

5. INTEGRÁLNÍ POČET	58
5.1. Integrace rozkladem	58
Úlohy k samostatnému řešení.....	58
5.2. Jednoduché substituce	59
Úlohy k samostatnému řešení.....	59
5.3. Per partes	59
Úlohy k samostatnému řešení.....	59
5.4. Integrace racionální lomené funkce.....	60
Úlohy k samostatnému řešení.....	60
5.5. Iracionální funkce	61
Úlohy k samostatnému řešení.....	61
5.6. Goniometrické funkce.....	61
Úlohy k samostatnému řešení.....	61
Výsledky úloh k samostatnému řešení	63

5. INTEGRÁLNÍ POČET

5.1. Integrace rozkladem



Úlohy k samostatnému řešení



1. Vypočítejte integrál:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } \int \left(6x^2 - \frac{1}{x} + \frac{4}{x^5} \right) dx, & \text{b) } \int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x^3}} \right) dx, & \text{c) } \int \frac{x^2 - 2\sqrt{x} + 2}{x} dx, \\
 \text{d) } \int \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 2} dx, & \text{e) } \int \frac{x^2 - 9}{x + 3} dx, & \text{f) } \int \frac{(\sqrt{x} + 3)^2}{x\sqrt{x}} dx, \\
 \text{g) } \int \frac{\sqrt[3]{x^2} + 3x + 1}{\sqrt[3]{x}} dx, & \text{h) } \int \frac{x^3 - 1}{x - 1} dx, & \text{i) } \int \frac{(x - 2\sqrt{x})^2}{\sqrt[3]{x}} dx, \\
 \text{j) } \int \frac{e^{2x} - 4}{e^x + 2} dx, & \text{k) } \int \frac{x^2 e^x - 3x}{2x^2} dx, & \text{l) } \int \frac{e^{2x} - e^x \sqrt{x}}{e^x} dx.
 \end{array}$$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

2. Vypočítejte integrál:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } \int \frac{1}{x + 2} dx, & \text{b) } \int \frac{1}{2x + 3} dx, & \text{c) } \int \frac{x}{x + 1} dx, \\
 \text{d) } \int \frac{x^2}{x - 2} dx, & \text{e) } \int \frac{5 - x}{x + 5} dx, & \text{f) } \int \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} dx, \\
 \text{g) } \int \frac{x^2 + 1}{x - 1} dx, & \text{h) } \int \frac{2x + 2}{3 - 2x} dx, & \text{i) } \int \frac{x^2 + 4x + 8}{x + 2} dx, \\
 \text{j) } \int \frac{x + 1}{x^2 + 1} dx, & \text{k) } \int \frac{x^2 + 4x + 8}{x^2 + 4} dx, & \text{l) } \int \frac{(x + 1)^2}{x^2 + 1} dx.
 \end{array}$$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

3. Vypočítejte integrál:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } \int (\sin x - \cos x) dx, & \text{b) } \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx, & \text{c) } \int \frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x} dx, \\
 \text{d) } \int 2 \cos^2 \frac{x}{2} dx, & \text{e) } \int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx, & \text{f) } \int \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} dx, \\
 \text{g) } \int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x} dx, & \text{h) } \int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx, & \text{i) } \int \frac{1}{1 + \cos 2x} dx.
 \end{array}$$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

4. Vypočítejte integrál:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } \int \frac{\sin x}{\cos x} dx, & \text{b) } \int \frac{e^x}{e^x + 3} dx, & \text{c) } \int \frac{1}{x(\ln x + 1)} dx,
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{d) } \int \frac{3x^2 + 2}{x^3 + 2x - 2} dx, & \text{e) } \int \frac{1}{(1+x^2)\arctg x} dx, & \text{f) } \int \frac{\sin 2x}{\cos^2 x + 4} dx, \\ \text{g) } \int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x} dx, & \text{h) } \int \frac{e^{2x} + x}{e^{2x} + x^2 + 2} dx, & \text{i) } \int \frac{x^2 + 2x + 2}{x^3 + 3x^2 + 6x + 5} dx. \end{array}$$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

5.2. Jednoduché substituce



Úlohy k samostatnému řešení



5. Vypočítejte integrál:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int 2e^{2x} dx, & \text{b) } \int \cos(4x+3) dx, & \text{c) } \int \sin 3x dx, \\ \text{d) } \int \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx, & \text{e) } \int (2x-1)^4 dx, & \text{f) } \int \frac{1}{1+4x^2} dx, \\ \text{g) } \int \frac{1}{\sin^2 5x} dx, & \text{h) } \int 2^{3x} dx, & \text{i) } \int \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}} dx. \end{array}$$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

6. Vypočítejte integrál:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int (e^{2x} + 3e^x + 5)e^x dx, & \text{b) } \int \sin x \cos^2 x dx, & \text{c) } \int 2x \sin x^2 dx, \\ \text{d) } \int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} dx, & \text{e) } \int \frac{(\operatorname{cotg} x - 1)^4}{\sin^2 x} dx, & \text{f) } \int \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{1+x^2} dx, \\ \text{g) } \int \frac{\sqrt{\operatorname{arccotg}^3 x}}{1+x^2} dx, & \text{h) } \int \frac{\ln^2 x + 3 \ln x - 8}{x} dx, & \text{i) } \int \frac{1 + \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx. \end{array}$$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

5.3. Per partes



Úlohy k samostatnému řešení



7. Vypočítejte integrál:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int x e^x dx, & \text{b) } \int (x^2 - 2x + 3)e^{-x} dx, & \text{c) } \int (4x + 2) \sin 2x dx, \\ \text{d) } \int (3x - 4) \cos \frac{x}{2} dx, & \text{e) } \int x \operatorname{tg}^2 x dx, & \text{f) } \int \ln x dx, \\ \text{g) } \int \arcsin x dx, & \text{h) } \int \operatorname{arctg} x dx, & \text{i) } \int \arccos x dx, \\ \text{j) } \int \operatorname{arccotg} x dx, & \text{k) } \int (x^2 + 1) \ln x dx, & \text{l) } \int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx, \\ \text{m) } \int x \sin^2 x dx, & \text{n) } \int e^x \cos x dx, & \text{o) } \int e^{3x} \sin 2x dx, \end{array}$$

p) $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx,$

q) $\int \frac{\ln x}{x^3} dx,$

r) $\int \sqrt{x} \ln x dx,$

s) $\int \sqrt{1-x^2} dx,$

t) $\int \sin \ln x dx,$

u) $\int e^x \sin 2x dx.$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

5.4. Integrace racionální lomené funkce



Úlohy k samostatnému řešení



8. Vypočítejte integrál:

a) $\int \frac{2}{x^2+2x} dx,$

b) $\int \frac{x+5}{x^2+x-2} dx,$

c) $\int \frac{2}{4-x^2} dx,$

d) $\int \frac{5-x}{x^2+4x+3} dx,$

e) $\int \frac{4x+2}{x^3+2x^2-x-2} dx,$

f) $\int \frac{1}{4x^2-1} dx,$

g) $\int \frac{5}{2+3x-2x^2} dx,$

h) $\int \frac{3x+1}{x-x^3} dx,$

i) $\int \frac{-1}{(2+x)(2+3x)} dx,$

j) $\int \frac{8}{7-6x-x^2} dx,$

k) $\int \frac{3}{8x^2-28x+24} dx,$

l) $\int \frac{3-21x-16x^2}{x(1-4x)(x+3)} dx.$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

9. Vypočítejte integrál:

a) $\int \frac{2-x^2}{x(x+1)^2} dx,$

b) $\int \frac{5-2x}{(1-x)^4} dx,$

c) $\int \frac{-4x-2}{x^2(x+1)^2} dx,$

d) $\int \frac{-4x^2+5x-6}{x^3(x-3)} dx,$

e) $\int \frac{1-3x-x^2-x^3}{(1-x^2)^2} dx,$

f) $\int \frac{40-6x^2}{(4-x^2)^2} dx,$

g) $\int \frac{2x^2-x-1}{x^3(x+1)} dx,$

h) $\int \frac{12x^2-12x+4}{x(2x-1)^2} dx,$

i) $\int \frac{-2x^2+26x-35}{(2x+5)(x-5)^2} dx.$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

10. Vypočítejte integrál:

a) $\int \frac{3x}{(x^2+1)(x^2+4)} dx,$

b) $\int \frac{2-x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} dx,$

c) $\int \frac{2-6x-x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} dx,$

d) $\int \frac{4x}{1-x^4} dx,$

e) $\int \frac{x^2+6x}{(x^2+9)(2x-3)} dx,$

f) $\int \frac{3x^2+4x+33}{(x^2+9)(3-x)} dx,$

$$\begin{aligned} \text{g)} \int \frac{5x^2 - 6x + 6}{(2-4x)(x^2+4)} dx, \quad \text{h)} \int \frac{x^2 - 3x - 2}{(x^2 + 2x + 2)(5x + 4)} dx, \quad \text{i)} \int \frac{2}{x^3 + 2x} dx, \\ \text{j)} \int \frac{6x^3 - x^2 + 12x - 3}{x^4 + 3x^2} dx, \quad \text{k)} \int \frac{2x}{(x^2 + 1)(x-1)^2} dx, \quad \text{l)} \int \frac{3x^4 + 3x^2 - 18}{x^5 + 6x^3} dx. \end{aligned}$$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

11. Vypočítejte integrál:

$$\begin{aligned} \text{a)} \int \frac{x^4}{x+1} dx, \quad \text{b)} \int \frac{(x-1)^3}{x+2} dx, \quad \text{c)} \int \frac{x^3}{4-x^2} dx, \\ \text{d)} \int \frac{x^4}{1-x^2} dx, \quad \text{e)} \int \frac{x^4 + 6x^2}{x^2 - 9} dx, \quad \text{f)} \int \frac{2x^3 + 5x^2 - 3x + 3}{x(3+x)} dx, \\ \text{g)} \int \frac{x^2 - 4x + 12}{(x^2 + 4)} dx, \quad \text{h)} \int \frac{x^4 + 4x^3 - x^2 + 5x + 2}{(x^2 + 1)(x+4)} dx, \quad \text{i)} \int \frac{x^4}{x^3 + 2x} dx, \\ \text{j)} \int \frac{6x^3}{6-3x^2} dx, \quad \text{k)} \int \frac{2x^5}{(x^2 + 1)(x-1)^2} dx, \quad \text{l)} \int \frac{x^4 + x^2 - 6}{x^4 + x^3} dx. \end{aligned}$$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

5.5. Iracionální funkce



Úlohy k samostatnému řešení



12. Vypočítejte integrál:

$$\begin{aligned} \text{a)} \int x \sqrt[3]{2-x^2} dx, \quad \text{b)} \int \sqrt{1+x^2} dx, \quad \text{c)} \int \sqrt{1-x^2} dx, \\ \text{d)} \int \frac{x}{\sqrt{5+x^2}} dx, \quad \text{e)} \int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx, \quad \text{f)} \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} dx, \\ \text{g)} \int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx, \quad \text{h)} \int \frac{1}{x\sqrt{x+1}} dx, \quad \text{i)} \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x+4}} dx, \\ \text{j)} \int \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x-4}} dx, \quad \text{k)} \int \frac{\sqrt[4]{x+3}}{1-\sqrt{x+3}} dx, \quad \text{l)} \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx. \end{aligned}$$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

5.6. Goniometrické funkce



Úlohy k samostatnému řešení



13. Vypočítejte integrál:

$$\text{a)} \int \sin x \cos x dx, \quad \text{b)} \int \sin^2 x \cos x dx, \quad \text{c)} \int \sin x \cos^3 x dx,$$

d) $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx,$	e) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin x} dx,$	f) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x + 1} dx,$
g) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx,$	h) $\int \operatorname{tg}^5 x dx,$	i) $\int \frac{1}{\sin x} dx,$
j) $\int \frac{1}{\cos x} dx,$	k) $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x} dx,$	l) $\int \frac{1}{\cos^2 x \sin^3 x} dx,$
m) $\int \frac{\sin x}{4 - \cos^2 x} dx,$	n) $\int \frac{\cos x}{1 + 4 \sin^2 x} dx,$	o) $\int \frac{1}{\sin^2 x - 2 \cos^2 x} dx,$
p) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx,$	q) $\int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x + 1} dx,$	r) $\int \frac{\cos^6 x}{\sin^6 x} dx,$
s) $\int \frac{\cos x}{\cos x + 1} dx,$	t) $\int \frac{\sin x}{\sin x + 1} dx,$	u) $\int \frac{\sin x}{\cos 2x + 1} dx,$
v) $\int \frac{1}{2 \sin x \cos x} dx,$	w) $\int \frac{1}{(\sin x + 1) \cos x} dx,$	z) $\int \frac{1}{2 \sin x \cos x + \sin^2 x} dx.$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)



Výsledky úloh k samostatnému řešení



1. a) $2x^3 - \ln|x| - \frac{1}{x^4} + c$; b) $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} + c$; c) $\frac{x^2}{2} - 4\sqrt{x} + 2\ln|x| + c$;
- d) $\frac{x^2}{2} + 2x + c$; e) $\frac{x^2}{2} - 3x + c$; f) $2\sqrt{x} + 6\ln|x| - \frac{18}{\sqrt{x}} + c$; g) $\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x} + \frac{9}{5}x\sqrt[3]{x^2} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + c$;
- h) $\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + c$; i) $\frac{3}{8}x^2\sqrt[3]{x^2} - \frac{24}{13}x^2\sqrt[6]{x} + \frac{12}{5}x\sqrt[3]{x^2} + c$; j) $e^x - 2x + c$; k) $\frac{e^x}{2} - \frac{3}{2}\ln x + c$;
- l) $e^x - \frac{2}{3}x\sqrt{x} + c$. 2. a) $\ln|x+2| + c$; b) $\frac{1}{2}\ln|2x+3| + c$; c) $x - \ln|x+1| + c$;
- d) $\frac{x^2}{2} + 2x + 4\ln|x-2| + c$; e) $-x + 10\ln|x+5| + c$; f) $\frac{x^2}{2} + x + \ln|x+1| + c$;
- g) $\frac{x^2}{2} + x + 2\ln|x-1| + c$; h) $-x - \frac{5}{2}\ln|3-2x| + c$; i) $\frac{x^2}{2} + 2x + 4\ln|x+2| + c$;
- j) $\frac{1}{2}\ln|x^2+1| + \arctg x + c$; k) $x + 2\ln|x^2+4| + 2\arctg \frac{x}{2} + c$; l) $x + \ln|x^2+1| + c$.
3. a) $-\cos x - \sin x + c$; b) $\operatorname{tg} x - x + c$; c) $\cos x + \sin x + c$; d) $x + \sin x$;
- e) $\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + c$, f) $-\frac{1}{2}\cos x + c$; g) $-\operatorname{cotg} x - 2x + c$; h) $-\operatorname{cotg} x - \operatorname{tg} x + c$;
- i) $\frac{1}{2}\operatorname{tg} x + c$. 4. a) $-\ln|\cos x| + c$; b) $\ln|e^x+3| + c$; c) $\ln|\ln x+1| + c$; d) $\ln|x^3+2x-2| + c$;
- e) $\ln|\arctg x| + c$, f) $-\ln|\cos^2 x+3| + c$; g) $\ln|\sin^2 x| + c$; h) $\frac{1}{2}\ln|e^{2x}+x^2+2| + c$;
- i) $\frac{1}{3}\ln|x^3+3x^2+6x+5| + c$. 5. a) $e^{2x} + c$; b) $\frac{1}{4}\sin(4x+3) + c$; c) $-\frac{1}{3}\cos 3x + c$;
- d) $2\operatorname{tg} \frac{x}{2} + c$; e) $\frac{1}{10}(2x-1)^5 + c$, f) $\frac{1}{2}\arctg 2x + c$; g) $-\frac{1}{5}\operatorname{cotg} 5x + c$; h) $\frac{2^{3x}}{3\ln 2} + c$;
- i) $\frac{1}{3}\arcsin 3x + c$. 6. a) $\frac{e^{3x}}{3} + \frac{3}{2}e^{2x} + 5e^x + c$; b) $-\frac{1}{3}\cos^3 x + c$; c) $-\cos x^2 + c$;
- d) $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + c$; e) $-\frac{1}{5}(\operatorname{cotg} x - 1)^5 + c$, f) $\frac{1}{4}\arctg^4 x + c$; g) $-\frac{2}{5}\sqrt{\operatorname{arccotg}^5 x} + c$;
- h) $\frac{1}{3}\ln^3 x + \frac{3}{2}\ln^2 x - 8\ln x + c$; i) $\arcsin x + \frac{1}{2}\arcsin^2 x + c$. 7. a) $xe^x - e^x + c$;
- b) $-e^{-x}(x^2+3)$; c) $\sin 2x - (2x+1)\cos 2x + c$; d) $(6x-8)\sin \frac{x}{2} + 12\cos \frac{x}{2} + c$;

- e) $x \operatorname{tg} x - \frac{x^2}{2} + \ln|\cos x| + c$, f) $x \ln x - x + c$; g) $x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c$;
- h) $x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln|1+x^2| + c$; i) $x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + c$; j) $x \operatorname{arccotg} x + \frac{1}{2} \ln|1+x^2| + c$;
- k) $\left(\frac{x^3}{3} + x\right) \ln x - \frac{x^3}{9} - x + c$; l) $x \operatorname{arctg} \sqrt{x} + \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x} + c$; m) $\frac{x^2}{4} - \frac{x \sin 2x}{4} - \frac{\cos 2x}{8} + c$;
- n) $\frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x) + c$; o) $\frac{e^{3x}}{13} (3 \sin 2x - 2 \cos 2x) + c$; p) $x \operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + c$;
- q) $-\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + c$; r) $\frac{2}{3} x \sqrt{x} \left(\ln x - \frac{2}{3}\right) + c$; s) $\frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + c$;
- t) $\frac{x}{2} (\sin \ln x - \cos \ln x) + c$; u) $\frac{e^x}{5} (\sin 2x - 2 \cos 2x) + c$. 8. a) $\ln \left| \frac{x}{x+2} \right| + c$;
- b) $\ln \left| \frac{(x-1)^2}{x+2} \right| + c$; c) $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{2+x}{2-x} \right| + c$; d) $3 \ln|x+1| - 4 \ln|x+3| + c = \ln \left| \frac{(x+1)^3}{(x+3)^4} \right| + c$;
- e) $\ln \left| \frac{x^2-1}{(x+2)^2} \right| + c$, f) $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{2x-1}{2x+1} \right| + c$; g) $\ln \left| \frac{2x+1}{x-2} \right| + c$; h) $\ln \left| \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} \right| + c$;
- i) $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x+2}{3x+2} \right| + c$; j) $\ln \left| \frac{x+7}{x-1} \right| + c$; k) $\frac{3}{4} \ln \left| \frac{x-2}{2x-3} \right| + c$; l) $\ln|x(x+3)^2(4x-1)| + c$.
9. a) $\frac{1}{x+1} + \ln \left| \frac{x^2}{(x+1)^3} \right| + c$; b) $\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-1)^3} + c$; c) $\frac{2}{x} - \frac{2}{x+1} + c$;
- d) $\ln \left| \frac{x}{x-3} \right| + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + c$; e) $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - \ln|x-1| + c$, f) $2 \ln \left| \frac{x+2}{x-2} \right| - \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} + c$;
- g) $\frac{1}{2x^2} + 2 \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + c$; h) $\ln \left| \frac{x^4}{2x-1} \right| - \frac{1}{2x-1} + c$; i) $-\ln|2x+5| - \frac{3}{x-5} + c$.
10. a) $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x^2+1}{x^2+4} \right| + c$; b) $\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + c$; c) $\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + \ln \left| \frac{x^2+4}{x^2+1} \right| + c$;
- d) $\ln \left| \frac{x^2+1}{x^2-1} \right| + c$; e) $\operatorname{arctg} \frac{x}{3} + \frac{1}{2} \ln|2x-3| + c$, f) $\frac{1}{2} \ln|x^2+9| - 4 \ln|x-3| - \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + c$;
- g) $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \ln|x^2+4| - \frac{1}{4} \ln|2-4x| + c$; h) $\frac{1}{5} \ln|5x+4| - \operatorname{arctg}(x+1) + c$;
- i) $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x^2}{x^2+2} \right| + c$; j) $\ln|x^2+3| + 4 \ln|x| + \frac{1}{x} + c$; k) $-\operatorname{arctg} x - \frac{1}{x-1} + c$;

$$\text{I) } \ln|x(x^2+6)| + \frac{3}{2x^2} + c. \quad \mathbf{11. a) } \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + c;$$

$$\text{b) } \frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + 13x - 27 \ln|x+2| + c; \quad \text{c) } -\frac{x^2}{2} - 2 \ln|x^2-4| + c; \quad \text{d) } -\frac{x^3}{3} - x + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| + c;$$

$$\text{e) } \frac{x^3}{3} + 15x + \frac{45}{2} \ln \left| \frac{x-3}{x+3} \right| + c, \quad \text{f) } x^2 - x + \ln \left| \frac{x}{x+3} \right| + c; \quad \text{g) } x + 4 \operatorname{arctg} \frac{x}{2} - 2 \ln|x^2+4| + c;$$

$$\text{h) } \operatorname{arctg} x - 2 \ln|x+4| + \frac{x^2}{2} + c; \quad \text{i) } \frac{x^2}{2} - \ln|x^2+2| + c; \quad \text{j) } -2 \ln|x^2-2| - x^2 + c;$$

$$\text{k) } x^2 + 4x + 4 \ln|x-1| - \operatorname{arctg} x - \frac{1}{x-1} + c; \quad \text{l) } 4 \ln|x+1| - \ln|x| + x - \frac{6}{x} + \frac{3}{x^2} + c.$$

$$\mathbf{12. a) } -\frac{3}{8}(2-x^2)^3 \sqrt{2-x^2} + c; \quad \text{b) } \frac{1}{2} \left(x\sqrt{x^2+1} + \ln|x+\sqrt{x^2+1}| \right) + c;$$

$$\text{c) } \frac{1}{2} \left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x \right) + c; \quad \text{d) } \sqrt{5+x^2} + c; \quad \text{e) } \frac{2}{3} x\sqrt{x} - x + 2\sqrt{x} - 2 \ln|1+\sqrt{x}| + c,$$

$$\text{f) } x - 2\sqrt{x} + 2 \ln|1+\sqrt{x}| + c; \quad \text{g) } \frac{2}{3} (x+1)\sqrt{x+1} - 2\sqrt{x+1} + c; \quad \text{h) } \ln \left| \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} \right| + c;$$

$$\text{i) } \frac{6}{7} x\sqrt[6]{x} - \frac{24}{5} \sqrt[6]{x^5} + 32\sqrt{x} - 384\sqrt[6]{x} + 768 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt[6]{x}}{2} + c;$$

$$\text{j) } x + \frac{16}{3} \sqrt[4]{x^3} + 32\sqrt{x} + 256\sqrt[4]{x} + 1024 \ln|\sqrt[4]{x}-4| + c;$$

$$\text{k) } -\frac{4}{3} \sqrt[4]{(x+3)^3} - 4\sqrt[4]{x+3} + 2 \ln \left| \frac{1+\sqrt[4]{x+3}}{1-\sqrt[4]{x+3}} \right| + c; \quad \text{l) } \operatorname{arctg} \sqrt{x^2-1} + c. \quad \mathbf{13. a) } \frac{\sin^2 x}{2} + c;$$

$$\text{b) } \frac{\sin^3 x}{3} + c; \quad \text{c) } -\frac{\cos^4 x}{4} + c; \quad \text{d) } -\frac{1}{2 \sin^2 x} + c; \quad \text{e) } \ln|\sin x| - \frac{\sin^2 x}{2} + c,$$

$$\text{f) } \operatorname{arccotg}(\cos x) + c; \quad \text{g) } \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + c; \quad \text{h) } \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \frac{\operatorname{tg}^2}{2} + \frac{1}{2} \ln|1+\operatorname{tg}^2 x| + c; \quad \text{i) } \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + c;$$

$$\text{j) } \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 \right| - \ln \left| 1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + c; \quad \text{k) } -\frac{\operatorname{cotg}^5 x}{5} - \frac{\operatorname{cotg}^3 x}{3} + c; \quad \text{l) } \ln|\operatorname{tg} x| - \frac{1}{2 \sin^2 x} + c;$$

$$\text{m) } \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\cos x - 2}{\cos x + 2} \right| + c; \quad \text{n) } \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(2 \sin x) + c, \quad \text{o) } \frac{\sqrt{2}}{4} \ln \left| \frac{\sqrt{2} - \operatorname{tg} x}{\sqrt{2} + \operatorname{tg} x} \right| + c; \quad \text{p) } -\frac{1}{\sin x} - \sin x + c;$$

$$\text{q) } \frac{1}{2} \ln \left| 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \right| - \ln \left| 1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + \frac{x}{2} + c; \quad \text{r) } -\frac{\operatorname{cotg}^5 x}{5} + \frac{\operatorname{cotg}^3 x}{3} - \operatorname{cotg} x - x + c;$$

$$\text{s) } -\text{tg} \frac{x}{2} - 2x + c; \quad \text{t) } \frac{2}{1 + \text{tg} \frac{x}{2}} + x + c; \quad \text{u) } \frac{1}{2 \cos x} + c; \quad \text{v) } \frac{1}{2} \ln \left| \text{tg} \frac{x}{2} \right| - \frac{1}{2} \ln \left| \text{tg}^2 \frac{x}{2} - 1 \right| + c;$$

$$\text{w) } \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\text{tg} \frac{x}{2} + 1}{\text{tg} \frac{x}{2} - 1} \right| + c, \quad \text{z) } \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\text{tg} x}{\text{tg} x + 2} \right| + c.$$

6. URČITÝ INTEGRÁL	68
6.1. Výpočet určitého integrálu	68
Úlohy k samostatnému řešení	68
6.2. Geometrické aplikace.....	69
6.2.1. Obsah rovinného obrazce	69
Úlohy k samostatnému řešení.....	69
6.2.2. Délka oblouku rovinné křivky	70
Úlohy k samostatnému řešení.....	70
6.2.3. Objem rotačního tělesa	70
Úlohy k samostatnému řešení.....	70
6.2.4. Povrch rotačního tělesa.....	71
Úlohy k samostatnému řešení.....	71
6.3. Nevlastní integrál.....	71
Úlohy k samostatnému řešení.....	71
Výsledky úloh k samostatnému řešení	73
Nápověda k úlohám k samostatnému řešení.....	74
Obsah rovinného obrazce ohraničeného křivkami	74
Délku oblouku rovinné křivky.....	75
Objem rotačního tělesa, které vznikne rotací dané plochy kolem osy x	77
Objem rotačního tělesa, které vznikne rotací dané plochy kolem osy y	79
Povrch tělesa, které vznikne rotací křivky kolem osy x	79

6. URČITÝ INTEGRÁL

6.1. Výpočet určitého integrálu



Úlohy k samostatnému řešení



1. Vypočítejte integrál:

$$a) \int_1^4 \left(x^2 - 4\sqrt{x} + \frac{1}{x} \right) dx,$$

$$c) \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2+1} \right) dx,$$

$$e) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^2 x - \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx,$$

$$g) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x \, dx,$$

$$i) \int_0^1 \frac{x+2}{x+1} dx,$$

$$k) \int_0^3 \frac{x}{1+x^2} dx,$$

$$b) \int_0^{\pi} (\cos 2x - 2 \sin x + 2) dx,$$

$$d) \int_4^9 \left(\frac{x^2 - 5\sqrt{x} + x}{x^3} \right) dx,$$

$$f) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\cos^2 x - \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx,$$

$$h) \int_0^1 \left(e^{2x} - 4^{3x} + \frac{1}{2^x} \right) dx,$$

$$j) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1 + \cos^2 x} dx,$$

$$l) \int_0^2 \frac{x^2}{4+x^2} dx.$$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

2. Vypočítejte integrál:

$$a) \int_0^1 (x-1)e^x dx,$$

$$c) \int_0^{\pi} x \sin 2x dx,$$

$$e) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \cos \frac{x}{2} dx,$$

$$g) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx,$$

$$i) \int_1^e \ln^2 x dx,$$

$$k) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx,$$

$$b) \int_{-1}^1 x^2 e^{-x} dx,$$

$$d) \int_1^4 x^2 \ln x dx,$$

$$f) \int_0^1 x \operatorname{arctg} x dx,$$

$$h) \int_0^{\pi} (x^2 - 2x + 2) \sin x dx,$$

$$j) \int_0^{\pi} (x^2 - 1) \cos \frac{x}{2} dx,$$

$$l) \int_0^1 x \ln(x+1) dx.$$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

3. Vypočítejte integrál:

a) $\int_0^1 x\sqrt{x^2+1} dx,$

b) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}} dx,$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \cos x dx,$

d) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x} dx,$

e) $\int_0^1 \sin(\pi\sqrt{x}) dx,$

f) $\int_1^e \frac{5 \ln^4 x}{x} dx,$

g) $\int_0^1 \frac{e^x(2e^x+2)}{e^{2x}+2e^x+2} dx,$

h) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos^2 x+3} dx,$

i) $\int_0^1 \frac{1}{e^x+1} dx,$

j) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{(x+1)} dx,$

k) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 x+2}{\cos^2 x} dx,$

l) $\int_0^5 \frac{\sqrt{x+4}}{x+3} dx.$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

4. Vypočítejte integrál:

a) $\int_1^2 \frac{x-1}{x^3(x+1)} dx,$

b) $\int_0^1 \frac{x}{(x+1)(x^2+1)} dx,$

c) $\int_1^2 \frac{4}{x^2+4x} dx,$

d) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x+2}{x(x^2+1)} dx,$

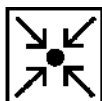
e) $\int_3^5 \frac{x+4}{x^2-4x+4} dx,$

f) $\int_4^5 \frac{2x}{x^2-x-6} dx.$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

6.2. Geometrické aplikace

6.2.1. Obsah rovinného obrazce



Úlohy k samostatnému řešení



5. Vypočítejte obsah rovinného obrazce ohraničeného křivkami:

a) $x=0, y=0, 3x+4y-12=0,$

b) $y=0, y=x, y=6-x,$

c) $y=\sin x+1, y=0, x \in \langle 0, \pi \rangle,$

d) $y=e^x, y=e^{-x}, y=e,$

e) $y=\ln(x-1), y=0, x=5,$

f) $y=-x^2-2x+4, y=x^2-4x-8,$

g) $x=r \cos t, y=r \sin t, t \in \langle 0, 2\pi \rangle,$

kružnice

h) $x=a \cos t, y=b \sin t, t \in \langle 0, 2\pi \rangle,$

elipsa

i) $x=r(t-\sin t), y=r(1-\cos t), t \in \langle 0, 2\pi \rangle,$

cykloida

j) $x=2a \sin t \cos t, y=a \sin t, t \in \langle 0, \pi \rangle.$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)[Neumím nakreslit obrázek](#)

6.2.2. Délka oblouku rovinné křivky



Úlohy k samostatnému řešení



6. Vypočítejte délku oblouku rovinné křivky:

a) $y = \ln \cos x, x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{3} \right\rangle,$

b) $y = \arcsin x + \sqrt{1-x^2}, x \in \langle 0, 1 \rangle,$

c) $y = \ln x, x \in \langle 1, 2 \rangle,$

d) $y = \ln(1-x^2), x \in \left\langle 0, \frac{3}{4} \right\rangle,$

e) $y = \sqrt{x-x^2} - \arccos \sqrt{x}, x \in \langle 0, 1 \rangle,$

f) $y = \ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1}, x \in \langle 1, 3 \rangle,$

g) $x = \cos t, y = \sin t, t \in \langle 0, 2\pi \rangle,$

h) $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle,$

asteroida

i) $x = t^2, y = \frac{t}{3}(t^2 - 3), t \in \langle 0, \sqrt{3} \rangle,$

j) $x = e^t \sin t, y = e^t \cos t, t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle.$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

[Neumím nakreslit obrázek](#)

6.2.3. Objem rotačního tělesa



Úlohy k samostatnému řešení



7. Vypočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací dané plochy kolem osy x :

a) $y = x^2 - 4, y = 0,$

b) $y = \ln x, y = 0, x = e,$

c) $xy = 3, x = 1, x = 3, y = 0,$

d) $y = \sin x, y = 0, x = \frac{\pi}{2},$

e) $y = x^3, y^2 = x,$

f) $y = \arccos x, y = 0, x = 1,$

g) $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), t \in \langle 0, 2\pi \rangle, a > 0,$

h) $x = \cos t, y = \sin t, t \in \langle 0, 2\pi \rangle,$

i) $x = a \cos t, y = b \sin t, t \in \langle 0, 2\pi \rangle,$

j) $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle.$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

[Neumím nakreslit obrázek](#)

8. Vypočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací dané plochy kolem osy y :
- $y = x^2 - 4, y = 0,$
 - $y = x^3, y = 1, x = 0,$
 - $y = 1 - x, y = 1, x = 1,$
 - $y = \sin x, y = 0, x = \frac{\pi}{2}.$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

[Neumím nakreslit obrázek](#)

6.2.4. Povrch rotačního tělesa



Úlohy k samostatnému řešení



9. Vypočítejte povrch tělesa, které vznikne rotací křivky kolem osy x :
- $y = 3 - x, x \in \langle -1, 2 \rangle,$
 - $y = x^3, x \in \langle 1, 3 \rangle,$
 - $y = \sqrt{x}, x \in \langle 0, 2 \rangle,$
 - $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), x \in \langle 0, 1 \rangle,$
 - $x = a \sin 2t, y = 2a \sin^2 t, t \in \langle 0, \pi \rangle,$
 - $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), t \in \langle 0, 2\pi \rangle, a > 0,$
 - $x = r \cos t, y = r \sin t, t \in \langle 0, \pi \rangle,$
 - $x = e^t \sin t, y = e^t \cos t, t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle,$
 - $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle.$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)

[Neumím nakreslit obrázek](#)

6.3. Nevlastní integrál



Úlohy k samostatnému řešení



10. Vypočítejte nevlastní integrál:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } \int_1^2 \frac{x}{x-1} dx, & \text{b) } \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx, & \text{c) } \int_0^1 \frac{x-1}{x(x+1)} dx, \\
 \text{d) } \int_0^1 \frac{x-1}{\sqrt{x}(x+1)} dx, & \text{e) } \int_1^e \frac{1}{x \ln x} dx, & \text{f) } \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx,
 \end{array}$$

g) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x}{x^2+1} dx,$

h) $\int_0^{\infty} x \sin x dx,$

i) $\int_0^{\infty} (x-1)e^{-x} dx,$

j) $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+1} dx,$

k) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3+x^2} dx,$

l) $\int_0^{\infty} e^{-\sqrt{x}} dx.$

[Výsledky úloh k samostatnému řešení](#)



Výsledky úloh k samostatnému řešení



1. a) $2 \ln 2 + \frac{7}{3}$; b) $2\pi - 4$; c) $\ln 2 + \frac{\pi}{4}$; d) $2 \ln \frac{3}{2} - \frac{25}{162}$; e) $\frac{\pi}{8} - \frac{3}{4}$; f) $\frac{\pi}{6} - \frac{7\sqrt{3}}{8}$;
g) $1 - \frac{\pi}{4}$; h) $\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} - \frac{10}{\ln 2}$; i) $\ln 2 + 1$; j) $\ln 2$; k) $\frac{\ln 10}{2}$; l) $2 - \frac{\pi}{2}$. 2. a) $2 - e$; b) $e - \frac{5}{e}$;
c) $-\frac{\pi}{2}$; d) $\frac{128}{3} \ln 2 - 7$; e) 0 ; f) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$; g) $\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{2} + \frac{1}{2}$; h) $\pi^2 - 2\pi$; i) $e - 2$; j) $2\pi^2 - 18$;
k) $\frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$; l) $\frac{1}{4}$. 3. a) $\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$; b) $4 \ln 2 - 3$; c) $\frac{\sqrt{2}}{12}$; d) $\frac{1}{4}$; e) $\frac{2}{\pi}$; f) 1 ;
g) $\ln \frac{e^2 + 2e + 2}{5}$; h) $\frac{\sqrt{3}}{18} \pi$; i) $1 - \ln \frac{e+1}{2}$; j) $2 - \frac{\pi}{2}$; k) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$; l) $\ln \frac{3}{2} + 2$. 4. a) $2 \ln \frac{3}{4} + \frac{5}{8}$;
b) $\frac{\pi}{8} - \frac{\ln 2}{4}$; c) $\ln \frac{5}{3}$; d) $\ln \frac{3}{2} + \frac{\pi}{12}$; e) $\ln 3 + 4$; f) $\frac{2}{5} \ln \frac{98}{9}$. 5. a) 6 ; b) 9 ; c) $\pi + 2$; d) 2 ;
e) $8 \ln 2 - 4$; f) $\frac{125}{3}$; g) πr^2 ; h) πab ; i) $3\pi r^2$; j) $\frac{4}{3} a^2$. 6. a) $\ln(\sqrt{3} + 2)$; b) $4 - 2\sqrt{2}$;
c) $\ln\left(\frac{\sqrt{5} + \sqrt{10} - \sqrt{2} - 1}{2}\right) + \sqrt{5} - \sqrt{2}$; d) $\ln 7 - \frac{3}{4}$; e) 2 ; f) $\ln(e^4 + e^2 + 1) - 2$; g) 2π ;
h) $\frac{3}{2}$; i) $2\sqrt{3}$; j) $\sqrt{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}} - 1\right)$. 7. a) $\frac{512}{15} \pi$; b) $\pi(e - 2)$; c) 6π ; d) $\frac{\pi^2}{4}$; e) $\frac{5}{14} \pi$;
f) $\pi^2 - 2\pi$; g) $5\pi^2 a^3$; h) $\frac{4}{3} \pi$; i) $\frac{4}{3} \pi ab^2$; j) $\frac{52}{105} \pi a^3$. 8. a) 8π ; b) $\frac{3}{5} \pi$; c) $\frac{2}{3} \pi$;
d) 2π . 9. a) $15\sqrt{2}\pi$; b) $\frac{\pi}{27}(730\sqrt{730} - 10\sqrt{10})$; c) $\frac{13}{3} \pi$; d) $\frac{\pi}{4}(e^2 - e^{-2} + 4)$; e) $4\pi^2 a^2$;
f) $\frac{64}{3} \pi a^2$; g) $4\pi r^2$; h) $\frac{2\sqrt{2}}{5} \pi(e^\pi - 2)$; i) $\frac{6}{5} \pi a^2$. 10. a) diverguje; b) 2 ; c) diverguje;
d) $2 - \pi$; e) diverguje; f) $\sqrt{2}$; g) 0 ; h) diverguje; i) 0 ; j) $\frac{\pi}{2}$; k) $1 - \ln 2$; l) 2 .

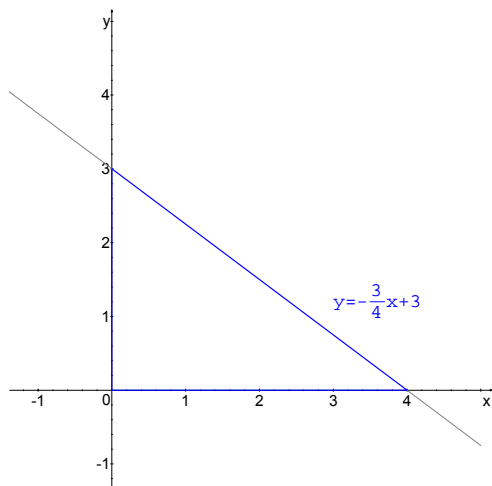


Nápověda k úlohám k samostatnému řešení

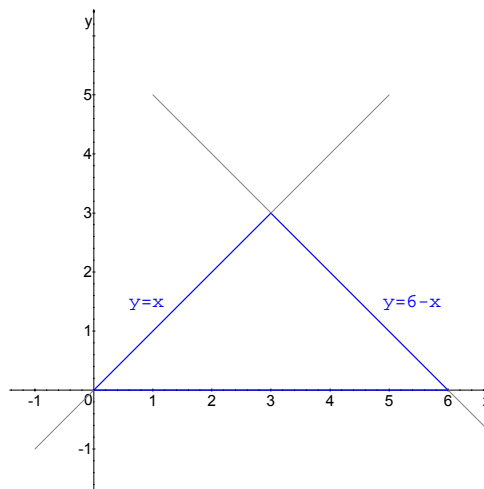


Obsah rovinného obrazce ohraničeného křivkami

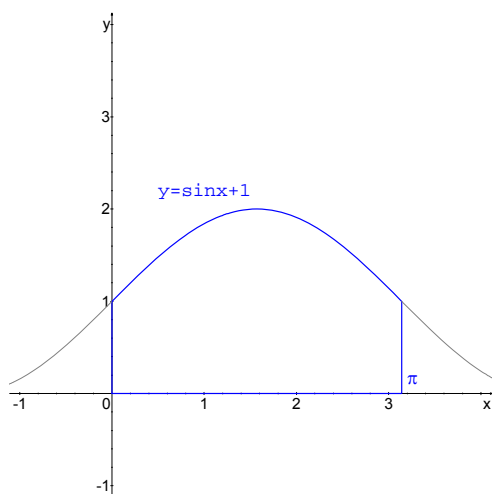
a)



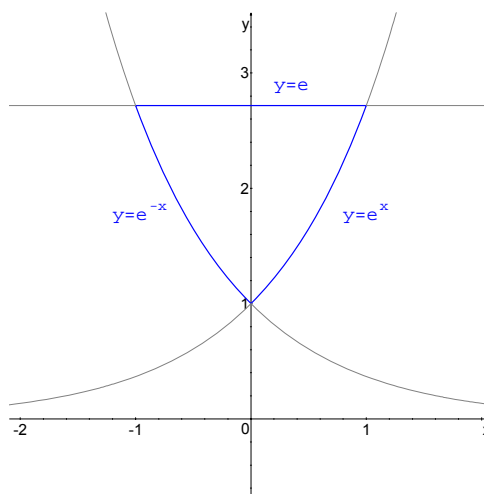
b)



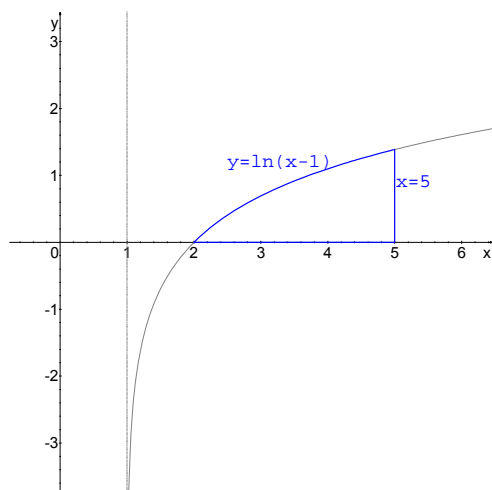
c)



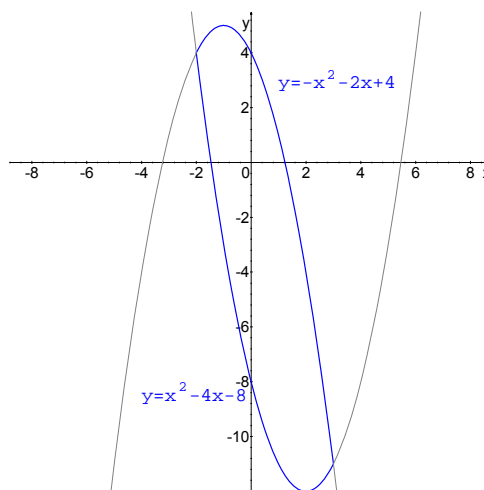
d)



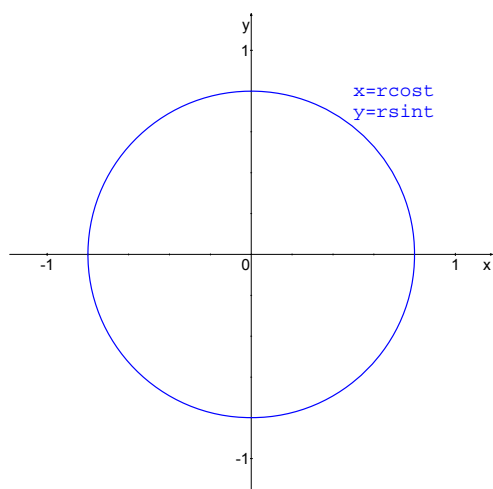
e)



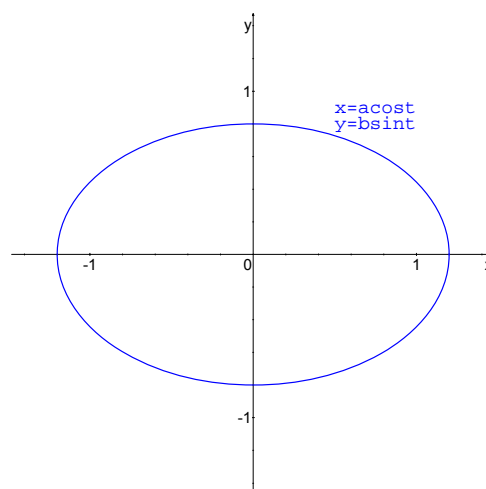
f)



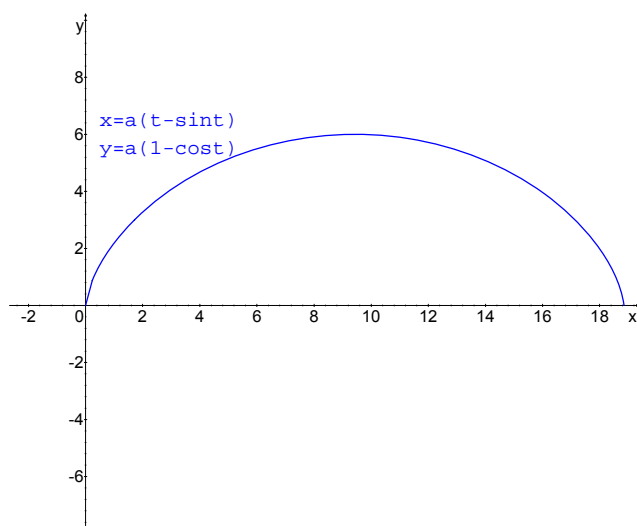
g)



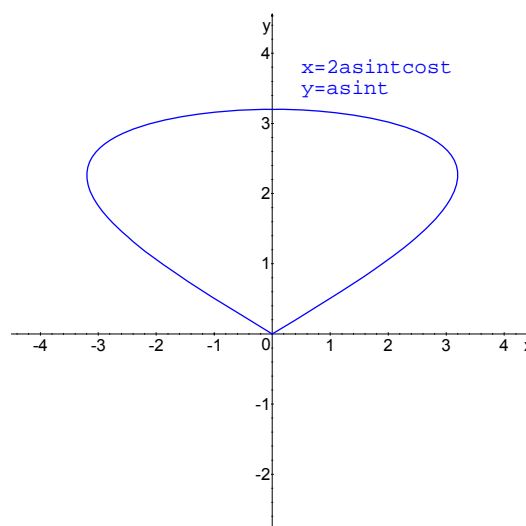
h)



i)

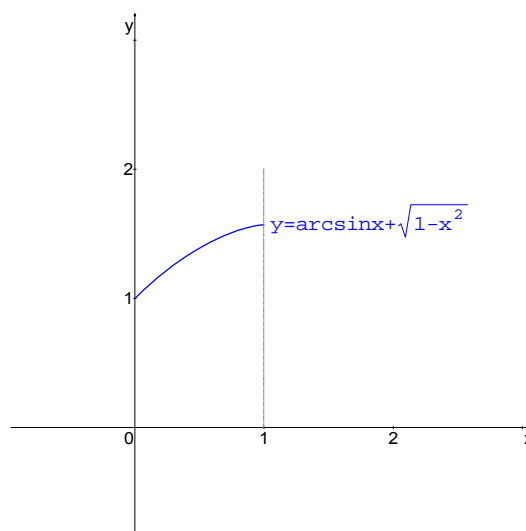
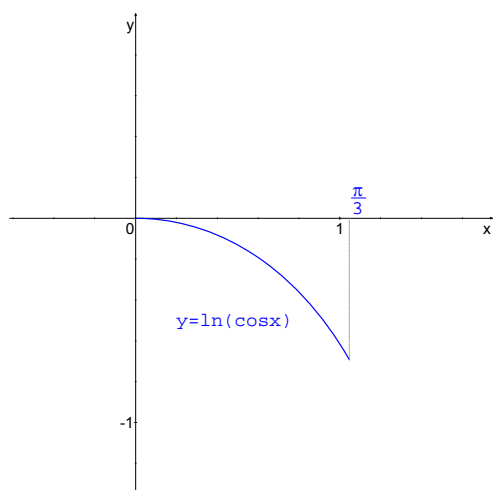


j)

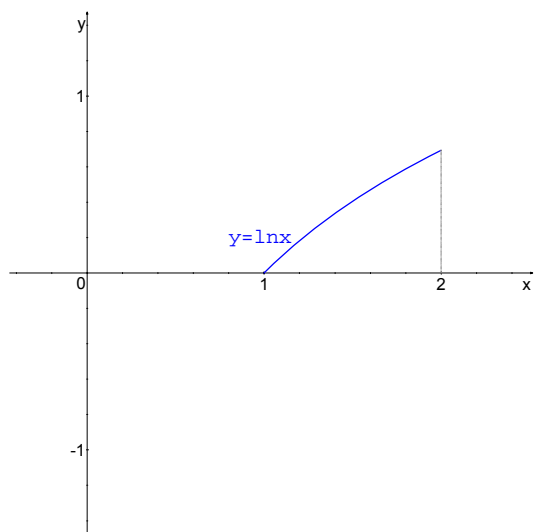


Délku oblouku rovinné křivky

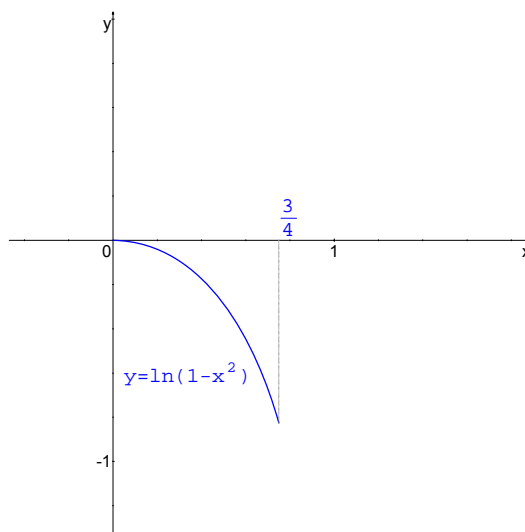
a)



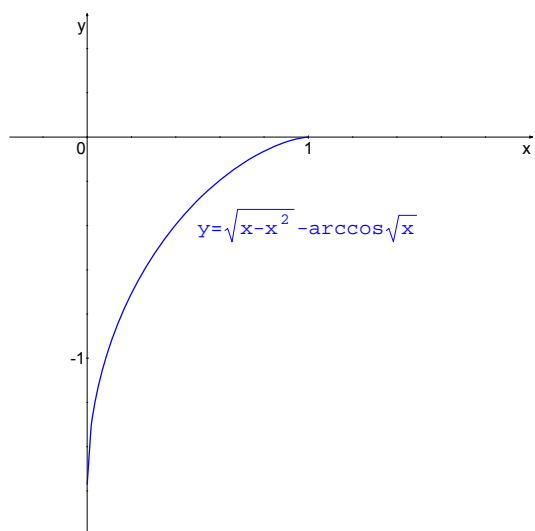
c)



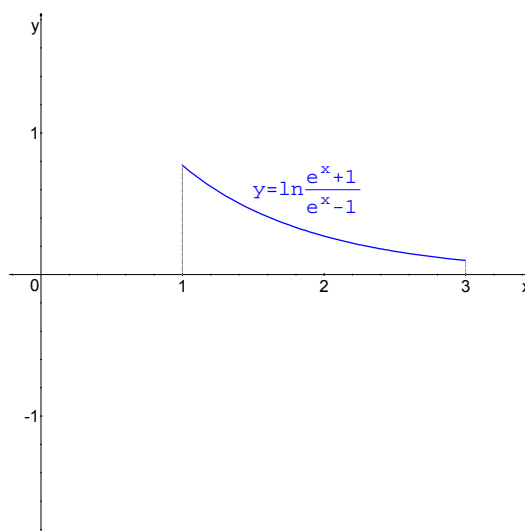
d)



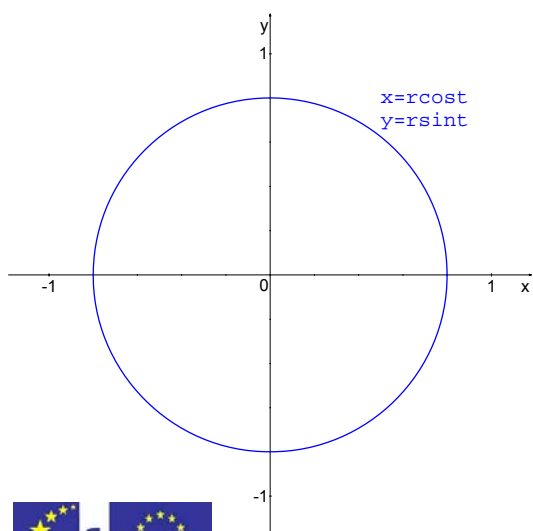
e)



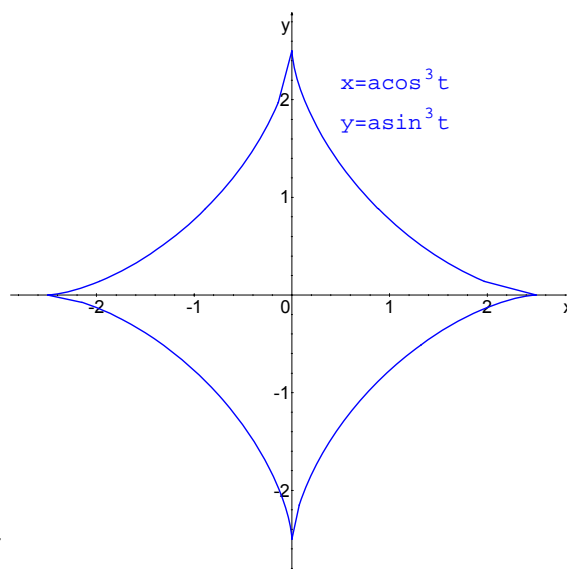
f)



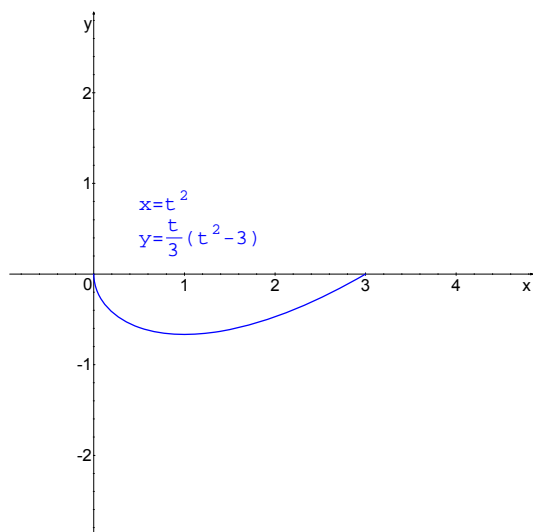
g)



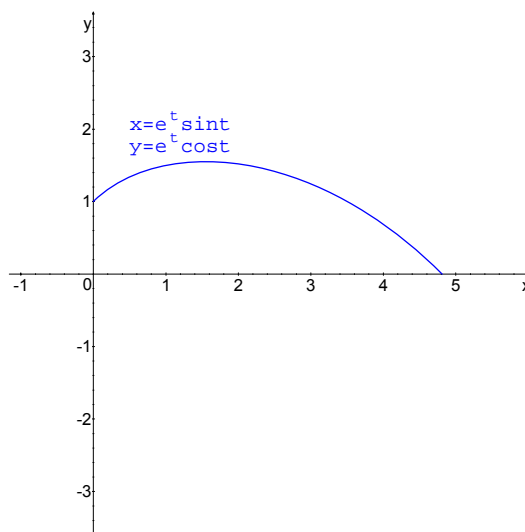
h)



i)

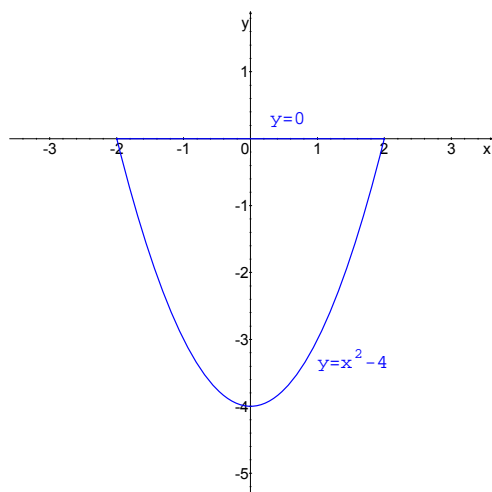


j)

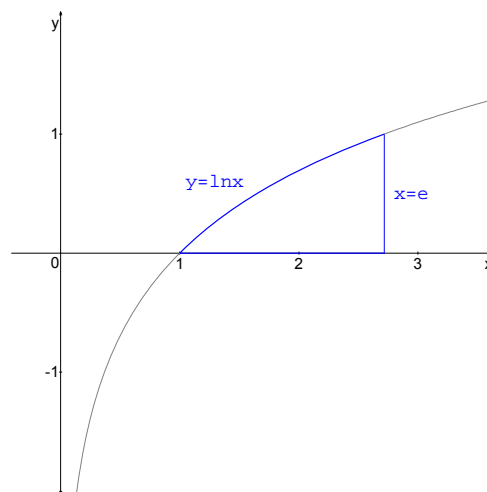


Objem rotačního tělesa, které vznikne rotací dané plochy kolem osy x

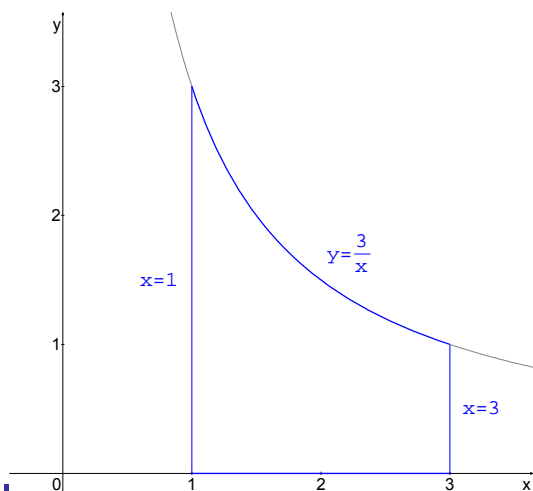
a)



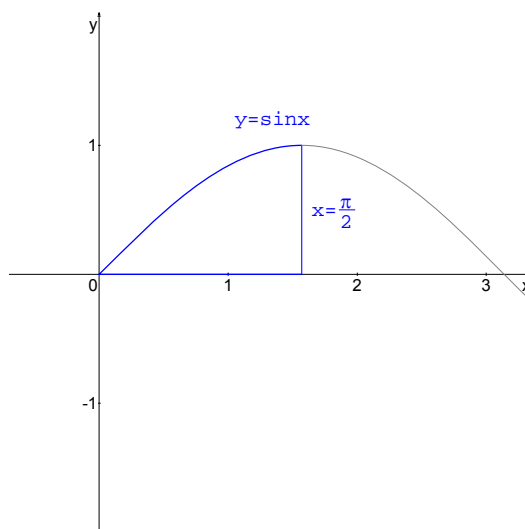
b)



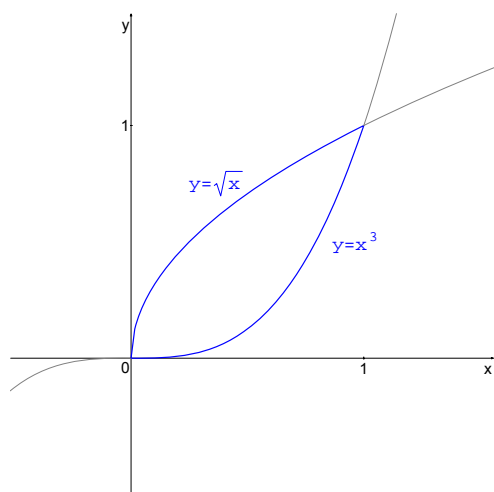
c)



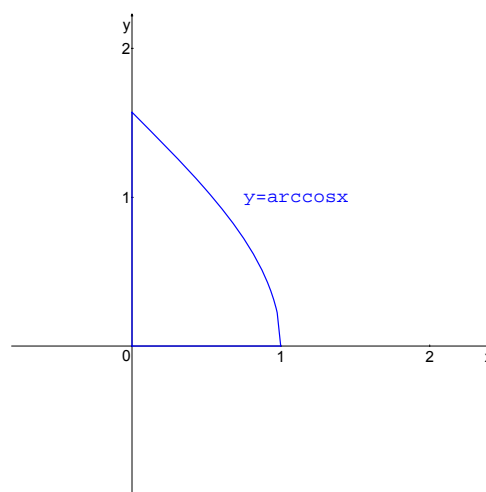
d)



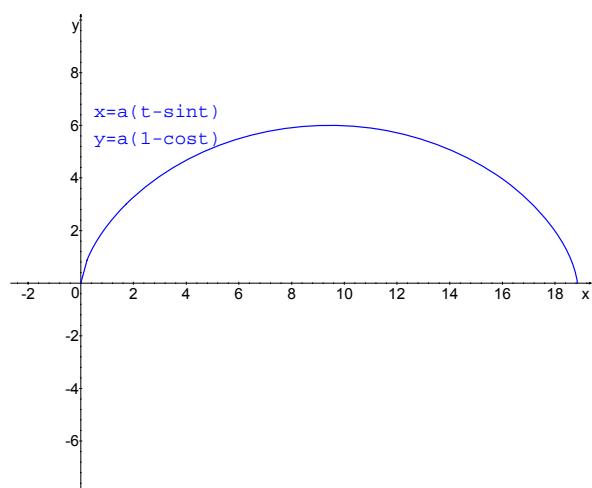
e)



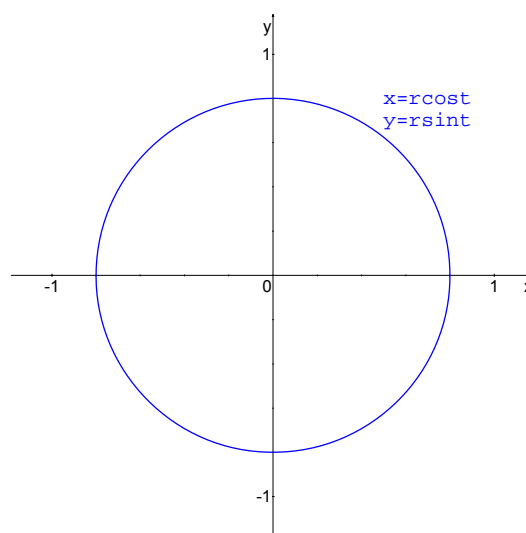
f)



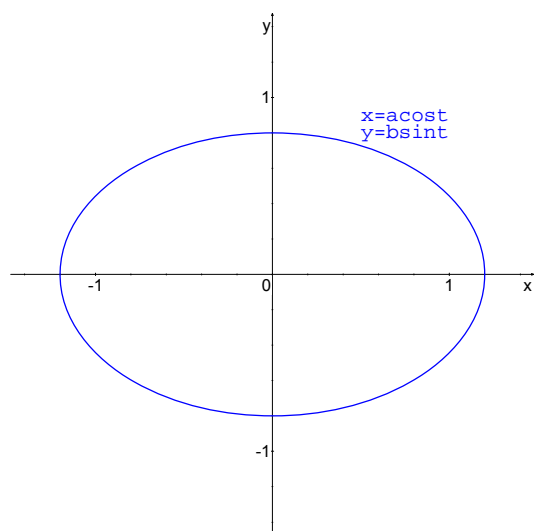
g)



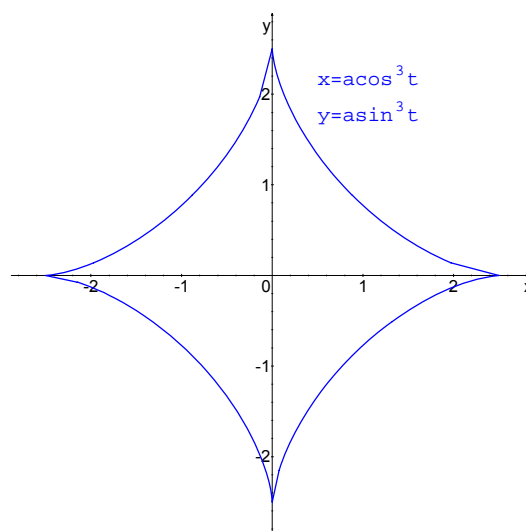
h)



i)

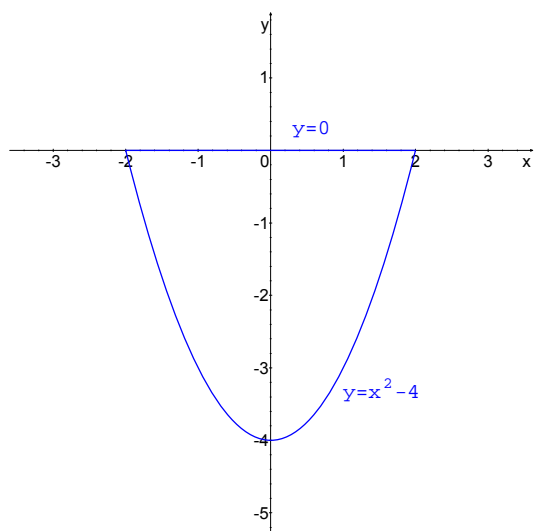


j)

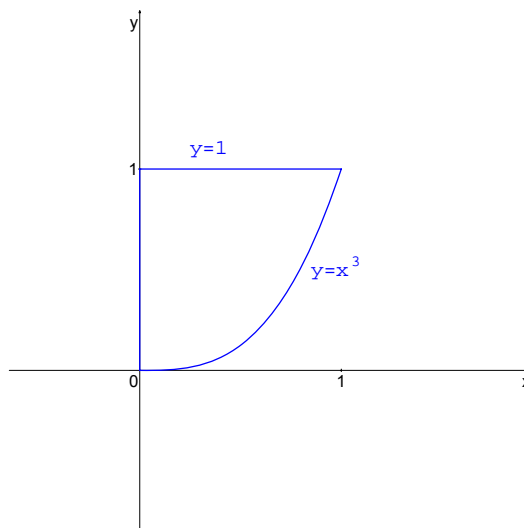


Objem rotačního tělesa, které vznikne rotací dané plochy kolem osy y

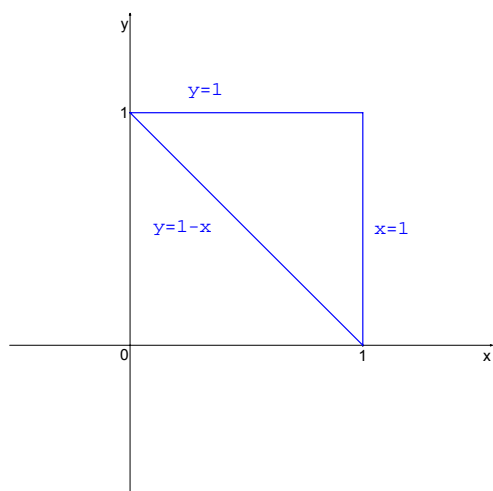
a)



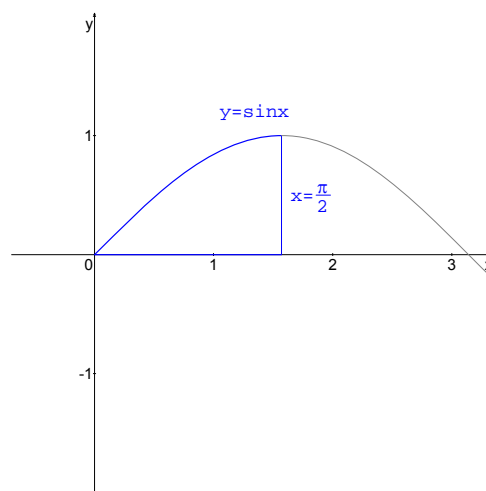
b)



c)

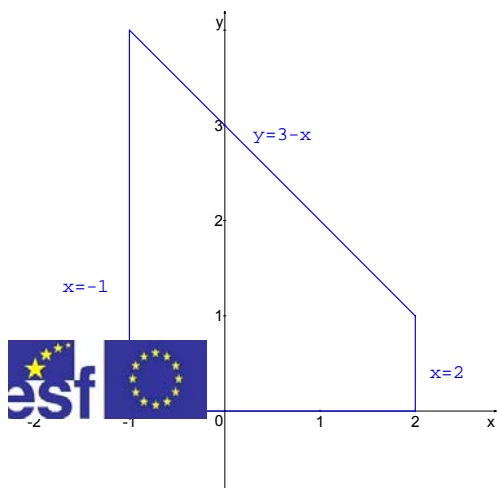


d)

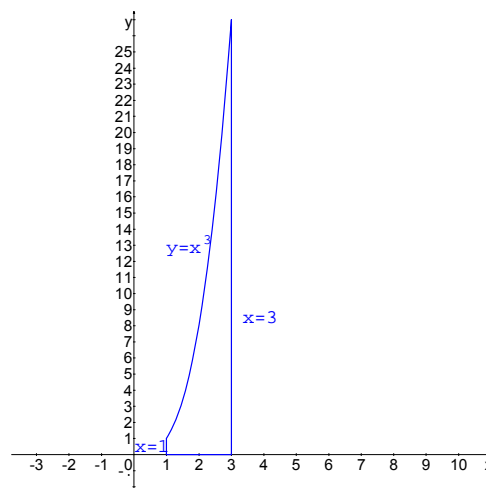


Povrch tělesa, které vznikne rotací křivky kolem osy x

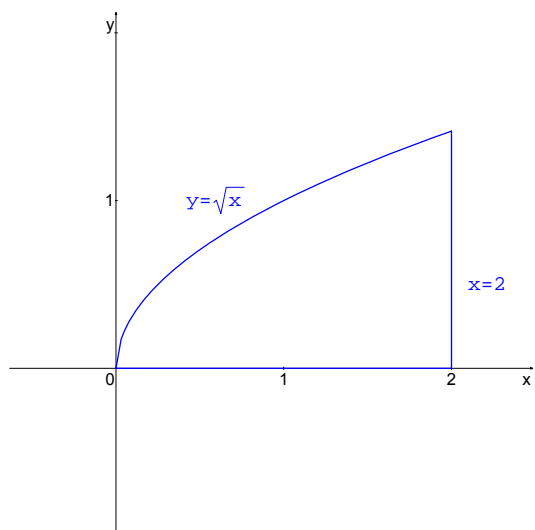
a)



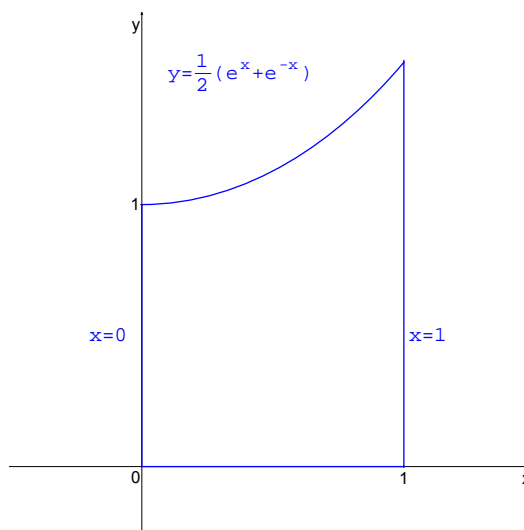
b)



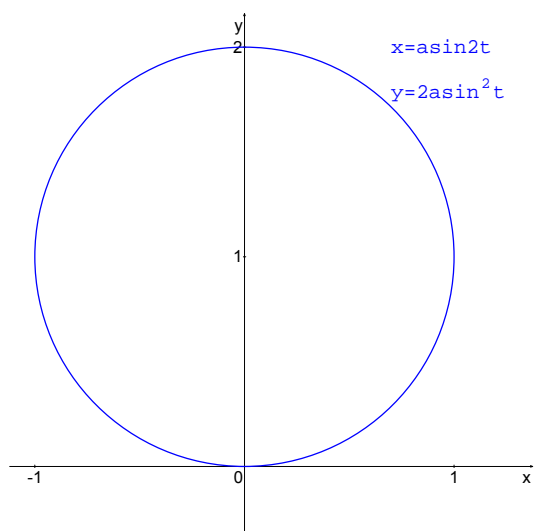
c)



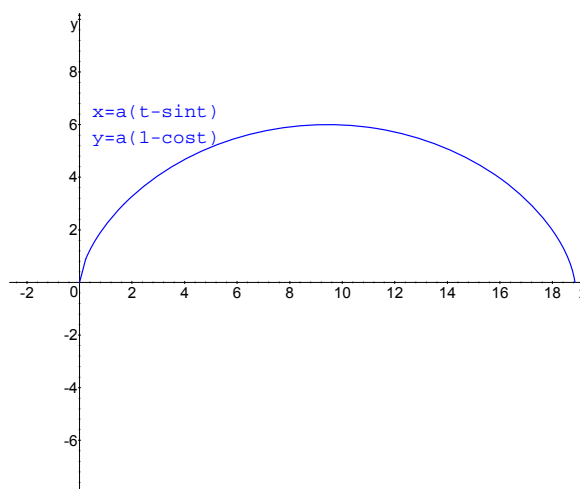
d)



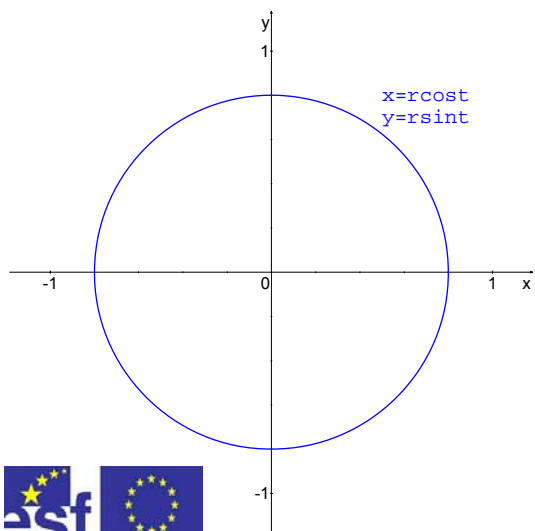
e)



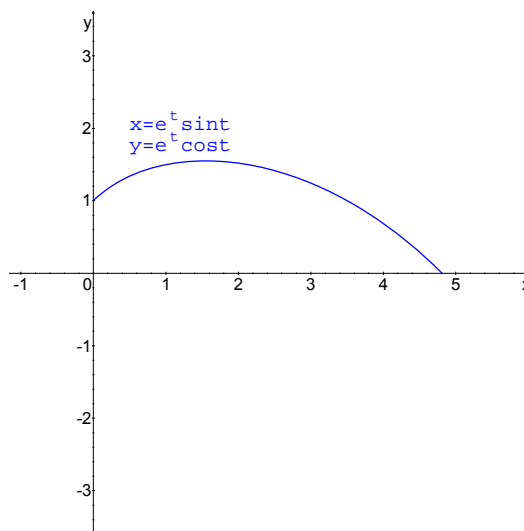
f)



g)



h)



i)

