Písemka z matematické analýzy pro učitele (NMTM102)
1. ročník, letní semestr – 1. termín dne 25. května 2022

Početní část

Příklad 1. Spočtěte (pokud existuje) limitu **[20** bodů]

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - e^{\sin^2 x} - \frac{x^4}{3}}{x^6}.$$

Příklad 2. Nalezněte primitivní funkci: **[15** bodů]

$$\int \frac{\ln^2 x + \sqrt{1+\ln x}}{x \cdot \sqrt{1+\ln x}}\, dx.$$

Příklad 3. Spočtěte objem tělesa vzniklého rotací kolem osy x plochy určené funkcí f na intervalu $[0,2]$, kde

$$f(x) = \min\left\{\sqrt{x}, \frac{1}{x}\right\}, \quad x \in [0,2].$$

Nápověda: Nakreslete si obrázek. Ve kterém bodě se protínají grafy funkcí $\sqrt{x}$ a $\frac{1}{x}$? **[15** bodů]

Hodnocení:

Nutné podmínky na hodnocení **dobře**:

- dosažení aspoň **10** bodů z *Úloh A a B* teoretické části;
- dosažení aspoň **16** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **42** bodů.

Nutné podmínky na hodnocení **velmi dobře**:

- dosažení aspoň **14** bodů z *Úloh A a B* teoretické části;
- dosažení aspoň **21** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **56** bodů.

Nutné podmínky na hodnocení **výborně**:

- dosažení aspoň **30** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **70** bodů.

Písemka z matematické analýzy pro učitele (NMTM102)
1. ročník, letní semestr – 1. termín dne 25. května 2022

Teoretická část

Úloha A.

(a) Zformulujte Taylorovu větu s Lagrangeovým tvarem zbytku. [**3** body]

(b) Vyjádřete Eulerovo číslo e jako součet nekonečné řady. [**1** bod]

(c) Definujte pojem primitivní funkce na otevřeném intervalu. [**2** body]

(d) Definujte stejnoměrnou spojitost funkce na intervalu. [**2** body]

(e) Zformulujte Bolzanovu-Cauchyovu podmínku pro existenci Riemannova určitého integrálu („Klíčové lemma“). [**2** body]

Úloha B.

(a) Zformulujte Newtonovu-Leibnizovu formuli a s použitím Základní věty kalkulu (viz Úloha D) ji dokažte. [**6** bodů]

(b) Zformulujte a dokažte 1. Větu o substituci pro neurčitý integrál. [**6** bodů]

Úloha C.

(a) Buďte f, g, h funkce, $a \in \mathbb{R}$. Pišme $f \prec g$, pokud $f(x) = o(g(x)),\ x \to a$. Tím je na množině funkcí dána relace $\prec$. Dokažte, že je *tranzitivní*, tj. pokud $f \prec g$ a $g \prec h$, pak $f \prec h$. [**5** bodů]

(b) Rozhodněte o platnosti následujících výroků a svou odpověď stručně vysvětlete. [**7** bodů]

(i) Každá primitivní funkce je spojitá.
(ii) Každá spojitá funkce na otevřeném intervalu tam má primitivní funkci.
(iii) $\int \big((\ln x)'\big)\, dx \overset{c}{=} \ln|x|$ na $(-\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$.
(iv) Existuje polynom, který má nenulové derivace všech řádů.
(v) Nechť P je polynom, $P'(a) = 0$. Pak a je vícenásobný kořen P.
(vi) Nechť T je Taylorův polynom 7. řádu funkce f v bodě 0. Pak $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-T(x)}{x^6} = 0$.
(vii) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^3),\ x \to 0$.

Úloha D. Vyberte si **jednu** z následujících dvou možností.

(a) Nechť f je monotónní na $[a, b]$. Dokažte, že pak existuje Riemannův integrál $\int_a^b f$. [**12** bodů]

Nebo:

(b) Dokažte Základní větu kalkulu: *Nechť f je spojitá funkce na intervalu $[a, b]$. Definujme $F(x) = \int_a^x f$. Potom F je primitivní funkce k f na (a, b).* [**16** bodů]

Pokud používáte nějaká pomocná tvrzení, musí být jasně patrné, že znáte jejich znění.