Písemka z matematické analýzy pro učitele (NMTM102)
1. ročník, letní semestr – 2. termín dne 1. června 2022

Početní část

Příklad 1. Spočtěte (pokud existuje) limitu [**18** bodů]

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\cos x - 1} - \cos x}{x\,(\sin x - x)}.$$

Příklad 2. Pomocí vhodné substituce nalezněte primitivní funkci (nemusíte „lepit“): [**20** bodů]

$$\int \frac{\operatorname{tg} x \cdot (2\cos x - \sin x)}{(\cos^2 x + 1)\cdot(\cos x + \sin x)}\,\mathrm{d}x.$$

Příklad 3. Spočtěte velikost plochy ohraničené křivkami

$$y = x^2 \quad \text{a} \quad y = x^3$$

a svislými přímkami $x = -1$ a $x = 2$. Nakreslete si obrázek! [**12** bodů]

Hodnocení:

Nutné podmínky na hodnocení **dobře**:

- dosažení aspoň **10** bodů z *Úloh A a B* teoretické části;
- dosažení aspoň **16** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **42** bodů.

Nutné podmínky na hodnocení **velmi dobře**:

- dosažení aspoň **14** bodů z *Úloh A a B* teoretické části;
- dosažení aspoň **21** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **56** bodů.

Nutné podmínky na hodnocení **výborně**:

- dosažení aspoň **30** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **70** bodů.

Písemka z matematické analýzy pro učitele (NMTM102)
1. ročník, letní semestr – 2. termín dne 1. června 2022

Teoretická část

Úloha A.

(a) Definujte symbol „malé o“ a symbol „$\sim$“. [**2** body]

(b) Definujte Taylorův polynom n-tého řádu funkce f v bodě a. [**2** body]

(c) Vyjádřete Eulerovo číslo e jako součet nekonečné řady. [**1** bod]

(d) Definujte stejnoměrnou spojitost funkce na intervalu. [**2** body]

(e) Definujte (Darbouxův) horní integrální součet $S(f, D)$. [**2** body]

(f) Napište dvě základní postačující podmínky pro existenci Riemannova integrálu. (Jednu z nich jsme dokázali na přednášce; nemyslím Klíčové lemma.) [**2** body]

Úloha B.

(a) Buďte F, G primitivní funkce k funkci f na intervalu (a, b). Dokažte, že existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$ taková, že $\forall x \in (a, b)\colon F(x) = G(x) + c$. [**6** bodů]

(b) Zformulujte a dokažte Newtonovu-Leibnizovu formuli. [**6** bodů]

Úloha C.

(a) Najděte hodnoty parametrů $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, pro které platí [**6** bodů]

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} + a + bx + cx^2 + dx^3}{x^4} \in \mathbb{R}.$$

(b) Nechť $c, b, a \in \mathbb{R}$, $c < b < a$. Nechť $f \in \mathcal{R}([c, a])$. Dokažte, že $\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f$.
K důkazu použijte platnost této rovnosti v každé situaci, kdy $a < c < b$. [**5** bodů]

Úloha D. Vyberte si **jednu** z následujících dvou možností.

(a) Zformulujte Klíčové lemma pro existenci Riemannova integrálu (Bolzanovu-Cauchyovu podmínku). Nechť $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \leqslant c \leqslant b$, $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Dokažte následující rovnost za předpokladu, že její pravá strana má smysl: [**12** bodů]

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Nebo:

(b) Dokažte Základní větu kalkulu: *Nechť f je spojitá funkce na intervalu $[a, b]$. Definujme $F(x) = \int_a^x f$. Potom F je primitivní funkce k f na (a, b).* [**16** bodů]

Pokud používáte nějaká pomocná tvrzení, musí být jasně patrné, že znáte jejich znění.