Matematická analýza II (NMTM102)

Martin Rmoutil

3. září 2022

Obsah

Předmluva

Tento text bezprostředně navazuje na má skripta MA1 a předpokládá porozumění látce prvního semestru. Čtenáři doporučuji každou kapitolu alespoň jednou pořádně přečíst od začátku až dokonce a až při druhém čtení se případně zaměřit jen na klíčová nebo problematická místa.

Nebude-li explicitně řečeno jinak, budeme se i nadále držet definicí a úmluv zavedených v prvním semestru, například:

- slovem *funkce* rozumíme i nadále reálnou funkci jedné reálné proměnné;
- slovo *posloupnost* se vztahuje i na zobecněné posloupnosti, tj. posloupnosti definované až od jistého členu (třeba $\left\{\sqrt{n-10}\right\}_{n=1}^{\infty}$, která je definovaná až od desátého členu);
- *vlastní* limita, derivace atd. znamená konečná;
- *divergentní* posloupnost, řada atd. je taková, která není konvergentní. Tj. limita (resp. součet) je buďto nekonečná nebo neexistuje;
- symbol log (bez indexu udávajícího základ) má stejný význam jako ln (i nadále se ovšem budu snažit používat pouze ln);
- pracujeme s *rozšířenou reálnou osou* $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ a definujeme některé operace s nekonečny, jiné ne; $\infty = +\infty$;
- supremum shora neomezené (resp. infimum zdola neomezené) podmnožiny $\mathbb{R}$ je ∞ (resp. $-\infty$);
- atd...

Kdo prostudoval předchozí díl, nebude mít potíže se v tomto textu vyznat. V tomto semestru však budeme číslovat i definice a některé poznámky a příklady, ne pouze matematická tvrzení.

Kapitola 1

Taylorův polynom

1.1 Úvod – význam derivace

Připomeňme si nejprve centrální definici minulého semestru: Funkce f z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ má v bodě a derivaci definovanou jako

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Jak víme, pokud písmeno a interpretujeme jako proměnnou místo konkrétního bodu, vlastně jsme takto definovali funkci f' ve všech bodech, v nichž tato limita existuje. Z definice je dále jasné, že pokud existuje $f'(a)$, pak existuje i $f(a)$, tj. funkce f je v bodě a definována (to proto, že hodnota $f(a)$ se vyskytuje v definici derivace $f'(a)$). Takže platí $\mathbb{D}_{f'} \subseteq \mathbb{D}_f$, rovnost ale nastávat nemusí – vzpomeňme třeba příklad funkce $f(x) = |x|$, která je definována na $\mathbb{R}$, ale derivaci má pouze na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Už jsme zjistili, že chování derivace vypovídá mnoho o původní funkci, neboť (a to je jasné i intuitivně) vypovídá o „rychlosti růstu funkce“: čím větší hodnota $f'(a)$, tím rychleji funkce v bodě a roste. Zároveň bychom už měli mít pevně zakořeněnou představu, že *pokud pro nějakou funkci g a pevně zvolený bod a platí $g'(a) = f'(a)$, pak „má funkce g v bodě a stejný směr jako funkce f“* – viz též čtvrtý bod seznamu níže a také Poznámku 2.

Trochu přesněji a podrobněji řečeno, pro derivaci jsme už odhalili všechna níže uvedená využití (a také některá další):

(i) Jestliže existuje vlastní (tj. konečná) derivace $f'(a)$, potom f je v bodě a spojitá.

(ii) Pokud f' je na nějakém intervalu kladná, pak f je na tomto intervalu rostoucí.
(Záporná derivace znamená klesající funkci.)

(iii) Pokud f' je na nějakém intervalu rostoucí, pak f je na tomto intervalu ryze konvexní.
(Klesající derivace znamená ryze konkávní funkci.)

(iv) Pokud $f' = 0$ na intervalu I, pak f je na I konstantní.
(Opačná implikace platí také a důkaz je triviální cvičení. Ujistěte se, že je vám toto jasné.)

(v) Pomocí derivací je možné zjednodušit výpočty některých limit funkcí (l'Hospitalovo pravidlo), odhalují se nám tedy hluboké souvislosti mezi chováním funkce a její derivace.

(vi) Je-li $f'(a)$ konečná (vlastní), pak má smysl hovořit o tečně ke grafu funkce v bodě $(a, f(a))$.

Všechny tyto věty jsou jistě hezké, kdybychom ale neuměli derivaci vypočítat, byly by nám málo platné. Naštěstí jsme z minulého semestru vybaveni také znalostí základních početních metod, zejména vzorce pro derivaci součtu, součinu, podílu a složené funkce. Kromě toho známe derivace základních funkcí, hlavně polynomů a elementárních funkcí.

Na druhou stranu je dobré si uvědomit, že všechny vzorečky pro počítání s derivacemi by byly jen samoúčelnou hrou, kdyby nebylo v seznamu výše uvedených (a dalších) aplikací. Ptáte-li se tedy na to, jaké aplikace mají derivace a příslušné početní metody, moje první odpověď je, že vám ukážu výše uvedený seznam; je z něj jasně patrné, že derivace jsou nesmírně silným nástrojem pro studium základního pojmu, se kterým pracujeme, totiž funkce. Ovšemže nyní se naše diskuse může posunout dál: K čemu je nám studium funkcí? A matematiky vůbec? To jsou dobré otázky, na které existují uspokojivé odpovědi; ty zde ovšem už probírat nebudu, je možné je postupně odhalovat čtením (třeba) populárně naučné literatury, jakož i samotným studiem na MFF – prostě skrze vzdělání. (A všimněme si, že s těmito otázkami lze jít libovolně daleko. Ano, lidská touha pochopit matematiku měla prokazatelný vliv na „cenu chleba" – a leckoho tato odpověď uspokojí – ale je možné se zase zeptat, k čemu vlastně *to* je. Odpovědi hledají filosofové a teologové po celá tisíciletí. Přesto vám jednu stručnou odpověď nabídnu. Je to prostě krásné: matematika i život sám.)

1.1.1 Pojem tečny

Než se pustíme do výkladu hlubších způsobů analýzy funkcí pomocí pojmu derivace, pojďme se krátce zaměřit na poslední bod seznamu výše: existuje-li konečná derivace $f'(a)$, pak má smysl hovořit v příslušném bodě o tečně ke grafu funkce f. Jak tomuto prohlášení rozumět? A co si vůbec představujeme pod pojmem tečna?

Středoškolská znalost tohoto pojmu se omezuje zejména na kružnici: tečnou je libovolná přímka, která kružnici protíná právě v jednom bodě. Je přitom „jasné", že každým bodem kružnice prochází jediná tečna, protože jakákoliv jiná přímka procházející tím bodem kružnici protíná ještě v jednom dalším bodě. *Tečna ke kružnici v daném jejím bodě je tedy jednoznačně určená.* A právě tento fakt dělá z tečny zajímavý pojem – však koho by zajímala „tečna" ke čtverci procházející nějakým jeho vrcholem, když přímek s touto vlastností existuje pro každý vrchol nekonečně mnoho? Od tečny k nějaké křivce (typicky ke grafu funkce) budeme tedy požadovat, aby byla jednoznačně určená.

Dají se tyto požadavky uplatnit kromě speciálního případu kružnice v nějakém obecnějším kontextu? Požadavek jednoznačnosti jistě, ten nám ale sám o sobě nebude stačit k definici. Požadavek průniku v jediném bodě zní logicky pro kružnici, pro obecnou křivku je však příliš omezující a navíc, jak je vidět na příkladu „tečny ke čtverci", není vlastně obecně zajímavý. Když se však na případ tečny ke kružnici podíváme pořádně, všimneme si, že v bodě dotyku mají kružnice i tečna „stejný směr", resp. spolu svírají „nulový úhel", což evidentně neplatí v bodě průniku pro žádnou sečnu, a nic podobného nejde ani říct ve vrcholu čtverce. To nás může inspirovat k definici (kterou jsme potkali už v prvním semestru):

Definice 1 (Tečna ke grafu funkce)**.** Nechť má funkce f vlastní derivaci $f'(a)$ v bodě a. Pak tečnou ke grafu funkce v jeho bodě $(a, f(a))$ rozumíme přímku (resp. graf lineární funkce T) popsanou rovnicí

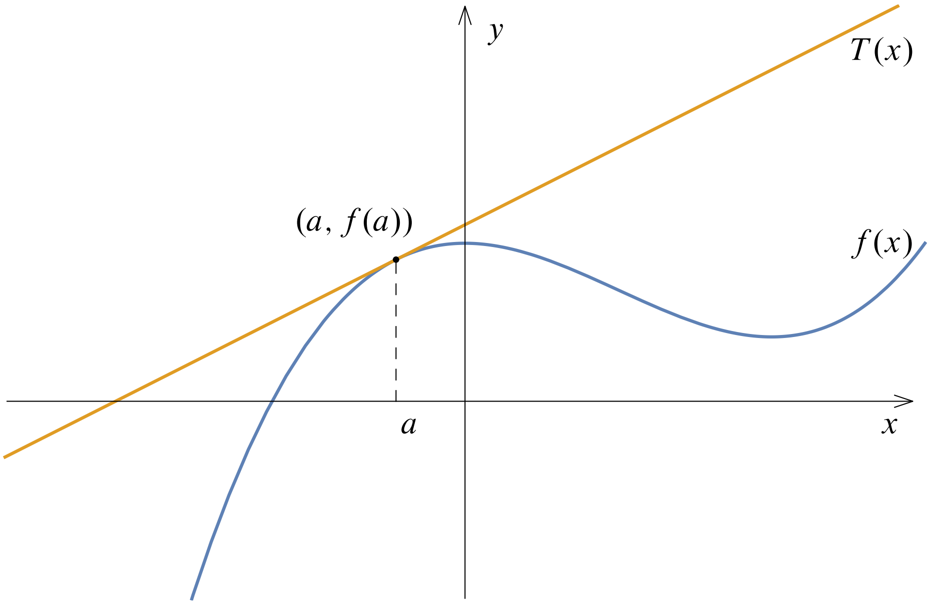
$$y = f(a) + f'(a)\cdot(x-a), \quad \text{resp.} \quad T(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a). \tag{1.1}$$

Pro zjednodušení budeme někdy „tečnou" rozumět přímo funkci T místo jejího grafu. Jinak řečeno nebudeme příliš důsledně rozlišovat mezi T (lineární funkcí) a grafem T (přímkou v rovině).

Později o tečně pohovoříme podrobněji a vysvětlíme, proč tato definice je dobrým zobecněním jednoduchého pojmu tečny kružnice – především dokážeme, že naplňuje požadavek jedinečnosti, který jsme vyslovili v úvahách výše, a že poskytuje *nejlepší možnou lineární aproximaci*[1] *funkce f na okolí bodu a*. Prozatím nám postačí několik jednoduchých postřehů:

---

[1] přiblížení, odhad



Obrázek 1.1: Tečna T ke grafu funkce f v bodě $(a, f(a))$.

Pozorování o tečně: Už teď si například můžeme snadno uvědomit, že „tečna T má v bodě dotyku stejný směr jako funkce f“. K tomu si nejprve všimněme, že pokud je bod a stacionárním bodem f, tj. $f'(a) = 0$, pak je příslušná tečna (definovaná rovnicí (1.1)) rovnoběžná s osou x (tj. T je konstantní funkce), protože v tom případě je

$$T(x) = f(a) + 0 \cdot (x - a) = f(a)$$

a $f(a)$ je samozřejmě konstanta (je to hodnota funkce f v pevně zvoleném bodě a). Ve stacionárním bodě je tedy tečna „vodorovná“.

Podobné triviální pozorování se ovšem dá učinit i pro případ nenulové hodnoty $f'(a)$. Opět uvažujme tečnu jako lineární funkci T proměnné x, tj. $T(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$ jako v Definici 1. Potom pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$T'(x) = \Big(\underbrace{f(a)}_{\text{konstanta}} + \underbrace{f'(a)}_{\text{konstanta}} \cdot (x - a) \Big)' = 0 + f'(a) \cdot 1 = f'(a),$$

takže speciálně (po dosazení a za x) dostáváme

$$T'(a) = f'(a), \tag{1.2}$$

což v intuitivní rovině znamená, že tečna T opravdu má stejný směr[2] jako funkce f v bodě a.

A samozřejmě bychom měli zpozorovat také (ještě jednodušší) fakt, že T se skutečně „v bodě a dotýká funkce f“. Podle (1.1) jest

$$T(a) = f(a) + f'(a) \cdot (a - a) = f(a) + f'(a) \cdot 0 = f(a),$$

takže

$$T(a) = f(a). \tag{1.3}$$

Z rovnic (1.2) a (1.3) je zřejmé, že tečna je ve smyslu Definice 1 jednoznačně určená, protože oba stupně volnosti, které máme k dispozici při definici lineární funkce, jsou těmito rovnicemi vyčerpány: jedna rovnice určuje směr přímky, druhá její posunutí. Ještě jednou se teď pořádně podívejte na obě rovnice. Říkají nám, že tečna má v bodě dotyku a stejnou hodnotu (1.3) a stejnou první derivaci („směr“) (1.2) jako funkce f.

[2] Všimněte si, že abychom dospěli k (1.2), potřebovali jsme znalost vzorců pro derivování. I toto je tedy jednoduchý příklad toho, jak se proplétá expresivní síla derivace s naší schopností derivaci vypočítat: jedno bez druhého by nemělo význam.

Poznámka 2 („Derivace udává tvar křivky, ne posunutí.“)**.** Naše interpretace rovnice (1.2) (totiž že obě funkce mají v bodě a „stejný směr“) se do určité míry opírá o naši intuici a porozumění pojmu derivace. Co když ale máme dvě funkce, řekněme f a g, které mají stejnou derivaci v *každém bodě* jistého intervalu $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$, tj. $f' = g'$ na I? V takovém případě se o intuici potřebujeme opřít v podstatně menší míře, platí totiž (pro $x \in I$):

$$(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0,$$

takže funkce $f-g$ je na intervalu I konstantní podle bodu (iv) seznamu aplikací derivace výše (Důsledek 51 prvního dílu skript), tzn. existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$ taková, že pro všechna $x \in I$ jest

$$f(x) - g(x) = c, \quad \text{tj.} \quad f(x) = g(x) + c.$$

To ovšem jinými slovy znamená, že když se na I shodují derivace, pak se f a g na I liší pouze o konstantu, tj. jejich grafy mají úplně stejný tvar, jenom jeden z nich je možná posunutý více nahoru. (Grafy f a g jsou paralelní.)

1.1.2 Směřování kapitoly

V úvahách výše jsme si všimli[3], že tečna T ke grafu funkce f v bodě a je právě taková lineární funkce[4], která má v bodě a stejnou *hodnotu* a stejnou (první) *derivaci* jako funkce f. Zároveň jsme si uvědomili, že těmito dvěma podmínkami je lineární funkce T jednoznačně určena, protože v obecné definici lineární funkce – neboli polynomu (nejvýše) prvního stupně v proměnné x, tzn. výrazu tvaru $ax + b$ – máme pouze dva stupně volnosti (které jsou dány dvěma reálnými koeficienty $a, b \in \mathbb{R}$).

Naše cíle: Budeme chtít definovat aproximaci dané funkce f, která je na okolí bodu a přesnější než aproximace pomocí tečny (která je polynomem nejvýše prvního[5] stupně). Je přirozené, že tak budeme činit pomocí polynomů stupně vyššího než 1, protože budeme potřebovat více stupňů volnosti. Například polynomy stupně nejvýše 2 (v proměnné x) jsou tvaru

$$ax^2 + bx + c \quad \text{resp.} \quad c_2x^2 + c_1x + c_0,$$

kde a, b, c (resp. c_2, c_1, c_0) jsou reálné koeficienty, a ty představují celkem tři stupně volnosti. Budeme-li tedy hledat nejlepší aproximaci[6] funkce f pomocí polynomu T stupně nejvýše 2 (tj. typicky pomocí kvadratické funkce místo lineární, jako tomu bylo v případě tečny), můžeme kromě požadavku splnění rovnic (1.3) a (1.2) požadovat ještě platnost třetí rovnice

$$T''(a) = f''(a). \tag{1.4}$$

Protože u polynomů stupně nejvýše 2 máme tři stupně volnosti, lze očekávat, že se podaří najít polynom T, který tyto tři rovnice splňuje. Tak tomu skutečně je a tento polynom (stupně nejvýše 2) nazveme Taylorovým polynomem[7]. V této kapitole ukážeme, že tento polynom je jednoznačně určený a popíšeme přesný smysl, ve kterém T popisuje chování funkce f na okolí bodu a lépe než pouhá tečna. V tento moment lze říci toto:

- Rovnost hodnot (1.3) zaručuje, že v bodě a vůbec dojde k *dotyku*.

---

[3] za předpokladu $f'(a) \in \mathbb{R}$

[4] Přesněji: graf lineární funkce. Viz úmluvu v Definici 1.

[5] Zde a na mnoha podobných místech píšeme *nejvýše* toho a toho stupně, protože třeba lineární funkce je polynomem prvního stupně pouze v případě, že je nekonstantní. V polynomu stupně nejvýše dva tedy připouštíme nejvýše druhou mocninu x, povolujeme však i nulové koeficienty. Tím pádem každá lineární funkce je zároveň polynomem stupně nejvýše dva a podobně.

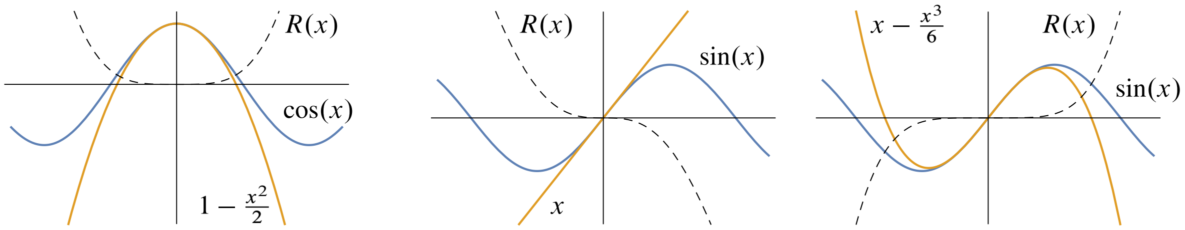
[6] na okolí bodu a

[7] Taylorovým polynomem řádu 2 funkce f v bodě a. Rozmyslete si, že o kvadratickou funkci se jedná, právě když $f''(a) \neq 0$.

- První derivace se vztahuje ke *směru* funkce. Rovnost (1.2) tedy zaručuje že f a T mají stejný směr.
- Druhá derivace se vztahuje ke *křivosti* funkce. Rovnost (1.4) tedy zaručuje, že f a T jsou na okolí bodu a „stejně prohnuté“.

Doufám, že v tento okamžik se další zobecnění už přímo nabízí. Proč zůstat jen u druhé derivace a polynomů stupně nejvýše dva? Můžeme pokračovat dál, požadovat rovnost většího počtu derivací – a zaplatit za to náročnější prací se složitějším polynomem (tzn. polynomem vyššího stupně).

Na obrázku 1.2 vidíte příklady aproximací goniometrických funkcí pomocí vhodných polynomů; $R(x)$ hraje ve všech případech roli rozdílu obou funkcí; v případě funkce $\sin x$ je na funkci R dobře patrné, že aproximace v 0 pomocí lineární funkce x je sice dobrá, aproximace pomocí $x - \frac{x^3}{6}$ je ale mnohem lepší.



Obrázek 1.2: Funkce $\sin x$, $\cos x$ a jejich aproximace pomocí polynomů.

Motivace: Aproximace funkce f na okolí bodu a pomocí Taylorova polynomu T může v jistém smyslu být – narozdíl od aproximace pomocí tečny – libovolně přesná. O něco přesněji řečeno to znamená, že na jistém okolí bodu a budeme schopni zaručit, že chyba, které se dopustíme, nahradíme-li funkci f funkcí T (tj. velikost rozdílu $|f - T|$), je menší než libovolně malé předem předepsané $\varepsilon > 0$. Pokud tedy předepíšeme $\varepsilon = 10^{-6}$, budeme schopni napsat konkrétní vzorec, který nám na konkrétním okolí bodu a umožní vypočítat přibližné hodnoty funkce f pomocí polynomu T s chybou menší než jedna miliontina, tj. (řekněme) s přesností na pět desetinných míst.

Ač se to na první pohled možná nezdá, aproximace složitějších funkcí pomocí polynomů je pro praxi zcela zásadní. A priori totiž není jasné, jak je možné (alespoň přibližně) vyčíslit třeba hodnotu funkce sin například v bodě 2. Jistě to můžeme udělat s pomocí počítače; způsob, jakým se počítač k výsledku (přibližnému, třebaže velmi přesnému) dopracuje nám ovšem zůstane skryt. A budeme vůbec vědět, že si počítač nevymýšlí a výsledek opravdu je tak přesný, jak se nám snaží tvrdit? Podobné je to pro další elementární funkce, jako cos, exp, ln, cyklometrické funkce a různé složitější funkce z nich poskládané. Jak vypočítat jejich hodnoty?

Výhoda polynomů oproti složitějším funkcím (jako je třeba sin) tkví v tom, že jejich hodnotu v libovolném bodě jsme schopni vypočítat pouze pomocí sčítání a násobení: třeba hodnota funkce $f(x) = 2x^3 + x^2 + 2x$ v bodě 3 je $f(3) = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 3$. Zde k výsledku dospějeme snadno i z hlavy. Pro složitější polynom v nějakém neceločíselném bodě může být výpočet složitější, v principu je nám ale jasné, jak se k hodnotě dopracovat.

Pomocí Taylorova polynomu budeme schopni libovolně přesně vypočítat hodnotu $\sin 2$ (nebo v jakémkoliv jiném bodě) pouze s tužkou a papírem – nebo, pokud jsme technicky založeni – naprogramovat tuto funkci, využívajíce při tom pouze základních početních operací, které počítač snadno zvládá.

1.2 Asymptotické srovnávání funkcí (Landauova notace)

V této části zavedeme důležité značení, s jehož pomocí budeme pohodlně porovnávat rychlost růstu nebo poklesu funkcí. V jistém smyslu dáme přesný význam vyjádřením typu „v čitateli je ten a ten člen převládající" nebo „ostatní členy jsou zanedbatelné" atd. Toho využijeme hned v části následující o Taylorově polynomu. Začneme definicí.

Definice 3 (Symboly o, $\sim$, O, $\asymp$)**.** Nechť f, g jsou funkce, $a \in \mathbb{R}^*$. Následují definice významů tří různých zápisů (symbolů):

(i) $f(x) = o(g(x)),\ x \to a \quad \overset{\text{def.}}{\iff} \quad \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0.$
Tento zápis čteme *funkce f je v bodě a malé o od g.*

(ii) $f(x) \sim g(x),\ x \to a \quad \overset{\text{def.}}{\iff} \quad \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1.$
Čti: *funkce f je v bodě a ekvivalentní g.*

(iii) $f(x) = O(g(x)),\ x \to a \quad \overset{\text{def.}}{\iff} \quad \exists K > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in P(a,\delta)\colon \left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| \leqslant K.$
Čti: *funkce f je v bodě a velké O od g.*

(iv) $f(x) \asymp g(x),\ x \to a \quad \overset{\text{def.}}{\iff} \quad f(x) = O(g(x)),\ x \to a\ \wedge\ g(x) = O(f(x)),\ x \to a.$
Čti: *funkce f je v bodě a slabě ekvivalentní g.*

Všimněte si role bodu a; například v definici (i) máme na pravé straně definující ekvivalence limitu $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$; informace o tom, ve kterém bodě se limita uvažuje, se tedy musí objevit v definovaném symbolu. Proto tedy nepíšeme pouze $f(x) = o(g(x))$ a přidáváme také ono „$x \to a$".

Příklad 4. Následující fakty si můžete ověřit jako snadná cvičení. Ve skutečnosti nejde o nic jiného, než pochopit, co daný symbol znamená (tj. podívat se na Definici 3); limita, kterou je potřeba spočítat je pak obvykle triviální. Nejprve několik příkladů se symbolem „o"; třeba první bod v seznamu níže interpretujeme tak, že „$\ln x$ je v nekonečnu (máme totiž $x \to \infty$) mnohem menší než x" (resp. tak, že z funkcí x a $\ln x$ je v nekonečnu „převládajícím členem" x).

- $\ln x = o(x),\ x \to \infty$;
- $x^2 = o(x^3),\ x \to \infty$;
- $x^3 = o(x^2),\ x \to 0$;
- $x^{666} = o(e^x),\ x \to \infty$;
- $(x-1)^4 = o\big((x-1)^3\big),\ x \to 1$;
- $x = o(1),\ x \to 0$.

Na druhou stranu *neplatí* třeba následující:

- $\ln x = o(x),\ x \to 0_+$;
- $x^2 = o(x^3),\ x \to 0$;
- $\sin(x) = o(1),\ x \to \infty$;
- $\dfrac{1}{x^2} = o\left(\dfrac{1}{x}\right),\ x \to 0.$

Symbol $\sim$ interpretujeme tak, že se srovnávané funkce chovají na okolí daného bodu stejně. Totiž: podle definice $f(x) \sim g(x),\ x \to a$ nastává, pokud $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = 1$, což znamená, že blízko bodu a zhruba platí rovnost $f(x)/g(x) \doteq 1$, tj. $f(x) \doteq g(x)$.

Jako snadné cvičení si můžete dokázat, že relace $\sim$ je symetrická v tom smyslu, že

$$f(x) \sim g(x),\ x \to a \quad \iff \quad g(x) \sim f(x),\ x \to a,$$

což je vlastnost, kterou symbol o pochopitelně nemá (dokonce platí, že $\sim$ je relace ekvivalence, tj. je reflexivní, symetrická a tranzitivní – všechny tři vlastnosti jsou snadné cvičení). Následující příklady použití symbolu $\sim$ jsou (až na poslední z nich) jiné formulace známých limit pro sin, cos a ln:

- $\sin x \sim x,\ x \to 0$;
- $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2},\ x \to 0$;
- $\ln x \sim x - 1,\ x \to 1$;
- $\operatorname{arctg} x \sim \frac{\pi}{2},\ x \to \infty$.

Symbol O („velké O“) je pro nás méně užitečný a uvádíme ho hlavně pro úplnost. Neformálně řečeno $f(x) = O(g(x)),\ x \to a$ znamená, že funkce f není na okolí bodu a o mnoho větší než g. A to v tom smyslu, že může být klidně i tisíckrát větší (pak by v definici postačila konstanta $K = 1001$), ale není „nekonečně-krát větší“, takže poměr mezi oběma funkcemi δ-blízko bodu a zůstane omezený pevnou konstantou K. Zápis pomocí velkého O nachází uplatnění zejména v informatice, kde se používá k popisům časové složitosti algoritmů.[8]

Zbývá stručně se zmínit o slabé ekvivalenci (tj. o symbolu $\asymp$), kterou jsme definovali s použitím velkého O. Přes tento fakt už se slabou ekvivalencí máme nějaké zkušenosti: neformálně řečeno totiž výrok $f(x) \asymp g(x),\ x \to a$ říká, že funkce f a g se v bodě a „chovají podobně“ – a to v tom smyslu, že poměr mezi nimi nikdy není příliš blízko ∞ a nikdy příliš blízko 0; drží se zkrátka v určitém rozmezí. Jako snadné cvičení si rozmyslete následující ekvivalenci:

$$f(x) \asymp g(x),\ x \to a \quad \iff \quad \exists K > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in P(a,\delta)\colon \frac{1}{K} \leqslant \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leqslant K. \qquad \triangle$$

Poznámka. Definice 3 je formulována pro funkce, je ale jasné, že se dá stejně dobře použít pro posloupnosti (ostatně posloupnosti jsou pro nás funkce definované v $\mathbb{N}$): Třeba $a_n = o(b_n),\ n \to \infty$ (kde $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou dvě posloupnosti) znamená $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ a podobně.

Například Limitní srovnávací kritérium konvergence řad převedené do řeči asymptotické symboliky vypadá takto: *Buďte $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ řady s nezápornými členy.*

(i) Jestliže $a_n \asymp b_n,\ n \to \infty$, potom $\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konverguje } \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje}\right)$;

(ii) Jestliže $a_n = o(b_n),\ n \to \infty$, potom $\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konverguje } \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje}\right)$;

(iii) Jestliže $b_n = o(a_n),\ n \to \infty$, potom $\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ diverguje } \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverguje}\right)$.

Příklad 5. Funkce $f(x) = x^2/1000$ je na okolí 0 mnohem (tisíckrát) menší než funkce x^2. Přesto **neplatí** $f(x) = o(x^2),\ x \to 0$, protože

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2/1000}{x^2} = \frac{1}{1000} \neq 0.$$

Problém je pochopitelně v tom, že funkce f sice je mnohem menší než x^2, ale poměr mezi nimi je konstantní, a to $1 : 1000$. Aby platil výrok se symbolem o, musí jít poměr mezi oběma funkcemi k nule; tj. ta menší funkce musí být nejen tisíckrát menší, ale na jistém okolí i milionkrát menší a na jistém (asi ještě menším) okolí miliardkrát menší atd. – musí zkrátka „být v tom bodě nekonečně-krát menší“. $\triangle$

Úmluva 6 (O interpretaci malého o v rovnicích a limitách)**.** • Vyjádření $f(x) = o(g(x)),\ x \to a$ je pro nás v tento okamžik nedělitelný symbol, jehož význam je dán Definicí 3. Je ale velmi praktické symbolu malé o využívat i jinak, ve složitějších výrazech a rovnostech, nebo i v limitách. Podívejme se nejprve na následující zápis

$$f(x) = x^2 + o(x^7),\ x \to 0, \tag{1.5}$$

který v tento moment nemáme definovaný; existuje jediná rozumná interpretace (které se odteď budeme držet), a to

$$f(x) - x^2 = o(x^7),\ x \to 0,$$

[8] Wikipedia nabízí více informací k tomuto tématu; podívejte se třeba na známý případ algoritmu Quicksort s průměrnou časovou náročností $O(n \ln n)$.

což má Definicí 3 jednoznačně daný význam:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - x^2}{x^7} = 0.$$

To ale obvykle není nejpraktičtější zápis. Ekvivalentní a často srozumitelnější je rovnost (1.5) chápat tak, že funkce f je součtem x^2 a nějaké další funkce, která je na okolí nuly zanedbatelná v porovnání s x^7; označíme ji $\varphi(x)$ a rovnost (1.5) tedy interpretujeme takto:

$$f(x) = x^2 + \varphi(x), \quad \text{kde} \quad \varphi(x) = o(x^7),\ x \to 0. \tag{1.6}$$

Nyní by mělo být patrné, jak bychom interpretovali výskyt symbolu o v jiných rovnostech: zkrátka bychom si místo něj představovali nějakou funkci φ, která je malá ve specifikovaném smyslu (třeba v rovnici (1.6) je malá vzhledem k x^7 na okolí 0).

• Další typ situace nastává, když se symbol o vyskytne v nějakém výrazu či rovnosti víckrát. Nejspíš pro vás nebude problém dát rozumný význam rovnici

$$f(x) = \frac{x + o(x^2)}{x^3 + o(e^{-x^{-2}})},\ x \to 0: \tag{1.7}$$

Symbol o se sice vyskytuje dvakrát, jeho parametry se však liší (v jednom výskytu máme x^2, ve druhém $e^{-x^{-2}}$), a tedy je přirozené každý z obou symbolů o interpretovat jako jinou malou funkci, tedy chápat $o(x^2)$ jako $\varphi(x)$, kdežto symbol $o\big(e^{-x^{-2}}\big)$ chápat jako $\psi(x)$, kde

$$\varphi(x) = o(x^2),\ x \to 0 \quad \text{a dále} \quad \psi(x) = o\big(e^{-x^{-2}}\big),\ x \to 0.$$

Rovnici (1.7) pak chápeme takto:

$$f(x) = \frac{x + \varphi(x)}{x^3 + \psi(x)}.$$

• Případ, kdy obě malá o mají různé parametry (v tomto příkladě x^2 a $e^{-x^{-2}}$), je tedy jasný. Je ale potřeba si uvědomit, jak to bude fungovat, bude-li rovnice vypadat takto:

$$f(x) = \frac{x + o(x^4)}{x^3 + o(x^4)},\ x \to 0.$$

V tomto případě *máme dvojí výskyt $o(x^4)$, ale každý z nich může reprezentovat jinou funkci* zanedbatelnou blízko 0 vzhledem k x^4. Tedy $o(x^4)$ v čitateli (resp. ve jmenovateli) chápeme jako funkci φ (resp. ψ), kde

$$\varphi(x) = o(x^4),\ x \to 0 \quad \text{a dále} \quad \psi(x) = o(x^4),\ x \to 0$$

a kde φ a ψ můžou (ale nemusí) být různé funkce.

• Konečně se musíme také domluvit, jakým způsobem budeme interpretovat situace, kdy se symbol o vyskytne v nějaké limitě. Protože symbol pro limitu obsahuje informaci o tom, ke kterému bodu se blíží proměnná („$x \to a$“ apod.), nemusíme to už znovu opisovat za $o(\ldots)$. Například

$$\lim_{x\to 7} \frac{(x-7)^2 + o\big((x-7)^2\big)}{(x-7)^2} = (*)$$

má jasný význam, když si místo $o\big((x-7)^2\big)$ představujeme funkci $\varphi(x)$ splňující

$$\varphi(x) = o\big((x-7)^2\big),\ x \to 7, \tag{1.8}$$

kde „$x \to 7$“ jsme vzali zpod symbolu limity. Výpočet pak proběhne následovně:

$$(*) = \lim_{x\to 7}\left(1 + \frac{o\big((x-7)^2\big)}{(x-7)^2}\right) = 1 + \lim_{x\to 7}\frac{o\big((x-7)^2\big)}{(x-7)^2} = 1 + 0.$$

Poslední limita je nulová přesně podle definice symbolu o, resp. podle jeho výše uvedené interpretace uvnitř limity – podle (1.8) totiž máme

$$\lim_{x\to 7}\frac{o\big((x-7)^2\big)}{(x-7)^2} = \lim_{x\to 7}\frac{\varphi(x)}{(x-7)^2} = 0.$$

Poznámka 7. Při použití symbolů o, $\sim$, O, $\asymp$ nesmíme zapomenout udat, ke kterému bodu se blíží x (tj. nevynechat ono $x \to a$). Bez této informace symboly postrádají smysl a rovnice je obsahující postrádá jakoukoliv informační hodnotu.

Je totiž potřeba si uvědomit, že i když rovnost (1.5) (resp. rovnost (1.6)) vypadá jako celkem běžná definice nějaké funkce f (prostě „f se rovná x^2 + něco malého“), ve skutečnosti nám o funkci f poskytuje informaci pouze „blízko bodu 0“. Nikde jinde nevíme vlastně nic a dokonce nevíme ani, jak blízko u bodu 0 vůbec něco víme. Jinými slovy řečeno, význam rovnice (1.5) je úzce spjat s bodem 0; z perspektivy bodu 0 se na celou věc díváme. (A je snad každému zřejmé, že kdyby v rovnici bylo napsáno $x \to a$, uvažovali bychom a místo 0.)

Příklad 8. Porovnejme chování výrazu $x^3 + x^2 + \sin x$ blízko ∞ a blízko 0:

- $x^3 + x^2 + \sin x = x^3 + o(x^3),\ x \to \infty$. Skutečně, tvrzení je ekvivalentní rovnosti $x^2 + \sin x = o(x^3),\ x \to \infty$, což je snadné ověřit ($x^3$ je převládající člen atd.). Naproti tomu:
- $x^3 + x^2 + \sin x = \sin x + o(x),\ x \to 0$. Zde tedy tvrdíme, že $x^3 + x^2 = o(x),\ x \to 0$, což je opět triviální z definice (ověřte).

Na tomto příkladě znovu vidíme to, co by nám už mělo být intuitivně jasné ze zkušeností s limitami prvního semestru, totiž že *v ∞ bude převládající člen ten s nejvyšší mocninou*, zatímco *v 0 naopak ten s mocninou nejmenší*. V tomto příkladě navíc máme $\sin x$, který se ale u nuly chová jako x (jak víme, $\sin x \sim x,\ x \to 0$), a tedy v bodě 0 hraje roli převládajícího členu. Obě pozorování se dají taky otočit a neformálně vyjádřit takto:

1. Blízko nekonečna: Čím **menší** mocnina, tím zanedbatelnější člen;
2. Blízko nuly: Čím **větší** mocnina, tím zanedbatelnější člen. △

Příklad 9. (a) V předchozím příkladě jsme si rozmysleli, že platí

$$x^3 + x^2 + \sin x = \sin x + o(x),\ x \to 0.$$

Nyní chci na příkladech ukázat, že takový výrok může, ale nemusí, zůstat v platnosti, nahradíme-li na pravé straně této rovnice funkci $\sin x$ libovolnou funkcí, která je s ní v nule ekvivalentní: třeba x nebo $\operatorname{arctg} x$.[9]

$$x^3 + x^2 + \sin x = x + o(x),\ x \to 0, \quad \text{resp.} \quad x^3 + x^2 + \sin x = \operatorname{arctg} x + o(x),\ x \to 0. \tag{1.9}$$

Dokažme třeba druhé tvrzení (první je ještě jednodušší). Podle Úmluvy 6 toto druhé tvrzení interpretujeme jako výrok

$$x^3 + x^2 + \sin x - \operatorname{arctg} x = o(x),\ x \to 0,$$

[9] Skutečně platí: $\sin x \sim x,\ x \to 0$, resp. $\sin x \sim \operatorname{arctg} x,\ x \to 0$. O tom se s použitím známých limit snadno můžete přesvědčit přímo z definice $\sim$. Jest totiž $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, resp. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\operatorname{arctg} x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{x}{\operatorname{arctg} x} = 1\cdot\frac{1}{1} = 1$.

který podle Definice 3 znamená že limita podílu levé strany a x je nulová. Nuže

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 + x^2 + \sin x - \operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{x^3}{x} + \frac{x^2}{x} + \frac{\sin x}{x} - \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right) = 0 + 0 + 1 - 1 = 0,$$

a jsme tedy hotovi: vidíme, že nezáleží na tom, kterou z funkcí $\sin x$, x, $\operatorname{arctg} x$ na pravé straně máme; výrok platí každopádně.

(b) Na druhou stranu můžeme uvažovat třeba následující pravdivý výrok:

$$\sin x + x^4 = \sin x + o(x^3),\ x \to 0.$$

Výrok je skutečně pravdivý, a to triviálně, neboť podle Úmluvy 6 znamená pouze to, že $\sin x + x^4 - \sin x = o(x^3),\ x \to 0$, neboli $x^4 = o(x^3),\ x \to 0$, což je jasné.

Nicméně nahradíme-li na pravé straně funkci $\sin x$ prostým x, výrok přestane platit:

$$\text{Neplatí} \qquad \sin x + x^4 = x + o(x^3),\ x \to 0.$$

Skutečně,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x + x^4 - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^3} + \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \ldots = -\frac{1}{6} \neq 0.$$

Jak se to mohlo stát, když přece funkce na pravé straně v obou výrocích, tedy $\sin x$ a x, se „v nule chovají stejně“[10]? Proč v části (a) tohoto příkladu jsme podobnou záměnu provést mohli a v (b) nikoliv? Formálně vzato je to jasné z výpočtu. Intuitivně je to tím, že zde jsme požadovali mnohem větší přesnost, konkrétně $o(x^3),\ x \to 0$ místo původního $o(x),\ x \to 0$.

Z těchto příkladů, z nichž v jednom jsme pravou stranu nahradili ekvivalentní funkcí beztrestně a ve druhém nám to neprošlo, je patrné, že je potřeba být ve střehu a při úpravách zahrnujících malé o a ostatní symboly je správné si vždy představit výpočet, který ospravedlňuje náš postup. △

Tvrzení 10 (Aritmetika malého o)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R}^*$. Platí všechna následující tvrzení:*

(i) *Nechť $f_1(x) = o(g(x)),\ x \to a$; $f_2(x) = o(g(x)),\ x \to a$.*
Pak $f_1(x) + f_2(x) = o(g(x)),\ x \to a$.

(ii) *Nechť $f_1(x) = o(g_1(x)),\ x \to a$; $f_2(x) = o(g_2(x)),\ x \to a$.*
Pak $f_1(x) \cdot f_2(x) = o(g_1(x) \cdot g_2(x)),\ x \to a$.

(iii) *Pokud $\lim_{x\to a} \frac{g_1(x)}{g_2(x)} \in \mathbb{R}$ a $f(x) = o(g_1(x)),\ x \to a$, potom $f(x) = o(g_2(x)),\ x \to a$.*

(iv) *Nechť $f_1(x) = o(g(x)),\ x \to a$. Nechť $\exists \delta > 0\colon\ f_2 \neq 0$ na $P(a,\delta)$.*
Potom $f_1(x) \cdot f_2(x) = o(g(x) \cdot f_2(x)),\ x \to a$.

(v) *Nechť $f(x) = o(g(x)),\ x \to a$. Nechť $\exists \delta > 0\colon\ h$ je omezená na $P(a,\delta)$.*
Potom $h(x) \cdot f(x) = o(g(x)),\ x \to a$.

(vi) *Mějme čísla $m, n \in \mathbb{Z}$ splňující $m < n$.*
Pokud $f(x) = o\big((x-a)^n\big),\ x \to a$, pak platí i $f(x) = o\big((x-a)^m\big),\ x \to a$.

Důkaz. Všechny důkazy jsou snadná cvičení na definici a základní operace s limitami. □

[10] Tj. platí $\sin x \sim x,\ x \to 0$, reformulace známe limity pro sin.

V Příkladě 9 jsme si uvědomili, že rovnosti zahrnující asymptotické symboly jako malé o je potřeba interpretovat v limitním, asymptotickém smyslu, a může se tedy stát, že rovnost zůstane v platnosti i změníme-li některé členy na jiné, které se chovají „stejně“. Ukázali jsme však také, že si musíme dávat pozor a že někdy se tím můžeme dopustit příliš velké chyby a rovnost platnosti pozbyde.

Následující tvrzení zdůrazňuje, že funkci dosazenou do malého o je vždy možno zaměnit za funkci ekvivalentní a pravdivostní hodnota rovnosti zůstane beze změny. Přesněji:

Tvrzení 11. *Nechť $g_1(x) \sim g_2(x),\ x \to a$ a nechť f je nějaká funkce. Pak NVJE:*

(i) $f(x) = o\big(g_1(x)\big),\ x \to a;$
(ii) $f(x) = o\big(g_2(x)\big),\ x \to a.$

Důkaz. Tvrzení říká, že výroky (i) a (ii) jsou ekvivalentní. Důkaz tohoto tvrzení přímočarou aplikací běžné metody, kterou používáme od začátku prvního semestru v praktických výpočtech limit: rozšíření zlomku. Předpokládejme, že platí (i); platnost (ii) doložíme následujícím výpočtem: (Důkaz opačné implikace je stejný.)

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g_2(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g_1(x)} \cdot \frac{g_1(x)}{g_2(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g_1(x)} \cdot \lim_{x\to a} \frac{g_1(x)}{g_2(x)} = 0 \cdot 1 = 0,$$

kde předposlední rovnost plyne z (i) a z předpokladu ekvivalence g_1 a g_2 v bodě a. Dostali jsme (ii), a důkaz implikace je hotov. □

Příklad 12. Podívejme se na konkrétní příklad použití Tvrzení 11: protože $e^x - 1 \sim x,\ x \to 0$, platí podle tohoto tvrzení ekvivalence

$$\cos x = 1 + o(e^x - 1),\ x \to 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \cos x = 1 + o(x),\ x \to 0.$$

Protože výrok na pravé straně ekvivalence bude nejspíš obnášet o něco jednodušší výpočet, zaměříme se právě na něj; o výroku vlevo už teď víme, že má stejnou pravdivostní hodnotu jako výrok vpravo.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = -\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot x = -\frac{1}{2} \cdot 0 = 0,$$

takže oba výroky platí. Zajímavější příklady v podobném duchu nás čekají při práci s Taylorovým polynomem. △

Poznámka 13. Platí obecnější verze Tvrzení 11: místo ekvivalence funkcí g_1 a g_2 v bodě a stačí předpokládat pouze $g_1(x) \asymp g_2(x),\ x \to a$; ani za tohoto slabšího předpokladu nezáleží na tom, jestli se v symbolu malé o vyskytuje g_1 nebo g_2. Důkaz je velmi podobný, na konci výpočtu však nedostaneme $0 \cdot 1$ a musíme místo toho aplikovat tvrzení „nulová · omezená = nulová“.

Všimněte si také toho, že Tvrzení 11 je snadným důsledkem Tvrzení 10 (iii) (s pomocí (iii) dokážeme každou implikaci zvlášť).

Cvičení 14. Jako snadné cvičení, které souvisí s právě uvedenými fakty, vám doporučuji si dokázat, že relace $f(x) \sim g(x),\ x \to a$ je *relace ekvivalence* na množině funkcí, které jsou nenulové na nějakém prstencovém okolí bodu a (označme tuto množinu $\mathcal{C}$, tj. $\mathcal{C} = \{f:\ \exists\delta > 0\ \forall x \in P(a,\delta):\ f(x) \neq 0\}$). To znamená dokázat následující tři vlastnosti charakterizující ekvivalenci:

(a) Reflexivita: $\forall f \in \mathcal{C}:\ f(x) \sim f(x),\ x \to a;$

(b) Symetrie: $\forall f, g \in \mathcal{C}:\ (f(x) \sim g(x),\ x \to a) \Leftrightarrow (g(x) \sim f(x),\ x \to a);$

(c) Tranzitivita: $\forall f, g, h \in \mathcal{C}:$
$(f(x) \sim g(x),\ x \to a) \wedge (g(x) \sim h(x),\ x \to a) \Rightarrow (f(x) \sim h(x),\ x \to a).$

Poznámka 15 (Posunutí do jiného bodu)**.** Připomeňme pro jistotu, že v předchozích příkladech není podstatný bod 0 sám o sobě; důležité je zde pouze to, že jde (na rozdíl od ∞) o bod vlastní. Posunutím celého příkladu do jiného (vlastního) bodu $a \in \mathbb{R}$ dostaneme analogickou situaci. Jestliže například máme, že $f(x) = o(x^n),\ x \to 0$, pak také platí $f(x-a) = o\big((x-a)^n\big),\ x \to a$. To je okamžitě vidět, pokud si oba výroky rozepíšete podle jejich definice (zkrátka jde jen o limitu posunuté funkce v příslušně posunutém bodě).

Příklad 16. Výše jsme si uvědomili, že funkce x^n je na malém okolí 0 tím **menší**, čím je exponent n **větší**. (Viz Příklad 8.) Pojď'me se na tento jev podívat z pohledu derivací. Je nám například jasné, že na malém okolí 0 je funkce x^2 mnohem menší než x. Intuitivně cítíme, že je to dáno tím, že přímka $y = x$ protíná osu x (v bodě 0) pod pevným úhlem 45°, zatímco parabola $y = x^2$ se k ose x (v bodě 0) těsně přimyká – to pochopitelně souvisí s tím, že má v bodě 0 stacionární bod, tj. nulovou derivaci. Zároveň to ale souvisí také s tím, že bod 0 je dvojnásobným kořenem x^2 a pouze jednonásobným kořenem x. A tak dále. Třeba funkce x^3 má v bodě 0 dokonce i druhou derivaci nulovou a 0 je trojnásobným kořenem. Pozorujeme tedy souvislosti mezi následujícími třemi aspekty:

(1) Míra zanedbatelnosti (malosti) hodnot funkce na okolí bodu a;
(Přesné vyjádření by využilo symbolu malé o.)

(2) nulová hodnota, nulová derivace, nulová druhá derivace,... v bodě a;

(3) násobnost a jakožto kořene polynomu.

Následujícími příklady chci ilustrovat zejména souvislost mezi (2) a (3). Nicméně i zde můžeme současně vycítit i vztah s (1).

- Podívejme se podrobněji kupříkladu na funkci $f(x) = x^5$. Všimněme si, že platí:

  $$f'(x) = 5x^4; \quad f''(x) = 5 \cdot 4x^3; \quad f^{(3)}(x) = 5 \cdot 4 \cdot 3x^2; \quad f^{(4)}(x) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2x; \quad f^{(5)}(x) = 5!.$$

  Funkce f je jednoduchý polynom s jediným kořenem 0, jehož násobnost je 5. Není žádná náhoda, že zrovna pátá derivace je první (a poslední) derivace, která je v bodě 0 nenulová.

- Uvažujme složitější polynom $P(x) = x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2 = (x-1)^3(x-2)$. Tento polynom má trojnásobný kořen 1 a jednonásobný kořen 2 (jak je patrné z jeho rozkladu na kořenové činitele). Sami se výpočtem přesvědčte, že třetí derivace je první nenulová derivace P v bodě 1 (tj. $P(1) = 0, P'(1) = 0, P''(1) = 0, P^{(3)}(1) \neq 0$) a první derivace je nenulová v bodě 2 (tedy $P(2) = 0$ a $P'(2) \neq 0$). Opět tedy vidíme korespondenci mezi pořadím první nenulové derivace a násobností kořenů.

Později (vybaveni zkušenostmi s Taylorovým polynomem) se můžete pokusit dokázat, že toto chování není náhodné; známe-li kořen nějakého polynomu, můžeme snadno určit jeho násobnost tím, že polynom derivujeme a podíváme se, kolikátá je nejnižší nenulová derivace v tom bodě. △

1.3 Tečna a diferenciál

Příklad 17. Nechť má funkce f v bodě $a \in \mathbb{R}$ vlastní derivaci. Položme $T(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$; pak graf této lineární funkce (proměnná je x, vše ostatní jsou konstanty) je tečna ke grafu f v bodě $(a, f(a))$. Dokažte, že platí $f(x) - T(x) = o(x-a),\ x \to a$.

Řešení spočívá v tom, že si tvrzení přepíšeme podle definice symbolu „$o(x-a),\ x \to a$“ a vzniklou limitu vypočítáme – měla by vyjít nula a tím budeme hotovi.

Interpretace: Jak máme tento výsledek chápat? Rozdíl $f(x) - T(x)$ je na okolí bodu a velmi malý, a to v přesně daném smyslu. Více světla však na tento fakt vrhne jednoduché pozorování, že T je jediná funkce s touto vlastností; žádná jiná lineární funkce tuto vlastnost nemá (o tom se můžete snadno přesvědčit vypočítáním příslušné limity pro $L(x) = ax + b$ místo T). Jinými slovy tedy vidíme, že tečna aproximuje chování funkce na okolí tečného bodu ze všech přímek (tedy polynomů stupně nejvýše 1) nejlépe. V následující sekci (o Taylorově polynomu) se budeme snažit najít nejlepší možnou aproximaci funkce pomocí polynomu daného stupně vyššího než 1. △

Poznámka (K Příkladu 17)**.** S tečnou ke grafu funkce souvisí také pojem *diferenciálu*:

$$T(x) = f'(a)(x-a) + f(a) = \underbrace{f'(a) \cdot x}_{\text{Tato část se nazývá } \textit{diferenciál } f \textit{ v bodě } a.} + f(a) - f'(a) \cdot a$$

Přesná definice diferenciálu pro nás začne být zajímavá teprve v souvislosti s funkcemi více proměnných; v naší situaci by nešlo o nic jiného, než jiné (ale ekvivalentní) pojetí pojmu vlastní derivace funkce v bodě. S tím souvisí následující lehké tvrzení:

Tvrzení 18. *Následující výroky jsou ekvivalentní:*

(i) Funkce f je v bodě a spojitá a existuje lineární funkce T (přímka) splňující

$$f(x) - T(x) = o(x-a),\ x \to a. \tag{1.10}$$

(ii) Existuje derivace $f'(a) \in \mathbb{R}$.

Pokud výroky platí, jest nutně $T(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$, tj. graf T je tečna ke grafu f (v bodě $(a, f(a))$). Speciálně je T jednoznačně určena.

Jinými slovy, dobře aproximující přímka (ve smyslu $o(x-a),\ x \to a$) existuje právě tehdy, existuje-li v onom bodě vlastní derivace f. Implikace (i)⇒(ii) (resp. její obměna) tedy říká, že neexistuje-li vlastní derivace $f'(a)$, nedá se rozumně definovat tečna (kde rozumnou definicí myslíme, že „lokálně tečna dobře napodobuje chování funkce f“, tj. v podstatě máme na mysli, že platí (i)).

Důkaz. Nejprve dokážeme (i)⇒(ii); mějme tedy takovou lineární funkci T, že platí (1.10). Všimněme si, že (1.10) implikuje $f(a) = T(a)$: skutečně, jest

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a}(f(x) - T(a)) &= \lim_{x\to a} \frac{f(x) - T(x) + T(x) - T(a)}{x-a}(x-a) \\
&= \Big(\lim_{x\to a} \frac{f(x)-T(x)}{x-a} + \lim_{x\to a} \frac{T(x)-T(a)}{x-a}\Big) \cdot \lim_{x\to a}(x-a) \\
&= \big(0 + T'(a)\big) \cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

podle Věty o aritmetice limit a předpokladu (i) (ten použijeme na první limitu na prostředním řádku výpočtu výše). To ale znamená, že $T(a) = \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, kde druhá rovnost platí díky předpokladu spojitosti. Nyní dostáváme

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\Big(\frac{f(x)-T(x)}{x-a} + \frac{T(x)-f(a)}{x-a}\Big) = 0 + \lim_{x\to a} \frac{T(x)-T(a)}{x-a} = T'(a),$$

takže $f'(a)$ skutečně existuje a je rovna derivaci lineární funkce T (ta existuje každopádně).

Nechť nyní platí (ii), dokážeme (i). Definujme lineární funkci $T(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$. Pak

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} \frac{f(x)-T(x)}{x-a} &= \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a}\Big(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)\Big) = f'(a) - f'(a) = 0,
\end{aligned}$$

tj. skutečně platí $f(x) - T(x) = o(x-a),\ x \to a$. Spojitost f v bodě a (kterou též musíme dokázat, neboť je součástí výroku (i)) je důsledkem existence vlastní derivace $f'(a)$. □

1.4 Taylorův polynom

Náš základní cíl v této sekci bude následující: Budiž dána funkce f, která má na okolí nějakého bodu $a \in \mathbb{R}$ vlastní derivace až do řádu n. Chceme najít polynom P stupně nejvýše n takový, že

$$f(x) - P(x) = o\big((x-a)^n\big),\ x \to a.$$

1.4.1 Základní nástroj: l'Hospitalovo pravidlo

Věta (L'Hospitalovo pravidlo)**.** *Nechť f, g jsou funkce, $a \in \mathbb{R}^*$. Nechť je splněna jedna z následujících podmínek.*

(i) $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$*;*

(ii) $\lim_{x\to a} |g(x)| = \infty$.

Potom následující rovnost platí, má-li její pravá strana smysl:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Příklad. Následující limita je „typu $\frac{0}{0}$“, můžeme tedy zkusit aplikovat l'Hospitalovo pravidlo (a skutečně dojdeme k výsledku):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = -\frac{1}{3} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{-1}{6};$$

pravá strana má smysl, takže použití l'Hospitalova pravidla bylo oprávněné, a výpočet je korektní. △

Příklad. Další příklad je snadné spočítat elementární metodou vytknutí převládajícího členu (x) a aplikací faktu „nulová · omezená = nulová“; výsledek je 1. Limita je navíc „typu $\frac{\cdot}{\infty}$“, takže můžeme také zkusit aplikovat l'Hospitalovo pravidlo; limita na pravé straně však neexistuje, jak je snadno vidět:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x + \sin x}{x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1+\cos x}{1}.$$

Limita nalevo tedy existuje (je rovna jedné) a limita napravo neexistuje. Rovnost označená „L'H“ tak přece jen neplatí; vysvětlením je, že její pravá strana nemá smysl, což je situace, o níž nám l'Hospitalovo pravidlo neříká nic (zejména netvrdí, že by platila ona rovnost označená „L'H“). △

V minulém semestru už jsme používali také druhou derivaci, tedy derivaci derivace, a používali značení

$$f''(a) := (f')'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x-a}.$$

Nyní zavedeme praktické značení i pro všechny ostatní derivace (třetí, čtvrtou atd.), a to pomocí rekurzivní definice.

Definice 19. Definujeme nejprve

$$f^{(0)} := f,$$

tedy „nultou derivací“ funkce f budeme rozumět funkci f samotnou. Nyní předpokládejme, že už je definována n-tá derivace $f^{(n)}$ pro nějaké celé číslo $n \geqslant 0$. Pak definujeme

$$f^{(n+1)} := \big(f^{(n)}\big)',$$

tedy $(n+1)$-ní derivace je definována jako derivace n-té derivace. Značíme tedy například $f^{(2)}(a)$ druhou derivaci funkce f v bodě a a podobně. Poznamenejme, že nemůžeme vynechat závorku (a psát tak pouze

$f^2(a)$), protože takto (bez závorek) značíme druhou mocninu funkce f. Je snad jasné, že podle tohoto nového značení je $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$ atd.

Pokud existuje $f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$, říkáme, že, funkce f *má n-tou derivaci v bodě a*, nebo že f *je v bodě a n-krát diferencovatelná.*

Dále definujeme pomocný pojem: řekneme, že funkce f je v bodě $a \in \mathbb{R}$ *nekonečně malá n-tého řádu*, jestliže

$$f(x) = o\big((x-a)^n\big), \; x \to a.$$

1.4.2 Peanův tvar zbytku

Začneme lemmatem, které nám dá velmi podstatnou nápovědu, jak dosáhnout cíle vytyčeného v úvodu tohoto oddílu, tj. k dané funkci f najít polynom P takový, že rozdíl $f - P$ je v daném bodě a nekonečně malý n-tého řádu. V následujícím bude vždy $n \in \mathbb{N}$, f funkce, $a \in \mathbb{R}$.

Lemma 20. *Jestliže $f(a) = f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(n)}(a) = 0$, pak $f(x) = o\big((x-a)^n\big), \; x \to a$.*

Důkaz. Budeme opakovaně používat l'Hospitalovo pravidlo a až v posledním kroku důkazu použijeme definici derivace. Nechť tedy funkce f splňuje předpoklad lemmatu; máme dokázat, že $f(x) = o\big((x - a)^n\big), \; x \to a$, neboli nulovost limity, jíž začíná následující výpočet. Nyní tedy spočteme, že to je pravda (zdůvodnění jednotlivých kroků výpočtu je pod ním):

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} \overset{(1)}{=} \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{n(x-a)^{n-1}} \overset{(2)}{=} \lim_{x\to a} \frac{f''(x)}{n(n-1)(x-a)^{n-2}} \overset{(3)}{=} \ldots \overset{(n-1)}{=} \lim_{x\to a} \frac{f^{(n-1)}(x)}{n! \cdot (x-a)}$$
$$\overset{(*)}{=} \frac{1}{n!} \lim_{x\to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x-a} \overset{\text{def.}}{=} f^{(n)}(a) = 0.$$

Výpočet dává ten výsledek, který jsme chtěli, tedy 0; zbývá dokázat jednotlivé rovnosti v něm:

Rovnost (1)*:* Abychom mohli aplikovat l'Hospitalovo pravidlo, potřebujeme dokázat, že jde o limitu typu „$\frac{0}{0}$“, neboli že čitatel i jmenovatel mají v bodě a *limitu* (nikoliv hodnotu!) 0. Pro jmenovatel to platí triviálně, podívejme se tedy na čitatel, tj. $f(x)$: Stačí si uvědomit, že $f'(a) = 0 \in \mathbb{R}$, tj. derivace f v bodě a je vlastní, a f je tedy v tom bodě spojitá (takže „limita je hodnota“). Platí tedy $\lim_{x\to a} f(x) = f(a) = 0$, a použití l'Hospitalova pravidla tedy dává smysl (a bude plně zdůvodněné, až zpětně ukážeme, že pravá strana má smysl).

Rovnost (2) *a dál:* Použijeme analogický argument jako v předchozím odstavci, pouze o *derivaci dál*, tj. místo f máme f' a ta má v bodě a vlastní derivaci $f''(a) = 0$. Je tedy spojitá, a platí $\lim_{x\to a} f'(x) = f'(a) = 0$; limita je tedy opět typu $\frac{0}{0}$, a my na ni aplikujeme l'Hospitalovo pravidlo. Takto pokračujeme až po rovnost $(n-1)$, argument je pokaždé analogický.

Rovnost $(*)$ *a závěr výpočtu:* V čitateli jsme pouze odečetli $f^{(n-1)}(a)$, tj. nulu. Máme tedy přesně limitu definující derivaci funkce $f^{(n-1)}$ v bodě a, která je nulová podle předpokladu lemmatu. Konec celého výpočtu je tedy 0, takže můžeme zpětně potvrdit, že pravá strana každé aplikace l'Hospitalova pravidla má smysl, a všechny jsou tedy oprávněné. Tím je důkaz dokončen. □

Lemma 21. *Nechť P je polynom stupně nejvýše $n \in \mathbb{N}$. Jestliže pro nějaký bod $a \in \mathbb{R}$ je*

$$\lim_{x\to a} \frac{P(x)}{(x-a)^n} = 0, \tag{1.11}$$

pak P je nulový polynom (tj. nulová konstantní funkce).

Důkaz. Nechť jsou splněny předpoklady lemmatu a předpokládejme pro spor, že P je nenulový polynom. Pak ze spojitosti polynomu a (1.11) plyne, že $P(a) = \lim_{x\to a} P(x) = 0$, tj. a je kořen P. Z algebry víme, že pak existuje $k \in \{1, \dots, n\}$ a polynom R tak, že $P(x) = (x-a)^k R(x)$ a $R(a) \neq 0$ (tj. k je násobnost kořene a polynomu P).[11] Pak platí

$$0 = \lim_{x\to a} \frac{P(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{R(x)}{(x-a)^{n-k}}.$$

Limita vpravo však buďto neexistuje (je-li $k < n$ a $n-k$ je liché), nebo je nevlastní (je-li $k < n$ a $n-k$ je sudé), nebo je vlastní a nenulová (pokud $n = k$, je tato limita rovna $R(a)$). Ve všech případech dostáváme spor, a důkaz je tedy hotov: P nemohl být nenulový polynom (tj. musí být nulový). □

Nyní jsme konečně připraveni vyslovit a dokázat jednu z klíčových vět tohoto semestru.

Věta 22 (Taylorova věta s Peanovým tvarem zbytku)**.** *Nechť existuje $f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$ (tedy n-tá derivace je vlastní). Pak existuje právě jeden polynom T_n stupně nejvýše n takový, že*

$$f(x) - T_n(x) = o\big((x-a)^n\big),\ x \to a. \tag{1.12}$$

Konkrétně jde o polynom

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \tag{1.13}$$

Důkaz. Důkaz rozdělíme na dvě části: nejprve dokážeme, že ve znění věty uvedený polynom T_n splňuje (1.12); v druhé části dokážeme jednoznačnost, tj. že žádný jiný polynom stupně nejvýše n tuto vlastnost nemá.

Mějme funkci f splňující předpoklad věty a polynom T_n buď dán rovnicí (1.13). Použijeme Lemma 20 na funkci $f - T_n$ (tj. tento rozdíl bude hrát roli funkce f z lemmatu); k tomu je potřeba dokázat, že $f - T_n$ splňuje předpoklad lemmatu. Chceme tedy dokázat

$$(f - T_n)(a) = (f - T_n)'(a) = \ldots = (f - T_n)^{(n)}(a) = 0.$$

Je lehké si rozmyslet, že $(f - T_n)^{(i)}(a) = f^{(i)}(a) - T_n^{(i)}(a)$ pro všechna $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, takže vlastně chceme dokázat rovnosti

$$f(a) = T_n(a), \quad f'(a) = T_n'(a), \quad \ldots \quad f^{(n)}(a) = T_n^{(n)}(a). \tag{1.14}$$

Pro důkaz první rovnosti stačí dosadit a do polynomu T_n:

$$\begin{aligned} T_n(a) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(a-a) + \frac{f''(a)}{2!}(a-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(a-a)^n, \quad \text{tj.} \\ T_n(a) &= f(a). \end{aligned}$$

Druhá rovnost z (1.14) se týká derivací funkcí f a T_n, nejprve tedy T_n zderivujeme (pozor, proměnná je x, faktory tvaru $\frac{f^{(i)}(a)}{i!}$ jsou konstanty!):

$$T_n'(x) = 0 + f'(a) + \frac{f''(a)}{2!} \cdot 2(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot n(x-a)^{n-1}. \tag{1.15}$$

[11] Stačí polynom P opakovaně dělit kořenovým činitelem $(x-a)$, „dokud to lze“.

Všimněte si, že ve všech nekonstantních členech lze zkrátit koeficient před závorkou s nejvyšším činitelem faktoriálu ve jmenovateli: obecný člen je

$$\frac{f^{(i)}(a)}{i!} \cdot i(x-a)^{i-1} = \frac{f^{(i)}(a)}{(i-1)!} \cdot (x-a)^{i-1}, \quad \text{pro } i = 2, 3, \dots, n.$$

Nyní do (1.15) dosadíme bod a za x:

$$T_n'(a) = f'(a) + \frac{f''(a)}{2!} \cdot 2(a-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot n(a-a)^{n-1}, \quad \text{tj.}$$
$$T_n'(a) = f'(a).$$

Pro názornost uvedeme ještě důkaz třetí rovnosti z (1.14); ta obsahuje druhou derivaci T_n, budeme tedy derivovat jeho první derivaci, která je uvedena v (1.15). Napišme si nyní ještě člen s koeficientem $\frac{f^{(3)}(a)}{3!}$, který byl původně zahrnut v „. . .“:

$$T_n''(x) = 0 + 0 + f''(a) + \frac{f^{(3)}(a)}{3!} \cdot 3 \cdot 2(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot n \cdot (n-1) \cdot (x-a)^{n-2}.$$

Dosazením a za x dostáváme 3. rovnost z (1.14).

$$T_n''(a) = f''(a).$$

Je zřejmé, že tímto způsobem můžeme pokračovat a postupně dokázat všechny požadované rovnosti.

Nyní, když máme dokázány všechny rovnosti v (1.14), můžeme aplikovat Lemma 20 a učinit závěr, že funkce $f - T_n$ splňuje (1.12). Zbývá dokázat, že žádný jiný polynom stupně nejvýše n s touto vlastností neexistuje. K tomu využijeme Lemmatu 21:

Předpokládejme tedy, že P je nějaký polynom splňující $\mathrm{st}(P) \leqslant n$ a

$$f(x) - P(x) = o\big((x-a)^n\big), \ x \to a. \tag{1.16}$$

Protože zároveň víme, že tutéž vlastnost má T_n (v první části důkazu jsme ověřili (1.12)), dostaneme použitím Tvrzení 10 (i) a (v), že

$$f(x) - P(x) + (-1) \cdot (f(x) - T_n(x)) = o\big((x-a)^n\big), \ x \to a, \quad \text{tj.}$$
$$T_n(x) - P(x) = o\big((x-a)^n\big), \ x \to a,$$

ovšem $T_n - P$ je rozdíl dvou polynomů stupně nejvýše n, tedy také polynom stupně nejvýše n. Tím pádem z Lemmatu 21 dostáváme, že $T_n - P = 0$, neboli $T_n = P$. To znamená, že každý polynom P, který je stupně nejvýše n a (v onom přesně daném smyslu) dobře aproximuje f, je roven T_n; jinými slovy, T_n je jediný takový polynom. □

Definice 23. Polynom T_n z Věty 22 nazýváme *Taylorův polynom n-tého řádu funkce f v bodě a*. Dále definujeme *zbytek n-tého řádu funkce f v bodě a* jako

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x), \quad x \in \mathbb{D}_f.$$

Chceme-li značením zdůraznit, že jde o Taylorův polynom, resp. zbytek, *funkce f v bodě a*, můžeme použít značení

$$T_n^{f,a}(x) = T_n(x), \quad \text{resp.} \quad R_n^{f,a}(x) = R_n(x).$$

(Zapsáno stručněji, bez proměnné: $R_n = R_n^{f,a} = f - T_n^{f,a} = f - T_n$.)

Poznámka 24.

(a) Podobně jako u symboliky „malého o“ i zde je potřeba brát v úvahu, v jakém bodě $a \in \mathbb{R}$ Taylorův polynom máme. V tomto případě je to asi snáze pochopitelné: Tak jako tečnu ke grafu funkce máme vždy v nějakém pevném (tečném) bodě, tak i Taylorův polynom bude nejlépe aproximovat naši funkci právě na okolí jistého pevného bodu. Například pro $n = 2$ (tedy máme-li Taylorův polynom druhého řádu), lze $T_n^{f,a}$ interpretovat jako „tečnou parabolu“ k funkci f v bodě a (pokud $f''(a) = 0$, jde ovšem o přímku), která má v daném bodě nejen „stejný směr“ (první derivace), ale i stejnou „míru konvexnosti/konkávnosti“ (resp. křivosti).

(b) Věta 22 se dá reformulovat způsobem, který využívá výše zavedeného značení zbytku; věta pak přímo říká, že zbytek je v nějakém velmi silném smyslu malý (existenční kvantifikátor opatřený vykřičníkem $\exists!$ čteme jako „existuje právě jeden“):

Nechť $f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$. *Pak* $\exists!$ *polynom* $T_n^{f,a}$ *stupně* $\leqslant n$, *že* $R_n^{f,a}(x) = o\big((x-a)^n\big),\ x \to a$.[12]

(c) Konečně také poznamenejme, že ve Větě 22 nelze tvrdit, že Taylorův polynom n-tého řádu je stupně n; skutečně, rovnice (1.13) definuje polynom stupně nižšího než n v případě, že $f^{(n)}(a) = 0$ (a tedy člen s nejvyšší mocninou x je nulový). I v takovém případě však stále platí, že $T_n^{f,a}$ poskytuje aproximaci n-tého řádu ve smyslu rovnice (1.12). Proto je potřeba rozlišovat mezi *stupněm* a *řádem*: Platí, že řád polynomu $T_n^{f,a}$ je z definice právě n, zatímco stupeň tohoto polynomu je *nejvýše* n.[13]

(d) Nejčastěji budeme Taylorův polynom odvozovat a používat v nule, tj. pro $a = 0$. V tom případě vypadá vzorec o něco jednodušeji, přičemž je dobré se opravdu zaměřit na to, kde jedině se vyskytuje proměnná x funkce T_n, vše ostatní jsou konstanty (koeficienty polynomu):

$$T_n(x) = \underbrace{f(0)}_{\text{konst.}} + \underbrace{f'(0)}_{\text{konst.}} \cdot x + \underbrace{\frac{f''(0)}{2!}}_{\text{konst.}} \cdot x^2 + \underbrace{\frac{f^{(3)}(0)}{3!}}_{\text{konst.}} \cdot x^3 + \ldots + \underbrace{\frac{f^{(n)}(0)}{n!}}_{\text{konst.}} \cdot x^n.$$

1.4.3 Několik postřehů a příkladů o polynomech obecně

Striktně vzato bychom měli rozlišovat mezi *polynomem*, tedy formálním algebraickým výrazem (který má smysl nad různými algebraickými tělesy), a *polynomiální funkcí*, tedy funkcí $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ (případně $\mathbb{C}$ do $\mathbb{C}$), která je tím algebraickým výrazem definována. O polynomech se dá dokázat řada algebraických tvrzení i bez toho, abychom je chápali jako funkce. My se však na polynomy díváme z pohledu analýzy rovnou jako na polynomiální funkce a využíváme všechno možné, tedy například i strukturu reálných čísel.

V následujícím odstavci (A) budeme přísně rozlišovat mezi polynomem, tj. formálním výrazem tvaru $c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0$ a polynomiální funkcí $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která je tímto polynomem definována, tj. je na $\mathbb{R}$ definována vzorcem $P(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0$. Úvahou obsaženou v odstavci (A) si uvědomíme něco, co jsme dosud mlčky předpokládali: totiž že toto rozlišení v analýze nemá praktický význam.

(A) Promyslíme význam níže zúčastněných pojmů:

(1) Jsou-li f, g dvě funkce, pak rovnost $f = g$ znamená, že $\mathbb{D}_f = \mathbb{D}_g$ a $f(x) = g(x)$ pro všechna x z jejich společného definičního oboru.

[12] Polynom $T_n^{f,a}$ a jemu příslušný zbytek $R_n^{f,a}$ jsou spolu neoddělitelně propojeny skrze Definici 23. Takto formulovaná věta tedy neříká nic jiného, než že $f(x) - T_n^{f,a}(x) = o\big((x-a)^n\big),\ x \to a$, což je přesně tvrzení Věty 22.

[13] Což je jasné, protože všechny závorky tvaru $(x-a)^k$, které se v jeho definici (1.13) vyskytují, můžeme roznásobit a uvědomit si, že jsme nikde nemohli dostat vyšší než n-tou mocninu x.

(2) Dva polynomy (stupně nejvýše n)

$$c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0 \quad \text{a}$$
$$d_n x^n + d_{n-1}x^{n-1} + \ldots + d_1 x + d_0$$

jsou si rovny, pokud $c_i = d_i$ pro všechna $i \in \{0, \ldots n\}$, tj. pokud mají stejné všechny koeficienty.

Rovnost dvou funkcí tedy znamená rovnost hodnot ve všech (obvykle nekonečně mnoha) bodech definičního oboru (v případě polynomiálních funkcí $\mathbb{R}$ nebo dokonce $\mathbb{C}$). Naproti tomu rovnost dvou polynomů je definována rovností konečného počtu koeficientů.

Tvrzení 25. *Mějme dvě (polynomiální) funkce definované polynomy stupně nejvýše n:*

$$P(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0,$$
$$Q(x) = d_n x^n + d_{n-1}x^{n-1} + \ldots + d_1 x + d_0.$$

Potom

$$P = Q \iff c_k = d_k,\ k = 0, \ldots, n.$$

Jinými slovy, polynomiální funkce jsou shodné (ve smyslu bodu (1) o odstavec výš), právě když jsou definovány stejnými polynomy (tj. příslušné polynomy mají stejné koeficienty u všech mocnin x, jde tedy vlastně o jeden polynom).

Důkaz. Implikace ($\Leftarrow$) je triviální: dvě funkce zadané stejným předpisem musí mít stejné hodnoty. Opačnou implikaci ($\Rightarrow$) můžeme dokázat třeba nepřímo (tj. místo implikace $A \Rightarrow B$ dokážeme ekvivalentní výrok $\neg B \Rightarrow \neg A$): Nechť $c_k \neq d_k$ pro nějaké $k \geqslant 0$; vezměme si největší takové k. Potom

$$P(x) - Q(x) = (c_k - d_k)x^k + (c_{k-1} - d_{k-1})x^{k-1} + \ldots + (c_1 - d_1)x + c_0 - d_0$$

je funkce definovaná polynomem stupně k, protože $c_k - d_k \neq 0$. (Všechny členy řádu vyššího než k se totiž přesně odečtou podle předpokladu o k.) Stačí nám tedy dokázat, že tento (dokonce libovolný) polynom stupně k je definuje nenulovou funkci[14].

V případě, že $k = 0$, je $P(x) - Q(x) = c_0 - d_0$, tj. jde o nenulovou konstatntní funkci, a jsme hotovi. Předpokládejme nyní, že $k > 0$ a uvažujme limitu

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}(P(x) - Q(x)) &= \lim_{x\to\infty}(c_k - d_k)x^k + (c_{k-1} - d_{k-1})x^{k-1} + \ldots + (c_1 - d_1)x + c_0 - d_0 \\
&= \lim_{x\to\infty} x^k\Big((c_k - d_k) + (c_{k-1} - d_{k-1})\frac{1}{x} + \ldots + (c_1 - d_1)\frac{1}{x^{k-1}} + (c_0 - d_0)\frac{1}{x^k}\Big) \\
&= \infty \cdot \big((c_k - d_k) + 0 + \ldots + 0 + 0\big) = \pm\infty.
\end{aligned}$$

Člen $(c_k - d_k)x^k$ je převládající a standardním postupem (vytknutím tohoto členu) jsme došli k tomu, že limita je rovna ∞, je-li $c_k - d_k > 0$, a je rovna $-\infty$, pokud $c_k - d_k < 0$. Odtud plyne, že $P - Q$ není nulová funkce (má totiž v nekonečnu limitu buďto ∞ nebo $-\infty$), a jsme tedy hotovi. □

Poznámka. • Zrekapitulujme poslední důkaz: Nejsou-li polynomiální funkce P a Q definovány stejným polynomem (tj. stejným vzorečkem, tj. se stejnými koeficienty u všech mocnin x), pak si vezmeme největší mocninu x, u které se koeficienty liší. Ta bude pro rozdíl $P - Q$ v ∞ „převládající“, a tedy ihned dojdeme k tomu, že $P - Q$ má v nekonečnu nenulovou limitu (nekonečnou pro $k > 0$), a tedy to není nulová funkce.

[14] Stupeň nulového polynomu (nebo-li konstantní nulové funkce) definujeme z technických důvodů jako (-1); polynomy stupně nula odpovídají nenulovým konstantním funkcím. Proto není žádný rozpor v tvrzení, že libovolný polynom stupně $\geqslant 0$ je nenulový.

- K důkazu (A) je v každém případě potřeba nějaký nástroj matematické analýzy využívající struktury reálných čísel (limita, derivace...), protože pro jiná algebraická tělesa (tedy jiná než $\mathbb{R}$) tento fakt *může* selhat. Například nad tělesem $\mathbb{Z}_2$ (množina $\{0, 1\}$ s operacemi sčítání a násobení (mod 2) – tj. prostě $1 + 1 = 0$) definují polynomy

$$P(x) = 0 \quad \text{a} \quad Q(x) = x^2 - x = x(x-1) \tag{1.17}$$

tu samou polynomiální funkci $\mathbb{Z}_2$ do $\mathbb{R}$ (a sice nulovou; pro P je to jasné, pro Q je to vidět z toho, že oba prvky $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ jsou kořeny toho polynomu), ale jsou to přitom různé polynomy (protože mají jiné koeficienty).

Závěrem tohoto odstavce můžeme konstatovat, že z pohledu studia funkcí reálné proměnné je rozdíl mezi polynomiální funkcí a polynomem pouze formální, neboť je-li dána polynomiální funkce, jsou koeficienty příslušného polynomu (tj. vzorce, který funkci definuje) jednoznačně určené. Tyto dva pojmy tedy odteď můžeme opět ztotožňovat, měli bychom však při tom mít na paměti, že tato vzájemná jednoznačnost mezi polynomy a pol. funkcemi platí nad $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$); nad jinými tělesy platit nemusí, jak dokládají příklady polynomů P, Q nad tělesem $\mathbb{Z}_2$, (1.17).

Úmluva 26. V následujícím textu budeme slovem *polynom* rozumět podle potřeby také polynomiální funkci na $\mathbb{R}$ (nebude-li explicitně řečeno jinak).

(B) Uvažujme například polynom $P(x) = 13x^3 + 11x^2 + 7x + 5$. Postupné derivování nám dá:

$$\begin{aligned} P(x) &= 13x^3 + 11x^2 + 7x + 5 & P(0) &= 5; \\ P'(x) &= 13 \cdot 3x^2 + 11 \cdot 2x + 7 \cdot 1 & P'(0) &= 7 \cdot 1!; \\ P''(x) &= 13 \cdot 3 \cdot 2x + 11 \cdot 2 \cdot 1 & P''(0) &= 11 \cdot 2!; \\ P'''(x) &= 13 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 & P'''(0) &= 13 \cdot 3!. \end{aligned}$$

Tedy derivujeme-li polynom tolikrát, kolik je jeho stupeň a dosadíme-li vždy nulu, dostaneme čísla, která mají úzký vztah ke koeficientům v původním polynomu: Označíme-li koeficienty v polynomu P postupně c_0, c_1, c_2 a c_3 (tedy $P(x) = c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0 = 13x^3 + 11x^2 + 7x + 5$), pak nám vlastně vyšlo:

$$P(0) = c_0, \quad P'(0) = c_1, \quad P''(0) = c_2 \cdot 2!, \quad P'''(0) = c_3 \cdot 3!,$$

odkud ihned vypočítáme hodnoty koeficientů našeho polynomu:

$$c_0 = P(0), \quad c_1 = P'(0), \quad c_2 = \frac{P''(0)}{2!}, \quad c_3 = \frac{P'''(0)}{3!}.$$

Porovnejte tento výsledek s koeficienty Taylorova polynomu v jeho definici (1.13).

(C) Jev, který jsme zpozorovali v předchozím bodě, samozřejmě není žádná náhoda: stejný postup funguje pro libovolný polynom, což je obsahem následujícího tvrzení.

Nechť $P(x) = c_nx^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1x + c_0$ je polynom ($c_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \ldots, n$). Potom

$$c_0 = P(0), \quad c_1 = \frac{P'(0)}{1!}, \quad c_2 = \frac{P''(0)}{2!}, \quad \ldots \quad c_n = \frac{P^{(n)}(0)}{n!}.$$

Jinak řečeno, P se dá psát ve tvaru

$$P(x) = P(0) + \frac{P'(0)}{1!}x + \frac{P''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{P^{(n)}(0)}{n!}x^n. \tag{1.18}$$

(D) Buď P nějaká funkce (která má vlastní derivace až do řádu n v bodě 0). Podle Definice 23 je Taylorův polynom n-tého řádu funkce P v bodě 0 definován předpisem

$$T_n^{P,0}(x) = P(0) + \frac{P'(0)}{1!}x + \frac{P''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{P^{(n)}(0)}{n!}x^n. \tag{1.19}$$

Předpokládejme nyní, že P je polynom (polynomiální funkce) stupně nejvýše n. Pak podle tvrzení předchozího bodu platí rovnost (1.18); v kombinaci s rovností (1.19) (která má stejnou pravou stranu) dostaneme rovnost levých stran těchto dvou rovnic, tedy následující tvrzení:

Tvrzení P. Nechť P je polynom stupně nejvýše n. Pak $P = T_n^{P,0}$.

To nám říká toto: Nechť P je polynom stupně nejvýše n. Pak P je funkce (viz Úmluvu 26), a má tedy smysl hovořit o jejím Taylorově polynomu nějakého řádu, například zrovna n-tého. Tvrzení nám říká, že polynom P stupně nejvýše n je roven svému Taylorovu polynomu řádu n (a samozřejmě i libovolného vyššího řádu).

Máme-li tedy například polynom P stupně 100, pak je $T_5^{P,0}$ (tedy Taylorův polynom funkce P pátého řádu v bodě 0) jistá aproximace P na okolí 0, která nám ve většině případů poskytne slušnou představu o chování P na okolí nuly. Nicméně $T_{100}^{P,0}$ (tedy Taylorův polynom řádu 100) je aproximace dokonalá, a to v tom smyslu, že nastává rovnost $P = T_{100}^{P,0}$ na celém $\mathbb{R}$.

Odtud je vidět, že abychom mohli zrekonstruovat polynomiální funkci na celém $\mathbb{R}$, stačí nám jen znát všechny její derivace v jednom jediném bodě 0.

(E) *Buď P polynom stupně n, $b \in \mathbb{R}$. Pak $Q(x) := P(x-b)$ ($x \in \mathbb{R}$) je též polynom stupně n.* Jinými slovy posunutí polynomiální funkce doleva nebo doprava je opět polynomiální funkce, a to definovaná polynomem stejného stupně (pokud $b \neq 0$, pak ovšem polynomem jiným).

Tento fakt lze nahlédnout celkem snadno: Je-li funkce P zadána pro $x \in \mathbb{R}$ předpisem $P(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0$ (kde $c_n \neq 0$, protože jde o polynom stupně přesně n), potom

$$Q(x) = c_n(x-b)^n + c_{n-1}(x-b)^{n-1} + \ldots + c_1(x-b) + c_0,$$

odkud jednoduchým roznásobením (pomocí binomické věty) všech závorek tvaru $(x-b)^k$ a přeskupením členů dostaneme vyjádření $Q(x) = d_n x^n + d_{n-1}x^{n-1} + \ldots + d_1 x + d_0$, kde $d_0, d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{R}$ jsou nějaké (možná jiné) koeficienty; je navíc jasné, že $d_n = c_n \neq 0$, a tedy stupeň tohoto polynomu je také n.

Příklad: $P(x) = x^2-1$, $Q(x) = P(x-5)$; pak $Q(x) = (x-5)^2-1 = x^2-10x+25-1 = x^2-10x+24$. Posunutím polynomiální funkce P o 5 doprava tedy dostaneme opět polynomiální funkci Q, která odpovídá jinému polynomu, a to $x^2-10x+24$ (stupeň 2 zůstal zachován, změnily se ale některé koeficienty).

(F) Obecně platí, že polynom $P(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0$ se dá pro libovolné $a \in \mathbb{R}$ vyjádřit ve tvaru

$$P(x) = d_n(x-a)^n + d_{n-1}(x-a)^{n-1} + \ldots + d_1(x-a) + d_0.$$

Zde se nejedná o posunutí, jako tomu bylo v předchozím bodě, nýbrž o jiné (pokud $a \neq 0$) vyjádření téže funkce. Důkaz toho, že je to opravdu možné, je jednoduchý:

Definujme funkci $Q(x) := P(x+a)$. Podle předchozího bodu (kde za b dosadíme $-a$) víme, že Q je taky polynom, a to stejného stupně jako P:

$$Q(x) = P(x+a) \quad\Longrightarrow\quad Q(x) = d_n x^n + d_{n-1}x^{n-1} + \ldots + d_1 x + d_0.$$

Je ale jasné, že když $Q(x) = P(x+a)$, pak $P(x) = Q(x-a)$ ($x \in \mathbb{R}$), a tedy dostáváme kýžené vyjádření

$$P(x) = Q(x-a) \quad\Longrightarrow\quad P(x) = d_n(x-a)^n + d_{n-1}(x-a)^{n-1} + \ldots + d_1(x-a) + d_0.$$

Tento důkaz nám taky dává návod, jak ono vyjádření v praktické situaci čistě algebraicky vypočítat. V dalším uvidíme, že existuje i jiný způsob, který využívá metody matematické analýzy. (Viz též Příklad 28.)

(G) (Tento odstavec úzce souvisí s odstavcem (C), pouze nyní „se posuneme z 0 do bodu a“.) Buď P polynom stupně n, $a \in \mathbb{R}$ a mějme vyjádření polynomu P jako v předchozím odstavci, tedy

$$P(x) = d_n(x-a)^n + d_{n-1}(x-a)^{n-1} + \ldots + d_1(x-a) + d_0.$$

Postupným derivováním tohoto vyjádření dostaneme (všimněte si, že nyní musíme za x dosadit místo nuly vždy číslo a, čímž se vynulují všechny členy až na konstantní):

$$\begin{aligned}
P(a) &= d_0 & d_0 &= P(a),\\
P'(a) &= d_1 \cdot 1! & d_1 &= P'(a),\\
P''(a) &= d_2 \cdot 2! & d_2 &= \frac{P''(a)}{2!},\\
&\vdots & &\vdots\\
P^{(n)}(a) &= d_n \cdot n! & d_n &= \frac{P^{(n)}(a)}{n!}.
\end{aligned}$$

(H) Stejně jako v odstavci (D) pro $a = 0$ nyní dostáváme již pro libovolné $a \in \mathbb{R}$ tvrzení analogické Tvrzení P:

Tvrzení 27. *Nechť P je polynom stupně nejvýše n, $a \in \mathbb{R}$. Pak $P = T_n^{P,a}$.*

Tedy ve skutečnosti bod 0 nehraje nijak výjimečnou roli a polynom se dá zrekonstruovat ze znalosti všech jeho derivací v libovolném bodě $a \in \mathbb{R}$.

Příklad 28. Chceme polynom $P(x) = x^3+x^2+x+1$ vyjádřit ve tvaru $P(x) = d_3(x-2)^3+d_2(x-2)^2+d_1(x-2)+d_0$ (že to je možné, víme; náš cíl je najít hodnoty koeficientů d_0, d_1, d_2, d_3. Podle Tvrzení 27 stačí najít Taylorův polynom třetího řádu funkce P (polynomu stupně 3) v bodě 2, takže musíme vypočítat derivace až do řádu 3:

$$\begin{aligned}
P(2) &= 8+4+2+1 = 15 & d_0 &= P(2) = 15,\\
P'(2) &= 12+4+1 = 17 & d_1 &= P'(2) = 17,\\
P''(2) &= 12+2 = 14 & d_2 &= \frac{P''(2)}{2!} = 7,\\
P'''(2) &= 6 & d_3 &= \frac{P'''(2)}{3!} = 1.
\end{aligned}$$

Dostáváme tedy, že

$$x^3+x^2+x+1 = T_3^{P,2}(x) = (x-2)^3 + 7(x-2)^2 + 17(x-2) + 15. \qquad \triangle$$

Poznámka 29 (Odvození Binomické věty z Taylorova polynomu)**.** Binomická věta je následující vzorec, kde $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$ libovolná čísla:

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k. \tag{1.20}$$

Pokud $a = 0$ nebo $b = 0$, je vzorec triviální; předpokládejme tedy, že obě čísla jsou různá od nuly. Vytknutím a^n z obou stran rovnice vyjde

$$a^n \cdot \left(1+\frac{b}{a}\right)^n = a^n \cdot \left(1 + \binom{n}{1}\left(\frac{b}{a}\right) + \binom{n}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}\left(\frac{b}{a}\right)^{n-1} + \left(\frac{b}{a}\right)^n\right)$$

a označíme-li $x = b/a$, dostaneme

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + x^n. \tag{1.21}$$

Protože z posledního vzorce lze stejně jednoduše odvodit binomickou větu ve tvaru rovnice (1.20) (vynásobením obou stran rovnice číslem a^n), můžeme říci, že oba vzorce jsou vzájemně *ekvivalentní*; tím máme na mysli přesně to, že jeden jde snadno odvodit z druhého. (Vzhledem k předpokladu $a \neq 0$ jsme navíc toto odvození provedli ekvivalentními úpravami.)

Nyní jednoduše dokážeme vzorec (1.21) (a tedy i binomickou větu (1.20)) pomocí znalosti Taylorova polynomu funkce $(1+x)^\alpha$ (viz Poznámku 32 a vzorec (1.25)) a výše uvedených pozorování o polynomech.

Označme $P(x) = (1+x)^n$; pak P je polynom stupně n. Podle Tvrzení 27 jest tedy

$$T_n^{P,0} = P.$$

Podle (1.25) (kde za α dosazujeme n; řád n uvažovaného Taylorova polynomu je tedy stejný jako exponent α) dostáváme

$$T_n^{P,0}(x) = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n}x^n.$$

Spojením posledních dvou rovností dostáváme (1.21) a tedy i (1.20).

Uvědomme si, že tento důkaz je typický příklad „použití kanónu na vrabce“: Používáme silné a hluboké teorie Taylorova polynomu na elementární binomickou větu, kterou lze dokázat mnohem jednoduššími způsoby. Tento důkaz tedy uvádím hlavně pro ilustraci – a taky snazší zapamatování obou vzorců, tedy binomické věty samotné, i Taylorova polynomu mocninné funkce $(1+x)^\alpha$.

1.4.4 Lagrangeův tvar zbytku

Věta 30 (Taylorova věta s Lagrangeovým tvarem zbytku)**.** *Nechť $n \in \mathbb{N}$, $a, x \in \mathbb{R}$, $a \neq x$. Buďiž f funkce, jež má spojité derivace až do řádu $n+1$ na uzavřeném intervalu J s krajními body x, a. Pak existuje $\xi \in J \setminus \{a, x\}$ takové, že*

$$R_n^{f,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \tag{1.22}$$

kde (podle Definice 23) $R_n^{f,a} = f - T_n^{f,a}$. Podrobněji zapsáno, pro ξ platí:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}_{\textit{Lagrangeův tvar zbytku}}.$$

Poznámka 31.

- Všimněte si, že se Lagrangeův tvar zbytku $R_n^{f,a}(x)$ snadno pamatuje, protože vypadá téměř stejně, jako by vypadal následující člen Taylorova polynomu; jediný rozdíl je, že místo čísla a dosazujeme do $f^{(n+1)}$ číslo ξ.

- Číslo ξ většinou neznáme přesně, víme ale, že se nachází (ostře) mezi x, a. To nám často dává nástroj, s jehož pomocí dovedeme odhadnout velikost chyby, které se dopouštíme, když funkci nahradíme jejím Taylorovým polynomem.

- Pro $a = 0$ často hovoříme místo o Taylorově polynomu funkce f v bodě 0 prostě o *Maclaurinově polynomu* (už neupřesňujeme v jakém bodě; Maclaurinův polynom je vždy v 0).

Důkaz. Označme pro přehlednost $T := T_n^{f,a}$. V tomto důkazu je x konkrétní číslo, tedy konstanta, a roli proměnné bude hrát znak „t“. Protože $a \neq x$, je $a < x$, nebo $a > x$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že nastává první alternativa; důkaz v opačném případě analogický. Máme tedy $J = [a, x]$ a náš cíl je najít $\xi \in (a, x)$ splňující (1.22). Nechť $M \in \mathbb{R}$ je číslo vyhovující (lineární) rovnici

$$\underbrace{f(x)}_{\text{konst.}} - \underbrace{T(x)}_{\text{konst.}} = M \cdot \underbrace{(x-a)^{n+1}}_{\text{konst.}}.$$

Všimněte si, že všechna čísla (tj. a, x, n) a funkce (f, T) vystupující v uvedené rovnici jsou pevně zvolené. V tomto smyslu jsou tedy hodnoty naznačených členů pevně dané, tj. jsou to konstanty. Protože $x - a \neq 0$, je M rovnicí určeno.[15] Náš cíl je tedy dokázat, že pro nějaké $\xi \in (a, x)$ je

$$M = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Dále definujme pomocnou funkci φ vzorcem

$$\varphi(t) = f(t) - T(t) - M(t-a)^{n+1}.$$

Nyní, když máme šikovné značení, je na řadě první část vlastního důkazu: Ukážeme, že

$$\varphi(a) = 0, \qquad \varphi'(a) = 0, \qquad \varphi''(a) = 0, \quad \dots \qquad \varphi^{(n)}(a) = 0. \tag{1.23}$$

K tomu si připomeňme, že $T = T_n^{f,a}$ je Taylorův polynom[16] funkce f, pročež platí všechny rovnosti

$$f(a) = T(a), \qquad f'(a) = T'(a), \qquad f''(a) = T''(a), \quad \dots \qquad f^{(n)}(a) = T^{(n)}(a). \tag{1.24}$$

Tuto vlastnost Taylorova polynomu jsme si nedokazovali jako samostatné tvrzení, jde však o dílčí pozorování v důkazu Věty 22 a lze ho jednoduše odvodit přímo z definice $T_n^{f,a}$ (postupným derivováním).

První rovnost z (1.23) snadno nahlédneme jako důsledek první rovnosti v (1.24): Skutečně

$$\varphi(a) = f(a) - T(a) - M(a-a)^{n+1} = 0 - M \cdot 0 = 0.$$

K důkazu dalších rovností z (1.23) budeme derivovat φ. Naštěstí platí, že derivace součtu (resp. rozdílu) je součet (resp. rozdíl) derivací, takže postupně dostaneme

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= f'(t) - T'(t) - M(n+1) \cdot (t-a)^n, \\
\varphi''(t) &= f''(t) - T''(t) - M(n+1) \cdot n \cdot (t-a)^{n-1}, \\
&\vdots \\
\varphi^{(n)}(t) &= f^{(n)}(t) - T^{(n)}(t) - M(n+1) \cdot n \cdot \ldots \cdot 2 \cdot (t-a).
\end{aligned}$$

Když do těchto rovností dosadíme a za t, dostaneme ihned (použitím příslušných rovností z (1.24)) všechny zbývající rovnosti z (1.23). Tím je hotova první část.

V druhé části důkazu budeme opakovaně používat Rolleovu větu na φ, φ', φ'', atd. až po $\varphi^{(n)}$ (tj. $n+1$ aplikací Rolleovy věty), čímž postupně dostaneme čísla $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+1}$, a zpozorujeme, že ξ_{n+1} poslouží jako hledané číslo ξ.

[15] A pochopitelně platí $M = \dfrac{f(x) - T(x)}{(x-a)^{n+1}}$.

Krok (1): Podle (1.23) je $\varphi(a) = 0$ a dosazením x za t vidíme, že také $\varphi(x) = 0$:

$$\varphi(x) = f(x) - T(x) - M(x-a)^{n+1} = f(x) - T(x) - \frac{f(x) - T(x)}{(x-a)^{n+1}}(x-a)^{n+1} = 0.$$

Je tedy $\varphi(a) = \varphi(x)$ (a obě hodnoty jsou nulové; pro nás je však podstatné hlavně to, že jsou stejné). Protože φ je spojitá na $[a, x]$ a má derivaci ve všech bodech $t \in (a, x)$, jsou splněny předpoklady Rolleovy věty a existuje tedy nějaké číslo $\xi_1 \in (a, x)$ takové, že $\varphi'(\xi_1) = 0$.

Krok (2): Nyní máme $\varphi'(a) = 0$ (podle (1.23)) a $\varphi'(\xi_1) = 0$ (podle předchozího kroku). Podobně jako výše jsou tedy splněny předpoklady Rolleovy věty, která nám garantuje existenci nějakého $\xi_2 \in (a, \xi_1)$ takového, že $\varphi''(\xi_2) = 0$.

Krok (3): Pro ilustraci popíšeme ještě třetí krok: Podle (1.23) platí $\varphi''(a) = 0$ a z předchozího kroku víme $\varphi''(\xi_2) = 0$, po ověření předpokladů Rolleovy věty tedy dostaneme $\xi_3 \in (a, \xi_2)$ takové, že $\varphi'''(\xi_3) = 0$. Takto pokračujeme.

Krok $(n+1)$: Z (1.23) a z předchozího kroku máme $\varphi^{(n)}(a) = 0$, resp. $\varphi^{(n)}(\xi_n) = 0$. Ještě jednou jsou tedy splněny předpoklady Rolleovy věty, a existuje nějaké číslo $\xi_{n+1} \in (a, \xi_n)$ takové, že $\varphi^{(n+1)}(\xi_{n+1}) = 0$.

Označíme-li $\xi := \xi_{n+1}$, pak tedy máme

$$\varphi^{(n+1)}(\xi) = 0.$$

Výše už jsme spočítali $\varphi^{(n)}$, stačí tedy derivovat ještě jednou, abychom viděli, že

$$\varphi^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - T^{(n+1)}(t) - M \cdot (n+1)!,$$

takže

$$0 = \varphi^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - T^{(n+1)}(\xi) - M \cdot (n+1)!,$$

odkud ihned plyne, že

$$M = \frac{f^{(n+1)}(\xi) - T^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

kde poslední rovnost plyne z faktu, že $T = T_n^{f,a}$ je polynom stupně nejvýše n, takže jeho derivace $T^{(n+1)}$ je nutně konstantní nulová funkce. Tím je důkaz dokončen. □

Poznámka. Právě provedený důkaz se možná zdá dlouhý, to je však hlavně důsledek snahy o průběžné vysvětlování. Základních kroků je jen pár:

- BÚNO $a < x$. Hledáme tedy $\xi \in (a, x)$. Označme $T := T_n^{f,a}$.
- Nechť $M \in \mathbb{R}$ vyhovuje lineární rovnici $f(x) - T(x) = M \cdot (x-a)^{n+1}$.
- Položme $\varphi(t) = f(t) - T(t) - M(t-a)^{n+1}$.
- Všimněme si, že $\varphi^{(i)}(a) = 0$ pro všechna $i = 0, 1, \ldots, n$. (Plyne z vlastností Taylorova polynomu.)
- Protože zároveň $\varphi(x) = 0$ (ihned z definice), Rolleova věta dá $\xi_1 \in (a, x)$: $\varphi'(\xi_1) = 0$.
- Máme $\varphi'(a) = 0 = \varphi'(\xi_1)$; další aplikace Rolleho dá $\xi_2 \in (a, \xi_1)$: $\varphi''(\xi_2) = 0$.
- Takto pokračujeme, až nakonec najdeme $\xi = \xi_{n+1} \in (a, \xi_n) \subseteq (a, x)$ splňující $\varphi^{(n+1)}(\xi_{n+1}) = 0$.

- Důkaz dokončíme pozorováním, že $\varphi^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - T^{(n+1)}(t) - M \cdot (n+1)!$, takže z už dokázané rovnosti $\varphi^{(n+1)}(\xi) = 0$ plyne $M = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$ což v kombinaci s původní definicí M dává přesně tvrzení věty, tj. rovnost

$$f(x) - T(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Toto samozřejmě není úplný důkaz, většina uvedených kroků vyžaduje nějaký komentář. Snad ale tento stručný náznak důkazu v několika bodech dává dobrou představu o struktuře celého důkazu – a snad se nyní důkaz nezdá tak složitý.

Poznámka 32. Následující Taylorovy polynomy považujeme za známé; jejich odvození spočívá v přímém dosazení do Definice 23. Čtenář by si měl uvědomit, že v každé z rovností níže jsou současně přítomny dvě informace: 1) Tvar Taylorova polynomu pro konkrétní funkci (například pro e^x v bodě (i)), který plyne přímo z Definice 23. 2) Jistý odhad velikosti zbytku; v tomto případě používáme Peanův tvar zbytku. Platnost každé z rovností je netriviální a plyne z Taylorovy věty s Peanovým tvarem zbytku (Věta 22). V rovnici (v) jest $\alpha \in \mathbb{R}$.

(i) $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + o(x^n),\ x \to 0;$

(ii) $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^k \dfrac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2k+1}),\ x \to 0;$

(iii) $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^k \dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2k+2}),\ x \to 0;$

(iv) $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n} + o(x^n),\ x \to 0;$

(v) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-(n-1))}{n!} + o(x^n),\ x \to 0.$

Pro snazší zapamatování a zápis rovnice (v) zavádíme tak zvaná *zobecněná kombinační čísla* pro $\alpha \in \mathbb{R}$ a $k \in \mathbb{N}$ vzorcem

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-(n-1))}{n!} \quad \text{a} \quad \binom{\alpha}{0} = 1.$$

Všimněte si, že pro přirozené číslo $m \geqslant k$ se tato definice shoduje s běžnou definicí kombinačního čísla.

Využitím tohoto značení dostává rovnice (v) už snadno zapamatovatelný tvar

$$(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \ldots + \binom{\alpha}{n}x^n + o(x^n),\ x \to 0. \tag{1.25}$$

Je dobré si všimnout, že tento vzorec velmi připomíná binomickou větu; rozdíl je v tom, že v binomické větě počet členů na pravé straně odpovídá exponentu vlevo, zatímco zde počet členů vpravo nesouvisí s exponentem, nýbrž s řádem Taylorova polynomu, který uvažujeme; zde jde o Taylorův polynom řádu n, takže máme $n+1$ členů. Ve skutečnosti se binomická věta dá pomocí tohoto Taylorova polynomu dokázat, jak si ukážeme níže (viz výše Poznámku 29).

1.5 Vsuvka o nekonečných řadách - opakování

Tento oddíl je věnován opakování z minulého semestru, takže pokud jste si svou znalostí jisti, není potřeba ho podrobně číst. Věnujte ale pozornost pododdílu 1.5.1, kde se o pojmu řady dočtete z jiného, pro nás podstatného pohledu.

Mějme posloupnost reálných čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$. Až dosud jsme se při studiu posloupností zabývali zejména jejich limitou

$$\lim_{n\to\infty} a_n,$$

tedy hodnotou, ke které se členy posloupnosti s neomezenou přesností blíží. Hovoříme-li o *nekonečné řadě čísel*, zajímáme se o hodnotu (a existenci) *součtu* všech čísel a_n. Jaký přesný význam však dát součtu nekonečně mnoha čísel? Mám-li pouze N čísel $a_1, a_2, \ldots, a_N$, má součet

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{N-1} + a_N$$

všech těchto čísel jedinou možnou interpretaci: Součet dostanu tak, že k a_1 přičtu a_2, k výsledku dále přičtu a_3 a tak dále, až po konečně mnoha krocích dojdu k a_N a jeho přičtením dostanu celkový výsledek. (Díky komutativitě a asociativitě sčítání při tom nezáleží, v jakém pořadí jednotlivá čísla přičítám, stejně jako v samoobsluze nezáleží na tom, v jakém pořadí vám prodavač namarkuje zboží.)

To nám dává nápovědu, jak interpretovat symbol

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots \ :$$

Budu prostě přičítat další a další členy posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a doufat, že mezivýsledky (částečné součty), které budu tímto způsobem dostávat, konvergují k nějaké limitě; tuto limitu – existuje-li – pak nazvu součtem nekonečné řady. Takto opravdu součet řady budeme definovat:

Definice. Je-li dána posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$, *nekonečnou řadou* nazýváme formální symbol

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots, \tag{1.26}$$

místo něhož zavádíme též symbol

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{nebo} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{a podobně;}$$

jakým písmenem označujeme index „podle něhož se sčítá“, na tom nezáleží. Čísla $a_1, a_2, \ldots$ jsou *členy řady* (1.26).

Je-li dána nekonečná řada (1.26), definujeme její *posloupnost částečných součtů* takto:

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \quad s_3 = a_1 + a_2 + a_3; \quad \text{obecně} \quad s_N = \sum_{n=1}^{N} a_n.$$

Existuje-li limita

$$s = \lim_{N\to\infty} s_N, \tag{1.27}$$

nazýváme toto číslo s *součtem* řady (1.26); píšeme pak

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

a symbolem (1.26) pak rozumíme nejen řadu samotnou (podobně jako symbolem $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ rozumíme posloupnost), nýbrž i její součet s.

Pokud $s \in \mathbb{R}$, říkáme že řada (1.26) je *konvergentní* (má vlastní součet); pokud limita (1.27) neexistuje nebo je nekonečná, říkáme, že řada je *divergentní*.

Poznámka.

- Všimněte si, že definice počítá nejen s možnostmi konečného i nekonečného součtu (jak bychom asi očekávali), ale i s možností neexistence jakéhokoliv součtu. Například pro řadu

$$(-1) + 1 + (-1) + 1 + (-1) + \ldots = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$$

  jsou částečné součty následující:

$$s_1 = -1, \quad s_2 = -1 + 1 = 0, \quad s_3 = -1 + 1 - 1 = -1, \quad s_4 = -1 + 1 - 1 + 1 = 0 \quad \text{atd.},$$

  tvoří tedy posloupnost $0, 1, 0, 1, \ldots$, která nemá limitu, a součet řady proto neexistuje.

- Definice součtu nekonečné řady je dosti názorná; ještě názornější je však následující zápis, který platí v případě, že řada má (konečný nebo nekonečný) součet:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \overset{\text{def.}}{=} \lim_{N\to\infty} s_N \overset{\text{def.}}{=} \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} a_n \right).$$

  V limitě na pravé straně si lze představit, že horní mez sumy „běží do ∞“, takže sčítáme více a více členů řady a sledujeme, k čemu se součty blíží.

Příklad. Pro některého začátečníka může být obtížně představitelné, že součet nekonečně mnoha čísel je konečný. Následující názorný příklad ukazuje, že skutečně existují konvergentní nekonečné řady.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = 1.$$

Součet této řady je skutečně roven jedné, což lze snadno pochopit, když si člověk uvědomí, že přičtením každého dalšího členu se s hodnotou částečného součtu přiblížíme k hodnotě 1 o polovinu zbývající vzdálenosti: Začínáme s $s_1 = \frac{1}{2}$; vzdálenost od 1 je $\frac{1}{2}$ a hodnota dalšího členu řady je $\frac{1}{4}$, tedy polovina této vzdálenosti. Ve druhém kroku máme $s_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, takže vzdálenost od 1 je $\frac{1}{4}$ a hodnota dalšího členu řady je $\frac{1}{8}$, tj. jedna polovina této vzdálenosti. A tak dále. Odtud je jasně vidět, že limita částečných součtů (tj. hodnota součtu řady) je přesně 1, a je to tedy konečné číslo. △

Nyní si tento výsledek dokážeme ve větší obecnosti a přesně (tedy bez zbytečných odkazů na intuici).

Příklad. Nechť $N \in \mathbb{N}$ a $q \in (-1, 1) \setminus \{0\}$. Pak platí rovnost

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}. \tag{1.28}$$

Tuto řadu nazýváme *geometrickou řadou s kvocientem* q. Definujeme-li na okamžik $0^0 = 1$, pak tato rovnost platí pro $q \in (-1, 1)$. △

Poznamenejme, že v tomto případě n běží od 0 a nikoliv od 1. Samozřejmě jde pouze o kosmetickou změnu; díky ní máme o něco elegantnější vzoreček.

Důkaz. Platí (dokonce pro libovolné q) následující rovnost (jak si každý může snadno ověřit – roznásobením vznikne „teleskopická řada“, tj. součet, kde většina členů se odečte): $1 - q^{N+1} = (1-q)(1+q+q^2+\ldots+q^N)$. Odtud

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^N = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}, \quad \text{tj.} \quad \sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}.$$

Máme tedy vzorec pro N-tý částečný součet řady $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ a dostáváme

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \lim_{N\to\infty} \frac{1-q^{N+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} \lim_{N\to\infty} \left(1-q^{N+1}\right) = \frac{1}{1-q}(1-0) = \frac{1}{1-q}. \qquad \square$$

Příklad. $0,\overline{9} = 0,999\ldots = 1$. Skutečně, použitím vzorce odvozeného výše dostáváme

$$0,999\ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = 9 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n = 9 \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n - 1\right) = 9 \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{1}{10}} - 1\right) = 1. \qquad \triangle$$

Je ovšem jasné, že ne všechny nekonečné řady mají konečný součet. Třeba řada $\sum_{n=1}^{\infty} n$ má součet nekonečný (k určení N-tého částečného součtu zde používáme známý „Gaussův“ vzoreček, ale nebylo by to ani nutné):

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = \lim_{N\to\infty} (1 + 2 + \ldots + N) = \lim_{N\to\infty} \frac{N(N+1)}{2} = \infty.$$

Následující příklad ukazuje, že ani řada, jejíž členy konvergují k nule, nemusí být konvergentní (tj. mít konečný součet).

Příklad. Platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Důkaz. Máme dokázat, že

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \ldots = \infty.$$

Všimněme si, že první dva členy jsou nejméně tak velké jako $\frac{1}{2}$, to jest $1 \geqslant \frac{1}{2}$ a $\frac{1}{2} \geqslant \frac{1}{2}$. Všechny další členy jsou sice menší než jedna polovina, ale následující dva členy jsou oba aspoň tak velké jako $\frac{1}{4}$, to jest $\frac{1}{3} \geqslant \frac{1}{4}$ a $\frac{1}{4} \geqslant \frac{1}{4}$, a tedy součtem těchto dvou členů dostaneme $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \geqslant 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$. Podívejme se nyní na členy od $\frac{1}{5}$ dále; ty už jsou sice menší než $\frac{1}{4}$, ale následující 4 členy jsou větší než $\frac{1}{8}$, a jejich součet proto splňuje $\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \geqslant 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$. Obrázkem:

$$\underbrace{\frac{1}{1}}_{\geqslant\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\geqslant\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geqslant\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\geqslant\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16}}_{\geqslant\frac{1}{2}} + \ldots$$

Vidíme tedy, že 2^N-tý částečný součet je $\geqslant (N+1)\cdot\frac{1}{2}$ (třeba o řádek výše vidíme, že $s_{2^4} = s_{16} \geqslant (4+1)\cdot\frac{1}{2}$). Odtud plyne (vezměme ještě v úvahu to, že posloupnost částečných součtů je rostoucí, neboť všechny členy naší řady jsou kladné) pomocí Lemmatu o jednom policajtovi pro posloupnosti, že $\lim_{N\to\infty} s_N = \infty$. $\triangle$

1.5.1 Řada s parametrem jako funkce

Nyní se posuneme o krok dál: Nekonečná řada může mít parametr a přesná hodnota součtu potom závisí na něm. S tím už jsme se setkali v případě geometrické řady: roli parametru tam hraje kvocient q a hodnota součtu geometrické řady na hodnotě tohoto parametru závisí, jak vidíme v rovnici (1.28). Nahradíme-li v ní znak q znakem x, který je pro proměnnou obvyklejší, dostaneme

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad x \in (-1, 1).$$

Tato rovnost se tedy dá chápat jako rovnost dvou funkcí, kde roli proměnné hraje parametr x. Na pravé straně rovnosti máme funkci $f(x) = \frac{1}{1-x}$ a na straně levé máme součet řady, jehož hodnota závisí na hodnotě parametru x. Levá strana rovnice se dá také chápat jako *řada funkcí*:

$$L.S. = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots,$$

tj. nekonečný součet funkcí. Protože v tomto případě všechny ty funkce jsou tvaru x^k $(1 = x^0)$, tj. mocninné funkce, hovoříme v tomto případě o *mocninné řadě*, kterou můžeme chápat také jako „nekonečný polynom“.

Uvědomme si, že až dosud jsme se bavili pouze o řadách čísel (třeba $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$), zatímco zde máme řady funkcí; to ale není žádný problém, protože po dosazení libovolného konkrétního čísla za x se z řady funkcí stane řada čísel – třeba dosazením $x = \frac{1}{2}$ do $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ dostaneme $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$, tedy řadu čísel. Vidíme tedy nový způsob jak zadat (definovat) nějakou funkci: nekonečnou řadou. Podívejme se třeba na funkci zadanou pomocí mocninné řady takto:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots.$$

V následující části uvidíme, že platí $f(x) = e^x$ (pro všechna $x \in \mathbb{R}$).

1.6 Taylorova a Maclaurinova řada

Z definice Taylorova polynomu je patrné, že pro danou funkci f a bod a vznikne příslušný polynom T_{n+1} z T_n prostě tak, že se přičte další člen, a to člen tvaru $a_{n+1}x^{n+1}$. Taylorův polynom jistého řádu tedy „obsahuje“ Taylorovy polynomy všech řádů nižších, jen má (může mít) oproti nim ještě nějaké členy navíc. Jinak řečeno, Taylorovy polynomy vyšších a vyšších řádů dostáváme postupným přidáváním členů (a ty už přítomné necháváme); opakujeme-li tento postup donekonečna (tj. řád Taylorova polynomu roste nade všechny meze), dostáváme tak nekonečný součet neboli řadu.

Definice 33. Nechť f má v bodě 0 derivace všech řádů (tj. pro všechna n existuje $f^{(n)}(0)$). Pak *Maclaurinovou řadou* funkce f rozumíme nekonečnou řadu funkcí

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Poznámka 34. Maclaurinovu řadu funkce f můžeme nazvat též *Taylorovou řadou funkce f v bodě* 0; obecně lze definovat Taylorovu řadu funkce f v libovolném bodě $a \in \mathbb{R}$, ve kterém má f derivace všech řádů, a to stejným vzorcem, ve kterém pouze nahradíme x^n symbolem $(x-a)^n$.

Věta 35. *Nechť má funkce f v bodě 0 derivace všech řádů. Pak pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ platí*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \iff \lim_{N \to \infty} R_N(x) = 0.$$

Důkaz. Doplním později. Jde ale o snadné cvičení na definice všech zúčastněných pojmů. □

Věta 36.

(i) $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots;$

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots;$

(iii) $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots;$

(iv) $\forall x \in (-1, 1]\colon\ \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots;$

(v) $\forall x \in (-1, 1)\colon\ (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \ldots.$

Důkaz. První tři body se dají snadno dokázat pomocí Věty 30; pro důkaz zbylých dvou tvrzení je zapotřebí znát takzvaný Cauchyův tvar zbytku; protože je tato metoda myšlenkově velmi podobná metodě užité k důkazu prvních tří bodů, jen používá trochu jiné triky, přijmeme body *(iv)* a *(v)* za platné bez důkazu. □

Příklad 37.

- $e = e^1 = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.
- Číslo e je iracionální. Tento fakt lze dokázat sporem pomocí Lagrangeova tvaru zbytku. △

Poznámka 38. V následující kapitole budeme pracovat s tzv. primitivními funkcemi. Neformálně řečeno, primitivní funkce je opak derivace (primitivní = původní, tedy „původní před derivováním"); přesně řečeno: F je primitivní k f, pokud $F' = f$. Například tedy $(\sin x)' = \cos x$, což znamená, že $\sin x$ je primitivní funkce k funkci cos. Nebo $(x^2)' = 2x$, tedy x^2 je primitivní funkce k $2x$. Po vydělení dvěmi vidíme, že $\frac{x^2}{2}$ je primitivní funkce k x. Podobně snadno je vidět, že pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ je $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ primitivní k x^n. Hledání primitivní funkce se někdy nazývá integrování; například integrací x^n dostaneme $\frac{x^{n+1}}{n+1}$.

Tohoto pojmu nyní využijeme k následující neformální úvaze, která dává návod, jak si zapamatovat (resp. „odvodit") některé Maclaurinovy řady; zatím tuto metodu budeme chápat jako mnemotechnickou pomůcku a teprve mnohem později si dokážeme že takovéto odvození je korektní.

Označme $f(x) = \ln(1+x)$. Potom

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} \overset{(1.28)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots,$$

kde předposlední rovnost platí pro $-x \in (-1, 1)$, tj. pro $x \in (-1, 1)$. Až dosud je vše zcela korektní. Nyní však zintegrujeme (tedy najdeme primitivní funkci) levou i pravou stranu této rovnice, přičemž na pravé straně tak učiníme „člen po členu" (hovoříme o integraci mocninné řady člen po členu). A priori není jasné, že rovnost zůstane zachována. Nicméně dostaneme

$$f(x) = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots,$$

tedy opravdu dostaneme Maclaurinovu řadu funkce $\ln(1+x)$.

Podobným postupem můžeme „odvodit" ještě Maclaurinovu řadu funkce $f(x) = \operatorname{arctg} x$:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} \overset{(1.28)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-x^2\right)^n = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots,$$

odkud „plyne"

$$f(x) = \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots. \tag{1.29}$$

Tato rovnost skutečně platí pro všechna $x \in [-1, 1]$, ale důkaz zatím odložíme. Poznamenejme, že pro $x > 1$ nebo $x < -1$ řada na pravé straně rovnosti diverguje (tj. není definován její součet), takže rovnost platit nemůže. Ačkoliv je tedy funkce arctg definována na celé přímce $\mathbb{R}$, její Maclaurinova řada ji popisuje pouze na intervalu $[-1, 1]$.

Pro zajímavost si ještě všimněme, že $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, takže rovnost (1.29) pro $x = 1$ dává návod pro výpočet čísla π: platí totiž

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1 \overset{(1.29)}{=} 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots.$$

Tímto způsobem si můžete odhadnout hodnotu π (sečtením nějakého obrovského počtu členů), v praxi se však tato řada pro výpočet π (resp. $\frac{\pi}{4}$) nehodí, protože „konverguje velmi pomalu", což znamená, že je nutné sečíst obrovské množství členů pro zisk aspoň trochu přesného odhadu π.

Poznámka 39. Ne každá funkce, pro niž existují derivace všech řádů, se dá rozumně vyjádřit pomocí Maclaurinovy řady. Definujme funkci f předpisem:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{pro } x \neq 0; \\ 0 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Funkce f je zjevně nenulová pro všechna $x \neq 0$, ale má v bodě 0 všechny derivace nulové (to je potřeba dokázat), a tedy její Maclaurinova řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{0}{n!} x^n$ je nulová (tj. odpovídá konstantní nulové funkci):

Máme zde tedy příklad funkce, která je rovna součtu své Maclaurinovy řady jen a pouze v bodě $x = 0$, ačkoliv má tato řada konečný součet (rovný nule) dokonce pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Kapitola 2

Primitivní funkce

Definice 40. Buď $I \subseteq \mathbb{R}$ interval. Řekneme, že F je *primitivní funkce* k funkci f na intervalu I, jestliže $F' = f$ ve všech bodech I; v případných krajních bodech máme na mysli odpovídající jednostrannou derivaci.

Poznámka 41. Podle kontextu hovoříme o primitivní funkci často jako o neurčitém integrálu. Přesně řečeno se jedná o *neurčitý Newtonův integrál*; později se setkáme také s určitým Newtonovým integrálem a především s určitým a neurčitým Riemannovým integrálem (viz též Sekci 3.8).

Neurčitým integrálem funkce f na intervalu I rozumíme buďto libovolnou primitivní funkci, nebo množinu všech primitivních funkcí. Vzhledem k tomu, že všechny primitivní funkce se liší pouze o aditivní konstantu, je rozdíl mezi těmito dvěma pojetími pouze kosmetický, a tedy není důležité to rozlišovat.

Značení 42. Neurčitý integrál funkce f podle proměnné x značíme symbolem $\int f(x)\,\mathrm{d}x$. Tento symbol v sobě neobsahuje informaci o tom, na jakém intervalu primitivní funkci uvažujeme; nebude-li řečeno jinak budeme tím mít na mysli primitivní funkci na libovolném maximálním (tj. takovém, který už nejde zvětšit) intervalu, kde existuje.

Věta 43.

(i) Nechť F je primitivní funkce k f na intervalu I a nechť $c \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta. Potom $G(x) = F(x) + c$ je rovněž primitivní k f na intervalu I.

(ii) Nechť F, G jsou primitivní funkce k f na intervalu I. Potom existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$ taková, že $F(x) - G(x) = c$ pro všechna $x \in I$.

Důkaz. Důkaz prvního bodu je triviální. Dokažme druhý bod. Platí $(F - G)'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$, $x \in I$. Tedy $F - G$ má na I nulovou derivaci, takže je současně nerostoucí a neklesající. Musí tedy být konstantní. □

Značení 44. Předchozí věta nám říká, že známe-li jednu primitivní funkci F, známe už všechny; ty ostatní se totiž od F liší o různé aditivní konstanty. Zároveň ale vidíme, že existuje-li jedna primitivní funkce, existuje jich už nutně nekonečně mnoho dalších (pro každou konstantu jedna). Proto symbol $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ nereprezentuje jednu určitou primitivní funkci, nýbrž jejich nekonečné množství; je v něm tedy jistá nejednoznačnost. Abychom se s touto nejednoznačností vypořádali, zavádíme následující nové značení pro vyjádření faktu, že funkce F je primitivní k funkci f:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} F(x).$$

Malé „c“ nad rovnítkem připomíná fakt, že primitivní funkce je jednoznačně určena až na aditivní konstantu. Obvykle ho píšeme pouze nad poslední rovnost, ve které se vyskytuje znak integrálu.

Rovnost $\int f \overset{c}{=} F$ značí tedy totéž jako $F' = f$ a v obou případech tedy můžeme dodat, na jakém intervalu vlastně rovnost platí. Vyjádření „$\int f \overset{c}{=} F$ na (a, b)“ tedy znamená, že pro všechna $x \in (a, b)$ platí $F'(x) = f(x)$.

Často budeme používat také značení $\int f$ místo $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

Věta 45. *Nechť f je spojitá na intervalu I. Pak f má na I primitivní funkci.*

Důkaz. Důkaz této klíčové věty odložíme na později; potřebujeme k němu teorii Riemannova integrálu. Viz Větu 90 a Důsledek 91. □

2.1 Základní metody při hledání primitivní funkce

Věta 46. *Nechť f, g jsou funkce definované na intervalu I, nechť $c \in \mathbb{R}$. Pak platí:*

(i) $\displaystyle\int c f(x)\,\mathrm{d}x = c \int f(x)\,\mathrm{d}x$, *má-li pravá strana smysl;*

(i) $\displaystyle\int (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x$, *má-li pravá strana smysl.*

Poznámka 47. Jiná formulace poslední věty by mohla být následující: Nechť f má na I primitivní funkci F, g má na I primitivní funkci G (tedy „P.S. rovnic ve Větě 46 má smysl“). Pak platí:

(i) cF je primitivní funkce k cf na I;

(i) $F + G$ je primitivní funkce k $f + g$ na I.

Důkaz. Po přečtení poslední poznámky už k důkazu věty zbývá poslední malý krůček. Stačí si uvědomit, že vyjádření „F je primitivní k f na I“ jinými slovy znamená, že $F' = f$ na I. Dokazovaná věta tedy okamžitě plyne z nám známých faktů o derivaci násobku funkce konstantou a derivaci součtu. □

Vidíme tedy, že pravidla pro integraci součtu a násobku konstantou nejsou ničím jiným než reformulacemi analogických pravidel pro derivaci. Podobná souvislost se okamžitě nabízí i pro složitější pravidla derivování: vzorec pro derivaci složené funkce a vzorec pro derivaci součinu dvou funkcí. V prvním případě hovoříme v kontextu integrálů o substituční metodě, ve druhém případě hovoříme o pravidlu integrace Per Partes.

Podívejme se nejprve na substituční metody. Ty jsou dvě, protože na rozdíl od (souvisejícího) pravidla pro derivaci složené funkce není v případě integrálu a priori jasné, jestli „výpočet probíhá zleva doprava nebo zprava doleva“, a tedy máme věty dvě (podrobněji viz Poznámku 51).

Věta 48 (1. substituční metoda)**.** *Nechť (vnitřní) funkce $\varphi\colon (\alpha, \beta) \to (a, b)$ má na (α, β) vlastní derivaci. Platí-li*

$$\int f(y)\,\mathrm{d}y \overset{c}{=} F(y) \qquad \text{na } (a, b),$$

potom

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} F(\varphi(x)) \qquad \text{na } (\alpha, \beta).$$

Věta 49 (2. substituční metoda)**.** *Nechť (vnitřní) funkce $\varphi\colon (\alpha,\beta) \xrightarrow{na} (a,b)$ má na (α,β) vlastní derivaci a je tam ryze monotónní. Platí-li*

$$\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \stackrel{c}{=} G(t) \quad \textit{na } (\alpha,\beta),$$

potom

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} G(\varphi^{-1}(x)) \quad \textit{na } (a,b).$$

Důkaz Věty 48. Náš předpoklad je $F' = f$ (první rovnice). Máme dokázat, že $(F(\varphi(x))' = f(\varphi(x))\varphi'(x)$ (druhá rovnice). To ale plyne přímo z věty o derivaci složené funkce. □

Příklad 50. $\int \cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \sin(\ln x)$ přesně podle 1. substituce, kde $f = \cos$, $F = \sin$ a $\varphi = \ln$. Další příklady, mj. na 2. VOS △

Poznámka 51. Při použití první substituční metody přecházíme „od složitějšího integrálu k jednoduššímu“. Nacházíme se v situaci, kdy máme spočítat integrál tvaru (porovnej s formulací věty)

$$\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\,\mathrm{d}x, \tag{2.1}$$

a ten a priori neumíme spočítat. Pomocí substituční metody se ho tedy snažíme převést na jiný integrál, který spočítat umíme (podle předpokladu věty) – tím je integrál $\int f(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} F(x)$.

V praxi je však použití substituce málokdy tak přímočaré jako ve výše uvedeném Příkladě 50. Aby nedocházelo k chybám, používáme známé schéma, které nám umožní algoritmicky dostat klíč, podle kterého už je snadné správně Větu o substituci (první či druhou) aplikovat: Substituce, kterou chceme provést při výpočtu integrálu 2.1, je

$$y = \varphi(x);$$

tím se změní integrační proměnná z x na y. Ještě je však potřeba se postarat o derivaci $\varphi'(x)$, která se ve vzorcích vyskytuje; v tom nám pomůže pravidlo

$$\mathrm{d}y = \varphi'(x)\,\mathrm{d}x,$$

podle kterého dosadíme. Tato rovnost je čistě formální a nedáváme jí žádný matematický význam. Představuje pro nás pouze jednoduchou kuchařku. Po dosazení počítáme integrál s proměnnou y. Když jsme hotovi s integrací, zbývá ještě přejít od proměnné y zpět k x.

Pro náš příklad to vypadá následovně:

$$y = \ln x, \quad \mathrm{d}y = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Dosadíme tedy

$$\int \cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int \cos y\,\mathrm{d}y \stackrel{c}{=} \sin y = \sin(\ln x).$$

Poznamenejme, že symbol $\stackrel{c}{=}$ je pouze v rovnosti s posledním integrálem; dále už rovnost platí ve zcela běžném smyslu.

Důkaz Věty 49. Doplním později. □

Příklad 52. Předchozí příklad využíval První větu o substituci; podívejme se nyní na příklad, při jehož řešení lze s výhodou využít Druhou větu o substituci, tedy přechod od (zdánlivě) jednoduššího integrálu ke (zdánlivě) složitějšímu – původní proměnnou x zde nahradíme složitějším výrazem $\sin t$, upravíme diferenciál a pokračujeme ve výpočtu s proměnnou t (k x se vrátíme až po odtranění symbolu integrálu):

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\,\mathrm{d}t = \int \sqrt{\cos^2 t}\cdot\cos t\,\mathrm{d}t \overset{(*)}{=} \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t =$$

(substituci provádíme hned v prvním kroku podle klíče $x = \sin t$, $\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$, $t = \arcsin x$)

$$\int \frac{\cos 2t + 1}{2}\,\mathrm{d}t \overset{c}{=} \frac{1}{4}\sin 2t + \frac{1}{2}t = \frac{1}{4}\sin(2\arcsin x) + \frac{1}{2}\arcsin x.$$

Jak je vidět, samotný výpočet není složitý (pozor ale na rovnost $(*)$ – o ní viz níže); při použití Druhé věty o substituci si však musíme dát větší pozor na ověření předpokladů. V jakém smyslu odpovídá tento příklad situaci popsané ve Větě 49?

Funkce $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ je definovaná na intervalu $[-1,1]$, integrál tedy budeme počítat na $(-1,1) = (a,b)$ (s otevřeným intervalem se pracuje snáze, neboť nemusíme přemýšlet o derivaci zprava nebo zleva). Vnitřní funkce φ je v tomto případě $\varphi(t) = \sin t$; přitom požadujeme aby $\varphi\colon (\alpha,\beta) \to (a,b)$ byla ryze monotónní a *na* (tj. na celý interval (a,b)). Je jasné, že funkce $\varphi(t) = \sin t$ není na svém definičním oboru $\mathbb{R}$ ryze monotónní, musíme se tedy omezit na vhodný podinterval $(\alpha,\beta) \subseteq \mathbb{R}$. Zde se nabízí definovat $(\alpha,\beta) = (-\pi/2, \pi/2)$; pak $\varphi\colon (-\pi/2,\pi/2) \to (-1,1)$ je skutečně ryze monotónní a na.

Až uvážení obsahu předchozího odstavce můžeme plně vysvětlit rovnost označenou $(*)$: protože $t \in (-\pi/2, \pi/2)$, jest $\cos t > 0$ (nakreslete si obrázek funkce cos), a tedy platí

$$\sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t. \qquad \triangle$$

Další metoda hledání primitivní funkce je tak zvaná integrace Per Partes, která je analogií pravidla pro derivování součinu dvou funkcí.

Věta 53 (Integrace Per Partes)**.** *Nechť I je otevřený interval, funkce f, g jsou spojité na I a platí $F' = f$ a $G' = g$ na I. Potom:*

$$\int f(x)G(x)\,\mathrm{d}x = F(x)G(x) - \int F(x)g(x)\,\mathrm{d}x \quad \textit{na } I.$$

Důkaz. Funkce F i G jsou na I spojité, protože mají vlastní derivace (f a g); jsou tedy spojité i součiny fG a Fg. Podle Věty 45 existují tedy k těmto součinům primitivní funkce – jinými slovy oba integrály vyskytující se ve vzorci mají smysl. Máme dokázat:

$$\int f(x)G(x)\,\mathrm{d}x + \int F(x)g(x)\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} F(x)G(x).$$

Tj. podle Věty 46

$$\int (f(x)G(x) + F(x)g(x))\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} F(x)G(x).$$

To je ale jiný zápis pro rovnost

$$f(x)G(x) + F(x)g(x) = (F(x)G(x))',$$

o níž víme, že platí, neboť jde přesně o nám známé pravidlo pro derivování součinu. $\square$

Příklad 54. Aplikujeme metodu Per Partes na následující integrály:

$$\int x^2 \cdot e^x \,\mathrm{d}x; \quad \int \sqrt{x} \ln^2 x \,\mathrm{d}x; \quad \int \ln x \,\mathrm{d}x; \quad \int \operatorname{tg} x \,\mathrm{d}x.$$

První integrál: aplikujeme Per Partes dvakrát po sobě; rozepište si to podrobně, abyste viděli, jak přesně vzorec používáme.

$$\int x^2 \cdot e^x \,\mathrm{d}x \overset{\text{P.P.}}{=} x^2 \cdot e^x - \int 2x \cdot e^x \,\mathrm{d}x \overset{\text{P.P.}}{=} x^2 \cdot e^x - \Big(2x \cdot e^x - \int 2e^x \,\mathrm{d}x\Big) \overset{c}{=} x^2 \cdot e^x - 2x \cdot e^x + 2e^x.$$

Druhý integrál: i zde aplikujeme Per Partes dvakrát, tentokrát ovšem budou mít funkce opačné role než v předchozím výpočtu. Doporučuji výpočet zkusit nejprve samostatně a až pak se podívat na mé řešení.

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x} \cdot \ln^2 x \,\mathrm{d}x &\overset{\text{P.P.}}{=} \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \cdot \ln^2 x - \int \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \ln^2 x - \frac{4}{3} \int \sqrt{x} \cdot \ln x \,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{P.P.}}{=} \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \ln^2 x - \frac{4}{3} \Big(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \ln x - \int \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x \Big) \\
&= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \ln^2 x - \frac{8}{9} x^{\frac{3}{2}} \ln x + \frac{8}{9} \int \sqrt{x} \,\mathrm{d}x \\
&\overset{c}{=} \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \ln^2 x - \frac{8}{9} x^{\frac{3}{2}} \ln x + \frac{16}{27} x^{\frac{3}{2}} \\
&= x^{\frac{3}{2}} \Big(\frac{2}{3} \ln^2 x - \frac{8}{9} \ln x + \frac{16}{27} \Big).
\end{aligned}$$

Třetí integrál: zde na první pohled není jasné, jak bychom mohli použít metodu Per Partes, když integrand vůbec není ve formě součinu dvou funkcí. Pomůžeme si jednoduchým trikem, který lze uplatnit i v jiných podobných případech: $\ln x = 1 \cdot \ln x$, hle a máme součin dvou funkcí.

$$\int 1 \cdot \ln x \,\mathrm{d}x \overset{\text{P.P.}}{=} x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = x \cdot \ln x - \int 1 \,\mathrm{d}x \overset{c}{=} x \cdot \ln x - x$$

Čtvrtý integrál je k zamyšlení pro vás. Následující výpočet totiž dává podivný výsledek:

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{tg} x \,\mathrm{d}x &= \int \sin x \cdot \frac{1}{\cos x} \,\mathrm{d}x \\
&= (-\cos x) \frac{1}{\cos x} - \int (-\cos x) \Big(\frac{-1}{\cos^2 x} \cdot (-\sin x) \Big) \,\mathrm{d}x \\
&= -1 + \int \frac{\sin x}{\cos x} \,\mathrm{d}x = -1 + \int \operatorname{tg} x \,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Aplikací (korektní) pravidla Per Partes nám tedy celkem vyšlo

$$\int \operatorname{tg} x \,\mathrm{d}x = -1 + \int \operatorname{tg} x \,\mathrm{d}x.$$

Kde je problém? Našli jsme spor v matematice? Rozmyslete si to; je důležité tuto záležitost pochopit. Zároveň vás ale nechci připravit o možnost učinit tento objev samostatně. △

Příklad 55. Označme
$$I_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x.$$
Pro $n = 1$ známe odpověď už ze zimního semestru:
$$I_1 \stackrel{c}{=} \operatorname{arctg} x \quad (x \in \mathbb{R}).$$
Chceme vypočítat integrál I_n i pro vyšší hodnoty n. K tomu odvodíme pomocí metody Per Partes rekurentní vzorec:
$$I_n = \int 1\cdot\frac{1}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{(1+x^2)^n} - \int x\cdot\frac{-n\cdot 2x}{(1+x^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\int\frac{1+x^2-1}{(1+x^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\int\Big(\frac{1}{(1+x^2)^n} - \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}\Big)\,\mathrm{d}x = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n(I_n - I_{n+1}).$$
Dostali jsme tedy rovnost $I_n = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n(I_n - I_{n+1})$, odkud už vyjádříme
$$I_{n+1} = \frac{x}{2n(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n.$$
Použitím tohoto rekurentního vzorce můžeme nyní postupně počítat integrály I_n z předchozích:
$$I_2 \stackrel{c}{=} \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$$
a tak dále. △

2.2 Integrace racionálních funkcí

Definice 56. *Racionální funkcí* rozumíme libovolnou funkci tvaru P/Q, kde P, Q jsou polynomy a Q není konstantní nulová funkce.

Věta 57 (Rozklad racionální funkce na parciální zlomky)**.** *Nechť P, Q jsou polynomy s reálnými koeficienty splňující* $\operatorname{st} P < \operatorname{st} Q$. *Nechť Q je tvaru*
$$Q(x) = a_n(x-x_1)^{p_1}\cdot\ldots\cdot(x-x_k)^{p_k}\cdot(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{q_1}\cdot\ldots\cdot(x^2+\alpha_l x+\beta_l)^{q_l},$$
kde $x_1,\ldots,x_k$ jsou všechny reálné kořeny Q a $p_1,\ldots,p_k$ jsou jejich příslušné násobnosti (jinak řečeno, žádný z faktorů $x^2+\alpha_i x+\beta_i$, $i = 1,\ldots,l$ nechť nemá reálný kořen).

Potom existují koeficienty $A_i^{(j)}, B_i^{(j)}, C_i^{(j)}$ takové, že platí
$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} = {} & \frac{A_1^{(1)}}{x-x_1} + \frac{A_2^{(1)}}{(x-x_1)^2} + \ldots + \frac{A_{p_1}^{(1)}}{(x-x_1)^{p_1}} + \ldots\ldots + \\ & \frac{A_1^{(k)}}{x-x_1} + \frac{A_2^{(k)}}{(x-x_1)^2} + \ldots + \frac{A_{p_k}^{(k)}}{(x-x_1)^{p_k}} + \\ & \frac{B_1^{(1)}x+C_1^{(1)}}{x^2+\alpha_1 x+\beta_1} + \frac{B_2^{(1)}x+C_2^{(1)}}{(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^2} + \ldots + \frac{B_{q_1}^{(1)}x+C_{q_1}^{(1)}}{(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{q_1}} + \ldots\ldots + \\ & \frac{B_1^{(l)}x+C_1^{(l)}}{x^2+\alpha_l x+\beta_l} + \frac{B_2^{(l)}x+C_2^{(l)}}{(x^2+\alpha_l x+\beta_l)^2} + \ldots + \frac{B_{q_l}^{(l)}x+C_{q_l}^{(l)}}{(x^2+\alpha_l x+\beta_l)^{q_l}}.\end{aligned}$$

Tato věta nám říká, že rozklad existuje. Jeho nalezení v praktické situaci je ovšem otázka jiná; k tomu používáme tak zvanou metodu neurčitých koeficientů. Pro ilustraci uvádím následující příklad:

Příklad 58. Spočtěte integrál

$$\int \frac{x}{(x^2+2x+2)^2(x^2+2x-3)}\,\mathrm{d}x.$$

V tomto případě máme situaci poněkud zjednodušenou tím, že jmenovatel integrované racionální funkce je zapsán v takovém tvaru, ze kterého už není problém ho upravit do tvaru polynomu Q z Věty 57: Snadno zjistíme, že $x^2+2x-3=(x-1)(x+3)$ a $x^2+2x+2=(x+1)^2+1$, a tedy polynom x^2+2x+2 nemá reálné kořeny.

Definiční obor integrandu (označme ho f) je proto $\mathbb{R}\setminus\{1,-3\}$ a f je na této množině spojitá. Má tedy primitivní funkci na každém z intervalů $(-\infty,-3)$, $(-3,1)$ a $(1,\infty)$.

Nyní chceme racionální funkci f zapsat rozloženou na parciální zlomky (z nichž každý potom budeme integrovat zvlášť); podle Věty 57 existují koeficienty $A,B,C,D,E,F\in\mathbb{R}$ takové, že platí

$$\frac{x}{(x^2+2x+2)^2(x^2+2x-3)}=\frac{Ax+B}{x^2+2x+2}+\frac{Cx+D}{(x^2+2x+2)^2}+\frac{E}{x-1}+\frac{F}{x+3}. \tag{2.2}$$

Nyní tuto rovnost přenásobíme jmenovatelem na levé straně:

$$\begin{aligned} x &= (Ax+B)(x^2+2x+2)(x-1)(x+3)+(Cx+D)(x-1)(x+3)\\ &\qquad + E(x^2+2x+2)^2(x+3)+F(x^2+2x+2)^2(x-1). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Nyní máme dvě základní možnosti, jak postupovat dále:

(a) Roznásobíme pravou stranu a dáme k sobě všechny členy se stejnými mocninami x. Potom porovnáme levou stranu (v našem případě x) a pravou stranu rovnice. Koeficienty u jednotlivých mocnin x musí být na obou stranách rovnice stejné. Tím dostaneme 6 lineárních rovnic pro 6 neznámých A,B,C,D,E,F.

(b) Dosadíme 6 různých čísel za x. Tím dostaneme soustavu 6 lineárních rovnic. Z obecných faktů o polynomech plyne, že tato soustava bude mít právě jedno řešení.

Ve většině netriviálních praktických příkladů se vyplatí obě metody kombinovat. V našem případě můžeme využít toho, že čísla -3 a 1 jsou kořeny jmenovatele. Dosazením každého z nich se tedy vynuluje několik členů na pravé straně rovnice (2.3); $x=1$ dává rovnici

$$x=1:\quad 1=E(1+2+2)^2(1+3),\quad \text{tj.}\quad E=\frac{1}{100}.$$

Dosazení $x=-3$ dává

$$x=-3:\quad -3=F(9-6+2)^2(-3-1),\quad \text{tj.}\quad F=\frac{3}{100}.$$

Tím jsme vyčerpali hodnoty x, jejichž dosazení dá rovnici s jedinou neznámou (a tedy její hodnotu hned zjistíme) – užili jsme metody (b). Ostatní koeficienty určíme metodou (a); ovšemže už budeme brát v úvahu znalost hodnot E a F. Přitom ale není nezbytně nutné pravou stranu rovnice skutečně pracně roznásobit; je obvykle celkem snadné napsat koeficient u určité mocniny x hned. Například se podívejme na koeficient u x^5 na pravé straně rovnice (2.3) – x^5 vznikne z prvního, třetího a čtvrtého sčítance a je snadno vidět, že jeho hodnota bude rovna $A + E + F$. Protože na levé straně rovnice se x^5 nevyskytuje (jinými slovy: koeficient u této mocniny je nulový), dostáváme rovnici

$$x^5: \quad 0 = A + E + F, \quad \text{odkud (použitím znalosti } E \text{ a } F) \text{ dostaneme} \quad A = \frac{-4}{100} = \frac{-1}{25}.$$

Podobně dostaneme rovnice:

$$\begin{aligned}
x^4: &\quad 0 = B + 2A - A + 3A + 3E + 4E - F + 4F, \quad \text{tj.} \quad B = 0;\\
x^1: &\quad 1 = -6A - 6B + 6B - 2B - 3C + 3D - D + 24E - 8F + 4F \quad \text{tj.} \quad \frac{60}{100} = -6B - 3C;\\
x^0: &\quad 0 = -6B - 3D + 12E - 4F \quad \text{tj.} \quad D = 0.
\end{aligned}$$

Řešením této jednoduché soustavy rovnic dostáváme následující hodnoty koeficientů:

$$A = \frac{-1}{25}, \quad B = 0, \quad C = \frac{-1}{5}, \quad D = 0, \quad E = \frac{1}{100}, \quad F = \frac{3}{100}.$$

Máme tedy následující rovnost; integrály na pravé straně po vytknutí konstant „před integrál“ pro přehlednost dalšího postupu označíme I_1 až I_4:

$$\begin{aligned}
&\int \frac{x}{(x^2+2x+2)^2(x^2+2x-3)}\,\mathrm{d}x = \\
&\quad -\frac{1}{25}\underbrace{\int \frac{x}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x}_{I_1} - \frac{1}{5}\underbrace{\int \frac{x}{(x^2+2x+2)^2}\,\mathrm{d}x}_{I_2} + \frac{1}{100}\underbrace{\int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x}_{I_3} + \frac{3}{100}\underbrace{\int \frac{1}{x+3}\,\mathrm{d}x}_{I_4}.
\end{aligned}$$

Integrály I_3 a I_4 jsou velmi snadné – můžeme rovnou napsat výsledky:

$$I_3 \overset{c}{=} \ln|x-1| \quad \text{a} \quad I_4 \overset{c}{=} \ln|x+3|.$$

Dále se podíváme na integrál I_1, kterému je vhodné opravdu věnovat pozornost. Použijeme „standardní“ trik přičtení a odečtení (a vytknutí) konstanty, abychom v čitateli měli derivaci jmenovatele:

$$I_1 = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2-2}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x}_{I_{1a}} - \underbrace{\int \frac{1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x}_{I_{1b}}.$$

Nyní (aplikací první substituce nebo prostě jednoduchou úvahou) dostaneme

$$I_{1a} \overset{c}{=} \ln|x^2+2x+2| = \ln(x^2+2x+2).$$

a druhý z obou integrálů převedeme obvyklým postupem na arctg:

$$I_{2a} = \int \frac{1}{(x+1)^2+1}\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} \operatorname{arctg}(x+1).$$

Tedy celkem dostáváme

$$I_1 \overset{c}{=} \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) + \operatorname{arctg}(x+1)$$

Zbývá vypočítat integrál I_2. Postup bude velmi podobný (použijeme stejný trik) jako pro I_1 s tím rozdílem, že pro úplné řešení budeme potřebovat rekurentní vzorec z Příkladu 55.

$$I_2 = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2-2}{(x^2+2x+2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{2x+2}{(x^2+2x+2)^2}\,\mathrm{d}x}_{I_{2a}} - \underbrace{\int \frac{1}{(x^2+2x+2)^2}\,\mathrm{d}x}_{I_{2b}}.$$

Substitucí $y = x^2+2x+2$ (nebo opět snadnou úvahou) dostaneme

$$I_{2a} \stackrel{c}{=} \frac{-1}{x^2+2x+2}.$$

Konečně podle Příkladu 55 vyjde

$$I_{2b} = \int \frac{1}{((x+1)^2+1)^2}\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} \frac{(x+1)}{2(1+(x+1)^2)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x+1). \qquad \triangle$$

Poznámka 59. Uvědomme si, že výrazy na obou stranách rovnice (2.2) jsou definovány pro $x \in \mathbb{R}\setminus\{1,-3\}$, zatímco levá i pravá strana (2.3) je definována pro všechna x. Přenásobením rovnice jmenovatelem zlomku na levé straně (2.2) se tedy rozšířil definiční obor.

Poté se snažíme zjistit hodnoty koeficientů A až F a začínáme tím, že za x dosazujeme 1 a -3, tedy právě ta čísla, která v definičním oboru rovnice (2.2) chybí. Jak tedy víme, že i pro tyto hodnoty x nastává v (2.3) rovnost? Odpověď dává následující Cvičení 60, kde f je levá strana a g pravá strana rovnice (2.3); z rovnice (2.2) totiž víme, že $f = g$ pro všechna x až na body 1 a -3; z tvrzení Cvičení už pak snadno plyne, že rovnost nastává i pro tyto hodnoty x.

Cvičení 60. Nechť (a,b) je interval a $c \in (a,b)$. Nechť jsou funkce f a g spojité na (a,b) a předpokládejme, že pro všechna $x \in (a,b)\setminus\{c\}$ platí $f(x) = g(x)$. Pak už nutně platí i $f(c) = g(c)$ (tj. funkce jsou ve skutečnosti shodné ve všech bodech (a,b) – včetně bodu c).

Důkaz. Víme, že f je spojitá v bodě c, tedy platí $f(c) = \lim_{x\to c} f(x)$. Protože g je rovněž spojitá, platí také $g(c) = \lim_{x\to c} g(x)$. Dále víme, že funkce f a g se (podle předpokladu) shodují na nějakém prstencovém okolí bodu c; protože limita funkce v bodě záleží pouze na hodnotách v prstencovém okolí tohoto bodu, platí rovnost $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x)$. Spojením těchto tří rovností tedy celkem dostáváme:

$$f(c) = \lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = g(c). \qquad \square$$

Podstata předchozího cvičení tkví v tom, že spojitou funkci nemůžeme změnit v jediném bodě c a zachovat při tom její spojitost. Má-li být funkce spojitá, je totiž hodnota v tom bodě c jednoznačně určena hodnotami f na jistém prstencovém okolí c. Jinými slovy, máme-li nějakou funkci f, která je spojitá na intervalu (a,b) a změníme-li její hodnotu v nějakém bodě $c \in (a,b)$ na hodnotu jinou, výsledná funkce už nebude na (a,b) spojitá: bude v bodě c „přerušená".

2.3 Důležité substituce (1. typu)

(I) integrály typu $\int R(e^{\alpha x})\,\mathrm{d}x$: Je-li $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ nějaká racionální funkce, tj. P, Q jsou polynomy, stačí použít jednoduchou substituci $y = e^{\alpha x}$. Obecně:

$$\int R(e^{\alpha x})\,\mathrm{d}x = \int R(e^{\alpha x})\frac{\alpha e^{\alpha x}}{\alpha e^{\alpha x}}\,\mathrm{d}x \leftarrow \left[\begin{array}{c} y = e^{\alpha x} \\ \mathrm{d}y = \alpha e^{\alpha x}\,\mathrm{d}x \end{array}\right] = \frac{1}{\alpha}\int R(y)\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y.$$

Poslední integrand je racionální funkce ($R(y)$ je racionální, takže totéž platí i pro $R(y)\cdot\frac{1}{y}$), kterou lze integrovat standardním postupem.

Kapitola 3

Určitý integrál

3.1 Úvod

Dosud jsme se zabývali hledáním primitivní funkce a mluvili jsme o neurčitém integrálu; výsledkem výpočtu byla vždy funkce. Nyní se budeme zabývat tak zvaným určitým integrálem; přesněji, Riemannovým určitým integrálem funkce f na intervalu $[a, b]$. Tentokrát bude výsledkem místo funkce číslo a podobně jako v předchozí kapitole budeme i nyní mít pro výsledek jasnou interpretaci: bude se jednat, nepřesně řečeno, o „obsah plochy pod grafem funkce f na intervalu $[a, b]$“.

Pro budování teorie určitého integrálu pro nás není nezbytně nutné mít přesně definovaný pojem obsahu rovinného obrazce. Intuitivní chápání tohoto pojmu a znalost některých základních vlastností integrálu by nám postačily. Pro ilustraci však uvádím následující motivační pasáž o tak zvaném Joradnově-Peanově obsahu (objemu).

3.2 Riemannův určitý integrál

Budeme nyní budovat teorii, která nám umožní dát odpověď na následující otázky:

Úloha. Buďte dány body $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a funkce $f : [a, b] \to (0, \infty)$. Jak se dá definovat velikost plochy ohraničené přímkami $y = 0$, $x = a$, $x = b$ a grafem funkce f, aby to bylo v souladu s naší intuicí? Máme-li už tuto plochu definovanou, jakou metodou se dá vypočítat její přesná hodnota?

O něco přesněji: Označme $P_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b] \wedge 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$. Je tato množina („podgraf“ funkce f) měřitelná v Jordanově-Peanově smyslu? Pokud ano, jaká je hodnota tohoto obsahu (tj. $m(P_f)$)?

Metoda. Budeme množinu P_f „aproximovat zdola“ pomocí obdélníků v ní obsažených a „aproximovat shora“ pomocí obdélníků, v jejichž sjednocení je P_f obsažena. To proto, že na rozdíl od obecného rovinného obrazce dovedeme snadno určit obsah obdélníka, případně obsah sjednocení konečného počtu obdélníků. Zhruba řečeno budeme zvyšovat počet obdélníků a utvářet tak přesnější a přesnější aproximace (budeme „zvyšovat rozlišení“); budou-li aproximace shora a zdola konvergovat ke stejné hodnotě, prohlásíme tuto hodnotu za určitý integrál funkce f na $[a, b]$.

Poznamenávám, že v tomto úvodu je funkce f kladná, aby bylo jasné, co myslíme „plochou pod grafem“. Odteď však budeme uvažovat funkce s hodnotami v celém $\mathbb{R}$.

Definice 61 (Darbouxova definice Riemannova určitého integrálu)**.**
Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a nechť $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je omezená (nemusí být kladná).

(1) *Dělení intervalu* $[a, b]$ je konečná posloupnost bodů $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Obvykle značíme $D = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ a pro upřesnění můžeme napsat i $D = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$. Jednotlivé intervaly $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$ jsou intervaly dělení D.

(2) Definujeme *dolní (Darbouxův integrální) součet* příslušný funkci f a dělení D předpisem

$$s(f, D) = \sum_{i=1}^{n} \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

a *horní (Darbouxův integrální) součet* příslušný funkci f a dělení D předpisem

$$S(f, D) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

(3) Definujeme *dolní Riemannův integrál funkce f na* $[a, b]$ jako

$$\underline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \sup\{s(f, D) \colon D \text{ je dělení } [a, b]\}$$

a *horní Riemannův integrál funkce f na* $[a, b]$ jako

$$\overline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \inf\{S(f, D) \colon D \text{ je dělení } [a, b]\}.$$

(4) Jestliže $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$, definujeme *Riemannův integrál funkce f na* $[a, b]$ jako

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \left(= \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \right).$$

Pokud existuje $\int_a^b f$, říkáme, že funkce f *je riemannovsky integrovatelná na* $[a, b]$; množinu všech riemannovsky integrovatelných funkcí na intervalu $[a, b]$ značíme symbolem $\mathcal{R}([a, b])$. Zápis $f \in \mathcal{R}([a, b])$ tedy znamená, že f je Riemannovsky integrovatelná na $[a, b]$.

Poznámka 62.

- Výše uvedená definice integrálu je tak zvaná Darbouxova definice Riemannova integrálu, se kterou pracujeme ve většině této kapitoly. Později uvidíme ještě Riemannovu definici (105), která jí je ekvivalentní (tj. dá stejný pojem integrálu), ale ne stejná (dokázat, že obě definice „vyjdou nastejno“ je netriviální úkol, který si odpustíme).

- Je možné celkem snadno ukázat, že pro kladnou funkci $f \in \mathbb{R}([a, b])$ platí rovnost $\int_a^b f = m(P_f)$, kde m značí Jordanův-Peanův obsah a množina P_f je podgraf funkce f na intervalu $[a, b]$ (viz výše). Jinými slovy tedy takto definovaný integrál opravdu vyjadřuje velikost plochy pod grafem v tom smyslu, ve kterém jsme si to výše určili.

- Nyní už víme, co je to určitý integrál (máme jeho definici). Nevíme ale, pro které funkce existuje a neumíme ho jednoduše vypočítat. Řešením těchto problému se zabýváme v následujícím.

Poznámka 63. V Definici 61 požadujeme omezenost funkce f na intervalu $[a,b]$. To není samoúčelný požadavek; jeho důležitost je patrná při ohledání definice integrálních součtů (dolního i horního). V těchto definicích se totiž vyskytují infima a suprema funkce f přes jisté intervaly. Aby bylo zaručeno, že tato infima a suprema jsou konečná, musíme předpokládat omezenost f přes všechny tyto intervaly, a tedy vlastně přes celé $[a,b]$. Tím pádem budeme mít, že i dolní a horní součty přes libovolné dělení jsou konečná čísla, bez čehož by naše následující dedukce nedávaly smysl.

Ve všech následujících větách (a lemmatech) týkajících se (obyčejného) Riemannova integrálu na uzavřeném intervalu budeme explicitně (třeba hned v následujícím lemmatu) nebo implicitně předpokládat omezenost funkce f. Co znamená něco předpokládat *implicitně*? Máme tím na mysli, že onen předpoklad není ve formulaci věty přímo zapsán, vyplývá ale z předpokladů ostatních. Přitom jsou různé typy takových situací – například:

- Předpokládám-li (jako je tomu třeba ve Větě 86) spojitost funkce f na $[a,b]$, nemusím už psát, že f má být na $[a,b]$ taky omezená, neboť spojitost na uzavřeném intervalu omezenost implikuje (Weierstrassova věta). Implicitní předpoklad tedy plyne z dříve dokázané věty.

- Třeba ve Větě 71 (i) předpokládáme, že existuje Riemannův integrál $\int_a^b f$. Protože v Definici 61 Riemannova integrálu uvažujeme výhradně omezené funkce, musí být funkce f, pro niž integrál existuje, omezená (pro neomezenou jsme totiž nedefinovali nic). Implicitní předpoklad omezenosti funkce f je tedy v tomto případě obsažen v definici integrálu.

Dále se pro celou tuto sekci domluvíme, že píšeme-li samotné slovo „integrál“, máme na mysli „Riemannův integrál“ (není-li řečeno jinak).

Lemma 64. *Nechť f je omezená na $[a,b]$ konstantou K (tj. $|f| \leqslant K$ na $[a.b]$) a D je dělení $[a,b]$. Potom platí nerovnosti*
$$-K(b-a) \leqslant s(f,D) \leqslant S(f,D) \leqslant K(b-a).$$

Důkaz. Prostřední nerovnost je vidět triviálně, porovnáme-li definice dolního a horního součtu; infimum množiny je totiž vždy $\leqslant$ jejímu supremu.

Dokážeme pouze poslední nerovnost; první nerovnost se dokáže analogicky.

$$\begin{aligned} S(f,D) &\overset{\text{def.}}{=} \sum_{i=1}^{n} \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)(x_i-x_{i-1}) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sup_{x\in[a,b]} f(x)(x_i-x_{i-1}) = \sup_{x\in[a,b]} f(x) \sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1}) \\ &= \sup_{x\in[a,b]} f(x)\cdot\big((x_n-x_{n-1})+(x_{n-1}-x_{n-2})+\ldots+(x_2-x_1)+(x_1-x_0)\big) \\ &= \sup_{x\in[a,b]} f(x)\cdot(x_n-x_0) \leqslant K(b-a). \end{aligned}$$

Pro první nerovnost jsme využili samozřejmého faktu, že když $A \subseteq B$ $(\subseteq \mathbb{R})$, pak $\sup A \leqslant \sup B$. V následující nerovnosti pak už ono supremum nezávisí na i („sčítacím indexu“), a tedy se dá ze sumy vytknout. □

Poznamenejme, že důkaz je také jasně vidět z obrázku. Například pravá strana poslední nerovnosti není nic jiného než obsah obdélníka o stranách $b-a$ a K, který obsahuje celý podgraf funkce f, neboť f je na $[a,b]$ omezená konstantou K.

Definice 65. Buďte D, D' dvě dělení intervalu $[a,b]$. Řekneme, že *D' je zjemnění D*, pokud D' obsahuje všechny dělící body z D (a obvykle i nějaké navíc), tj. chápeme-li D a D' jako množiny dělících bodů, pak D' je zjemnění D, pokud $D' \supseteq D$. Někdy se pro označení tohoto faktu používá též symbolu $D' \succ D$.

Lemma 66. *Buďte* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *omezená,* D, D' *dělení intervalu* $[a,b]$ *a* D' *zjemnění* D*. Potom*

$$s(f, D) \leqslant s(f, D') \leqslant S(f, D') \leqslant S(f, D).$$

Důkaz. Dokážeme pouze první nerovnost (prostřední plyne z předchozího lemmatu a je triviální; poslední nerovnost se dokáže analogicky jako nerovnost první). Protože D' vznikne z D přidáním konečně mnoha dělících bodů, stačí dokázat, že přidáním jediného dělícího bodu se dolní součet může jedině zvětšit (pak totiž postupně přidáme k D všechny chybějící dělící body z D' a hodnota příslušného dolního součtu se tím nemůže zmenšit). BÚNO tedy předpokládejme, že D' má o jediný dělící bod (označme ho z) víc. Předpokládejme, že $D = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ a z je prvkem i-tého intervalu dělení D, tj.

$$D' = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < z < x_i < \ldots < x_n = b\}.$$

Chceme dokázat, že $s(f, D') - s(f, D) \geqslant 0$. To provedeme následující sérií odhadů; první rovnost platí proto, že všechny členy z definice $s(f, D) = \sum_{i=1}^{n} \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\cdot(x_i - x_{i-1})$ se odečtou s příslušnými členy pro dělení D', ovšem až na ty, které se týkají intervalu $[x_{i-1}, x_i]$ ve kterém jediném se obě dělení (a tedy oba dolní součty) od sebe liší: dělení D' má (na rozdíl od D) tento interval rozdělený na $[x_{i-1}, z]$ a $[z, x_i]$.

$$\begin{aligned}
s(f, D') - s(f, D) &= \Big(\inf_{x\in[x_{i-1},z]} f(x)(z - x_{i-1}) + \inf_{x\in[z,x_i]} f(x)(x_i - z)\Big) - \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)(x_i - x_{i-1}) \\
&\geqslant \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)(z - x_{i-1}) + \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)(x_i - z) - \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)(x_i - x_{i-1}) \\
&= \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\big((z - x_{i-1}) + (x_i - z) - (x_i - x_{i-1})\big) \\
&= \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)(x_i - x_{i-1} - (x_i - x_{i-1})) = 0.
\end{aligned}$$

Podobně jako v důkazu Lemmatu 64 jsme rozšířili množinu, přes kterou bereme infimum; tím se hodnota infima může (ale nemusí) zmenšit, čímž je vysvětlena ona nerovnost. □

Lemma 67. *Nechť* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *je omezená a* D_1, D_2 *jsou libovolná dělení intervalu* $[a,b]$*. Potom*

$$s(f, D_1) \leqslant S(f, D_2).$$

Důkaz. Definujme $D' := D_1 \cup D_2$; D' je tedy dělení sestávající ze všech dělících bodů D_1 a všech dělících bodů D_2. Je jasné, že D' je společné zjemnění D_1 i D_2. Podle Lemmatu 64 a Lemmatu 66 dostáváme:

$$s(f, D_1) \leqslant s(f, D') \leqslant S(f, D') \leqslant S(f, D_2).$$ □

Poznámka 68. Buď f omezená konstantou K na $[a,b]$.

(i) Podle Lemmatu 64 je množina všech dolních součtů omezená, neboť pro libovolné dělení D platí $-K(b-a) \leqslant s(f, D) \leqslant K(b-a)$, což znamená, že $K(b-a)$ je horní závora množiny všech dolních součtů (a číslo $-K(b-a)$ ne). Proto $\underline{\int_a^b} f = \sup\{s(f, D)\colon D \text{ je dělení } [a,b]\}$ je konečné číslo a podle definice suprema (tj. nejmenší horní závory) platí $-K(b-a) \leqslant \underline{\int_a^b} f \leqslant K(b-a)$. Totéž (a z analogického důvodu) platí i pro $\overline{\int_a^b} f$.

(ii) Z předchozího bodu plyne, že pokud existuje integrál $\int_a^b f$, pak je konečný a splňuje

$$-K(b-a) \leqslant \int_a^b f \leqslant K(b-a).$$

(iii) Z Lemmatu 67 také snadno plyne univerzálně platná nerovnost

$$\underline{\int_a^b} f \leqslant \overline{\int_a^b} f.$$

Důkaz je vidět okamžitě z obecného tvrzení o množinách reálných čísel, které doporučuji dokázat jako snadné cvičení na pojmy suprema a infima: *Buďte* $A, B \subseteq \mathbb{R}$ *neprázdné množiny splňující* $\forall x \in A \ \ \forall y \in B : x \leqslant y$. *Potom* $\sup A \leqslant \inf B$.

(iv) Shrnutím všech těchto faktů dostáváme, že pro libovolná dělení D_1, D_2 intervalu $[a, b]$ a funkci f splňující na $[a, b]$ nerovnost $|f| \leqslant K$ platí následující nerovnosti:

$$-K(b-a) \leqslant s(f, D_1) \leqslant \underline{\int_a^b} f \leqslant \overline{\int_a^b} f \leqslant S(f, D_2) \leqslant K(b-a).$$

Příklad 69. Mějme konstantní funkci $f(x) = c$ na $[a, b]$. Pak $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b c\,\mathrm{d}x = c(b-a)$. To je jasné, protože máme-li libovolné dělení D intervalu $[a, b]$, pak

$$\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) = c \quad \text{a rovněž} \quad \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) = c,$$

kde $[x_{i-1}, x_i]$ je libovolný interval dělení D. Tím pádem je snadno (pouhým dosazením do definice dolního a horního součtu) vidět, že $s(f, D) = S(f, D) = c(b-a)$, a tedy i horní a dolní integrál mají tuto hodnotu.

Na druhou stranu, buď nyní f tak zvaná Dirichletova funkce definovaná předpisem

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{pokud } x \in \mathbb{Q}; \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Ukážeme, že neexistuje integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ pro žádný nedegenerovaný interval $[a, b]$:

Protože každý nedegenerovaný interval obsahuje nekonečně mnoho racionálních a nekonečně mnoho iracionálních čísel, je jasné, že funkce f nabývá na každém takovém intervalu I jak hodnoty 1 (a to ve všech racionálních bodech $x \in I$), tak i hodnoty 0 (ve všech iracionálních bodech I). Protože funkce f už žádných jiných hodnot nenabývá, je jasné, že

$$\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) = 0 \quad \text{a rovněž} \quad \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) = 1,$$

a to pro libovolný dělící interval $[x_{i-1}, x_i]$ libovolného dělení D. Tím pádem jsou všechny horní součty (bez ohledu na to, jak jemné dělení uvažujeme) rovny právě délce intervalu $[a, b]$, přes který integrujeme, a všechny dolní součty jsou rovny nule. Horní a dolní integrál se tedy nerovnají a integrál neexistuje.

Na těchto příkladech vidíme, že Riemannův integrál pro některé (např. konstantní) funkce existuje a pro jiné (např. pro Dirichletovu) funkce ne. △

Lemma 70 (Klíčové lemma: Bolzanova-Cauchyova podmínka pro existenci Riemannova integrálu)**.** *Nechť f je omezená na $[a, b]$, $a < b$. Pak platí*

(i) $$\int_a^b f = I \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists D \text{ dělení } [a, b] : I - \varepsilon < s(f, D) \leqslant S(f, D) < I + \varepsilon.$$

(ii) $$\int_a^b f \text{ existuje} \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists D \text{ dělení } [a, b] : S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon.$$

Důkaz. (i) ($\Rightarrow$): Nechť $\int_a^b f = I$. Budiž dáno libovolné $\varepsilon > 0$; máme najít „vhodné“ dělení D. Podle definice integrálu jest $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = I$ a podle definice suprema a infima musí tedy existovat dělení D_1, D_2 intervalu $[a, b]$, která splňují:

$$I - \varepsilon < s(f, D_1) \quad \text{a} \quad S(f, D_2) < I + \varepsilon.$$

Nechť D je společné zjemnění D_1 a D_2 (například $D = D_1 \cup D_2$); potom podle Lemmatů 64 a 66 dostáváme

$$I - \varepsilon < s(f, D_1) \leqslant s(f, D) \leqslant S(f, D) \leqslant S(f, D_2) < I + \varepsilon.$$

(i) ($\Leftarrow$): Nechť platí výrok na pravé straně; chceme dokázat, že $\underline{\int_a^b} f = I = \overline{\int_a^b} f$. Zvolíme-li tedy libovolné $\varepsilon > 0$, podle předpokladu existuje D dělení intervalu $[a, b]$ takové, že

$$I - \varepsilon < s(f, D) < S(f, D) < I + \varepsilon.$$

Podle posledního bodu Poznámky 68 dostáváme

$$I - \varepsilon < s(f, D) \leqslant \underline{\int_a^b} f \leqslant \overline{\int_a^b} f \leqslant S(f, D) < I + \varepsilon.$$

Protože $\varepsilon > 0$ mohlo být zvoleno libovolně malé a nerovnosti výše platí pro všechna kladná ε, musí být $I = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$.

(ii) ($\Rightarrow$): Plyne okamžitě z bodu *(i)*. (Cvičení.)

(ii) ($\Leftarrow$): Velmi podobné jako stejná implikace prvního bodu: Opět zvolme $\varepsilon > 0$ a najděme vhodné dělení D intervalu $[a, b]$, tj. takové, které splňuje nerovnost

$$S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon.$$

Jest (podle Poznámky 68 (iii))

$$s(f, D) \leqslant \underline{\int_a^b} f \leqslant \overline{\int_a^b} f \leqslant S(f, D),$$

odkud okamžitě plyne, že

$$0 \leqslant \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \leqslant S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon.$$

Opět uzavíráme důkaz konstatováním, že tato nerovnost platí pro libovolně malé $\varepsilon > 0$, takže $\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f = 0$, a integrál $\int_a^b f$ tedy skutečně existuje.

□

3.3 Základní vlastnosti Riemannova integrálu

Dříve než přistoupíme k důkazu existence Riemannova integrálu pro spojité (nebo monotónní) funkce a k důkazu Newtonovy-Leibnizovy formule, potřebujeme znát několik základních faktů. Vesměs se jedná o věci, které lze snadno „nahlédnout z obrázku“. Vizuální představa však často klame (a jistě nemůže být považována za důkaz), a proto si tato tvrzení dokážeme z definice a s použitím Klíčového lemmatu 70.

Věta 71.

(i) *Nechť existuje* $\int_a^b f$ *a nechť* $[c,d] \subseteq [a,b]$. *Potom existuje* $\int_c^d f$.

(ii) *Nechť* $c \in (a,b)$ *a nechť existují integrály* $\int_a^c f$, $\int_c^b f$. *Pak existuje i integrál* $\int_a^b f$ *a platí rovnost*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Důkaz. (i): Předpokládejme, že $a < c < d < b$; ostatní případy (tj. $a = c < d < b$, $a < c < d = b$) jsou jednodušší. Náš cíl je ověřit podmínku z Lemmatu 70 pro existenci integrálu $\int_c^d f$.

Buď tedy dáno $\varepsilon > 0$ libovolné. Podle Lemmatu 70 (a protože podle předpokladu existuje integrál $\int_a^b f$) existuje dělení D intervalu $[a,b]$ takové, že $S(f,D) - s(f,D) < \varepsilon$. Označme $D' = D \cup \{c,d\}$, tedy D' je dělení D, k jehož dělícím bodům jsme přidali ještě body c, d (pokud už v D nebyly); D' je tedy zjemnění D. Podle Lemmatu 66 jest

$$s(f,D) \leqslant s(f,D') \leqslant S(f,D') \leqslant S(f,D),$$

a tedy platí i

$$S(f,D') - s(f,D') < \varepsilon.$$

Víme, že $[a,b] = [a,c] \cup [c,d] \cup [d,b]$, přičemž $a,b,c,d \in D'$. Můžeme tedy dělení D' rozložit na tři dělení těchto tří menších intervalů:

$$D_1 = D' \cap [a,c], \quad D_2 = D' \cap [c,d], \quad D_3 = D' \cap [d,b].$$

D_2 je tedy dělení intervalu $[c,d]$ a pro něj chceme dokázat platnost podmínky z Lemmatu 70, tj. chceme $S(f,D_2) - s(f,D_2) < \varepsilon$.

Následující rovnosti jsou nyní jasné: třeba horní součet přes celé D' (tj. pro celý interval $[a,b]$) je součet horních součtů pro ony tři části – a podobně pro dolní součet:

$$s(f,D') = s(f,D_1) + s(f,D_2) + s(f,D_3), \quad S(f,D') = S(f,D_1) + S(f,D_2) + S(f,D_3).$$

Celkem dostáváme:

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant S(f,D_2) - s(f,D_2) \\
&\leqslant S(f,D_2) - s(f,D_2) + S(f,D_1) - s(f,D_1) + S(f,D_3) - s(f,D_3) \\
&= S(f,D') - s(f,D') < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Tedy opravdu pro dané $\varepsilon > 0$ dovedeme najít dělení intervalu $[c,d]$, pro nějž se horní a dolní součet liší o méně než ε (a to dělení D_2).

(ii) Podle předpokladu existují integrály $I_1 := \int_a^c f$ a $I_2 := \int_c^b f$. Opět chceme použít Lemma 70, tentokrát jeho bod (i) ($\Leftarrow$). Buď dáno libovolné $\varepsilon > 0$. Podle téhož tvrzení (implikace ($\Rightarrow$)) z existence I_1 a I_2 dostáváme existenci dělení D_1 intervalu $[a,c]$ a dělení D_2 intervalu $[c,b]$ takových, že

$$\begin{aligned}
I_1 - \frac{\varepsilon}{2} < s(f,D_1) \leqslant S(f,D_1) < I_1 + \frac{\varepsilon}{2}; \\
I_2 - \frac{\varepsilon}{2} < s(f,D_2) \leqslant S(f,D_2) < I_2 + \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Položme $D = D_1 \cup D_2$; protože D_1 je dělení $[a,c]$ a D_2 je dělení $[c,b]$, je D dělení $[a,b]$ a podobně jako v předchozím bodě důkazu jsou zřejmé rovnosti

$$s(f,D) = s(f,D_1) + s(f,D_2), \quad S(f,D) = S(f,D_1) + S(f,D_2).$$

Sečtením obou řádků v (3.1) tedy dostáváme

$$I_1 + I_2 - \varepsilon < s(f, D) \leqslant S(f, D) < I_1 + I_2 + \varepsilon.$$

Podle Lemmatu 70 tedy existuje integrál $\int_a^b f$ a má hodnotu $I_1 + I_2$. □

Definice 72.

- Definujeme $\int_c^c f = 0$ (pro libovolný bod c v definičním oboru f);
- Pokud $c > d$, definujeme $\int_c^d f = -\int_d^c f$. Jinými slovy, přehození mezí způsobí změnu znaménka integrálu.

Poznámka 73. Buďte na okamžik a, b, c libovolná tři reálná čísla (libovolně uspořádaná, tedy nemusí teď například být $a < b$ apod.). Předpokládejme dále, že integrál f existuje na největším uzavřeném intervalu, který má za dolní i horní mez jedno z těchto tří čísel (tj. na intervalu $[\min\{a, b, c\}, \max\{a, b, c\}]$). Pak platí rovnost

$$\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f. \tag{3.2}$$

Kompletní důkaz vynecháme, i když je jednoduchý; musí se totiž tato rovnost dokázat zvlášť pro každé z možných pořadí bodů a, b, c (je 6 možností). Pro $a < c < b$ jsme důkaz už provedli ve větě výše; ostatní důkazy však využijí už dokázané a jsou snadné. Pro ilustraci podávám důkaz pro případ $a \leqslant b \leqslant c$: Můžeme předpokládat, že platí ostré nerovnosti, jinak je totiž jeden nebo všechny integrály v (3.2) nulový (z důvodu rovnosti dolní a horní meze), a rovnost je triviální. Je-li tedy $a < b < c$, pak platí

$$\int_a^c f + \int_c^b f \overset{72}{=} \int_a^c f - \int_b^c f \overset{71\text{(i), (ii)}}{=} \int_a^b f + \int_b^c f - \int_b^c f = \int_a^b f.$$

Jak je naznačeno, prostřední rovnost plyne z obou tvrzení Věty 71: Nejprve totiž použijeme její první bod pro důkaz existence obou integrálů $\int_a^b f$ a $\int_b^c f$ a posléze nám její druhý bod dá rovnost $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$ (je potřeba si uvědomit, že oproti Větě 71 mají nyní body b, c přehozené úlohy, neboť nyní předpokládáme $a < b < c$, zatímco ve znění věty máme $a < c < b$). Tím je tedy důkaz hotov pro $a \leqslant b \leqslant c$; podobně bychom postupovali ve zbývajících případech.

Věta 74 (Linearita Riemannova integrálu)**.** *Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta, f funkce. Následující rovnosti platí, má-li jejich pravá strana smysl.*

(i) $\displaystyle\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f;$

(ii) $\displaystyle\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$

Cvičení 75.

(i) Buď $\alpha \geqslant 0$ a $M \subseteq \mathbb{R}$ libovolná neprázdná podmnožina. Pak platí

- $\sup(\alpha M) = \alpha \sup M$;
- $\inf(\alpha M) = \alpha \inf M$;
- $\sup(-M) = -\inf M$;
- $\inf(-M) = -\sup M$.

(ii) Buďte f, g funkce definované na množině $M \subseteq \mathbb{R}$. Pak platí

$$\begin{aligned} \sup_{x\in M}(f(x)+g(x)) &\leqslant \sup_{x\in M} f(x) + \sup_{x\in M} g(x); \\ \inf_{x\in M}(f(x)+g(x)) &\geqslant \inf_{x\in M} f(x) + \inf_{x\in M} g(x). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Důkazy těchto faktů jsou jednoduchá až triviální cvičení na pojmy suprema infima.

Důkaz. První bod je opravdu snadné cvičení na supremum a infimum, a tak si čtenář rád doplní důkaz sám. Z druhého bodu dokážeme například druhou nerovnost (první je analogická). Nejprve si vzpomeňme, že kromě jednoduchých rovností obsažených v prvním bodě cvičení platí ještě následující dvě, kde $A, B \subseteq \mathbb{R}$ a $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$:

- $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$;
- $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$.

Uvědomme si, co symboly na obou stranách druhé nerovnice v (3.3) znamenají (poslední rovnost plyne z faktu pro infimum součtu množin výše):

$$\text{L.S.} = \inf\{f(x) + g(x) : x \in M\};$$
$$\text{P.S.} = \inf\{f(x) : x \in M\} + \inf\{g(y) : y \in M\} = \inf\{f(x) + g(y) : x, y \in M\}.$$

Vidíme tedy, že zatímco na levé straně máme infimum přes množinu součtů hodnot f a g *ve stejném bodě*, na pravé straně připouštíme i součty hodnot f a g v různých bodech. Proto množina na levé straně je podmnožinou množiny na pravé straně a její infimum tedy nemůže být menší:

$$\{f(x) + g(x) : x \in M\} \subseteq \{f(x) + g(y) : x, y \in M\} \quad \Longrightarrow \quad \text{L.S.} \geqslant \text{P.S.}$$ □

Poznámka 76. Skutečnost, že v (3.3) nelze dokázat rovnosti a platí pouze neostré nerovnosti, je patrná třeba z příkladu $f(x) = \sin^2 x$, $g(x) = \cos^2 x$, $M = [0, \pi]$. Pak zjevně nenastává rovnost:

$$\inf_{x\in[0,\pi]}(\sin^2 x + \cos^2 x) = \inf_{x\in[0,\pi]} 1 = 1 > 0 = \inf_{x\in[0,\pi]} \sin^2 x + \inf_{x\in[0,\pi]} \cos^2 x.$$

(Sami se podívejte, jak to dopadne pro supremum.)

Důkaz Věty 74. (i): Nejprve vzorec dokážeme za předpokladu $\alpha \geqslant 0$, potom tvrzení dokážeme pro $\alpha = -1$ a spojením těchto výsledků vzorec odvodíme i pro libovolné $\alpha < 0$.

$\underline{\alpha \geqslant 0}$: Předpokládáme, že $\int_a^b f$ existuje (tj. pravá strana rovnice má smysl) a chceme dokázat, že existuje i integrál $\int_a^b \alpha f$ a je roven číslu $I := \alpha \int_a^b f$. Podle definice integrálu (61) tedy potřebujeme vědět, že $\underline{\int_a^b}\alpha f = \overline{\int_a^b}\alpha f = I$.

Je snadno vidět (vytknutím α ze sumy), že

$$s(\alpha f, D) = \alpha s(f, D) \quad \text{a} \quad S(\alpha f, D) = \alpha S(f, D). \tag{3.4}$$

Podle Definice 61 a Cvičení 75 (i) tedy platí

$$\underline{\int_a^b} \alpha f \overset{\text{def.}}{=} \sup\{s(\alpha f, D) : D \text{ dělení } [a, b]\} \overset{(3.4)}{=} \sup\{\alpha s(f, D) : D \text{ dělení } [a, b]\}$$
$$\overset{75}{=} \alpha \sup\{s(f, D) : D \text{ dělení } [a, b]\} \overset{\text{def.}}{=} \alpha \underline{\int_a^b} f \overset{\text{def.}}{=} \alpha \int_a^b f = I.$$

Analogicky dostaneme i $\overline{\int_a^b}\alpha f = I$, a jsme tedy hotovi za předpokladu $\alpha \geqslant 0$.

$\underline{\alpha = -1:}$ Jest

$$
\begin{aligned}
S(-f, D) &= \sum_{i=1}^{n} \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} (-f)(x)\cdot(x_i - x_{i-1}) \overset{75}{=} \sum_{i=1}^{n} \Big(-\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\Big)\cdot(x_i - x_{i-1}) \\
&= -\sum_{i=1}^{n} \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\cdot(x_i - x_{i-1}) = -s(f, D).
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

Analogicky dostaneme $s(-f, D) = -S(f, D)$. Následující výpočet je už podobný jako v odstavci výše, jen se nám změní horní součet na dolní a infimum na supremum:

$$
\begin{aligned}
\overline{\int_a^b}(-f) &\overset{\text{def.}}{=} \inf\{S(-f, D)\colon D \text{ dělení } [a, b]\} \overset{(3.5)}{=} \inf\{-s(f, D)\colon D \text{ dělení } [a, b]\} \\
&\overset{75}{=} -\sup\{s(f, D)\colon D \text{ dělení } [a, b]\} \overset{\text{def.}}{=} -\underline{\int_a^b} f \overset{\text{def.}}{=} -\int_a^b f.
\end{aligned}
$$

Analogicky dostaneme i $\underline{\int_a^b}(-f) = -\int_a^b f$, a tedy skutečně platí $\int_a^b(-f) = -\int_a^b f$.

$\underline{\alpha < 0:}$ Už máme dokázáno, že z integrálu lze „vytknout“ nezápornou konstantu a znaménko „−“. Libovolnou zápornou konstantu α tedy můžeme vytknout tak, že nejprve vytkneme její záporné znaménko a pak její (kladnou) velikost (všimněte si, že pro $\alpha < 0$ jest $\alpha = -|\alpha|$):

$$
\int_a^b \alpha f = \int_a^b (-|\alpha| f) = -\int_a^b |\alpha| f = -|\alpha| \int_a^b f = \alpha \int_a^b f.
$$

(ii): Důkaz druhého bodu připomíná důkaz Věty 71 (ii), je však o kousek komplikovanější náročnější prací se supremem a infimem (využijeme Cvičení 75 (ii)). Chceme ověřit podmínku Lemmatu 70 (i). Budiž tedy dáno libovolné $\varepsilon > 0$ a označme

$$
I_f := \int_a^b f, \quad I_g := \int_a^b g.
$$

Pravá strana dokazované rovnosti má smysl podle předpokladu, a tedy oba integály existují. Podle Lemmatu 70 tedy existují dělení D_1, D_2 intervalu $[a, b]$ splňující:

$$
\begin{aligned}
I_1 - \frac{\varepsilon}{2} &< s(f, D_1) \leqslant S(f, D_1) < I_1 + \frac{\varepsilon}{2}; \\
I_2 - \frac{\varepsilon}{2} &< s(g, D_2) \leqslant S(g, D_2) < I_2 + \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

Nechť $D = D_1 \cup D_2$; D_1, D_2 jsou dělení téhož intervalu $[a, b]$, a tedy $D = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ je jejich společné zjemnění. Podle Cvičení 75 (ii) platí pro libovolné i:

$$
\begin{aligned}
\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} (f(x) + g(x)) &\leqslant \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) + \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} g(x); \\
\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} (f(x) + g(x)) &\geqslant \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) + \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} g(x).
\end{aligned}
$$

Vynásobíme-li každou nerovnost (pro každé i) číslem $(x_i - x_{i-1})$, a sečteme-li přes všechna i, dostaneme ihned

$$
\begin{aligned}
S(f + g, D) &\leqslant S(f, D) + S(g, D); \\
s(f + g, D) &\geqslant s(f, D) + s(g, D).
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

Nyní v (3.6) nahradíme D_1, D_2 dělením D; tím se platnost nerovností neporuší (podle Lemmatu 66). Sečtením obou řádků a aplikací (3.7) pak dostáváme:

$$I_f + I_g - \varepsilon < s(f, D) + s(g, D) \leqslant s(f+g, D) \leqslant S(f+g, D) \leqslant S(f, D) + S(g, D) < I_f + I_g + \varepsilon.$$

Pro dané $\varepsilon > 0$ jsme tedy našli dělení D takové, že $s(f+g, D)$ i $S(f+g, D)$ se od $I_f + I_g$ liší o méně než $\varepsilon > 0$. Podle Lemmatu 70 (i) tedy existuje integrál $\int_a^b (f+g)$ a jeho hodnota je $I_f + I_g$. Tím je důkaz hotov. □

Poznámka 77. Poslední věta má zajímavý důsledek, který ještě více osvětluje jméno, které jsme jí dali („linearita...“). Označíme-li $\mathcal{R}([a,b])$ množinu všech funkcí, které mají na $[a,b]$ Riemannův integrál, pak $\mathcal{R}([a,b])$ je podle předchozí věty vektorový prostor. Je to totiž podmnožina vektorového prostoru všech funkcí, která je uzavřená na operace sčítání vektorů (tj. součet riemannovsky integrovatelných funkcí je riemannovsky integrovatelný) a násobení konstantou (tj. pokud $f \in \mathcal{R}([a,b])$, pak i $\alpha f \in \mathcal{R}([a,b])$).

Samotný Riemannův integrál přes $[a,b]$ můžeme nyní interpretovat jako zobrazení $T: \mathcal{R}([a,b]) \to \mathbb{R}$ na tomto vektorovém prostoru, které každému bodu (tj. nějaké obyčejné funkci $f : [a,b] \to \mathbb{R}$) přiřadí reálné číslo takto:

$$T(f) = \int_a^b f.$$

Pro T je tedy proměnná f. Všimněme si, že podle předchozí věty pro libovolné konstanty $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ platí

$$T(\alpha f + \beta g) = \alpha T(f) + \beta T(g),$$

tj. zobrazení T je lineární forma na vektorovém prostoru $\mathcal{R}([a,b])$.

Věta 78. *Nechť existují integrály $\int_a^b f$, $\int_a^b g$. Potom:*

(i) Jestliže $f \leqslant g$ na $[a,b]$, pak $\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$.

(ii) Existuje také integrál $\int_a^b |f|$ a jest $\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$.

Důkaz. (i): Chceme ukázat, že $\int_a^b g - \int_a^b f \geqslant 0$. Protože $g - f \geqslant 0$ na $[a,b]$, je každý integrální součet (horní, dolní, přes libovolné dělení) funkce $g - f$ na tomto intervalu nezáporný. Je tedy z definice jasné, že $\int_a^b (g-f) \geqslant 0$, pokud tento integrál existuje. Jeho existence však plyne z linearity Riemannova integrálu (Věta 74):

$$\int_a^b g - \int_a^b f \overset{74}{=} \int_a^b (g-f) \geqslant 0.$$

□

Poznámka 79. Druhý bod této věty vyjadřuje vlastnost Riemannova integrálu, kterou nazýváme *absolutní konvergencí*. Všimněte si nejen nerovnosti samotné, nýbrž i faktu, že kdykoliv existuje integrál $\int_a^b f$, pak existuje i integrál $\int_a^b |f|$.

Příklad 80. Buď f Dirichletova funkce (viz Příklad 69) a položme $g := f - 1/2$, tj. g má ve všech racionálních bodech hodnotu $1/2$ a ve všech iracionálních bodech hodnotu $-1/2$. Je jasné, že absolutní hodnota $|g| = 1/2$ je konstantní na $\mathbb{R}$, a tedy má na libovolném intervalu $[a,b]$ Riemannův integrál.

Je ale snadné dokázat, že sama funkce g (bez absolutní hodnoty) Riemannův integrál nemá. To doporučuji jako cvičení, které je možné provést dvěma způsoby. Buďto podobně jako jsme to udělali výše pro funkci f, nebo je možné využít tři už známá fakta: (1) neexistuje $\int_a^b f$, (2) existuje $\int_a^b \frac{1}{2}$, (3) linearita Riemannova integrálu.

Na příkladu funkce g vidíme, že (podle Věty 78) platí pouze implikace

$$\text{existuje} \int_a^b f \quad \Rightarrow \quad \text{existuje} \int_a^b |f|,$$

ale opačná implikace neplatí, protože g splňuje její předpoklad a nikoliv její závěr:

$$\text{existuje} \int_a^b |g| \quad \not\Rightarrow \quad \text{existuje} \int_a^b g. \qquad \triangle$$

3.4 Stejnoměrná spojitost

Definice 81. Nechť $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval a f je funkce definovaná na I. Řekneme, že f je *stejnoměrně spojitá na I*, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in I\ \ \forall y \in I : |x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{3.8}$$

Poznámka 82. Porovnejme tuto definici s definicí obyčejné spojitosti. Funkce f je spojitá intervalu I, pokud je v každém jeho bodě spojitá podle obvyklé definice (místo definice s limitou použijeme definici s kvantifikátory, která je ekvivalentní), tj.

$$f \text{ je spojitá na } I \iff \forall x \in I : f \text{ je spojitá v } x \iff$$
$$\forall x \in I\ \ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in I : |x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{3.9}$$

Je vidět, že rozdíl mezi spojitostí na I a *stejnoměrnou* spojitostí na I je v pořadí kvantifikátorů: v (3.8) máme kvantifikátor „$\forall x \in I$“ až za „$\exists \delta > 0$“, zatímco v (3.9) je tomu naopak.

To znamená, že pro obyčejnou spojitost (3.9) nám stačí umět najít vhodné δ až poté, co nám nepřítel zadá ε i x. U stejnoměrné spojitosti je tomu jinak: Nepřítel nám prozradí pouze ε, ale volbu x odloží a počká si nejdřív, jaké dáme δ. Je jasné, že tato druhá situace je pro nás obtížnější: Musíme se ujistit, že naše volba δ zafunguje, ať nám nepřítel dá jakékoliv x se mu zlíbí – musíme tedy umět najít „univerzální δ“, tj. takové, které funguje pro všechna x.

Je přitom jasné, že máme-li obtížnější situaci při důkazu, znamená to, že dokazujeme silnější vlastnost, a je tedy intuitivně zřejmé, že *stejnoměrná spojitost* implikuje *obyčejnou spojitost* (formální důkaz, že (3.8)$\Longrightarrow$(3.9) je snadné cvičení). Opačná implikace obecně neplatí, v následující větě však poznáme, že pokud I je uzavřený a omezený interval, pak opačná implikace platí taky.

Příklad 83. Funkce $f(x) = 1/x$ je spojitá na intervalu $I := (0, \infty)$, ale není na něm stejnoměrně spojitá.

Důkaz tohoto tvrzení je snadný; fakt spojitosti dané funkce plyne z vět dokázaných v prvním semestru. Máme dokázat, že $f(x) = \frac{1}{x}$ není na $(0, \infty)$ stejnoměrně spojitá, tj. máme dokázat negaci výroku (3.8), tedy výrok

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \in I\ \exists y \in I : |x - y| < \delta\ \wedge\ |f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon. \tag{3.10}$$

Položme $\varepsilon = 1$ a budiž dáno libovolné $\delta > 0$; musíme nyní najít vhodné body $x, y \in I$: Zvolme nějaké $x \in (0, \delta)$, $x < 1$. Dále zvolme nějaké $y \in (0, x/2)$. Ukážeme, že platí obě nerovnosti v dokazovaném výroku. První nerovnost plyne z toho, že podle volby x, y máme $0 < y < x < \delta$. Druhá nerovnost plyne z faktů $x < 1$, $y < x/2$ a výpočtu

$$f(y) - f(x) = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} > \frac{1}{x/2} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x}\Big(\frac{1}{1/2} - 1\Big) = \frac{1}{x} > 1 = \varepsilon.$$

Dokázali jsme tedy negaci výroku, že f je na I stejnoměrně spojitá. $\triangle$

Věta 84. *Nechť je funkce f spojitá na (omezeném, uzavřeném) intervalu $[a, b]$. Pak f je stejnoměrně spojitá na $[a, b]$.*

Důkaz. Sporem: Předpokládejme, že f je na $I := [a, b]$ spojitá, ale ne stejnoměrně spojitá – tj. nechť platí výrok (3.10) – a zafixujme příslušné $\varepsilon > 0$, jehož existence je tímto výrokem garantována. Nahradíme-li $\delta > 0$ výrazem $1/n$, vidíme, že podle (3.10) platí pro naše pevné ε:

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n, y_n \in [a, b] \colon |x_n - y_n| < \frac{1}{n} \ \wedge\ |f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon. \tag{3.11}$$

Tím tedy dostaneme pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ dvojici bodů x_n, y_n („fungujících“ pro naše pevně zvolené ε a pro $\delta = 1/n$), takže můžeme utvořit dvojici posloupností $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ prvků intervalu $[a, b]$. Protože jde o omezené posloupnosti (a to čísly a, b), dostáváme podle Bolzanovy-Weierstrassovy věty existenci konvergentní vybrané posloupnosti $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ (kde $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{N}$ je rostoucí posloupnost indexů); označme $t = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$.

Tvrdím, že vybraná posloupnost $\{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ (s těmi stejnými indexy) je nutně taky konvergentní a má stejnou limitu t; to plyne z následujícího odhadu (v němž druhá nerovnost plyne z volby x_n, y_n v souladu s (3.11)):

$$|y_{n_k} - t| = |y_{n_k} - x_{n_k} + x_{n_k} - t| \leqslant |y_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - t| \leqslant \frac{1}{n_k} + |x_{n_k} - t| \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Protože f je spojitá, podle Heineho věty platí $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(t)$ a $\lim_{k\to\infty} f(y_{n_k}) = f(t)$. Celkem tedy dostáváme spor takto:

$$0 < \varepsilon \overset{(3.11)}{\leqslant} |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \leqslant |f(x_{n_k}) - f(t)| + |f(y_{n_k}) - f(t)| \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Slovy řečeno jsme dostali dvě posloupnosti hodnot, které od sebe udržují vzdálenost aspoň ε, ale přitom mají stejnou limitu $f(t)$, což není možné, a důkaz je hotov. □

Poznámka 85.

- Buďte I, J intervaly, $I \subseteq J$. Nechť f je stejnoměrně spojitá na J. Pak f je stejnoměrně spojitá na I. (Důkaz je triviální.)
- Víme, že $1/x$ není stejnoměrně spojitá na $(0, 1)$, ale podle Věty 84 je spojitá na libovolném intervalu tvaru $[a, 1]$, kde $a > 0$, třeba na $[1/10^6, 1]$.
- Funkce $f(x) = \sqrt{x}$ je (podle stejné věty) stejnoměrně spojitá na $[0, 1]$, i když v nule má nekonečnou derivaci zprava (tj. roste tím rychleji, čím blíže jsme u nuly, podobně jako $1/x$). Je to dáno tím, že $\sqrt{x}$ je zprava spojitá v 0, tedy pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje δ, které funguje v tomto bodě 0. To samé δ však funguje i pro všechny ostatní body definičního oboru $\sqrt{x}$, neboť tato rostoucí funkce roste čím dál pomaleji (je konkávní).

3.5 Existence Riemannova integrálu

Věta 86. *Nechť je funkce f spojitá na $[a, b]$. Pak f má na $[a, b]$ Riemannův integrál.*

Důkaz. Nejprve si uvědomme, že libovolná spojitá funkce na uzavřeném a omezeném intervalu je podle Weierstrassovy věty omezená (dokonce nabývá svého maxima i minima), takže f je omezená na $[a, b]$, a má tedy smysl vůbec se pokoušet dokázat existenci příslušného Riemannova integrálu. Pro to budeme chtít použít Lemma 70 (ii), tj. naším cílem bude ověřit platnost výroku

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists D \text{ dělení } [a,b]\colon\ S(f,D) - s(f,D) < \varepsilon.$$

Budiž tedy dáno libovolné $\varepsilon > 0$; chceme najít vhodné dělení D. Podle Věty 84 je funkce f na intervalu $[a,b]$ nejen spojitá (to je náš předpoklad), nýbrž dokonce stejnoměrně spojitá (to je tvrzení citované věty); podle Definice stejnoměrné spojitosti (81) tedy platí následující výrok (kde ε nahradíme písmenem η, aby nedošlo ke kolizi značení – ε už zde totiž využíváme)

$$\forall \eta > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in [a,b]\ \forall y \in [a,b]\colon |x-y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \eta.$$

Dosadíme-li nyní $\eta = \frac{\varepsilon}{b-a}$ (což je kladné číslo), dostaneme platnost výroku

$$\exists \delta > 0\ \forall x \in [a,b]\ \forall y \in [a,b]\colon |x-y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}. \tag{3.12}$$

Nějaké takové $\delta > 0$ si vezměme a najděme libovolné dělení $D = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ intervalu $[a,b]$ takové, že všechny intervaly $[x_{i-1}, x_i]$ dělení D jsou kratší než δ, čili dělení takové, že pro všechna $i = 1, 2, \ldots, n$ jest

$$x_i - x_{i-1} < \delta.$$

Nyní uvažujme kterýkoliv z intervalů $[x_{i-1}, x_i]$. Protože jeho délka je menší než $\delta > 0$, pro libovolné dva jeho body $x, y \in [x_{i-1}, x_i]$ platí, že $|x - y| < \delta$, takže podle (3.12) platí

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}. \tag{3.13}$$

Nyní můžeme opět aplikovat Weierstrassovu větu – tentokrát na (spojitou) funkci f na (uzavřeném, omezeném intervalu) $[x_{i-1}, x_i]$: Podle ní funkce na tom intervalu nabývá svého maxima (řekněme v bodě x_M) i minima (řekněme v bodě x_m). Tím pádem (pro kterékoliv $i = 1, 2, \ldots, n$) dostáváme

$$\sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) - \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) = \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) - \min_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) = f(x_M) - f(x_m) \overset{(3.13)}{<} \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Tuto nerovnost nyní aplikujeme na každý ze sčítanců vyskytujících se v integrálních součtech:

$$\begin{aligned}
S(f,D) - s(f,D) &= \sum_{i=1}^{n} \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \cdot (x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \cdot (x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \Big(\sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) - \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \Big) \cdot (x_i - x_{i-1}) \\
&< \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a} (x_i - x_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \\
&= \frac{\varepsilon}{b-a} \big((x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \ldots + (x_2 - x_1) + (x_1 - x_0) \big) \\
&= \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Tím je dokázána požadovaná nerovnost $S(f,D) - s(f,D) < \varepsilon$, a důkaz je hotov. □

Věta 87. *Nechť f je monotónní na $[a,b]$. Pak f má na $[a,b]$ Riemannův integrál.*

Důkaz. Budiž dáno $\varepsilon > 0$; podle Lemmatu 70 (ii) nám stačí najít dělení D intervalu $[a, b]$ takové, že $S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon$. Předpoklad věty je, že f je na $[a, b]$ monotónní, tj. neklesající nebo nerostoucí; bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že nastává první možnost (důkaz pro druhou možnost je analogický).

Položme $\delta = \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$. Jistě existují dělení $[a, b]$ jejichž všechny intervaly jsou kratší než δ – nějaké takové dělení $D = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ si tedy vezměme. Důkaz je dokončen následujícím lehkým výpočtem, v němž třetí rovnost plyne z toho, že f je neklesající (takže je jasné, ve kterém bodě každého intervalku nabývá maxima a ve kterém minima). Jediná nerovnost („$<$“) plyne z volby dělení D.

$$
\begin{aligned}
S(f, D) - s(f, D) &= \sum_{i=1}^{n} \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\cdot(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\cdot(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\Big(\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) - \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\Big)\cdot(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\big(f(x_i) - f(x_{i-1})\big)\cdot(x_i - x_{i-1}) \\
&< \sum_{i=1}^{n}\big(f(x_i) - f(x_{i-1})\big)\cdot\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} \\
&= \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}\sum_{i=1}^{n}\big(f(x_i) - f(x_{i-1})\big) \\
&= \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}\Big(\big(f(x_n) - f(x_{n-1})\big) + \big(f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})\big) + \ldots + \big(f(x_1) - f(x_0)\big)\Big) \\
&= \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}\cdot\big(f(x_n) - f(x_0)\big) = \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}\cdot\big(f(b) - f(a)\big) = \varepsilon. \qquad \square
\end{aligned}
$$

Poznámka 88. Funkce $f(x) = \operatorname{sgn} x$ je na $\mathbb{R}$ neklesající, a má tedy Riemannův integrál na libovolném intervalu $[a, b]$ – například tedy existuje integrál $\int_{-1}^{1} \operatorname{sgn} x \,\mathrm{d}x$. Funkce sgn není na intervalu $[-1, 1]$ spojitá (má tam „skoky“), to ale podle Věty 87 nevadí, integrál existuje.

Důsledek 89. *Změna funkce v konečně mnoha bodech nemá vliv na existenci ani hodnotu jejího Riemannova integrálu.*

Důkaz. Nejprve Důsledek dokážeme pro jediný bod $c \in [a, b]$, tj. funkci f změníme v tomto jediném bodě, a to o hodnotu $\alpha \in \mathbb{R}$. Definujme pomocnou funkci g takto:

$$
g(x) = \begin{cases} \alpha & \text{pro } x = c; \\ 0 & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \{c\}. \end{cases}
$$

Funkci $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ změníme v bodě c (a nikde jinde) o hodnotu α prostě tím, že k f přičteme g (ta je totiž podle definice nulová všude až na bod c, kde má hodnotu α). Náš cíl je dokázat rovnost

$$
\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)\,\mathrm{d}x, \quad \text{má-li jedna strana smysl.} \tag{3.14}
$$

Podívejme se nyní na integrál $\int_a^b g$; dokážeme, že existuje a jeho hodnota je 0. Definujme ještě dvě další pomocné funkce g_1, g_2 takto:

$$
g_1(x) = \begin{cases} \alpha & \text{pro } x \geqslant c; \\ 0 & \text{pro } x < c; \end{cases} \quad \text{a} \quad g_2(x) = \begin{cases} \alpha & \text{pro } x > c; \\ 0 & \text{pro } x \leqslant c. \end{cases}
$$

Obě funkce jsou konstantní až na jeden skok v bodě c – jsou tedy monotónní a podle Věty 87 existují integrály $\int_a^b g_1$ a $\int_a^b g_2$. Protože je snadno vidět, že $g = g_1 - g_2$, dostáváme rovnost (jejíž pravá strana má smysl):

$$\int_a^b g = \int_a^b (g_1 - g_2) = \int_a^b g_1 - \int_a^b g_2.$$

Tím pádem integrál $\int_a^b g$ existuje.

Předpokládejme na okamžik, že $\alpha > 0$. Potom podle definice Riemannova integrálu platí

$$\int_a^b g = \underline{\int_a^b} g = \sup\{s(g, D)\colon\ D \text{ je dělení } [a, b]\}. \tag{3.15}$$

Protože je funkce g je nenulová (a kladná) v jediném bodě (a to c), jest $s(g, D) = 0$ pro libovolné dělení D, a tedy všechna čísla v rovnici (3.15) jsou nulová.

Pokud $\alpha < 0$ použijeme analogický argument s horním integrálem místo dolního a horními součty místo dolních. Pokud $\alpha = 0$, je rovnost $\int_a^b g = 0$ triviální.

Platnost tvrzení (3.14) nyní vyplyne takto: Má-li smysl levá strana rovnosti (tj. existuje-li $\int_a^b f$), pak platí

$$\int_a^b f = \int_a^b f + \int_a^b g \overset{\text{V74}}{=} \int_a^b (f + g).$$

Na druhou stranu, má-li smysl pravá strana rovnosti (3.14), počítáme takto:

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b (f + g) - \int_a^b g \overset{\text{V74}}{=} \int_a^b (f + g - g) = \int_a^b f.$$

Tím je důkaz hotov pro případ, kdy funkci f měníme v jediném bodě. Chceme-li funkci měnit ve více bodech, provedeme konečně mnoho úprav v každém jednotlivém z těch bodů a existenci i hodnota integrálu zůstanou stále stejné (formálně bychom to mohli dokázat matematickou indukcí). □

3.6 Základní věta kalkulu

Věta 90. *Nechť f je spojitá na intervalu $[a, b]$, $c \in [a, b]$. Označme*

$$F(x) = \int_c^x f = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Potom F je primitivní funkce k f na $[a, b]$ (tj. $F' = f$ na $[a, b]$).

Značení. Pro účely následujícího důkazu označme $[x; y]$ (tj. se středníkem) uzavřený interval se zcela libovolnými krajními body x, y (nemusí být $x \leqslant y$). Pokud tedy $x \leqslant y$, je $[x; y] = [x, y]$, a pokud $x > y$, pak $[x; y] = [y, x]$. Toto značení nám zjednoduší vyjadřování, protože díky němu odpadne nutnost rozlišovat dva případy.

Důkaz. Podle Věty 86 existuje Riemannův integrál funkce f na každém intervalu tvaru $[c; x]$ pro $x \in [a, b]$, protože f je na každém takovém intervalu spojitá (je totiž podle předpokladu spojitá na celém $[a, b]$). Proto je funkce F na intervalu $[a, b]$ dobře definovaná.

Zvolme nyní libovolný bod $d \in [a,b]$; dokážeme, že $F'(d) = f(d)$. Pro jednoduchost předpokládejme, že $d \in (a,b)$. Kdyby $d = a$, resp. $d = b$, pak bychom pracovali s limitou (a spojitostí) zprava, resp. zleva. Počítejme nyní přímo z definice derivace:

$$\begin{aligned}
F'(d) &= \lim_{x\to d} \frac{F(x)-F(d)}{x-d} \\
&= \lim_{x\to d} \frac{\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_c^d f(t)\,\mathrm{d}t}{x-d} \\
&= \lim_{x\to d} \frac{\int_d^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t}{x-d} \\
&= \lim_{x\to d} \frac{\int_d^x f(t)\,\mathrm{d}t}{x-d} \\
&= \lim_{x\to d} \frac{\int_d^x \big(f(t)-f(d)+f(d)\big)\,\mathrm{d}t}{x-d} \\
&= \lim_{x\to d} \frac{\int_d^x \big(f(t)-f(d)\big)\,\mathrm{d}t + f(d)(x-d)}{x-d} \\
&= f(d) + \lim_{x\to d} \frac{\int_d^x \big(f(t)-f(d)\big)\,\mathrm{d}t}{x-d}.
\end{aligned}$$

Ve čtvrté rovnosti jsme využili Větu 71 a Poznámku 73 (díky ní se nemusíme starat o to, v jakém pořadí jsou body c, x, d; stačí pouze vědět, že všechny zúčastněné integrály existují). Za povšimnutí stojí také jednoduchý trik na pátém řádku výpočtu, kdy v integrandu odečteme a přičteme konstantu $f(d)$.

Je jasné, že k dokončení důkazu rovnosti $F'(d) = f(d)$ nám stačí dokázat, že limita na posledním řádku výpočtu výše je nulová, tj.

$$\lim_{x\to d} \frac{\int_d^x \big(f(t)-f(d)\big)\,\mathrm{d}t}{x-d} \overset{\text{chceme}}{=} 0, \tag{3.16}$$

což provedeme z definice. Budiž tedy dáno $\varepsilon > 0$, chceme najít vhodné $\delta > 0$ z definice limity. Ze spojitosti funkce f v bodě d dostaneme nějaké $\delta > 0$ takové, že

$$\forall t \in [a,b]\colon |t-d| < \delta \Rightarrow |f(t)-f(d)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.17}$$

Ukážeme, že toto $\delta > 0$ je k důkazu (3.16) dostatečné. Zvolme tedy libovolné $x \in [a,b]$ splňující $0 < |x-d| < \delta$, tj. x je „δ-blízko bodu d“ – pak ovšem totéž platí pro každý bod t intervalu $[d;x]$. Přesněji, kdykoliv $t \in [d;x]$, pak $|t-d| < \delta$. Tím pádem ale pro každé $t \in [d;x]$ máme $|f(t)-f(d)| < \frac{\varepsilon}{2}$ podle (3.17). Nyní:

$$\left|\frac{\int_d^x \big(f(t)-f(d)\big)\,\mathrm{d}t}{x-d}\right| \leqslant \frac{\left|\int_d^x |f(t)-f(d)|\,\mathrm{d}t\right|}{|x-d|} \leqslant \frac{\left|\int_x^d \frac{\varepsilon}{2}\right|}{|x-d|} = \frac{\frac{\varepsilon}{2}|x-d|}{|x-d|} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \qquad \square$$

Důsledek 91. *Buď f spojitá na (otevřeném intervalu) (a,b). Pak f má na (a,b) primitivní funkci.*

Důkaz. Nechť $n_0 \in \mathbb{N}$ je tak velké, že $a + \frac{1}{n_0} < b - \frac{1}{n_0}$, tj. $\left[a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}\right]$ je nedegenerovaný interval pro všechna $n \geqslant n_0$. Zafixujme si ještě nějaké $c \in \left[a+\frac{1}{n_0}, b-\frac{1}{n_0}\right]$ (c nezávisí na n). Podle předchozí věty je funkce

$$F(x) = \int_c^x f = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

primitivní k funkci f, a to na každém takovém intervalu (díky tomu, že je tam funkce f spojitá). Takže F je primitivní k f na sjednocení těchto intervalů, tj. na

$$\bigcup_{n=n_0}^{\infty} \left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}\right] = (a, b).$$

Poslední rovnost je přitom snadná: inkluze „$\subseteq$“ je triviální (každý ze sjednocovaných intervalů je obsažen v (a, b)), zatímco opačná inkluze „$\supseteq$“ plyne z toho, že $\lim_{n\to\infty}\left(a + \frac{1}{n}\right) = a$ a $\lim_{n\to\infty}\left(b - \frac{1}{n}\right) = b$: libovolný bod $x \in (a, b)$ je tak pro nějaké n obsažen v intervalu $\left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}\right]$, a tedy i v celém sjednocení na levé straně rovnosti. Dostali jsme tedy, že $F' = f$ na (a, b), a jsme hotovi. □

Dříve formulovaná Věta 45 je spojením obou tvrzení výše podle toho, jestli je interval I otevřený nebo uzavřený (mohl by ovšem být ještě polouzavřený, v kterémžto případě je potřeba obě tvrzení vhodně zkombinovat nebo upravit důkaz Důsledku 91).

Věta 92 (Newtonova-Leibnizova formule)**.** *Nechť f je spojitá na $[a, b]$ a F je primitivní k f na $[a, b]$. Pak platí*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Důkaz. Mějme funkce f a F jako ve formulaci věty a mějme dále funkci

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Podle Věty 90 je G primitivní k f na $[a, b]$ a podle Věty 43 (ii) tedy existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$ taková, že $F(x) - G(x) = c$ pro všechna $x \in [a, b]$. Protože $G(a) = \int_a^a f = 0$, dostáváme

$$\int_a^b f = G(b) = G(b) - G(a) = \big(F(b) - c\big) - \big(F(a) - c\big) = F(b) - F(a). \qquad \square$$

Příklad 93. Funkce sgn je monotónní na $\mathbb{R}$, takže podle Věty 87 má Riemannův integrál přes libovolný omezený interval $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$. Jak ho ale vypočítat pomocí Newtonovy-Leibnizovy formule (resp. Věty 92)? Například na $[a, b] = [-3, 2]$ funkce není spojitá, takže není splněn předpoklad věty. Můžeme nicméně postupovat takto:

$$\begin{aligned}\int_{-3}^{2} \operatorname{sgn} x\,\mathrm{d}x &= \int_{-3}^{0} \operatorname{sgn} x\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} \operatorname{sgn} x\,\mathrm{d}x \overset{89}{=} \int_{-3}^{0} (-1)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} 1\,\mathrm{d}x \\ &\overset{92}{=} [-x]_{-3}^{0} + \overset{92}{=} [-x]_{-3}^{0} + [x]_0^2 = -3 + 2 = -1.\end{aligned}$$

Ve druhé rovnosti jsme využili faktu, že změna funkce v konečně mnoha bodech nemá vliv na Riemannův integrál; v prvním z obou integrálů jsme tedy hodnotu v bodě 0 změnili z 0 na -1 (čímž jsme dostali konstantní, a tedy spojitou, funkci na intervalu $[-3, 0]$) a v druhém integrálu jsme hodnotu v 0 změnili na 1 (čímž jsme dostali konstantní, a tedy spojitou, funkci na intervalu $[0, 2]$). Ve třetí rovnosti už jsme tedy bez problémů mohli aplikovat Newtonovu-Leibnizovu formuli, neboť integrandy obou integrálů jsou spojité. Všimněte si, že hodnota v bodě 0 hraje roli v obou integrálech, které sčítáme. To je dáno tím, že Riemannův integrál pracuje vždy s uzavřenými intervaly – a nepředstvuje to žádný problém.

Poznamenávám, že tento podrobně rozepsaný postup vám má předvést rigorózní výpočet pomocí striktní aplikace nám již známých vět; při praktickém výpočtu je možné takové podrobné zdůvodňování vynechat (je ovšem třeba ho znát a mít na paměti, neboť v některých jiných příkladech se podobný postup aplikovat nedá - viz třeba hned následující příklad). △

Příklad 94. Pozor na následující *chybný* výpočet:

$$\int_{-2}^{2} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = [\ln|x|]_{-2}^{2} = \ln 2 - \ln 2 = 0. \tag{3.18}$$

Na první pohled se zdá být vše v pořádku; problém je v tom, že integrovaná funkce $1/x$ na intervalu $(-2, 2)$ není spojitá, takže není splněn předpoklad Věty 92. To by ještě nemusel být problém, protože bod nespojitosti je jen jeden a my víme, že můžeme integrál – existuje-li – rozdělit na součet integrálů přes dva podintervaly (viz předchozí příklad). Problém v tuto chvíli zcela nepřekonatelný však je fakt neomezenosti $1/x$ na intervalu $[-2, 2]$: podle definice Riemannova integrálu totiž integrand musí být omezený. (Ani zobecněný Riemannův integrál však neumí dát smysl integrálu v rovnici 3.18.) △

3.7 Metody Per Partes a substituce pro určitý integrál

Věta 95. *Nechť f, g jsou funkce se spojitými derivacemi na $[a, b]$. Pak platí*

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'.$$

Důkaz. Jde o snadnou aplikaci Newtonovy-Leibnizovy formule: Víme, že $(fg)' = f'g + fg'$, tj. fg je na $[a, b]$ primitivní funkce k $f'g + fg'$. Platí tedy $\int_a^b (f'g + fg') = [fg]_a^b$. □

Věta 96. *Nechť (vnitřní) funkce $\varphi\colon [\alpha, \beta] \to [a, b]$ má na $[\alpha, \beta]$ spojitou derivaci. Pak platí*

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Věta 97. *Nechť (vnitřní) funkce $\varphi\colon [\alpha, \beta] \xrightarrow{na} [a, b]$ má na $[\alpha, \beta]$ vlastní derivaci a je tam ryze monotónní. Pak platí*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Poznámka 98. Funkce φ ve Větě 97 je ryze monotónní, takže je buďto rostoucí nebo klesající. Protože φ je také *na* celý interval $[a, b]$, je jasné, že buďto $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ (pokud φ je rostoucí), nebo $\varphi(\alpha) = b$, $\varphi(\beta) = a$ (pokud φ je klesající). Jinak řečeno, integrál na pravé straně je pro rostoucí φ prostě $\int_\alpha^\beta \dots$ a pro klesající φ je to $\int_\beta^\alpha \dots = -\int_\alpha^\beta \dots$.

3.8 Poznámky o integrálech

3.8.1 Určitý vs. neurčitý integrál

Dosud jsme probrali dva typy integrálu: tzv. *neurčitý* integrál a *Riemannův určitý integrál*. Neurčitým integrálem jsme se zabývali především v 2. Kapitole a měli jsme tím pojmem na mysli primitivní funkci. V souvislosti s primitivní funkcí by ovšem bylo přesnější hovořit o *Newtonově* neurčitém integrálu. Nyní definujeme nový pojem, a to tzv. *Newtonův určitý integrál*.

Definice 99 (Newtonův určitý integrál)**.** Nechť má funkce f primitivní funkci na intervalu $[a, b]$. Pak *Newtonův určitý integrál funkce f na $[a, b]$* definujeme jako hodnotu $F(b) - F(a)$ a značíme ho

$$(\mathrm{N})\int_a^b f = (\mathrm{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a). \tag{3.19}$$

Poznámka 100 (Definice je korektní)**.** Uvědomme si, že ve výše uvedené definici není upřesněno, kterou z nekonečně mnoha primitivních funkcí k f na $[a, b]$ máme v rovnici (3.19) vzít za F. Vezměme si libovolné dvě různé primitivní funkce F a G k funkci f na $[a, b]$. Podle definice platí

$$(\mathrm{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \quad \text{a zároveň} \quad (\mathrm{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = G(b) - G(a).$$

Pokud by se mohlo stát, že $F(b) - F(a) \neq G(b) - G(a)$, byla by hodnota integrálu $(\mathrm{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ definována více různými čísly, a definice by proto byla *nekorektní*.

Pro ověření *korektnosti* Definice 99 musíme tedy ověřit, že pravá strana rovnice (3.19) nezávisí na volbě primitivní funkce F – jinými slovy, jsou-li F a G libovolné dvě primitivní funkce k f na $[a, b]$, máme ověřit, že $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$. To ale plyne z Věty 43 (ii), která nám říká, že existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$ taková, že $F = G + c$, a tedy dostáváme požadovanou rovnost:

$$F(b) - F(a) = G(b) + c - (G(a) + c) = G(b) - G(a).$$

Definice je tedy korektní. (Všimněte si, že tato poznámka se vztahuje také na Newtonovu-Leibnizovu formuli, tj. na Větu 92.)

Značení 101. Právě jsme zavedli definici určitého integrálu odlišnou od Definice 61. Aby bylo jasné, kterou definici máme v daný moment na mysli, zavedeme upřesňující značení pro Riemannův určitý integrál funkce f na $[a, b]$:

$$(\mathrm{R})\int_a^b f = (\mathrm{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Budeme-li v dalším chtít zdůraznit, že máme na mysli Riemannův integrál, můžeme před znaménko integrálu přidat ono (R).

Poznámka 102 (Soulad $(\mathrm{N})\int_a^b$ a $(\mathrm{R})\int_a^b$)**.** Pokud f je spojitá na $[a, b]$, pak podle Věty 45 (resp. podle Věty 90) existuje funkce F primitivní k f na $[a, b]$; podle Definice 99 má hodnotu $F(b) - F(a)$.

Podle Věty 86 dále existuje Riemannův integrál f na $[a, b]$ a podle Věty 92 má rovněž hodnotu $F(b) - F(a)$, kde F je libovolná primitivní funkce k f na $[a, b]$.

Celkem tedy pro funkci f spojitou na $[a, b]$ dostáváme rovnost

$$(\mathrm{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \overset{92}{=} F(b) - F(a) \overset{\text{def.}}{=} (\mathrm{N})\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dokonce pro libovolnou f lze dokázat, že existují-li oba integrály (tedy Riemannův i Newtonův) f na $[a, b]$, nastává mezi nimi rovnost. To je o něco silnější tvrzení, než je uvedeno o odstavec výše, neboť i pro některé nespojité funkce f oba dva integrály existují – a dokonce i pro takové jsou oba stejné.

Na druhou stranu ale tyto pojmy integrálu nejsou ekvivalentní: Může se totiž stát, že jeden existuje a druhý ne (nebo naopak). *Není tedy pravda*, že $(\mathrm{R})\int_a^b f = (\mathrm{N})\int_a^b f$, má-li jedna strana smysl; platí pouze (jak už bylo řečeno)

$$(\mathrm{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (\mathrm{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \text{mají-li obě strany smysl.} \tag{3.20}$$

Poznámka 103 (O charakteru definice)**.** Všimněme si, že definice Newtonova integrálu 99 je o mnoho jednodušší než definice Riemannova integrálu 61 – je v podstatě definována přímo Newtonovou-Leibnizovou formulí. A priori však není jasné, jakou interpretaci bychom pro Newtonův integrál měli mít – totiž „plochu pod grafem funkce f“. Definice Newtonova integrálu se proto někdy označuje jako *deskriptivní* (popíšeme, co to je, ale není hned jasné, co to znamená), zatímco Riemannův integrál bývá označován jako *konstruktivní* definice integrálu. Rovnost (3.20) v sobě obsahuje Newtonovu-Leibnizovu formuli.

Tabulka 3.1: Členění integrálů

Integrál	Newtonův	Riemannův
Neurčitý (funkce)	$\int f(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} F(x)$	$F_c(x) = (\mathrm{R})\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$
Určitý (číslo)	$(\mathrm{N})\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \stackrel{\text{def.}}{=} F(b) - F(a)$	$(\mathrm{R})\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

Poznámka 104 (Riemannův neurčitý integrál)**.** Připomeňme si Větu 90; je v ní definována funkce $F(x) = \int_c^x f$, kde $c \in [a,b]$ je nějaký pevně zvolený bod. (Aby nedošlo k omylu, měli bychom definici upřesnit symbolem (R) a dát tak jasně najevo, že uvažovaný integrál je Riemannův.) Ve větě se hovoří o funkci f spojité na $[a,b]$, ale nyní budeme požadovat pouze existenci $(\mathrm{R})\int_a^b f$ (že to opravdu je slabší požadavek, plyne z Věty 86). Pak funkci F definovanou na $[a,b]$ předpisem

$$F(x) = (\mathrm{R})\int_c^x f = (\mathrm{R})\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

nazveme *Riemannův neurčitý integrál funkce f na* $[a,b]$. Stejně jako v případě Newtonova neurčitého integrálu jde tedy o funkci; Věta 90 nám navíc říká, že pro spojitou f je takto definovaná funkce F primitivní k f; jinými slovy: Pro spojitou funkci f tedy víme, že Riemannův neurčitý integrál je v podstatě totéž co Newtonův neurčitý integrál (tj. primitivní funkce - viz úvod k tomuto oddílu).

3.8.2 Riemannova definice Riemannova integrálu

Definice 105 (Riemannova definice Riemannova určitého integrálu)**.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a nechť $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je omezená.

(1) Definujeme *dělení intervalu* $[a,b]$ *s vyznačenými body* jako uspořádanou dvojici (D, ξ), kde $D = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ je (obyčejné) dělení intervalu $[a,b]$ a $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ je uspořádaná n-tice vyznačených bodů splňující pro každý index $i = 1, \ldots, n$, že $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

(Tj. každý bod ξ_i patří do intervalu dělení D se stejným indexem – vlastně tedy v každém (i-tém) „interválku“ dělení D „vyznačíme“ jeden bod, a to ξ_i.)

(2) Buď (D, ξ) libovolné dělení intervalu $[a,b]$ s vyznačenými body jako výše. Definujeme *Riemannův integrální součet* příslušný f a (D, ξ) jako

$$\sigma(f, D, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

(3) Je-li $D = \{x_0 < x_1 < \ldots < x_n\}$ libovolné dělení, definujeme *normu dělení* D jako délku jeho nejdelšího intervalu, tj.

$$\nu(D) = \max_{i=1,\ldots,n} (x_i - x_{i-1}).$$

(4) Definujeme

$$(\mathrm{R}^*)\int_a^b f = A \quad \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \quad \lim_{\nu(D)\to 0} \sigma(f, D, \xi) = A,$$

což je neformální (ale intuitivně jasný) zápis pro následující výrok, ve kterém (D, ξ) značí vždy dělení intervalu $[a, b]$ (s vyznačenými body):

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall (D, \xi)\colon \nu(D) < \delta \Rightarrow |\sigma(f, D, \xi) - A| < \varepsilon.$$

Cvičení 106. Pro lepší pochopení právě definovaných pojmů je vhodné uvědomit si platnost následujících tvrzení. Jejich důkazy přenechávám čtenáři jako snadná cvičení.

Buď f omezená na $[a, b]$. Platí:

(i) Je-li (D, ξ) dělení $[a, b]$ s vyznačenými body, pak platí $s(f, D) \leqslant \sigma(f, D, \xi) \leqslant S(f, D)$;

(ii) $S(f, D) = \sup\{\sigma(f, D, \xi) \colon \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \text{ se hodí k } D\}$;

(iii) $s(f, D) = \inf\{\sigma(f, D, \xi) \colon \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \text{ se hodí k } D\}$.

Následující dvě věty dávají užitečný nástroj pro teoretickou práci s Riemannovým integrálem, i pro některé speciální praktické výpočty.

Věta 107 („Heineho věta pro Riemannův integrál“)**.** *Buď f omezená na intervalu $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$. Následující výroky jsou ekvivalentní:*

(i) $(\mathrm{R}^*)\int_a^b f = A.$

(ii) Pro libovolnou posloupnost $\{(D_n, \xi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ dělení s vyznačenými body splňující podmínku $\lim_{n\to\infty} \nu(D_n) = 0$ platí

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(f, D_n, \xi_n) = A.$$

Důkaz. Tento fakt je možno ukázat podobně jako „obyčejnou“ Heineho větu, podrobnosti ale vynecháme. □

Poznámka 108. Nechť má funkce f na intervalu $[a, b]$ primitivní funkci F a nechť $D = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ je dělení $[a, b]$. Potom existují vyznačené body $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ takové, že

$$\sigma(f, D, \xi) = \int_a^b f \quad \big(= F(b) - F(a) \big).$$

Důkaz je snadnou aplikací Lagrangeovy věty o střední hodnotě – a to na každém dělícím intervalu zvlášť: tak získáme ony požadované vyznačené body. Podrobněji:

Víme, že $F' = f$ na $[a, b]$. Podle Lagrangeovy věty aplikované na funkci F na i-tém intervalu $[x_{i-1}, x_i]$ dělení D existuje $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ takové, že

$$f(\xi_i) = F'(\xi_i) = \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}, \quad \text{tj.} \quad f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = F(x_i) - F(x_{i-1}).$$

Sečtením těchto rovností přes $i = 1, \dots, n$ dostaneme

$$\sigma(f, D, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} (F(x_i) - F(x_{i-1})) = F(b) - F(a).$$

Zde první rovnost je prostě definice symbolu $\sigma(f, D, \xi)$ a poslední rovnost plyne ze standardního argumentu teleskopického součtu (skoro vše se vzájemně poodčítá).

Pomocí Věty 107 lze z právě dokázaného faktu odvodit jednu implikaci z Věty 109. Rozmyslet si kterou z nich (a jak) ponecháme čtenáři jako snadné cvičení.

Věta 109. *Riemannova definice Riemannova integrálu (105) je ekvivalentní definici Darbouxově (61). To jest, pro libovolnou omezenou funkci $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ platí*

$$(\mathrm{R}^*)\int_a^b f = (\mathrm{R})\int_a^b f, \quad \textit{má-li jedna strana smysl.}$$

Úmluva 110. Poslední větu ponecháme v tomto textu bez důkazu, je nicméně pravdivá. Obě definice dávají totožný pojem integrálu (tj. přesně stejné funkce mají integrál podle jedné i druhé definice a pokud integrály existují, jsou si rovny), a tudíž odteď mezi oběma definicemi nemusíme rozlišovat. Značení

$$(\mathrm{R}^*)\int_a^b f$$

tedy opustíme ve prospěch už zavedeného bežného značení Riemannova integrálu (bez hvězdičky).

3.9 Zobecněný Riemannův integrál

Zatím umíme integrovat pouze omezené funkce na omezených intervalech. Chtěli bychom umět dát význam symbolům jako

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \text{ (neomez. fce)}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \text{ (neomez. interval), nebo} \qquad \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)} \text{ (obojí).}$$

V následující definici toto nepříjemné omezení do značné míry odstraníme pomocí přirozeného limitního procesu. Idea je následující: Nevíme sice, co je to $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$, ale umíme vypočítat $\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ a obvykle také umíme vypočítat limitu tvaru $\lim_{\varepsilon\to 0_+}(\ldots)$. Spojením těchto dvou postupů dostaneme:

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = [2\sqrt{x}]_\varepsilon^1 = 2 - 2\sqrt{\varepsilon} \quad \text{a aplikací limity:}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0_+}(2 - 2\sqrt{\varepsilon}) = 2 - 2\sqrt{0} = 2.$$

Obecná definice sleduje tuto myšlenku, integrál se však „rozdělí na dvě části“ pro případ, že by byl „problém“ na obou krajích intervalu, přes který integrujeme:

Definice 111 (Zobecněný Riemannův integrál)**.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$. Nechť $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ je funkce (nemusí být omezená). Předpokládejme, že pro každý podinterval $[x, y] \subseteq (a, b)$ existuje integrál $(\mathrm{R})\int_x^y f(x)\,\mathrm{d}x$. Nechť dále existuje $c \in (a, b)$ takové, že pravá strana níže má smysl. Pak definujeme

$$(\mathrm{ZR})\int_a^b f = \lim_{x\to a_+} (\mathrm{R})\int_x^c f + \lim_{y\to b_-} (\mathrm{R})\int_c^y f. \tag{3.21}$$

Poznámka 112. (a) Hodnota pravé strany rovnice (3.21) nezávisí na volbě čísla $c \in (a, b)$. Jinak řečeno, existují-li dvě různá čísla $c_1, c_2 \in (a, b)$ tak, že pravá strana rovnice má smysl dosadíme-li za c jak c_1, tak c_2, pak oba výsledky jsou shodné. Tento fakt (který si dokážeme níže) je nutný k tomu, aby Definice 111 byla *korektní*. (Pokud bychom mohli volbou různých c dostat různé výsledky, a hodnota definovaného integrálu by tak vlastně na naší volbě pomocného čísla c závisela, hovořili bychom samozřejmě o *nekorektní* definici.) Viz též Poznámku 100. Doplnit.

(b) Hodnota (R)$\int_a^b f$, a tedy ani hodnota (ZR)$\int_a^b f$, nezávisí na změně funkce f v konečně mnoha bodech.

(c) Pro existující (ZR)$\int_a^b f$ se může stát, že $a \notin \mathbb{D}_f$ nebo $b \notin \mathbb{D}_f$ (nebo obojí); „zobecněný Riemannův integrál krajní body ignoruje“.

(d) Může se stát, že (ZR)$\int_a^b f = \infty$ (nebo $-\infty$).

Tvrzení 113 (O spojitosti Riemannova integrálu)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a nechť $f \in \mathcal{R}([a, b])$ (tj. existuje* (R)$\int_a^b f$*). Pak platí:*

$$\lim_{x \to b-} \int_a^x f = \int_a^b f = \lim_{x \to a+} \int_x^b f.$$

Důkaz. Dokážeme první rovnost; důkaz druhé rovnosti je analogický. Jelikož $f \in \mathcal{R}([a, b])$, funkce f je omezená (to je vlastně nevyřčený předpoklad, který plyne z Definice 61), a existuje tedy nějaká konstanta $M > 0$ taková, že $|f(x)| \leqslant M$ pro všechna $x \in [a, b]$. Chceme dokázat rovnost

$$\lim_{x \to b-} \int_a^x f = \int_a^b f;$$

pro jednodušší zápis toho, co to znamená podle definice limity, si zaveďme pomocné značení:

$$F(x) = \int_a^x f, \qquad I = \int_a^b f.$$

(Všimněme si, že podle předpokladu existence $\int_a^b f$ a Věty 71 (i) je funkce F definována na celém intervalu $[a, b]$.) Takže náš cíl je dokázat $\lim_{x \to b-} F(x) = I$, což je zkratka pro následující výrok:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in P_-(b, \delta) \colon |I - F(x)| < \varepsilon.$$

Budiž tedy dáno libovolné $\varepsilon > 0$; máme najít vhodné $\delta > 0$. To zvolíme jako

$$\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{M}, b - a\right\}.$$

Je-li nyní dáno libovolné $x \in P_-(b, \delta)$, pak předně $x \in (a, b)$ (a tedy je definována hodnota $F(x)$), protože $\delta \leqslant b - a$ a dále platí:

$$|I - F(x)| = \left|\int_a^b f - \int_a^x f\right| = \left|\int_x^b f\right| \overset{78}{\leqslant} \int_x^b |f| \overset{(*)}{\leqslant} \int_x^b M = M(b - x) < M\delta \leqslant M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

Přitom rovnost označená $(*)$ plyne z omezenosti f konstantou M na $[x, b]$ (dokonce na celém $[a, b]$). Tím je dokázáno, že skutečně $\lim_{x \to b-} F(x) = I$, a jsme hotovi. □

Důsledek 114. *Pokud existuje* (R)$\int_a^b f$*, pak existuje i* (ZR)$\int_a^b f$ *a nastává rovnost.*

Kapitola 4

Úlohy s návody

4.1 1. část

$\boxed{1}$ (Pro zajímavost.) Ve sbírce příkladů od I. Černého (k dispozici na webu) se podívejte také na dodatek ke Kapitole 9. Jsou v něm zajímavé komentáře na téma použití znaménka integrace („fajfky“). Dočtete se, proč je obtížné (podle Černého nemožné) s tímto symbolem pracovat korektně. Nemusíte to ale studovat úplně podrobně, stejně se tím nebudeme řídit a to značení budeme nadále používat.

$\boxed{2}$ Buď $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ spojitá funkce, která nabývá pouze kladných hodnot. Riemannův *určitý integrál*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{4.1}$$

je číslo – na rozdíl od integrálu neurčitého, který představuje funkci (resp. je množinou všech primitivních funkcí k f). Tento určitý integrál (4.1) je definován (jak uvidíme v další kapitole přednášky) takovým způsobem, aby jeho geometrickou interpretací byla *velikost plochy ohraničené osou x, grafem funkce f a svislými přímkami $x = a$, $x = b$*; nepřesně obvykle říkáme „velikost plochy pod grafem funkce f na intervalu $[a, b]$“.

Na základě této informace určete hodnoty následujících určitých integrálů:

$$\int_3^5 7\,\mathrm{d}x, \quad \int_0^3 (x+1)\,\mathrm{d}x, \quad \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Všechny tyto integrály je možno jednoduše spočítat, pokud si nakreslíte grafy příslušných integrandů, tj. konstantní funkce 7, funkce $y = x$ a funkce $\sqrt{1-x^2}$ (uvědomte si, jaká přesně křivka je její graf!).

$\boxed{3}$ Hodnotu určitého integrálu je možno kromě názorného geometrického výpočtu zjistit použitím tzv. *Newtonovy-Leibnizovy formule*, která říká toto: Nechť f má na $[a, b]$ primitivní funkci F. (Tj. $F' = f$ na $[a, b]$, v krajních bodech uvažujeme jednostranné derivace). Potom platí:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Porovnejte výsledky získané v předchozí úloze s výsledky, které získáte použitím N.-L. formule. V případě třetího integrálu si vzpomeňte na postup pomocí 2. substituční metody, kterým se dá tento integrál vypočítat (nebo nahlédněte do svých poznámek, případně to lze najít v poznámkách z přednášek a cvičení na webu).

$\boxed{4}$ V předchozích odstavcích jste se asi zamysleli nad významem určitého integrálu a několik integrálů jste spočítali dvěma různými způsoby. Všechny tyto integrály ale mají *konečné meze* – např. od 3 do 5 atd.

Co když bude jedna mez (nebo obě meze) nekonečná? Zamyslete se nad významem následujícího integrálu, pokuste se navrhnout vhodný způsob výpočtu a zjistěte výsledek:

$$\int_{-\infty}^{0} e^x \, \mathrm{d}x.$$

$\boxed{5}$ Pomocí substituce $y = \cos x$ spočtěte neurčitý integrál

$$\int \frac{1}{\sin x} \, \mathrm{d}x.$$

Nezapomeňte správně dosadit za $\mathrm{d}x$.

$\boxed{6}$ Následující zlomek rozložte na součet parciálních zlomků a poté proveďte zkoušku (opětovným převedením na společného jmenovatele):

$$\frac{2x + 8}{x^3 - 6x^2 + 8x}.$$

$\boxed{7}$ Vypočítejte následující (neurčitý) integrál; nezapomeňte při tom na to, že metoda parciálních zlomků se dá použít jen tehdy, když stupeň polynomu ve jmenovateli je větší než stupeň polynomu v čitateli. Nejdřív tedy musíte částečně vydělit. Pak aplikujte výsledek výpočtu z předchozího příkladu.

$$\int \frac{x^3 - 6x^2 + 10x + 8}{x^3 - 6x^2 + 8x} \, \mathrm{d}x.$$

$\boxed{8}$ Pomocí vhodných úprav a substituce převeďte následující integrál na „známý integrál s výsledkem arcsin“:

$$\int \frac{1}{\sqrt{5x - 6 - x^2}} \, \mathrm{d}x.$$

$\boxed{9}$ Pro ty, kdo absolvovali čtvrteční online povídání o hyperbolických funkcích.) Převedením na známý integrál (podobně jako v předchozím příkladě) spočtěte integrál

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x^2 + 3x + 5}} \, \mathrm{d}x.$$

$\boxed{10}$ Rozložte na součet parciálních zlomků následující zlomek. Ale pozor, kořeny polynomu ve jmenovateli jsou $-1, 1, i, -i$ (kde $i = \sqrt{-1}$ je imaginární jednotka). Tzn. tento polynom se (pracujeme-li pouze v $\mathbb{R}$, což je náš případ) nedá rozložit na součin kořenových činitelů, v příslušném vyjádření se jako kořenový činitel objeví také $x^2 + 1$. Takovýto zlomek se také dá rozložit na parciální zlomky, jeden z nich ale bude v jiném tvaru:

$$\frac{1}{x^4 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}.$$

Váš úkol je určit hodnoty neurčitých koeficientů $A, B, C, D \in \mathbb{R}$. Všimněte si, že celkový počet kořenů našeho polynomu $x^4 - 1$ je 4, a právě tolik neurčitých koeficientů musíme uvažovat. To není žádná náhoda.

$\boxed{11}$ (Pro náročnější.) Spočtěte integrál

$$\int \frac{x \cdot \arcsin x}{\sqrt{(1 - x^2)^3}} \, \mathrm{d}x.$$

$\boxed{12}$ (Legrácka.) Spočtěte následující integrál dvěma způsoby:

$$\int (x + 1)^3 \, \mathrm{d}x.$$

- Nejprve roznásobte a pak integrujte člen po členu;
- zaveďte jednoduchou substituci $y = x + 1$.

Výsledky napište buďto ve formě s $\stackrel{c}{=}$ nebo s integrační konstantou „$+C$“ a (po roznásobení druhého z nich) porovnejte je. Výsledky se liší. V čem je problém?

4.2 2. část

$\boxed{13}$ Použitím známého vzorce $\cos 2x = \dots$ odvoďte vzorec pro $\sin^2 t$ – analogicky jako na straně 2 přednášky ze dne 30. března. Tento vzorec využijte pro výpočet integrálu

$$\int \sin^2 x \, dx.$$

$\boxed{14}$ Na začátku přednášky 30. března jsme počítali $\int \sqrt{1-x^2}\, dx$ pomocí 2. substituční metody, a to použitím substituce „$x = \sin t$“. Proveďte analogický výpočet pomocí substituce

$$x = \cos t.$$

Nezapomeňte použít vhodný interval pro proměnnou t, tedy takový, na kterém funkce $\varphi(t) = \cos t$ (tj. „substituovaná funkce“) splňuje předpoklady 2. Věty o substituci.

$\boxed{15}$ Interpretujte funkci $f(x)$ níže jako racionální funkci dvou proměnných $R(u, v)$, do které dosadíme podle vzoru $u \mapsto \sin x$, $v \mapsto \cos x$:

$$f(x) = 2 \operatorname{tg} x \cdot \frac{2 + \sin^2 x}{\cos^2 x + \cos x + 2}.$$

Rozhodněte o vhodné substituci a převeďte s její pomocí integrál $\int f(x)\, dx$ na integrál racionální funkce (tj. obyčejný podíl dvou polynomů).

$\boxed{16}$ Pomocí metody parciálních zlomků dopočítejte integrál z předchozí úlohy až do konce. Pokud jste (v souladu s „kuchařkou“, kterou jsme probrali na cvičení 6. dubna) použili substituci „$y = \cos x$“, mělo by vám vyjít

$$\int f(x)\, dx = -2 \int \frac{3 - y^2}{y(y^2 + y + 2)}\, dy = \int \frac{5y + 3}{y^2 + y + 2}\, dy - 3 \int \frac{dy}{y}.$$

Druhý z obou integrálů napravo je triviální, první z nich ale vyžaduje jistý um; podíváme se na něj v následujícím odstavci.

$\boxed{17}$ Ověřte, že polynom ve jmenovateli integrandu

$$\int \frac{5y + 3}{y^2 + y + 2}\, dy \tag{4.2}$$

nemá reálné kořeny.

Tento integrál se ale *nedá* ihned převést (pomocí doplnění na druhou mocninu a vhodné lineární substituce) na arctg, protože v čitateli není pouze konstanta, ale polynom stupně 1.

Místo toho se pokuste integrál (4.2) vyjádřit jako součet dvou integrálů tak, že:

(i) V prvním z nich je čitatel derivací jmenovatele (nebo jejím násobkem);

(ii) ve druhém z nich je v čitateli pouze konstanta.

První z těchto integrálů pak vede na funkci ln a druhý na arctg. Dokončete výpočet a nezapomeňte přejít zpět k původní proměnné x.

18 (O substituci $\mathrm{tg}(x/2)$. Pozor na ni!)
Použití některých substitucí nemusí být snadné, protože i když (např. podle „kuchařky“) víme, že zvolená substituce musí fungovat, často není úplně triviální správné dosazení. Když například chci použít substituci „$y = \mathrm{tg}(x/2)$“, jakým výrazem mám nahradit třeba $\mathrm{tg}\, x$? Právě to si teď podle návodu zkusíte odvodit.

Nechť $y = \mathrm{tg}(x/2)$. Pomocí y vyjádřete $\sin x$ a $\cos x$.

(i) Podobně jako na cvičení 6. dubna[1] nejprve pomocí y vyjádřete $\sin^2(x/2)$ a $\cos^2(x/2)$.

(ii) Nyní tedy stačí vyjádřit $\sin x$ (resp. $\cos x$) pomocí funkcí $\mathrm{tg}(x/2)$, $\sin^2(x/2)$ a $\cos^2(x/2)$. K tomu stačí šikovně použít standardní vzorce pro práci s goniometrickými funkcemi:

$$\begin{aligned}\sin(2\alpha) &= 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha,\\ \cos(2\alpha) &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.\end{aligned}$$

V případě funkce sin musíte vzorec nepatrně upravit. Pokud vám není hned jasné, jak to udělat, uvědomte si, které výrazy už pomocí y vyjádřit umíte a pokuste se je „do toho vzorce dostat“.
Mělo by vám vyjít:

$$\sin x = \frac{2y}{1+y^2} \quad \text{a} \quad \cos x = \frac{1-y^2}{1+y^2}. \tag{4.3}$$

19 (Zajímavost.) Vraťme se na okamžik k substituci „$y = \mathrm{tg}\, x$“. Na cvičení jsme si odvodili, že pak

$$\sin^2 x = \frac{y^2}{1+y^2} \quad \text{a} \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+y^2}. \tag{4.4}$$

Z tohoto vyjádření je okamžitě možno zpozorovat známý fakt, že $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Skutečně:

$$\frac{y^2}{1+y^2} + \frac{1}{1+y^2} = \frac{y^2+1}{1+y^2} = 1.$$

Takovou úvahu samozřejmě nelze považovat za důkaz toho vzorce, neboť by se jednalo o argumentaci kruhem (tentýž vzorec jsme totiž – ať už explicitně nebo implicitně – museli použít při odvozování (4.4)); je to ale zajímavé pozorování.

Sami nyní učiňte analogické pozorování pro substituci „$y = \mathrm{tg}(x/2)$“. Počítejte tedy s pravými stranami vzorců (4.3) a ověřte, že $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ (pro všechna $x \in \mathbb{R}$). Zde je výpočet o něco málo složitější, ale také lehký; a i zde samozřejmě platí, že to nelze považovat za důkaz – jde jen o zajímavé pozorování.

20 Pomocí výše odvozených vzorců pro substituci „$y = \mathrm{tg}(x/2)$“ spočtěte integrál

$$\int \frac{1}{2\sin x - \cos x + 5}\, \mathrm{d}x. \tag{4.5}$$

[1] Na straně 7 ve scanu poznámek – na mém webu.

(Snadno zjistíte, že jiná ze čtyř standardních substitucí se pro tento integrál nehodí.) Pomocí substituce integrál převedete na integrál racionální funkce; po úpravách se ukáže, že v čitateli je konstanta a ve jmenovateli ireducibilní polynom druhého stupně. Výpočet tedy vede na arctg. Mělo by vám vyjít

$$\dots \stackrel{c}{=} \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg}\left(\frac{3\operatorname{tg}(x/2)+1}{\sqrt{5}}\right).$$

$\boxed{21}$ Pokud jste při řešení předchozí úlohy prostě provedli výpočet, nyní přišel čas se zamyslet nad definičními obory. Je snadno vidět, že integrand v (4.5) je spojitá funkce na celém $\mathbb{R}$, a tedy hledaná primitivní funkce existuje rovněž na celém $\mathbb{R}$. Uvědomte si, že výše uvedený výsledek tohoto příkladu má pouze omezenou platnost. Na jakých intervalech výsledek platí a proč to není na celém $\mathbb{R}$? Co musí být náš další krok, chceme-li získat úplné řešení?

$\boxed{22}$ (Příklad na 2. VOS) Následující integrál jsme už jednou vypočítali, a to nepřímo pomocí metody Per Partes (výpočet začíná na str. 4 poznámek ze cvičení 23. března):

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Nyní ho spočtěte znovu pomocí 2. substituční metody s použitím substituce „$x = \operatorname{tg} t$“ (nezapomeňte určit vhodný interval pro t). Výpočet je jednoduchý a vede na $\int \cos^2 t \,\mathrm{d}t$, se kterým si hravě poradíte (vizte též příklad (1)).

V substituci přejdete zpět k proměnné x pomocí vzorce $t = \operatorname{arctg} x$ (ovšem za předpokladu, že uvažujete $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ – pozor na to). Výsledek se dost liší od výsledku téhož příkladu na cvičení. Čím to je? S výsledkem budeme dále pracovat v úlohách (16) a (17).

$\boxed{23}$ (Parciální zlomky - připomenutí) Metoda rozkladu racionální funkce

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

na parciální zlomky počítá s tím, že ve jmenovateli každého parciálního zlomku bude polynom s reálnými koeficienty. Z přednášky 6. dubna víme, že jsou dvě základní možnosti, jak můžou parciální zlomky vypadat:

$$\frac{A}{x-x_1} \quad \text{nebo} \quad \frac{Bx+C}{x^2+\alpha x+\beta},$$

kde x_1 je nějaký reálný kořen Q a $x^2+\alpha x+\beta$ nemá reálné kořeny[2] – odpovídá dvěma komplexně sdruženým kořenům $\lambda, \overline{\lambda} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ polynomu Q. Pokud je násobnost kořene x_1 rovna $k > 1$, vyskytnou se ještě další parciální zlomky tomuto kořenu odpovídající, a to

$$\frac{A_2^{(1)}}{(x-x_1)^2}, \frac{A_3^{(1)}}{(x-x_1)^3}, \dots, \frac{A_k^{(1)}}{(x-x_1)^k}.$$

Zde $A_2^{(1)}$, $A_3^{(1)}$ atd. jsou neurčité koeficienty, které všechny odpovídají kořenu x_1.[3] Podobně to funguje i pro parciální zlomky druhého typu: jsou-li komplexní kořeny vícenásobné, vyskytnou se i parciální zlomky s vyššími mocninami polynomu $x^2+\alpha x+\beta$ ve jmenovateli.

[2] Má ale reálné koeficienty: $1, \alpha, \beta$.

[3] O d$t$ud ten horní index, který je v závorkách kvůli tomu, aby nevypadal jako mocnina.

$\boxed{24}$ Můžeme si všimnout, že polynomy (stupně aspoň 2), které jsou (v $\mathbb{R}$) ireducibilní, se také dají napsat ve tvaru součinu kořenových činitelů: musíme však pracovat v $\mathbb{C}$. Třeba polynom $Q(x) = x^2 + 1$[4] má kořeny i a $-i$, kde $i = \sqrt{-1}$ je imaginární jednotka. Přesvědčte se, že skutečně platí

$$x^2 + 1 = (x - i)(x + i).$$

Můžeme se tedy ptát, jestli přece jen nelze racionální funkci

$$\frac{1}{Q(x)} = \frac{1}{x^2 + 1} =$$

dále rozložit na parciální zlomky:

$$= \frac{1}{(x - i)(x + i)} = \frac{A}{x - i} + \frac{B}{x + i}.$$

To skutečně lze; než budete číst dál, zkuste si to sami.

Po převedení pravé strany zpět na společného jmenovatele dostaneme

$$\frac{Ax + Ai + Bx - Bi}{x^2 + 1} \overset{\text{musí platit}}{=} \frac{1}{x^2 + 1},$$

odkud $A + B = 0$ a $Ai - Bi = 1$, a řešením soustavy lineárních rovnic v oboru $\mathbb{C}$ vyjde

$$A = \frac{1}{2i}, \quad B = -\frac{1}{2i}.$$

$\boxed{25}$ Na předchozí úloze je možno si všimnout, že metoda parciálních zlomků se nezastaví před komplexními kořeny a komplexními neurčitými koeficienty. Proč je tedy – uměle – vylučujeme my? Proč parciální zlomky tvaru

$$\frac{Ax + B}{x^2 + \alpha x + \beta},$$

v nichž jmenovatel nemá kořeny v $\mathbb{R}$, nerozkládáme dál podobně jako v úloze výše? Zamyslete se nad tím.

$\boxed{26}$ Uvažujme integrál

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{Q(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x^4 + 1}\,\mathrm{d}x.$$

Je okamžitě vidět, že $Q(x) = x^4 + 1 \geqslant 1$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, takže Q nemá reálné kořeny. Přesto však funkci f neumíme hned zintegrovat; potřebujeme ji rozložit na parciální zlomky. Jak to udělat?

Nejprve si připomeňme, že polynom Q má reálné koeficienty, a tedy jeho kořeny jsou v komplexně sdružených dvojicích podle tvrzení z přednášky 6. dubna.[5] Přesně řečeno jsou pouze dvě možnosti: buďto existují dvě dvojice kořenů $\lambda_1, \overline{\lambda_1}$ a $\lambda_2, \overline{\lambda_2}$, nebo má polynom Q dva dvojnásobné kořeny $\lambda, \overline{\lambda}$. V prvním případě platí

$$\begin{aligned} x^4 + 1 &= \underbrace{(x - \lambda_1)(x - \overline{\lambda_1})} \cdot \underbrace{(x - \lambda_2)(x - \overline{\lambda_2})} \\ &= (x^2 + \alpha_1 x + \beta_1) \cdot (x^2 + \alpha_2 x + \beta_2), \end{aligned} \tag{4.6}$$

kde $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 \in \mathbb{R}$. (Podobně by tomu bylo v případě dvojnásobných kořenů, což ovšem v případě tohoto konkrétního polynomu nenastává.)

[4] To je příklad polynomu tvaru $x^2 + \alpha x + \beta$.

[5] na straně 3 scanu poznámek z přednášky

Odtud je vidět, že pokud bychom znali všechny (komplexní) kořeny $\lambda_1, \overline{\lambda_1}, \lambda_2, \overline{\lambda_2}$ polynomu Q, byli bychom schopni Q vyjádřit ve tvaru (4.6) a dále pokračovat ve výpočtu integrálu pomocí rozkladu na parciální zlomky:

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{Ax+B}{x^2+\alpha_1 x+\beta_1} + \frac{Cx+D}{x^2+\alpha_2 x+\beta_2}.$$

Jsou dva základní způsoby, jak polynom Q dostat do tvaru (4.6):

(i) Skutečně lze (například pomocí Moivreovy věty) určit všechny kořeny Q. Zvládnete to?

(ii) Lze toho docílit i chytrým trikem, který vám pouze napovím: V polynomu Q vhodně přičtěte a odečtěte, abyste mohli částečně doplnit na druhou mocninu. Poté aplikujte vzorec $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

$\boxed{27}$ (O inverzních funkcích.) Nechť

$$f(x) = \sqrt{\frac{2x-3}{x+1}}.$$

Určete definiční obor f a vypočítejte funkci k f inverzní. Můžete to udělat tak, že z rovnice $y = f(x)$ vyjádříte x v závislosti na y. (Bude tedy náhle x „záviset na“ y, tj. závisle a nezávisle proměnná si vymění místa.) Ujistěte se, že úpravy, které děláte jsou ekvivalentní (některé z nich ovšem můžete za ekvivalentní prohlásit, až když si uvědomíte například, že nutně platí $y \geqslant 0$ apod.).

Samotný výpočet je ovšem snadný a dá se vlastně interpretovat jako řešení rovnice $f(x) = y$, kde x je neznámá, y je parametr a f představuje „vzorec“, v němž se x v rovnici objevuje. Má-li tato rovnice pro všechna y nejvýše jedno řešení, znamená to automaticky, že funkce f je na svém definičním oboru prostá?

$\boxed{28}$ V předchozí úloze je správný výsledek

$$f^{-1}(y) = \frac{3+y^2}{2-y^2}.$$

O tom se můžete přesvědčit třeba tak, že ověříte rovnost $f^{-1}(f(x)) = x$ pro všechna $x \in \mathbb{D}_f$ (nebo $f(f^{-1}(y)) = y$ pro všechna $y \in \mathbb{D}_{f^{-1}} = \mathbb{H}_f$). V tomto případě, kdy víme, že funkce je na celém definičním oboru prostá, je jedno, kterou rovnost ověříme: obě nám jako zkouška poslouží stejně dobře.

Jiná situace ovšem platí třeba pro dvojici $\sin x$ a $\arcsin y$. Platí sice

$$\sin(\arcsin(y)) = y \quad \text{pro všechna } y \in [-1, 1],$$

obecně ale *není pravda*

$$\arcsin(\sin x) = x.$$

Pro která x tato rovnost nastává a proč právě pro ně? Jaké jsou hodnoty

$$\arcsin\left(\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right)\right) \quad \text{nebo} \quad \arcsin\left(\sin\left(\frac{-3\pi}{2}\right)\right)?$$

Zkuste provést podobné úvahy pro dvojici tg, arctg a pro dvojici sinh, argsinh.

$\boxed{29}$ (Úprava výsledku v úloze (10).) Pokud jste v příkladě (10) počítali pomocí substituce $x = \operatorname{tg} t$, měli jste dostat toto:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} = \ldots = \int \cos^2 t \,\mathrm{d}t \overset{c}{=} \frac{1}{4}\sin 2t + \frac{t}{2} = \frac{1}{4}\sin(2\operatorname{arctg} x) + \frac{\operatorname{arctg} x}{2}. \qquad (4.7)$$

Než se budeme pokoušet dále upravit tento výsledek, pojďme nejprve provést (nepovinnou) zkoušku. Tj. pro klid v duši ověřme, že skutečně

$$\left(\frac{1}{4}\sin(2\operatorname{arctg} x) + \frac{\operatorname{arctg} x}{2}\right)' = \frac{1}{(1+x^2)^2}.$$

To vám možná dá trochu zabrat a nejspíš budete muset použít ty samé vzorce, které jste aplikovali při výpočtu integrálu:

$$\frac{\cos(2t)+1}{2} = \cos^2 t \quad \text{a} \quad \cos^2 t = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 t + 1}.$$

Nápověda: Při výpočtu je vaším cílem se nakonec zbavit funkce cos a vyjádřit ji v „řeči tangens“. Tj. třeba podle druhého z uvedených vzorců jest

$$\begin{aligned}\cos^2(\operatorname{arctg} x) &= \frac{1}{\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x) + 1} = \\ &= \frac{1}{(\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x))^2 + 1} = \frac{1}{x^2+1}.\end{aligned}$$

$\boxed{30}$ (Pokračování.) Všimněte si, že

$$\sin 2t = 2\sin t\cos t = 2\operatorname{tg} t \cdot \cos^2 t = \frac{2\operatorname{tg} t}{1 + tg^2 t}.$$

Pomocí tohoto triku už snadno provedete úpravu

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}\sin(2\operatorname{arctg} x) + \frac{\operatorname{arctg} x}{2} = \ldots = \\ &\qquad = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x^2} + \operatorname{arctg} x\right).\end{aligned}$$

Na první pohled to není zřejmé, ale oba výsledky, tedy ten ze cvičení a ten obdržený pomocí 2. substituční metody s použitím „$x = \operatorname{tg} t$“, se shodují. Skvělé!

4.3 3. část

$\boxed{31}$ (Obecně o primitivních funkcích.)
Která z následujících tvrzení jsou pravdivá?

1. Nechť f je lichá funkce na $\mathbb{R}$. Pak každá funkce primitivní k f je sudá.
2. Nechť f je sudá funkce na $\mathbb{R}$. Existuje-li primitivní funkce k f, pak existuje právě jedna lichá primitivní funkce.
3. Nechť f je periodická funkce na $\mathbb{R}$. Existuje-li primitivní funkce k f, pak existuje aspoň jedna periodická primitivní funkce k f.

Odpovědi si dobře rozmyslete. Nenachytejte se!

$\boxed{32}$ (Opakování úmluvy o polynomech.) V první části semestru jsme na přednášce mluvili o tom, co vlastně míníme výrazem „polynom"; abychom si dobře uvědomili, o čem přesně je řeč, na okamžik jsme tehdy rozlišovali polynom, tedy formální algebraický výraz tvaru

$$c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0$$

a polynomiální funkci (v obvyklém slova smyslu, tedy z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$) takovým výrazem definovanou:

$$P(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Je dobré si uvědomit, že zatímco polynom je formální vzorec, který dává smysl nad všemi „číselnými" obory, v nichž je možné násobit a sčítat, polynomiální funkci chápeme ve smyslu $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Uvědomili jsme si, že v naší situaci (kdy studujeme funkce z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$, a v tomto smyslu tedy chápeme i funkce polynomiální) není důležité striktně rozlišovat mezi těmito dvěma pojmy. To proto, že jsou-li dvě polynomiální funkce P a R stejné (tj. mají ve všech bodech stejné hodnoty), pak musely být definovány stejným polynomem[6]. Jinými slovy, pro každou polynomiální funkci existuje jediný (jednoznačně určený) polynom, který ji definuje. Od tohoto prozření jsme tedy byli oprávněni zavést úmluvu, že v našem kontextu není rozdíl mezi polynomem a polynomiální funkcí a oba pojmy tedy sdružujeme pod jediným pojmem „polynom".

$\boxed{33}$ Pojďme se zkusit zamyslet, jestli něco podobného neplatí pro racionální funkce. Jak víme, racionální funkce $R(x)$ je obecně taková funkce, kterou lze definovat vzorcem tvaru

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

kde P a Q jsou polynomy. Předpokládejme nyní, že P_1, P_2 a Q_1, Q_2 jsou nenulové polynomy a $R_1 = \frac{P_1}{Q_1}$, $R_2 = \frac{P_2}{Q_2}$. Platí pro racionální funkce R_1, R_2 následující implikace?

$$\Big(\forall x \in \mathbb{D}_{R_1} \cap \mathbb{D}_{R_2} \colon R_1(x) = R_2(x)\Big) \implies$$
$$\implies \big(P_1 = P_2 \quad \wedge \quad Q_1 = Q_2\big). \quad (4.8)$$

Pokuste se nejprve sami přijít na odpověď. Teprve pokud (v rozumném čase) neuspějete, přejděte ke čtení dalšího odstavce, kde se dozvíte řešení.

[6] Na přednášce jsme tento fakt dokázali.

34 Implikace (4.8) v předchozím odstavci se dá přeložit takto: *Mají-li racionální funkce R_1 a R_2 stejné hodnoty ve všech bodech, kde jsou obě definovány, pak jsou tyto funkce „definovány stejnými zlomky (vzorci)", tj. mají stejný čitatel a stejný jmenovatel.* Není těžké si uvědomit, že tato implikace neplatí, uvážíme-li třeba funkce

$$R_1(x) = \frac{x}{x} \quad \text{a} \quad R_2(x) = \frac{1}{1}.$$

Je zřejmé, že tyto funkce splňují předpoklad v implikaci (4.8), ale ne její závěr, a implikace tedy obecně neplatí.

V tomto případě je však i jiný způsob, jak nahlédnout, že funkce R_1 a R_2 nemohou být „definovány stejnými vzorci", protože nemají ani stejný definiční obor: zatímco funkce R_2 je definována na $\mathbb{R}$, funkce R_1 pouze na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Možná je tedy problém v tom, že v předpokladu implikace (4.8) není zahrnuta rovnost definičních oborů. Zkusme tedy zesílit předpoklad:

$$\Big(\mathbb{D}_{R_1} = \mathbb{D}_{R_2} \quad \wedge \quad \forall x \in \mathbb{D}_{R_1} : R_1(x) = R_2(x)\Big) \\ \implies \big(P_1 = P_2 \quad \wedge \quad Q_1 = Q_2\big). \tag{4.9}$$

Uvědomte si, že neplatí ani toto slabší[7] tvrzení, a to z podobného důvodu jako v předchozím případě (jen je potřeba zajistit, aby obě racionální funkce měly v tomto případě navíc stejný definiční obor).

35 Nejprve si všimněte, že předpoklad v implikaci (4.9) se dá napsat jednodušeji. Předpoklad přeložený do češtiny totiž říká: *Funkce R_1 a R_2 mají stejný definiční obor a ve všech bodech svého (společného) definičního oboru mají stejné hodnoty.* Je jasné, že za těchto předpokladů můžeme psát prostě $R_1 = R_2$[8]. Vlastně se tedy nyní ptáme, platí-li implikace

$$\left(\frac{P_1}{Q_1} = \frac{P_2}{Q_2}\right) \implies \big(P_1 = P_2 \quad \wedge \quad Q_1 = Q_2\big). \tag{4.10}$$

Je tedy možná poněkud překvapivé, že tato implikace obecně neplatí; protipříklad je však celkem jednoduchý (a podobný protipříkladu na implikaci (4.8), jen musíme dát pozor i na rovnost definičních oborů). Pro oživení uvažujme případ, kdy v definičním oboru funkcí chybí jiný bod než 0:

$$R_1(x) = \frac{x-1}{x^2-2x+1}, \qquad R_2(x) = \frac{1}{x-1}.$$

Je zřejmé, že $R_1 = R_2$, přesto se však čitatelé (a tedy ani jmenovatelé) neshodují. Implikace (4.10) (resp. (4.9)) neplatí.

36 (Zamyšlení o metodě parciálních zlomků.) Vidíme tedy, že mezi racionálními funkcemi a jejich vyjádřeními pomocí podílu polynomů neplatí tak těsná souvislost jako mezi funkcemi polynomiálními a příslušnými polynomy: Zatímco rovnost polynomiálních funkcí (na $\mathbb{R}$) implikuje rovnost polynomů, pro racionální funkce analogický závěr neplatí. Přesto však závěry podobného typu pro racionální funkce používáme, a to k hledání neurčitých koeficientů při aplikaci metody parciálních zlomků. Například:

$$\frac{5x+1}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3},$$

odkud po převedení pravé strany na společného jmenovatele dostaneme

$$\begin{aligned}\frac{5x+1}{(x-2)(x-3)} &= \frac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)(x-3)} = \\ &= \frac{(A+B)x-3A-2B}{(x-2)(x-3)}.\end{aligned}$$

[7] Implikace se silnějšími předpoklady je slabší tvrzení.

[8] Tvrdím-li, že dvě funkce jsou stejné, implicitně tvrdím i to, že mají stejný definiční obor.

Máme tedy rovnost dvou racionálních funkcí, ze které podle standardního postupu odvodíme rovnost čitatelů, tvrdíme tedy, že platí

$$5x + 1 = (A + B)x - 3A - 2B. \tag{4.11}$$

Právě jsme si ovšem v několika odstavcích uvědomili, že rovnost racionálních funkcí nezbytně neznamená rovnost čitatelů v příslušných vyjádřeních (jako podílů polynomů). Nicméně nyní už je asi jasné, v čem je rozdíl oproti výše uvažovaným situacím: zde totiž nejen že víme, že obě racionální funkce jsou si rovny, víme také, že se shodují příslušní jmenovatelé. Ve značení předchozích odstavců tedy vlastně tvrdíme, že platí (opět o něco slabší) implikace[9]:

$$\left(\frac{P_1}{Q_1} = \frac{P_2}{Q_2} \quad \wedge \quad Q_1 = Q_2\right) \implies P_1 = P_2,$$

kde P_1, P_2, Q_1, Q_2 jsou nenulové polynomy, neboli

$$\left(\frac{P_1}{Q} = \frac{P_2}{Q}\right) \implies P_1 = P_2, \tag{4.12}$$

kde Q je nenulový polynom ve jmenovateli společný pro obě racionální funkce. Toto tvrzení je ze všech uvedených implikací nejslabší, ale platí a nám stačí. (Důkaz v dalším odstavci.)

Ještě jednou si pořádně všimněte toho, že obě rovnosti v implikaci jsou automaticky míněny „má-li jedna strana smysl“, tj. na *příslušných definičních oborech*. Takže rovnost nalevo platí pro všechna x kromě kořenů Q, zatímco rovnost napravo je míněna pro *všechna* $x \in \mathbb{R}$.

37 (*Důkaz implikace* (4.12).) Předpokládejme, že pro všechna x platí následující rovnice, má-li jedna strana smysl (tj. pro ta x, kde „nedělíme nulou“).

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)} = \frac{P_2(x)}{Q(x)}; \tag{4.13}$$

násobením obou stran rovnice $Q(x)$ dostaneme

$$P_1(x) = P_2(x).$$

Pro která x jsme to ale touto jednoduchou úpravou skutečně korektně odvodili? Zatímco rovnice (4.13) dává smysl pouze pro x, která nejsou kořeny polynomu Q, druhá rovnice dává smysl pro *všechna* $x \in \mathbb{R}$, protože oba polynomy jsou definované na $\mathbb{R}$. Je to dáno tím, že úprava, kterou jsme provedli, je (řečeno SŠ terminologií) důsledková, a tedy potenciálně rozšiřuje obor řešení (v případě, že výraz, kterým rovnici násobíme, tj. $Q(x)$, má pro některá x hodnotu 0). Jinými slovy v tento moment víme pouze

$$\forall x \in \mathbb{R}\colon Q(x) \neq 0 \;\Rightarrow\; P_1(x) = P_2(x).$$

Abychom dokázali implikaci (4.12), potřebujeme ještě dokázat, že $P_1(x) = P_2(x)$ platí i v případě, že $Q(x) = 0$.

Zkuste pořádně vysvětlit důvod, proč tato rovnost skutečně platí i pro všechny kořeny Q. Vezměte v úvahu fakt, že P_1 a P_2 jsou polynomy.

38 (Pokračování důkazu.) Protože Q je nenulový polynom (podle předpokladu), je množina $\{a \in \mathbb{R}\colon Q(a) = 0\}$ (množina kořenů Q) konečná. Tím pádem existuje nejmenší vzdálenost mezi dvěma různými kořeny; označme ji δ. Protože δ je vzdálenost mezi (nějakými) nejbližšími dvěma *různými* kořeny, je $\delta > 0$.[10]

[9] Porovnejte s implikací (4.10).

[10] Kdyby kořenů bylo nekonečně mnoho, mohlo by se stát, že vzdálenosti mezi kořeny jsou libovolně malé, a tedy minimální vzdálenosti „se nenabývá“ – musela by být nulová, což pro různé kořeny není možné. My ale víme, že každý polynom má pouze konečně mnoho kořenů.

Uvažujme libovolný kořen a polynomu Q, tj. $Q(a) = 0$. Ukážeme, že $P_1(a) = P_2(a)$. Skutečně, protože $P(a,\delta) = (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$ neobsahuje žádný kořen polynomu Q (podle volby δ), jest

$$\forall x \in P(a,\delta)\colon\ P_1(x) = P_2(x),$$

a tedy

$$P_1(a) = \lim_{x\to a} P_1(x) = \lim_{x\to a} P_2(x) = P_2(a),$$

kde první rovnost plyne ze spojitosti P_1, poslední rovnost ze spojitosti P_2 a prostřední rovnost platí kvůli tomu, že limita (v bodě a) funkce závisí pouze na hodnotách této funkce na jistém *prstencovém* okolí (bodu a) a my víme, že funkce P_1 a P_2 se shodují na $P(a,\delta)$.

Dostali jsme $P_1(a) = P_2(a)$. Protože bod a byl volen jako libovolný kořen Q, platí rovnost pro všechny kořeny Q, a jsme tedy hotovi. □

$\boxed{39}$ (Rekapitulace.) Pojďme si shrnout, co jsme si rozmysleli v odstavcích 4.3–4.3. Uvědomili jsme si, že rovnost dvou racionálních funkcí nezbytně neznamená rovnost čitatelů a jmenovatelů v příslušných vyjádřeních. Dospěli jsme ale také k tomu, že za dodatečného předpokladu rovnosti jmenovatelů už musíme mít (ve stejných rac. funkcích) stejné čitatele, tj. že platí (4.12).

Nyní se vrátíme k našemu konkrétnímu příkladu rozkladu na parciální zlomky, kde jsme skončili rovnicí (4.11). A priori jsme věděli, že tato rovnice platí pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{2,3\}$, tedy až na kořeny jmenovatele $(x-2)(x-3)$ v původním zlomku. Pomocí argumentu se spojitostí polynomů (předchozí odstavec) však můžeme prohlásit, že tato rovnost platí pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Jde tedy o rovnost polynomiálních funkcí a my víme, že stejné polynomiální funkce musí být definovány stejnými polynomy, a tedy polynomy na obou stranách rovnice (4.11) musí mít stejné koeficienty. Dostáváme tak soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 5 &= A + B, && \text{(koef. u } x\text{)} \\ 1 &= -3A - 2B, && \text{(koef. u 1)} \end{aligned}$$

kterou lze snadno vyřešit.

Ještě lépe je ovšem potřeba znalosti argumentu obsaženého v odstavci 4.3 vidět, použijeme-li místo porovnávání koeficientů metodu dosazovací, při které do rovnice

$$\frac{5x+1}{(x-2)(x-3)} = \frac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)(x-3)}$$

dosazujeme za x různá konkrétní čísla. Typické přitom je uvažovat pouze rovnost čitatelů

$$5x + 1 = A(x-3) + B(x-2)$$

a pak za x postupně dosadit 2 a 3, čímž dostaneme dvě lineární rovnice, z nichž dopočteme A, B. Přitom $x = 2$ a $x = 3$ volíme kvůli tomu, že pak vždy jeden člen na pravé straně vypadne, a výsledná soustava rovnic je tedy triviální. Vtip je ale v tom, že právě $2, 3$ jsou kořeny jmenovatele, takže právě pro tyto dvě hodnoty x není rovnost čitatelů a priori jasná. My ale díky výše uvedeným úvahám víme, že platí, a tedy tato metoda je korektní.