Písemka z matematické analýzy pro učitele (NMTM102)
1. ročník, letní semestr – 4. termín dne 17. června 2024

Početní část

Příklad 1. Spočtěte (pokud existuje) limitu [**18** bodů]

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\cos x - 1} - \cos x}{x\,(\sin x - x)}.$$

Příklad 2. Pomocí vhodné substituce nalezněte primitivní funkci (nemusíte „lepit“): [**20** bodů]

$$\int \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x-2}}{\sqrt{x} + \sqrt{x-2}}\,\mathrm{d}x.$$

Příklad 3. Spočtěte velikost plochy ohraničené křivkami

$$y = x^2 \quad \text{a} \quad y = x^3$$

a svislými přímkami $x = -1$ a $x = 2$. Nakreslete si obrázek! [**12** bodů]

Písemka z matematické analýzy pro učitele (NMTM102)
1. ročník, letní semestr – 4. termín dne 17. června 2024

Teoretická část

Úloha A.

(a) Zformulujte Taylorovu větu s Peanovým tvarem zbytku. [**2** body]

(b) Definujte pojem primitivní funkce na otevřeném intervalu. [**2** body]

(c) Definujte stejnoměrnou spojitost funkce na intervalu. [**2** body]

(d) Napište dvě základní postačující podmínky pro existenci Riemannova integrálu. (Nemyslím Klíčové lemma.) [**2** body]

(e) Zformulujte Newtonovu-Leibnizovu formuli. [**2** body]

Úloha B.

(a) Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a f, g jsou funkce na otevřeném intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. Doplňte zbývající předpoklady postačující pro platnost rovnosti

$$\int \bigl(\alpha f(x) + \beta g(x)\bigr)\,\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int g(x)\,\mathrm{d}x$$

a tuto rovnost dokažte na I. [**5** bodů]

(b) Buďte F, G primitivní funkce k funkci f na intervalu (a, b). Dokažte, že existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$ taková, že $\forall x \in (a, b)\colon F(x) = G(x) + c$. [**4** body]

(c) Dokažte, že monotónní funkce na uzavřeném intervalu má Riemannův integrál. [**7** bodů]

Úloha C.

(a) Vyjádřete polynom $P(x) = x^5 - x^3 + 2x^2 + 7$ ve tvaru [**5** bodů]

$$d_5(x-1)^5 + d_4(x-1)^4 + d_3(x-1)^3 + d_2(x-1)^2 + d_1(x-1) + d_0.$$

(b) Rozhodněte, zda obecně platí vzorec $\int_c^a f - \int_b^a f = \int_b^c f$. [**2** body]

(c) Rozhodněte o existenci následujícího integrálu. Pokud existuje, určete jeho hodnotu. [**3** body]

$$\int_{-1}^{2} \bigl(2 \operatorname{sgn} x - \operatorname{sgn}(x-1)\bigr)\,\mathrm{d}x$$

Úloha D. Vyberte si **jednu** z následujících dvou možností.

(a) Zformulujte a dokažte Klíčové lemma pro existenci Riemannova integrálu (Bolzanovu-Cauchyovu podmínku). Zaměřte se pouze na první bod lemmatu, tedy na ekvivalenci, na jejíž jedné straně stojí „$\int_a^b f = I \in \mathbb{R}$“. [**12** bodů]

Nebo:

(b) Zformulujte a dokažte větu o Taylorově polynomu s Lagrangeovým tvarem zbytku. [**14** bodů]

Pokud používáte nějaká pomocná tvrzení, musí být jasně patrné, že znáte jejich znění.