ může úsečky $U$ pouze dotýkat. Abychom měli zaručeno, že toto nenastane, stačilo by například, aby byla splněna podmínka jednoznačnosti z Picardovy věty (Věta 4), to však v předpokladech dokazovaného tvrzení nemáme.

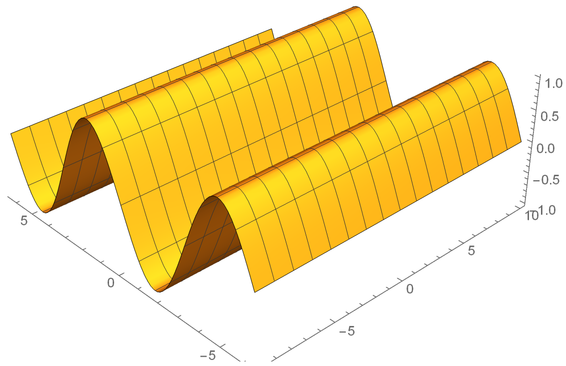
[ **15** ] Odpověď je záporná: s úsečkou $V$ ono tvrzení neplatí. Jistě si už sami rozmyslíte, jaká by musela být hodnota funkce $f$ na úsečce $V$, aby upravené tvrzení opět nabylo platnosti.

[ **17** ] Všechny odpovědi jsou shrnuty v tabulce níže (snad se vám líbí).

Pro jistotu ještě doplňuji vysvětlení o funkcích (vi), (vii) a (xi); jedná se o *restrikce* na množiny uvedené v dolním indexu za svislou čárou – „uměle“ jsme těmto funkcím omezili definiční obory.

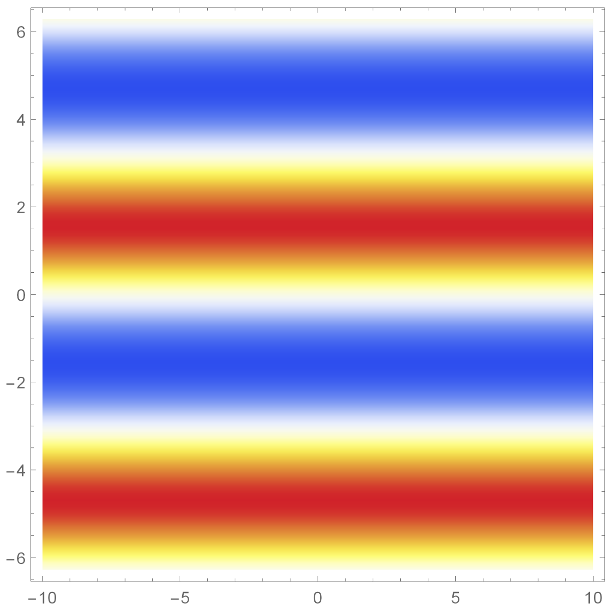
| | i | ii | iii | iv | v | vi | vii | viii | ix | x | xi |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(0,\infty)$ | N | N | N | A | N | N | A | A | N | N | N |
| $[-1,1]$ | N | A | N | N | A | A | A | N | A | A | A |

[ 22 ] Graf funkce $f(x, y) = \sin y$ na množině $[-10, 10] \times [-5, 5]$ je na obrázku. (Všimněte si, kterým směrem roste $y$!)



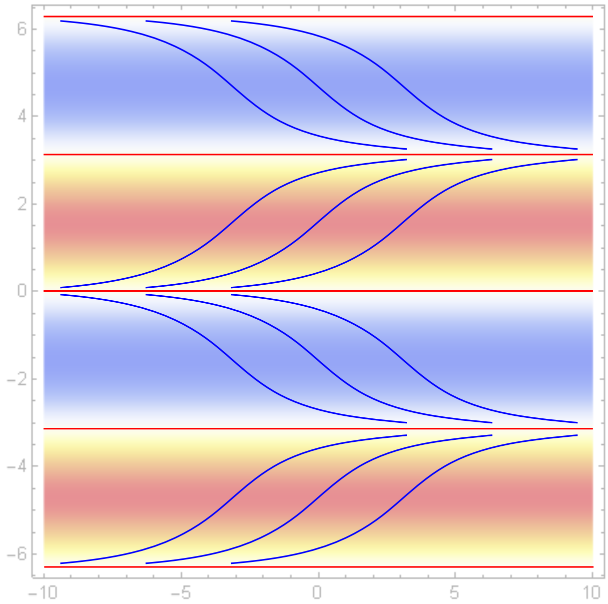

Obrázek D.8: Část grafu $f(x, y) = \sin y$.

Pro pochopení chování rovnice $y' = \sin y$ je také zajímavé následující znázornění funkce $f(x, y) = \sin y$ (tedy pravé strany této rovnice chápané jako funkci dvou proměnných) – pomocí hustotního grafu. Modrá barva značí záporné hodnoty, červená kladné.




Obrázek D.9: Hustotní graf $f(x, y) = \sin y$.

[ **23** ] Možná právě tento způsob znázornění je pro naše účely nejvhodnější: čím červenější region, tím rychleji v něm rostou všechna řešení rovnice, naopak, čím modřejší, tím rychleji příslušná řešení klesají: *Modré křivky řešení rovnice, červené přímky jsou stacionární řešení.*




Obrázek D.10: Řešení rovnice $y' = \sin y$.

[ **24** ] Ano. Uvedené řešení $y$ musí mít hodnoty v intervalu na němž $g \geqslant 0$. Je ale možné, že na nějakém jiném intervalu $J$ je funkce $g$ naopak záporná; v takovém případě bude libovolné řešení $\tilde{y}$ splňující $\mathbb{H}_{\tilde{y}} \subseteq J$ klesající.