Písemka z matematické analýzy pro učitele (NMTM102)
1. ročník, letní semestr – 5. termín dne 24. června 2024

Početní část

Příklad 1. [**15** bodů]

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - e^{\sin^2 x} - \frac{x^4}{3}}{x^6}.$$

Příklad 2. Spočtěte integrál [**20** bodů]

$$\int \frac{2e^{3x} + 3e^{2x} + 2e^x}{(e^x + 1)(e^{2x} + e^x + 1)}\,\mathrm{d}x.$$

Příklad 3. Spočtěte určitý integrál [**15** bodů]

$$\int_1^4 \frac{\sqrt{x-1}}{x+2}\,\mathrm{d}x.$$

Písemka z matematické analýzy pro učitele (NMTM102)
1. ročník, letní semestr – 5. termín dne 24. června 2024

Teoretická část

Úloha A.

(a) Definujte symbol „malé o“ a symbol „$\sim$“. [**2** body]

(b) Zformulujte Taylorovu větu s Lagrangeovým tvarem zbytku. [**3** body]

(c) Napište úplnou Darbouxovu definici Riemannova integrálu. [**4** body]

Úloha B.

(a) Zformulujte a dokažte Newtonovu-Leibnizovu formuli. [**5** bodů]

(b) Zformulujte a dokažte pravidlo Per Partes pro neurčitý integrál. [**5** bodů]

(c) Nechť D, D' jsou dělení intervalu $[a,b]$ a D' je zjemnění D. Buď $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ omezená. Dokažte, že $S(f,D') \leqslant S(f,D)$. [**6** bodů]

Úloha C.

(a) Buďte f, g, h funkce, $a \in \mathbb{R}$. Pišme $f \prec g$, pokud $f(x) = o(g(x)),\ x \to a$. Tím je na množině funkcí dána relace $\prec$. Dokažte, že je *tranzitivní*, tj. pokud $f \prec g$ a $g \prec h$, pak $f \prec h$. [**4** body]

(b) Rozhodněte o platnosti následujících výroků a svou odpověď stručně vysvětlete. [**7** bodů]

(i) Každá primitivní funkce je spojitá.

(ii) Každá spojitá funkce na otevřeném intervalu tam má primitivní funkci.

(iii) $\int \big((\ln x)'\big)\,dx \overset{c}{=} \ln|x|$ na $(-\infty, 0)$ a na $(0,\infty)$.

(iv) Existuje polynom, který má nenulové derivace všech řádů.

(v) Nechť P je nenulový polynom, $P'(a) = 0$. Pak a je vícenásobný kořen P.

(vi) Nechť T je Taylorův polynom 7. řádu funkce f v bodě 0. Pak $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-T(x)}{x^6} = 0$.

(vii) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^3),\ x \to 0$.

Úloha D.

Vyberte si **jednu** z následujících dvou možností.

(a) Zformulujte a dokažte Základní větu kalkulu. [**14** bodů]

Nebo:

(b) Zformulujte Taylorovu větu s Peanovým tvarem zbytku a dokažte ji. K důkazu použijete lemmata:

- Pokud $f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(n)}(a) = 0$, pak $f(x) = o\big((x-a)^n\big),\ x \to a$;
- Pokud P je polynom stupně nejvýše n a $P(x) = o\big((x-a)^n\big),\ x \to a$, pak $P \equiv 0$ na $\mathbb{R}$.

Obě lemmata dokažte. (Můžete použít i jiná podobná tvrzení; pokud se tak rozhodnete, zformulujte je a dokažte.) [**14** bodů]

Pokud používáte nějaká pomocná tvrzení, musí být jasně patrné, že znáte jejich znění.