Limity pomocí Taylorova polynomu

---

1 Spočtěte následující limity:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - (x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!})}{x^{11}}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - (x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!})}{x^{10}}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \Big(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}\Big)$

(f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2}$ $\quad (a > 0$ je parametr$)$

(g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\Big(\dfrac{1}{x} - \dfrac{\cos x}{\sin x}\Big)$

(h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+2x} - \ln(1+x) - 1}{x^3}$

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-2x+x^3} - \sqrt[3]{1-3x+x^2} - \frac{x^2}{6}}{\sin x - x}$

(j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \cos x - 1}{\ln(\cos x) + \frac{x^2}{2}}$

(k) $\lim\limits_{x\to \infty} \Big(x - x^2 \ln\big(1 + \dfrac{1}{x}\big)\Big)$

(l) $\lim\limits_{x\to \infty} \Big(\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5}\Big)$

[1] (a) $-\dfrac{1}{11!}$; (b) 0; (c) $-\dfrac{1}{12}$; (d) $\dfrac{1}{3}$; (e) 0; (f) $\ln^2 a$; (g) $\dfrac{1}{3}$; (h) $\dfrac{1}{6}$; (i) -6; (j) $\dfrac{5}{2}$; (k) $\dfrac{1}{2}$; (l) $\dfrac{1}{3}$;

---

2 Zkouškové příklady:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin x} - 1 - \sin(e^x - 1)}{x^4}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin x} - e^x}{x \cdot \ln(1+x^2)}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \sqrt{1-x^2} - \frac{x^4}{6}}{x^5}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-2x^2} - \cos 2x}{\sqrt{1+x} - \Big(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}\Big)}$

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1 - e^{x^2})(1 - \cos x) + \frac{x^4}{2}}{x^2 \cdot \sin^4 x}$

(f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1 + \ln\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)} - 1 + \frac{x^2}{4}}{x^4}$

[2] (a) $\dfrac{1}{12}$; (b) $-\dfrac{1}{6}$; (c) 0; (d) $-\dfrac{512}{15}$; (e) $-\dfrac{5}{24}$; (f) $-\dfrac{3}{32}$;

---

3 Těžší příklady:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2e^x - e^{\sin x} - e^{\arcsin x}}{x^5}$

(b) $\lim\limits_{x\to \infty} \Big(\big(x^3 - x^2 + \dfrac{x}{2}\big)e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x^6 + 1}\Big)$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin(\sin x) - \sin(2x)\sqrt[3]{1+x^2}}{x^5}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\cos(\sin x) - 1) + \frac{1}{2}x^2}{x^2 \sin^2 x}$

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\cos x)^{\sin x} - (\cos x)^x}{x^2(x - \sin x)}$

✠(f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\operatorname{tg} x) - \operatorname{tg}(\sin x)}{\arcsin(\operatorname{arctg} x) - \operatorname{arctg}(\arcsin x)}$

✠(g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{113 \cdot \ln(1 + \sin(x^2)) + 20 \cdot x^2 \cdot \sqrt{1+x^2} - 120 \cdot x \cdot \sin(\sin(x)) - 13 \cdot \ln(1+x^2)}{x^8}$

[3] (a) $-\dfrac{1}{12}$; (b) $\dfrac{1}{6}$; (c) $\dfrac{3}{5}$; (d) $\dfrac{5}{24}$; (e) $\dfrac{1}{2}$; (f) 1; (g) $-\dfrac{157}{84}$;