Písemka z matematické analýzy pro učitele (NMTM102)
1. ročník, letní semestr – 3. termín dne 8. června 2022

Početní část

Příklad 1. Spočtěte (pokud existuje) limitu [**15** bodů]

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - \sqrt{1 - x^2} - \frac{x^4}{6}}{x^5}.$$

Příklad 2. Pomocí vhodné substituce nalezněte primitivní funkci (nemusíte „lepit“): [**20** bodů]

$$\int \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x-2}}{\sqrt{x} + \sqrt{x-2}} \, \mathrm{d}x.$$

Příklad 3. Spočtěte objem tělesa, které vznikne rotací kolem osy x plochy ohraničené křivkami

$$y = \sin x \quad \text{a} \quad y = \cos x$$

a svislými přímkami $x = 0$ a $x = \frac{\pi}{2}$. Nakreslete si obrázek! [**15** bodů]

Hodnocení:

Nutné podmínky na hodnocení **dobře**:

- dosažení aspoň **10** bodů z *Úloh A a B* teoretické části;
- dosažení aspoň **16** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **42** bodů.

Nutné podmínky na hodnocení **velmi dobře**:

- dosažení aspoň **14** bodů z *Úloh A a B* teoretické části;
- dosažení aspoň **21** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **56** bodů.

Nutné podmínky na hodnocení **výborně**:

- dosažení aspoň **30** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **70** bodů.

Písemka z matematické analýzy pro učitele (NMTM102)
1. ročník, letní semestr – 3. termín dne 8. června 2022

Teoretická část

Úloha A.

(a) Definujte symbol „malé o“ a symbol „$\sim$“. [**2** body]

(b) Vyjádřete funkci $\sin x$ jako součet Taylorovy řady. [**2** body]

(c) Definujte pojem primitivní funkce na otevřeném intervalu. [**2** body]

(d) Napište úplnou definici Riemannova integrálu. [**5** bodů]

Úloha B.

(a) Zformulujte a dokažte Newtonovu-Leibnizovu formuli pro (obyčejný) Riemannův integrál. Klíčovou větu (hovořící o integrálu jako funkci horní meze a o derivaci této funkce), kterou k tomu použijete, zformulujte bez důkazu. [**7** bodů]

(b) Zformulujte a dokažte pravidlo Per Partes pro neurčitý integrál. [**6** bodů]

Úloha C.

(a) Vyjádřete polynom $P(x) = x^5 - x^3 + 2x^2 + 7$ ve tvaru [**5** bodů]

$$d_5(x-1)^5 + d_4(x-1)^4 + d_3(x-1)^3 + d_2(x-1)^2 + d_1(x-1) + d_0.$$

(b) Rozhodněte, zda obecně platí vzorec $\int_c^a f - \int_b^a f = \int_b^c f$. [**2** body]

(c) Rozhodněte o existenci následujícího integrálu. Pokud existuje, určete jeho hodnotu. [**3** body]

$$\int_{-1}^{2} \big(2\operatorname{sgn} x - \operatorname{sgn}(x-1)\big)\,\mathrm{d}x$$

Úloha D. Vyberte si **jednu** z následujících dvou možností.

(a) Nechť f je monotónní na $[a, b]$. Dokažte, že pak existuje Riemannův integrál $\int_a^b f$. [**12** bodů]

Nebo:

(b) Zformulujte Taylorovu větu s Peanovým tvarem zbytku a dokažte ji. K důkazu použijete lemmata:

- Pokud $f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(n)}(a) = 0$, pak $f(x) = o\big((x-a)^n\big),\ x \to a$;
- Pokud P je polynom stupně nejvýše n a $P(x) = o\big((x-a)^n\big),\ x \to a$, pak $P \equiv 0$ na $\mathbb{R}$.

Obě lemmata dokažte. (Můžete použít i jiná podobná tvrzení; pokud se tak rozhodnete, zformulujte je a dokažte.) [**16** bodů]

Pokud používáte nějaká pomocná tvrzení, musí být jasně patrné, že znáte jejich znění.