1. Taylorův polynom

1. Nalezněte Taylorovy polynomy řádu k v bodě a pro následující funkce:
a) arctg, $k = 3$, $a = 1$
b) tg, $k = 3$, $a = \frac{\pi}{4}$
c) $\exp$, $k = 5$, $a = 2$

2. Vypočtěte:
a) $\cos(0{,}1)$ s chybou menší než 10^{-4}.
b) $\log(1{,}1)$ s chybou menší než 10^{-4}.
c) $\sqrt{e}$ s chybou menší než 10^{-2}.

3. Nalezněte Taylorovy polynomy řádu k v bodě 0 (pokud není řečeno jinak) pro následující funkce:
a) $\sin\cdot\cos$, $k = 4$
b) tg, $k = 5$
c) e^{x^2}, $k = 6$
d) $\cos(x^3 - 1)$, $k = 3$, v bodě 1
e) $x^7 \sin(x^2)$, $k = 10$
f) $\cos(\sin x)$, $k = 5$
g) $\sin(\sin x)$, $k = 6$
h) $\sin(1 - \cos x)$, $k = 4$
i) $\log(\cos x)$, $k = 6$

4. Spočtěte limity:

$$\text{a) } \lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}, \quad \text{b) } \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}, \quad \text{c) } \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}, \quad \text{d) } \lim_{x\to 0} \frac{2\sin(\sin x) - \sin(2x)\sqrt[3]{1+x^2}}{x^5},$$

$$\text{e) } \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt[6]{x^6+x^5} - \sqrt[6]{x^6-x^5}\right), \quad \text{f) } \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - \operatorname{cotg} x\right), \quad \text{g) } \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-2x+x^3} - \sqrt[3]{1-3x+x^2} - \frac{x^2}{6}}{\sin x - x},$$

$$\text{h) } \lim_{x\to+\infty} \left(\left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x^6+1}\right), \quad \text{i) } \lim_{x\to 0} \frac{\sin\big(\cos(\sin x) - 1\big) + \frac{1}{2}x^2}{x^2 \sin^2 x}, \quad \text{j) } \lim_{x\to 0} \frac{(\cos x)^{\sin x} - (\cos x)^x}{x^2(x - \sin x)}.$$

5. Najděte $n \in \mathbb{N}$ tak, aby příslušná limita byla konečná a různá od 0 a spočtěte tuto limitu:

$$\text{a) } \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^x - 1}{x^n}, \quad \text{b) } \lim_{x\to 0} \frac{e - (1+x)^{\frac{1}{x}}}{x^n}, \quad \text{c) } \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - (1-x)^{-\frac{1}{x}} + ex}{ex^n}, \quad \text{d) } \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos(\operatorname{tg} x)}{x^n},$$

$$\text{e) } \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(\sin x) - \sin(\operatorname{tg} x)}{x^n}.$$

6. Najděte $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby

$$\text{a) } \lim_{x\to 0} \frac{x - (a + b\cos x)\sin x}{x^4} = 0, \quad \text{b) } \lim_{x\to 0} \frac{x - a\sin x - b\operatorname{tg} x}{x^4} = 0 \quad \text{a spočtěte} \quad \lim_{x\to 0} \frac{x - a\sin x - b\operatorname{tg} x}{x^5},$$

$$\text{c) } \lim_{x\to 0} \frac{\cos ax + x\operatorname{arctg} bx - b}{x^4} \in \mathbb{R} \quad \text{a spočtěte ji.}$$

7. Vyšetřete konvergenci následujících řad:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(n \sin\frac{1}{n}\right), \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \sin\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt[5]{n}} - \sin\frac{1}{\sqrt[5]{n}} - \frac{1}{2\sqrt[5]{n^3}}\right),$$

$$\text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \log\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right), \quad \text{e) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin\frac{1}{\sqrt{n}} - \log\left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)\right), \quad \text{f) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 - \frac{1}{n}\right)\left(\arcsin\frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Výsledky: 1. a) $\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{12}(x-1)^3$ b) $1 + 2(x - \frac{\pi}{4}) + 2(x - \frac{\pi}{4})^2 + \frac{8}{3}(x - \frac{\pi}{4})^3$
c) $e^2 + e^2(x-2) + \frac{1}{2}e^2(x-2)^2 + \frac{1}{6}e^2(x-2)^3 + \frac{1}{24}e^2(x-2)^4 + \frac{1}{120}e^2(x-2)^5$
2. a) 0,995 b) 0,0953 c) 1,65
3. a) $x - \frac{2}{3}x^3$ b) $x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5$ c) $1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{6}x^6$ d) $1 - \frac{9}{2}(x-1)^2 - 9(x-1)^3$ e) x^9 f) $1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4$
g) $x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5$ h) $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4$ i) $-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6$
4. a) $\frac{1}{3}$ b) $-\frac{1}{12}$ c) 0 d) $\frac{3}{5}$ e) $\frac{1}{3}$ f) $\frac{1}{3}$ g) -6 h) $\frac{1}{6}$ i) $\frac{5}{24}$ j) $\frac{1}{2}$
5. a) 1 ($n = 2$) b) $\frac{e}{2}$ ($n = 1$) c) $-\frac{7}{8}$ ($n = 3$) d) $\frac{1}{3}$ ($n = 4$) e) $\frac{1}{30}$ ($n = 7$)
6. a) $a = \frac{4}{3}, b = -\frac{1}{3}$ b) $a = \frac{2}{3}, b = \frac{1}{3}$, limita je $-\frac{1}{20}$ c) $a = \pm\sqrt{2}, b = 1$, limita je $-\frac{1}{6}$
7. a) K b) K c) D d) K e) D f) K

2. Mocninné řady

1. Nalezněte poloměr konvergence následujících mocninných řad a vyšetřete jejich konvergenci v krajních bodech intervalu konvergence:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt[3]{n}}$, c) $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$, d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$, e) $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n!}$, f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^n} x^n$, g) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!} x^n$, h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n} x^n$,

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p}$, $p \in \mathbb{R}$, j) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{a^{n^2}} x^n$, $a > 0$, k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n$, l) $\sum_{n=0}^{\infty} n! 3^{-n^2} x^n$, m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n,}{a^{\sqrt{n}}}$, $a > 0$,

n) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$, o) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\big(3 + (-1)^n\big)^n}{n} x^n$, p) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n$, q) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(n a^n + \frac{b^n}{n^2}\right) x^n$, $b > a > 0$,

r) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{-\sqrt{n}} x^n}{\sqrt{n^2+1}}$, s)* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$, t)* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(nx)^n}{n!}$.

Výsledky: 1. a) $R = 1$, ± 1 AK b) $R = 1$, -1 K, 1 D c) $R = 0$ d) $R = +\infty$ e) $R = 1$, ± 1 D f) $R = 3$, ± 3 D g) $R = +\infty$ h) $R = 1$, -1 K, 1 D i) $R = 1$, -1 D pro $p \le 0$, K pro $p > 0$, 1 D pro $p \le 1$, K pro $p > 1$ j) $R = 0$ pro $a \le 1$, $R = +\infty$ pro $a > 1$ k) $R = \frac{1}{3}$, $-\frac{4}{3}$ K, $-\frac{2}{3}$ D l) $R = +\infty$ m) $R = 1$, ± 1 D pro $a \le 1$, AK pro $a > 1$ n) $R = \frac{1}{e}$, $\pm\frac{1}{e}$ D o) $R = \frac{1}{4}$, $\pm\frac{1}{4}$ D p) $R = 1$, ± 1 D q) $R = \frac{1}{b}$, $\pm\frac{1}{b}$ AK r) $R = 1$, ± 1 AK s) $R = 4$, ± 4 D (Raabe) t) $R = \frac{1}{e}$, $-\frac{1}{e}$ K, $\frac{1}{e}$ D (Raabe+Taylor)

3. Integrály

1. Nalezněte primitivní funkce na co největších množinách k následujícím funkcím:

a) $x^3 + 2x + \frac{17}{x}$, b) $18e^x + 16e^{8x} - \frac{1}{x} + 3\cos x$, c) $\sqrt{x} + \sin(2x)$, d) $\cos(3x) + e^{2x}$, e) $(x+5)^3$,

f) $\sin(2x+7)$, g) $\frac{1}{\cos^2(3-2x)}$, h) $\frac{1}{2x-1}$, i) $\sqrt[3]{1-3x}$, j) $\frac{x+1}{\sqrt{x}}$, k) $\frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}}$, l) $\frac{1}{\sqrt{2-5x}}$, m) $\frac{x^2}{1+x^2}$,

n) $\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}$, o) $\frac{1}{2+3x^2}$, p) $\frac{1}{\sqrt{2-3x^2}}$, q) $\sqrt{x^6}$, r) $\frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}$, s) $\frac{e^{3x}+1}{e^x+1}$, t) $\operatorname{tg}^2 x$, u) $\operatorname{cotg}^2 x$,

v) $|\cos x|$, w) $\sqrt{1-\sin 2x}$, x) $\sin^2 x$, y) $\cos^4 x$, z) $\frac{1}{1+\cos x}$

2. Nalezněte primitivní funkce na co největších množinách k následujícím funkcím:

a) xe^{-x^2}, b) $\frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+1}$, c) $\operatorname{tg} x$, d) $\frac{x}{\sqrt{x^2+5}}$, e) $\frac{x^2}{\cos^2(x^3)}$, f) $\frac{x}{1+4x^2}$, g) $\frac{x}{1+x^4}$, h) $\frac{1}{x\log x}$, i) $\frac{2x+1}{x^2+x+1}$,

j) $\frac{\sin\log x}{x}$, k) $\frac{e^x}{e^x+1}$, l) $\frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}$, m) $\frac{x+1}{x^2+2x+9}$, n) $\frac{x^2}{x+1}$, o) $\frac{x^3}{x^8+2}$, p) $\sin^3 x$, q) $\frac{1}{x\log x\log\log x}$,

r) $\frac{e^{2x}}{1+e^x}$, s) $\frac{\log x}{x\sqrt{1+\log x}}$, t) $\cos^5 x\sqrt{\sin x}$, u) $\operatorname{tg}^5 x$, v) $\frac{1}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}$, w) $\frac{\cos x}{\sqrt{2+\cos(2x)}}$

3. Nalezněte primitivní funkce na co největších množinách k následujícím funkcím:

a) xe^x, b) $\frac{x}{e^x}$, c) $\log x$, d) $x\log x$, e) x^2e^{-2x}, f) $\frac{\cos x}{e^x}$, g) $e^{3x+1}\sin x$, h) $\log^2 x$, i) $x^a\log x$, j) $e^{ax}\sin bx$,

k) $\operatorname{arctg} x$, l) $\arcsin x$, m) $e^{\sqrt{x}}$, n) $\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$, o) $x^5e^{x^3}$, p) $x\sin^2 x$, q) $\sqrt{x}\operatorname{arctg}\sqrt{x}$, r) $\sin\log x$,

s) $xe^x\sin x$, t) $\sqrt{1-x^2}$, u)* $\frac{xe^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

4. Nalezněte primitivní funkce na co největších množinách k následujícím funkcím:

a) $\frac{x+1}{x^2+4}$, b) $\frac{x^2+1}{x^2-1}$, c) $\frac{x^2}{(1-x)^{100}}$, d) $\frac{1}{3x^2-2x-1}$, e) $\frac{x}{x^2-x+2}$, f) $\frac{x^5}{x^2+x-2}$, g) $\frac{x+2}{(x-1)^2(x+1)}$,

h) $\frac{x^2}{(x+2)^2(x+4)^2}$, i) $\frac{x}{x^4-2x^2-1}$, j) $\frac{x^{17}-5}{x-1}$, k) $\frac{x^{17}-5}{x^2-1}$, l) $\frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}$, m) $\frac{x}{x^3-1}$,

n) $\frac{3x+2}{(x^2+x+2)^2}$, o) $\frac{1}{1+x^4}$, p) $\frac{x^8+x-1}{x^6+1}$

Výsledky: 1. a) $\frac{1}{4}x^4 + x^2 + 17\log|x|$ na $(-\infty, 0)$ a na $(0, +\infty)$ b) $18e^x + 2e^{8x} - \log|x| + 3\sin x$ na $(-\infty, 0)$ a na $(0, +\infty)$ c) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{1}{2}\cos(2x)$ na $(0, +\infty)$ d) $\frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{2}e^{2x}$ na $\mathbb{R}$ e) $\frac{1}{4}(x+5)^4$ na $\mathbb{R}$ f) $-\frac{1}{2}\cos(2x+7)$ na $\mathbb{R}$ g) $-\frac{1}{2}\operatorname{tg}(3-2x)$ na $\left(\frac{3}{2} - \frac{\pi}{4}, \frac{3}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ h) $\frac{1}{2}\log|2x-1|$ na $(-\infty, \frac{1}{2})$ a na $(\frac{1}{2}, +\infty)$ i) $-\frac{1}{4}\sqrt[3]{(1-3x)^4}$ na $\mathbb{R}$ j) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + 2\sqrt{x}$ na $(0, +\infty)$ k) $-3\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2} + \frac{9}{5}\sqrt[3]{x^5} - \frac{3}{8}\sqrt[3]{x^8}$ na $(-\infty, 0)$ a na $(0, +\infty)$ l) $-\frac{2}{5}\sqrt{2-5x}$ na $(-\infty, \frac{2}{5})$ m) $x - \operatorname{arctg} x$ na $\mathbb{R}$ n) $\frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}} + 4x^{-\frac{1}{4}}$ na $(0, +\infty)$ o) $\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)$ na $\mathbb{R}$ p) $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)$ na $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ q) $\frac{1}{4}x^4 \operatorname{sgn} x$ na $\mathbb{R}$ r) $-\frac{2}{\log 5}5^{-x} + \frac{1}{5\log 2}2^{-x}$ na $\mathbb{R}$ s) $\frac{1}{2}e^{2x} - e^x + x$ na $\mathbb{R}$ t) $-x + \operatorname{tg} x$ na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ u) $-x - \operatorname{cotg} x$ na $(0, \pi) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ v) na $\mathbb{R}$: $(-1)^k \sin x + 2k$ pro $x \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ w) na $\mathbb{R}$: $(-1)^k(\sin x + \cos x) + 2\sqrt{2}k$ pro $x \in \langle -\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\pi \rangle + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ x) $\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x$ na $\mathbb{R}$ y) $\frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x$ na $\mathbb{R}$ z) $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ na $(-\pi, \pi) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

2. a) $-\frac{1}{2}e^{-x^2}$ na $\mathbb{R}$ b) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x$ na $\mathbb{R}$ c) $-\log|\cos x|$ na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ d) $\sqrt{x^2+5}$ na $\mathbb{R}$ e) $\frac{1}{3}\operatorname{tg}(x^3)$ na $\left(\sqrt[3]{-\frac{\pi}{2} + k\pi}, \sqrt[3]{\frac{\pi}{2} + k\pi}\right), k \in \mathbb{Z}$ f) $\frac{1}{8}\log(1+4x^2)$ na $\mathbb{R}$ g) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x^2)$ na $\mathbb{R}$ h) $\log|\log x|$ na $(0, 1)$ a na $(1, +\infty)$ i) $\log(x^2+x+1)$ na $\mathbb{R}$ j) $-\cos\log x$ na $(0, +\infty)$ k) $\log(e^x+1)$ na $\mathbb{R}$ l) $2\operatorname{arctg}\sqrt{x}$ na $(0, +\infty)$ m) $\frac{1}{2}\log(x^2+2x+9)$ na $\mathbb{R}$ n) $\frac{1}{2}x^2 - x + \log|x+1|$ na $(-\infty, -1)$ a na $(-1, +\infty)$ o) $\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x^4}{\sqrt{2}}$ na $\mathbb{R}$ p) $-\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x$ na $\mathbb{R}$ q) $\log|\log\log x|$ na $(1, e)$ a na $(e, +\infty)$ r) $e^x - \log(1+e^x)$ na $\mathbb{R}$ s) $\frac{2}{3}(1+\log x)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{1+\log x}$ na $(\frac{1}{e}, +\infty)$ t) $\frac{2}{3}\sin^{\frac{3}{2}} x - \frac{4}{7}\sin^{\frac{7}{2}} x + \frac{2}{11}\sin^{\frac{11}{2}} x$ na $(0, \pi) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ u) $\frac{1}{4}\cos^{-4} x - \cos^{-2} x - \log|\cos x|$ na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ v) na $\mathbb{R}$: $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} + k\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ pro $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) + k\pi$, $F(\frac{\pi}{2} + k\pi) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + k\frac{\pi}{\sqrt{2}}, k \in \mathbb{Z}$ w) $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}\sin x$ na $\mathbb{R}$

3. a) $e^x(x-1)$ na $\mathbb{R}$ b) $-e^{-x}(1+x)$ na $\mathbb{R}$ c) $x(\log x - 1)$ na $(0, +\infty)$ d) $\frac{1}{2}x^2(\log x - \frac{1}{2})$ na $(0, +\infty)$ e) $-\frac{1}{2}e^{-2x}(x^2 + x + \frac{1}{2})$ na $\mathbb{R}$ f) $\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x - \cos x)$ na $\mathbb{R}$ g) $\frac{1}{10}e^{3x+1}(3\sin x - \cos x)$ na $\mathbb{R}$ h) $x(\log^2 x - 2\log x + 2)$ na $(0, +\infty)$ i) $\frac{x^{1+a}}{1+a}\left(\log x - \frac{1}{1+a}\right)$ na $(0, +\infty)$ pro $a \neq -1$, $\frac{1}{2}\log^2 x$ na $(0, +\infty)$ pro $a = -1$ j) $e^{ax}\frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}$ na $\mathbb{R}$ k) $x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\log(x^2+1)$ na $\mathbb{R}$ l) $x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$ na $(-1, 1)$ m) $2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x} - 1\right)$ na $(0, +\infty)$ n) $x\log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) - \sqrt{(x^2+1)}$ na $\mathbb{R}$ o) $\frac{1}{3}(x^3 - 1)e^{x^3}$ na $\mathbb{R}$ p) $\frac{1}{4}(x^2 - x\sin 2x + \sin^2 x)$ na $\mathbb{R}$ q) $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\operatorname{arctg}\sqrt{x} + \frac{1}{3}\log(x+1) - \frac{1}{3}x$ na $(0, +\infty)$ r) $\frac{1}{2}x(\sin\log x - \cos\log x)$ na $(0, +\infty)$ s) $\frac{1}{2}e^x\left(x\sin x + (1-x)\cos x\right)$ na $\mathbb{R}$ t) $\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x\right)$ na $(-1, 1)$ u) $\frac{(x-1)e^{\operatorname{arctg} x}}{2\sqrt{1+x^2}}$ na $\mathbb{R}$

4. a) $\frac{1}{2}\log(x^2+4) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}$ na $\mathbb{R}$ b) $x + \log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$ na $(-\infty, -1)$, na $(-1, 1)$ a na $(1, +\infty)$ c) $\frac{1}{99(1-x)^{99}} - \frac{1}{49(1-x)^{98}} + \frac{1}{97(1-x)^{97}}$ na $(-\infty, 1)$ a na $(1, +\infty)$ d) $\frac{1}{4}\log\left|\frac{x-1}{3x+1}\right|$ na $(-\infty, -\frac{1}{3})$, na $(-\frac{1}{3}, 1)$ a na $(1, +\infty)$ e) $\frac{1}{2}\log(x^2 - x + 2) + \frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{7}}$ na $\mathbb{R}$ f) $\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 5x + \frac{32}{3}\log|x+2| + \frac{1}{3}\log|x-1|$ na $(-\infty, -2)$, na $(-2, 1)$ a na $(1, +\infty)$ g) $-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x-1} + \frac{1}{4}\log\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$ na $(-\infty, -1)$, na $(-1, 1)$ a na $(1, +\infty)$ h) $2\log\left|\frac{x+4}{x+2}\right| - \frac{4}{x+4} - \frac{1}{x+2}$ na $(-\infty, -4)$, na $(-4, -2)$ a na $(-2, +\infty)$ i) $\frac{\sqrt{2}}{8}\log\frac{|x^2-\sqrt{2}-1|}{x^2+\sqrt{2}-1}$ na $\left(-\infty, -\sqrt{1+\sqrt{2}}\right)$, na $\left(-\sqrt{1+\sqrt{2}}, \sqrt{1+\sqrt{2}}\right)$ a na $\left(\sqrt{1+\sqrt{2}}, +\infty\right)$ j) $-4\log|x-1| + \sum_{k=1}^{17}\frac{x^k}{k}$ na $(-\infty, 1)$ a na $(1, +\infty)$ k) $3\log|x+1| - 2\log|x-1| + \sum_{k=1}^{8}\frac{x^{2k}}{2k}$ na $(-\infty, -1)$, na $(-1, 1)$ a na $(1, +\infty)$ l) $x + \frac{1}{6}\log|x| - \frac{9}{2}\log|x-2| + \frac{28}{3}\log|x-3|$ na $(-\infty, 0)$, na $(0, 2)$, na $(2, 3)$ a na $(3, +\infty)$ m) $\frac{1}{6}\log\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$ na $(-\infty, 1)$ a na $(1, +\infty)$ n) $-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x^2+x+2} + \frac{2}{7}\cdot\frac{2x+1}{7+(2x+1)^2} + \frac{2\sqrt{7}}{49}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{7}}$ na $\mathbb{R}$ o) $\frac{\sqrt{2}}{8}\log\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x+1) + \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x-1)$ na $\mathbb{R}$ (nápověda k rozkladu: pracujte s výrazem $(x^2+1)^2$) p) $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{6}\log(1+x^2) + \frac{\sqrt{3}-1}{12}\log(x^2 - \sqrt{3}x + 1) - \frac{\sqrt{3}+1}{12}\log(x^2 + \sqrt{3}x + 1) - \frac{3-\sqrt{3}}{6}\operatorname{arctg}(2x - \sqrt{3}) - \frac{3+\sqrt{3}}{6}\operatorname{arctg}(2x + \sqrt{3})$ na $\mathbb{R}$