POKYNY KE STUDIU

V úvodu si vysvětlíme jednotnou pevnou strukturu každé kapitoly textu, která by vám měla pomoci k rychlejší orientaci při studiu. Pro zvýraznění jednotlivých částí textu jsou používány ikony a barevné odlišení, jejichž význam nyní objasníme.

Průvodce studiem

vás stručně seznámí s obsahem dané kapitoly a s její motivací. Slouží také k instrukci, jak pokračovat dál po vyřešení kontrolních otázek nebo kontrolních textů.

Cíle

vás seznámí s učivem, které v dané kapitole poznáte a které byste po jejím prostudování měli umět.

Předpokládané znalosti

shrnují stručně učivo, které byste měli znát ještě dříve než kapitolu začnete studovat. Jsou nezbytným předpokladem pro úspěšné zvládnutí následující kapitoly.

Výklad

označuje samotný výklad učiva dané kapitoly, který je členěn způsobem obvyklým v matematice na definice, věty, případně důkazy.

Definice 1.1.1.
Zavádí základní pojmy v dané kapitole.

Věta 1.1.1.
Uvádí základní vlastnosti pojmů zavedených v dané kapitole.

Důkaz: Vychází z předpokladů věty a dokazuje tvrzení uvedené ve větě.

Poznámka

neformálně komentuje vykládanou látku..

Řešené úlohy

označují vzorové příklady, které ilustrují probrané učivo.

Příklad Uvádí zadání příkladu.

Řešení: Uvádí podrobné řešení zadaného příkladu.

Úlohy k samostatnému řešení

obsahují zadání příkladů k procvičení probraného učiva. Úlohy označené ✖ patří k obtížnějším a jsou určeny zájemcům o hlubší pochopení tématu.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

obsahují správné výsledky předchozích příkladů, slouží ke kontrole správnosti řešení.

Kontrolní otázky

obsahují soubor otázek k probranému učivu včetně několika odpovědí, z nichž je vždy alespoň jedna správná.

Odpovědi na kontrolní otázky

uvádějí správné odpovědi na kontrolní otázky.

Kontrolní test

obsahuje soubor příkladů k probranému učivu.

Výsledky testu

uvádějí správné odpovědi na příklady kontrolního testu.

Literatura

obsahuje seznam knih, které byly použity při tvorbě příslušného textu a na které byly případně uvedeny odkazy k hlubšímu prostudování tématu.

Piktogram, který upozorňuje na důležité vztahy nebo vlastnosti, které je nezbytné si zapamatovat.

INTEGRÁLNÍ POČET FUNKCÍ JEDNÉ PROMĚNNÉ

1. NEURČITÝ INTEGRÁL

Průvodce studiem

V kapitole Diferenciální počet funkcí jedné proměnné jste se seznámili s derivováním funkcí. Jestliže znáte derivace elementárních funkcí a pravidla pro derivování, jste schopni derivovat libovolnou funkci. Možná Vás napadne, zda je možno z derivované funkce nějakým způsobem získat původní funkci. Opačnou operací k derivování je integrace (anglické texty používají termín antiderivace). V této kapitole se seznámíte s pojmem primitivní funkce. Množinu všech primitivních funkcí k dané funkci nazveme neurčitým integrálem. Seznámíte se základními metodami integrace (substituční metoda a metoda per partes). V závěru se budeme věnovat způsobům integrace některých vybraných druhů funkcí.

1.1. Primitivní funkce a neurčitý integrál

Cíle

Seznámíte se s pojmem primitivní funkce a neurčitý integrál funkce jedné proměnné.

Předpokládané znalosti

Předpokládáme, že umíte dobře derivovat funkce jedné proměnné, že znáte tabulku derivací elementárních funkcí. Předpokládá se i základní znalost pojmu diferenciál funkce.

Výklad

V kapitole Diferenciální počet funkcí jedné proměnné jste se seznámili s derivováním funkcí. Pro danou funkci $f(x)$ dovedeme nalézt její derivaci $f'(x) = g(x)$. Věnujme se nyní opačné úloze. Hledáme takovou funkci $F(x)$, aby daná funkce $f(x)$ byla její derivací, tj. aby platilo $F'(x) = f(x)$. Tato funkce, pokud ovšem existuje, se nejen v matematice hledá velmi často a jmenuje se primitivní funkce. Postup hledání primitivní funkce se nazývá integrování (opačná operace k derivování).

Příklad 1.1.1. Pro funkci $f(x) = 3x^2 \xrightarrow{\text{derivování}} f'(x) = 6x = g(x)$

Opačná úloha $F(x) = x^3 \xleftarrow{\text{integrování}} f(x) = 3x^2$, protože platí

$$F'(x) = \left[x^3\right]' = 3x^2 = f(x).$$

Definice 1.1.1.

Říkáme, že funkce $F(x)$ je v intervalu (a,b) **primitivní funkcí** k funkci $f(x)$, platí-li pro všechna $x \in (a,b)$ vztah $F'(x) = f(x)$.

Řešené úlohy

Příklad 1.1.2. Najděte primitivní funkci k funkci $f(x) = x$ v intervalu $(-1,1)$.

Řešení:

Hledáme funkci $F(x)$, jejíž derivace se na intervalu $(-1,1)$ rovná *x*. Je zřejmé, že to bude nějaký násobek funkce x^2. Po krátkém experimentování zjistíme, že je to funkce $F(x) = \frac{x^2}{2}$, neboť $F'(x) = \left[\frac{x^2}{2}\right]' = \frac{2x}{2} = x = f(x)$. Podle věty 1.1.1 budou i funkce, které se liší konstantou, primitivní k dané funkci.

Příklad 1.1.3. Najděte primitivní funkci k funkci $f(x) = x$ v intervalu $(-\infty,\infty)$.

Řešení:

Jelikož všechny úvahy v řešení příkladu 1.1.2 platí pro libovolné reálné $x \in (-\infty,\infty)$, je řešením stejná funkce $F(x) = \frac{x^2}{2}$.

Příklad 1.1.4. Najděte primitivní funkci k funkci $f(x) = x^n$, $n \in N$ v intervalu $(-\infty,\infty)$.

Řešení:

Podobnými úvahami dojdeme k tomu, že primitivní funkce má tvar $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, $n \neq -1$ pro všechna $x \in (-\infty,\infty)$, protože $F'(x) = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]' = \frac{(n+1)x^n}{n+1} = x^n = f(x)$.

Příklad 1.1.5. Najděte primitivní funkci k funkci $f(x) = \frac{1}{x}$ v intervalu $(0,\infty)$.

Řešení:

Vidíme, že vztah uvedený v příkladu 1.1.4 nelze použít pro $n = -1$. Snažíme se najít funkci, jejíž derivací je $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$. Z přehledu derivací elementárních funkcí víme, že touto funkcí je funkce $F(x)=\ln x$, neboť $F'(x)=[\ln x]'=\frac{1}{x}=f(x)$ pro $x\in(0,\infty)$.

Příklad 1.1.6. Najděte primitivní funkci k funkci $f(x)=\frac{1}{x}$ v intervalu $(-\infty,0)$.

Řešení:

Podobnými úvahami jako v předcházející části zjistíme, že primitivní funkcí k funkci $f(x)=\frac{1}{x}$ pro $x\in(-\infty,0)$ je funkce $F(x)=\ln|x|=\ln(-x)$.

Funkce $F(x)=\ln|x|$ je primitivní funkcí k funkci $f(x)=\frac{1}{x}$ pro $x\in(-\infty,0)\cup(0,\infty)$. Avšak také funkce $F(x)=\ln|x|+5$ bude primitivní funkcí k dané funkci, neboť platí $F'(x)=\left[\ln|x|+5\right]'=\frac{1}{x}=f(x)$, protože derivace konstanty je rovna nule. Je zřejmé, že tvrzení platí nejen pro konstantu 5, ale i pro libovolnou jinou konstantu C.

Věta 1.1.1.

Je-li $F(x)$ primitivní funkce k funkci $f(x)$ v intervalu (a,b), pak také funkce $F(x)+C$, kde C je libovolná reálná konstanta, je primitivní funkcí k funkci $f(x)$ v intervalu (a,b).

Důkaz: Jelikož na intervalu (a,b) platí $\left[F(x)+C\right]'=F'(x)=f(x)$ dostaneme podle definice 1.1.1 uvedené tvrzení.

Poznámka

K dané funkci existuje nekonečně mnoho primitivních funkcí, které se liší konstantou.

Definice 1.1.2.

Množina všech primitivních funkcí k funkci $f(x)$ na intervalu (a,b) se nazývá neurčitý integrál této funkce. Píšeme:

$$\int f(x)dx=F(x)+C \ .$$

Poznámka

- $\int$ *se nazývá integrační znak,*
- $f(x)$ *je integrovaná funkce (integrand),*
- dx *je diferenciál integrační proměnné,*
- C *je integrační konstanta.*

Příklady 1.1.5 a 1.1.6 bychom mohli v souladu s definicí 1.1.2 formulovat: Integrujte funkci $f(x)=\frac{1}{x}$ na daném intervalu. Zápis: $\int \frac{1}{x}dx$. Výsledek, který jsme získali (množina všech primitivních funkcí $F(x)=\ln|x|+C$), zapíšeme: $\int \frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$. Tento vztah platí pro všechna x, pro něž jsou příslušné funkce ($\frac{1}{x}$ a $\ln|x|$) definovány, tj. pro všechna $x\neq 0$. V takových případech často vynecháváme interval, ve kterém pracujeme.

1.2. Základní neurčité integrály

Operace integrování (tj. operace určování primitivní funkce) a derivování jsou navzájem inverzní. Z tabulky derivací elementárních funkcí hned dostaneme tabulku neurčitých integrálů (tab. 1.2.1). O správnosti uvedených vztahů se podle definice 1.1.1 snadno přesvědčíme derivováním.

Tabulka 1.2.1. Tabulka základních integrálů

[1.]	$\int 0dx=C$	
[2.]	$\int 1dx=x+C$	
[3.]	$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$	pro $x>0,\ \ n\neq -1$
[4.]	$\int \frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$	pro $x\neq 0$
[5.]	$\int \sin x\ dx=-\cos x+C$	
[6.]	$\int \cos x\ dx=\sin x+C$	
[7.]	$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx=\operatorname{tg} x+C$	pro $x\neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ \ k\in \mathbf{Z}$
[8.]	$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx=-\operatorname{cotg} x+C$	pro $x\neq k\pi,\ \ k\in \mathbf{Z}$
[9.]	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x+C$	pro $x\in(-1,1)$
[10.]	$\int \frac{1}{1+x^2}dx=\operatorname{arctg} x+C$	
[11.]	$\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$	pro $a>0,\ \ a\neq 1$

[12.] $\int e^x dx = e^x + C$

[13.] $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$

[14.] $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$ pro $a > 0$

[15.] $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$ pro $x \in (-a, a)$, $a > 0$

[16.] $\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C$ pro $a \neq 0$

Poznámka

Existují rozsáhlé tabulky, ve kterých lze nalézt množství dalších neurčitých integrálů. K výsledkům můžeme dospět použitím pravidel a metod integrace, které budou uvedeny v následující části. Dnes však tyto tabulky ztrácejí význam, neboť jsou dostupné matematické programy, které zvládnou integraci složitých funkcí (např. Derive, Maple, Mathematica). Na Internetu lze nalézt řadu online kalkulátorů (např. http://integrals.wolfram.com/index.jsp, http://www.webmath.com/integrate.html *a další). Po zadání integrované funkce je nalezena primitivní funkce.*

Neurčité integrály z dalších funkcí lze získat různými integračními metodami.

Z pravidel pro derivování funkcí $(f \pm g)' = f' \pm g'$, $(cf)' = cf'$, $c =$ konst. a z vlastnosti primitivní funkce okamžitě plyne:

Věta 1.2.1.

Mají-li funkce $f(x)$ a $g(x)$ na intervalu (a, b) primitivní funkce, pak platí:

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

$$\int cf(x) dx = c \int f(x) dx \, , \; c = \text{konst.}$$

$$\int f'(x) dx = f(x) + C$$

Řešené úlohy (úpravou integrandu)

Příklad 1.2.1. Vypočtěte integrál $\int \frac{3x^2 + 4x + 2}{3x} dx$.

Řešení:

$$\int \frac{3x^2+4x+2}{3x}\,dx = \int x\,dx + \frac{4}{3}\int x^0 dx + \frac{2}{3}\int \frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2} + \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}\ln|x| + C.$$

Příklad 1.2.2. Vypočtěte integrál $\int (1-\sqrt{x})^2 dx$.

Řešení:

$$\int (1-\sqrt{x})^2 dx = \int (1-2\sqrt{x}+x)dx = \int dx - 2\int x^{\frac{1}{2}} dx + \int x dx = x - 2\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^2}{2} + C =$$

$$x - \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + \frac{x^2}{2} + C.$$

Příklad 1.2.3. Vypočtěte integrál $\int tg^2 x\, dx$.

Řešení:

$$\int \mathrm{tg}^2\, x\, dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = \mathrm{tg}\, x - x + C.$$

Příklad 1.2.4. Vypočtěte integrál $\int \mathrm{cotg}\, x\, dx$.

Řešení:

$$\int \mathrm{cotg}\, x\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \int \frac{(\sin x)'}{\sin x}dx = \ln|\sin x| + C.$$

(Použili jsme vztah [13] z tabulky 1.2.1)

Příklad 1.2.5. Vypočtěte integrál $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx$.

Řešení:

$$\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx = \int \frac{(e^x+1)(e^{2x}-e^x+1)}{e^x+1}dx = \int (e^{2x}-e^x+1)dx = \frac{1}{2}e^{2x} - e^x + x + C.$$

Při úpravě čitatele zlomku jsme použili vztah $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$.

Příklad 1.2.6. Vypočtěte integrál $\int \frac{dx}{\sqrt{8-6x-9x^2}}$.

Řešení:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{8-6x-9x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{8-(6x+9x^2)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{8-(1+3x)^2+1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9-(3x+1)^2}} =$$

$$\frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{3x+1}{3}\right)^2}} = \frac{1}{3}\arcsin\frac{3x+1}{3} + C$$ Použili jsme vztah [16] z tabulky 1.2.1.

Poznámka

I když všechny primitivní funkce k funkci $f(x)$ mají až na konstantu stejný tvar, může se stát, že při použití různých integračních metod dostaneme pokaždé „trochu jiný“ výsledek. V tomto případě je vždy možno převést jeden tvar výsledku na druhý. Například první metodou dostaneme

$\int \frac{2\,\mathrm{tg}\,x}{\cos^2 x}\,dx = \frac{1}{\cos^2 x} + C$. *Jinou metodou nám vyjde* $\int \frac{2\,\mathrm{tg}\,x}{\cos^2 x}\,dx = 1 + \mathrm{tg}^2\,x + C$. *Oba výsledky jsou správné, neboť* $1+\mathrm{tg}^2\,x = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Kontrolní otázky

1. Kolik primitivních funkcí existuje k funkci e^{2x}? Uveďte některé z nich.
2. Ke které funkci je funkce $F(x) = x(\ln x - 1)$ primitivní?
3. Je funkce $\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x$ primitivní funkce k funkci $\cos^3 x$?
4. Je funkce $\frac{1}{4+x^2}$ primitivní funkce k funkci $\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{x}{2}$?
5. Lze při výpočtu následujícího integrálu použít naznačený postup?

   $$\int (2^{x+2} + \frac{1}{3x})dx = 4\int 2^x\,dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{x}dx$$

6. Platí $\int 3e^x \sin 2x dx = 3\int e^x dx \int \sin 2x dx$?

Úlohy k samostatnému řešení

1. a) $\int \left(\sqrt{x^3} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$ b) $\int \frac{\left(\sqrt[3]{x} - x\right)^2}{x^2}dx$ c) $\int \sqrt[3]{x\sqrt{x^3\sqrt{x}}}\,dx$

d) $\int \frac{x^3-1}{x-1}dx$ e) $\int \frac{x^4+8x}{x+2}dx$ f) $\int \frac{x^2+2}{1+x^2}dx$

2. a) $\displaystyle\int \frac{\left(2^x-3^x\right)^2}{6^x}dx$ b) $\displaystyle\int \left(1+\cos^2 x-\sin^2 x\right)dx$ c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$

d) $\displaystyle\int \sin x \cos x \, dx$ e) $\displaystyle\int \operatorname{cotg}^2 x \, dx$ f) $\displaystyle\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x}\, dx$

3. a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+9}$ b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+3}$ c) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-4x+7}$

d) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+3x+3}$ e) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$ f) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{11}{4}-x-x^2}}$

4. a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln x}$ b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arccos x}$ c) $\displaystyle\int \frac{3x\,dx}{x^2+3}$

d) $\displaystyle\int \left(\sin 2x+e^{\frac{x}{2}}\right)dx$ e) $\displaystyle\int \operatorname{tg} 2x \, dx$ f) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+2}dx$

5. a) $\displaystyle\int \left(10^{-x}+5\cos x-\sqrt{3x^5}+\frac{3}{x^2+4}\right)dx$ b) $\displaystyle\int \frac{1+2x^2}{x^2\left(x^2+1\right)}dx$

c) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx$ d) $\displaystyle\int \frac{x^2+3}{x^2+2}dx$ e) $\displaystyle\int \frac{3-2\operatorname{cotg}^2 x}{\cos^2 x}dx$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}+C$; b) $-3x^{-\frac{1}{3}}-6x^{\frac{1}{3}}+x+C$; c) $\frac{12}{23}x^{\frac{23}{12}}+C$; d) $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+C$;

e) $\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+2x^2+C$ f) $x+\operatorname{arctg} x+C$. **2.** a) $\dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\ln\frac{2}{3}}+\dfrac{\left(\frac{3}{2}\right)^x}{\ln\frac{3}{2}}-2x+C$;

b) $x+\frac{1}{2}\sin 2x+C$; c) $\operatorname{tg} x-\operatorname{cotg} x+C$; d) $-\frac{1}{4}\cos 2x+C$; e) $-\operatorname{cotg} x-x+C$;

f) $2x-\operatorname{tg} x+C$. **3.** a) $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+C$; b) $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C$; c) $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{\sqrt{3}}+C$;

d) $\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+3}{\sqrt{3}}+C$; e) $\arcsin\frac{x-2}{2}+C$; f) $\arcsin\frac{2x+1}{6}+C$. **4.** a) $\ln\left|\ln x\right|+C$;

b) $-\ln\left|\arccos x\right|+C$; c) $\frac{3}{2}\ln\left(x^2+3\right)+C$; d) $-\frac{1}{2}\cos 2x+2e^{\frac{x}{2}}+C$; e) $-\frac{1}{2}\ln\left|\cos 2x\right|+C$;

f) $\ln\left(e^x+2\right)+C$. **5.** a) $-\dfrac{10^{-x}}{\ln 10}+5\sin x-\dfrac{2\sqrt{3}}{7}x^{\frac{7}{2}}+\dfrac{3}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}+C$; b) $-\dfrac{1}{x}+\operatorname{arctg} x+C$;

c) $\arcsin x+C$; d) $x+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{2}}+C$; e) $3\operatorname{tg} x-5x+C$.

Kontrolní test

1. Ke které funkci je funkce $F(x)=\dfrac{x^3}{3}\operatorname{arctg} x-\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{1}{6}\ln(1+x^2)$ primitivní?

   a) $\dfrac{x^3}{3+3x^2}+x^2\operatorname{arctg} x+\dfrac{1-x}{3(1+x^2)}$, b) $x^2\operatorname{arctg} x$,

   c) $x^2\operatorname{arctg} x-\dfrac{x}{3}+\dfrac{x}{3(1+x^2)}$, d) $\dfrac{x^3-x}{3(1+x^2)}$.

2. Ke které funkci je funkce $F(x)=\arcsin e^x-\sqrt{1-e^{2x}}$ primitivní?

   a) $\dfrac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}}-\dfrac{e^{2x}}{2\sqrt{1-e^{2x}}}$, b) $\dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}+\dfrac{e^{2x}}{2\sqrt{1-e^{2x}}}$,

   c) $\dfrac{e^x(1+e^x)}{\sqrt{1-e^{2x}}}$, d) $\dfrac{1+e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}$.

3. Ke které funkci je funkce $F(x)=x^2-\dfrac{1}{3}\sqrt{(4-x^2)^3}$ primitivní?

   a) $2x-\dfrac{1}{2}\sqrt{4-x^2}$, b) $x(2+\sqrt{4-x^2})$,

   c) $x(2-\sqrt{4-x^2})$, d) $2x(1+\sqrt{4-x^2})$.

4. Vypočtěte neurčitý integrál $\displaystyle\int\frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx$.

   a) $\dfrac{9}{7}\sqrt[3]{x^7}+6\sqrt[3]{x}+C$, b) $x^3+2x+3\sqrt[3]{x}+C$,

   c) $9\sqrt[3]{x}-\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}+C$, d) $\dfrac{9}{7}\sqrt[3]{x^7}+2\sqrt[3]{x}+C$.

5. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{(2^x-3^x)^2}{6^x}dx$.

a) $(\frac{2}{3})^x-2x+(\frac{3}{2})^x+C$, b) $(\frac{2}{3})^x\ln\frac{2}{3}-2x+(\frac{3}{2})^x\ln\frac{3}{2}+C$,

c) $\frac{2^x3^{-x}-3^x2^{-x}}{\ln 2-\ln 3}-2x+C$, d) $\frac{2^x3^{-x}+3^x2^{-x}}{\ln 2-\ln 3}-2x+C$.

6. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{\sqrt{x^4+2+x^{-4}}}{x^3}dx$.

a) $\ln|x|-\frac{1}{4x^4}+C$, b) $-\frac{1}{x}-\frac{1}{5x^5}+C$,

c) $\ln|x|-\frac{5}{x^6}+C$, d) $\ln|x|-\frac{\sqrt{2}}{2x^2}-\frac{1}{4x^4}+C$.

7. Vypočtěte neurčitý integrál $\frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx$.

a) $-\frac{1}{2}\operatorname{cotg}^2 x+\frac{1}{2}x+C$, b) $\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{tg} x+C$,

c) $\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{cotg} x+C$, d) $\frac{1}{2}\operatorname{tg} x+x+C$.

8. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \operatorname{cotg}^2 x\,dx$.

a) $\operatorname{cotg} x-x+C$, b) $\operatorname{tg} x-x+C$,

c) $-\operatorname{cotg} x-x+C$, d) $-\frac{1}{\sin x}-x+C$.

9. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{8-x^3}{x-2}dx$.

a) $\frac{x^3}{3}+x^2+4x+C$, b) $-\frac{x^3}{3}+x^2+4x+C$,

c) $8\ln|x-2|-\frac{x^4}{4}+C$, d) $-\frac{x^3}{3}-x^2-4x+C$.

10. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$.

a) $\arccos\frac{x+2}{3}+C$, b) $\arcsin\frac{x-2}{3}+C$,

c) $\arcsin\frac{x+2}{3}+C$, d) $\arccos\frac{x-2}{3}+C$.

Výsledky testu

1. b); 2. c); 3. b); 4. a); 5. c); 6. a); 7. b); 8. c); 9. d); 10. c).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v 8 případech, pokračujte další kapitolou.

V opačném případě je třeba prostudovat kapitoly 1.1 a 1.2 znovu.

Shrnutí lekce

V prvých dvou kapitolách jste se seznámili s pojmy primitivní funkce a neurčitý integrál. Operace integrování (tj. operace určování primitivní funkce) a derivování jsou navzájem inverzní. Tabulka 1.2.1 obsahuje přehled základních integrálů. Doporučujeme vytisknout si tuto tabulku, neboť bude využívána v dalších kapitolách při integraci složitějších funkcí. Všechny příklady a cvičení v kapitole 1.1.2 vyřešíme tak, že integrovanou funkci upravujeme, až dostaneme základní integrály uvedené v tabulce 1.2.1.

1.3. Integrace metodou per partes

Průvodce studiem

V předcházející kapitole jsme poznali, že integrování součtu funkcí lze provést jednoduše, známe-li integrály jednotlivých sčítanců (věta 1.2.1). Součin funkcí už obvykle nelze integrovat jednoduše. Problém je v tom, že neexistuje univerzální algoritmus pro integrování součinu funkcí (to je podstatný rozdíl proti derivování součinu funkcí!). V některých případech lze integrovat součin funkcí metodou per partes (čili po částech).

Cíle

Seznámíte se s principem integrace metodou per partes a se základními typy integrálů, které lze touto metodou vypočítat.

Předpokládané znalosti

Předpokládáme, že znáte pojem primitivní funkce k dané funkci, znáte základní integrály uvedené v tabulce 1.2.1 a umíte vypočítat jednoduché integrály úpravou integrované funkce (integrandu).

Výklad

Pro integrování součinu dvou funkcí $f(x)\cdot g(x)$

$\int f(x)\cdot g(x)dx = \int f(x)dx \cdot \int g(x)dx$ **obecně neplatí!!!**

Avšak ze vztahu pro derivování součinu dvou funkcí

$(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v'$ dostaneme $u'\cdot v = (u\cdot v)' - u\cdot v'$

a odtud integrováním

$$\int u'\cdot v\, dx = \int \left[(u\cdot v)' - u\cdot v'\right] dx = u\cdot v - \int u\cdot v' dx .$$

Věta 1.3.1. (Integrování per partes, čili po částech)

Mají-li funkce $u(x)$ a $v(x)$ v intervalu (a,b) spojitou derivaci, pak v (a,b) platí

$$\int u'(x)\cdot v(x)\, dx = u(x)\cdot v(x) - \int u(x)\cdot v'(x)dx .$$

Poznámka

Integrační metoda se nazývá per partes (po částech), neboť se integrál z funkce $f(x) = u'(x)\cdot v(x)$ vypočte jen zčásti. Zbývá totiž vypočíst další integrál z funkce

$g(x)=u(x)\cdot v'(x)$. *Integrování metodou per partes vyžaduje určitou „prozíravost", abychom volili funkce* $u'(x)$ *a* $v(x)$ *tak, aby byl integrál* $\int g(x)dx=\int u(x)\cdot v'(x)dx$*, pokud možno, jednodušší.*

Řešené úlohy

Příklad 1.3.1. Vypočtěte integrál $\int (x^2+x)\cos x\, dx$

Řešení:

Použijeme metodu per partes, přičemž položíme

$u'=\cos x$, $v=x^2+x$,

takže $u=\sin x$, $v'=2x+1$.

Proto je $\int (x^2+x)\cos x\, dx=(x^2+x)\sin x-\int (2x+1)\sin x\, dx$.

K výpočtu posledního integrálu opět použijeme metody per partes, přičemž položíme

$u'=\sin x$, $v=2x+1$,

takže $u=-\cos x$, $v'=2$.

Dostaneme $\int (2x+1)\sin x\, dx=-(2x+1)\cos x+2\int \cos x\, dx=-(2x+1)\cos x+2\sin x+C_1$.

Je tedy $\int (x^2+x)\cos x\, dx=(x^2+x)\sin x+(2x+1)\cos x-2\sin x+C$.

Kdybychom v daném integrálu zvolili $u'=x^2+x$, $v=\cos x$,

bylo by $u=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}$ $v'=-\sin x$ a daný integrál bychom dostali ve tvaru

$\int (x^2+x)\cos x\, dx=\left(\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}\right)\cos x+\int\left(\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}\right)\sin x\, dx$, což je integrál složitější než původní.

Příklad 1.3.2. Vypočtěte integrál $\int x^2 \ln x\, dx$

Pokud bychom stejně jako v úloze a) volili

$u'=\ln x$, $v=x^2$, dostaneme $u=\int \ln x dx$. Tento integrál je však pro nás v tomto okamžiku obtížný. Proto volíme

$u'=x^2$, $v=\ln x$,

takže $u=\dfrac{x^3}{3}$, $v'=\dfrac{1}{x}$.

$$\int x^2 \ln x\,dx=\frac{x^3}{3}\ln x-\int\frac{x^2}{3}dx=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^3}{9}+C\,.$$

Pro jednoduché typy integrálů postupujeme podle následujícího schématu:

Jednoduché typy integrálů řešitelných metodou per partes.

Je-li $P(x)$ polynom stupně $n\geq 1$, pak u integrálů typu:

$$\int P(x)\sin x\,dx\,,$$

$$\int P(x)\cos x\,dx\,,$$

$$\int P(x)e^x dx\,,$$

$$\int P(x)\,\mathrm{a}^x\,dx$$

položíme $v=P(x)$, takže $v'=P'(x)$,

kdežto u integrálů typu:

$$\int P(x)\ln x\,dx\,,$$

$$\int P(x)\operatorname{arctg} x\,dx\,,$$

$$\int P(x)\operatorname{arccotg} x\,dx\,,$$

$$\int P(x)\arcsin x\,dx\,,$$

$$\int P(x)\arccos x\,dx$$

položíme $u'=P(x)$, takže $u=\int P(x)dx$,

kde $P(x)$ je polynom stupně $n\geq 0$ (tedy i konstanta).

Řešené úlohy

Příklad 1.3.3. Vypočtěte integrál $\int \operatorname{arctg} x\,dx$

Řešení:

Integrovanou funkci můžeme výhodně zapsat ve tvaru $\operatorname{arctg} x=1\cdot\operatorname{arctg} x$.

$$\int \operatorname{arctg} x\,dx=\left|\begin{matrix} u'=1 & v=\operatorname{arctg} x \\ u=x & v'=\dfrac{1}{1+x^2}\end{matrix}\right|=x\operatorname{arctg} x-\int\frac{x}{1+x^2}dx=x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+x^2}dx=$$

$$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

Při výpočtu druhého integrálu jsme použili vztah [13] z tabulky 1.2.1.

Příklad 1.3.4. Vypočtěte integrál $\int x^2 e^{-x} dx$.

Řešení:

$$\int x^2 e^{-x} dx = \begin{vmatrix} u' = e^{-x} & v = x^2 \\ u = -e^{-x} & v' = 2x \end{vmatrix} = -x^2 e^{-x} + \int 2x e^{-x} dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u' = e^{-x} & v = 2x \\ u = -e^{-x} & v' = 2 \end{vmatrix} = -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} + 2\int e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2e^{-x} + C.$$

Příklad 1.3.5. Vypočtěte integrál $\int x^n \ln x \, dx$

Řešení:

$$\int x^n \ln x \, dx = \begin{vmatrix} u' = x^n & v = \ln x \\ u = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} & v' = \dfrac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{1}{n+1}\int x^n dx =$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C = \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x - \frac{1}{n+1}\right) + C.$$

Speciálně pro $n = 0$ dostáváme

$$\int \ln x \, dx = x(\ln x - 1) + C.$$

Příklad 1.3.6. Vypočtěte integrál $\int e^{-x} \cos(2x) dx$.

Řešení:

V tomto případě lze volit $u' = e^{-x}$. K cíli však povede i volba $u' = \cos(2x)$.

$$\int e^{-x}\cos(2x) dx = \begin{vmatrix} u' = e^{-x} & v = \cos(2x) \\ u = -e^{-x} & v' = -2\sin(2x) \end{vmatrix} = -e^{-x}\cos(2x) - 2\int e^{-x}\sin(2x) dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u' = e^{-x} & v = \sin(2x) \\ u = -e^{-x} & v' = 2\cos(2x) \end{vmatrix} = -e^{-x}\cos(2x) - 2\left[-e^{-x}\sin(2x) + 2\int e^{-x}\cos(2x) dx\right] =$$

$-e^{-x}\cos(2x)+2e^{-x}\sin(2x)-4\int e^{-x}\cos(2x)dx$.

Jestliže hledaný integrál označíme symbolem $I=\int e^{-x}\cos(2x)dx$, dostáváme rovnici

$I=-e^{-x}\cos(2x)+2e^{-x}\sin(2x)-4I$.

Z této rovnice vypočteme neznámou I

$5I=-e^{-x}\cos(2x)+2e^{-x}\sin(2x)$,

$$I=\frac{1}{5}\left[-e^{-x}\cos(2x)+2e^{-x}\sin(2x)\right]=\frac{e^{-x}}{5}\left[2\sin(2x)-\cos(2x)\right]+C.$$

Poznámka

Stejně jako v příkladu 1.3.6 se někdy stává, že při použití metody per partes dostaneme násobek hledaného integrálu: $\int f(x)dx=F(x)+k\int f(x)dx$ *(k je konstanta). Je-li* $k\neq 1$, *lze hledaný integrál vypočítat převedením integrálů na stejnou stranu rovnice. Tedy*

$(1-k)\int f(x)dx=F(x)$, *odkud*

$$\int f(x)dx=\frac{1}{1-k}F(x)+C.$$

Kontrolní otázky

1. Proč se integrační metoda nazývána per partes?
2. Lze integrál $\int e^{2x}\cdot e^{3x}dx=\int e^{2x}dx\cdot\int e^{3x}dx$ počítat naznačeným způsobem? Čemu se rovná tento integrál?
3. Jak by se podle věty 1.3. vypočítal integrál typu $\int u(x)\cdot v'(x)\,dx$?
4. Jak volit funkce $u'(x)$ a $v(x)$ při výpočtu integrálu $\int x^3\sin x\,dx$?
5. Jak volit funkce $u'(x)$ a $v(x)$ při výpočtu integrálu $\int x^3\ln x\,dx$?
6. Jak volit funkce $u'(x)$ a $v(x)$ při výpočtu integrálu $\int \ln^2 x\,dx$?
7. Jak volit funkce $u'(x)$ a $v(x)$ při výpočtu integrálu $\int e^{2x}\sin x\,dx$?
8. Doplňte funkci $v(x)$, je-li $u'(x)=x$ a výsledný integrál je $I=\frac{x^2\ln x}{2}-\frac{x^2}{4}+C$.

9. Doplňte funkci $v(x)$, je-li $u'(x)=\sin 3x$ a výsledný integrál je

$I=-\frac{1}{3}x\cos 3x+\frac{1}{9}\sin 3x+C$.

10. Doplňte funkci $v(x)$, je-li $u'(x)=1$ a výsledný integrál je $I=x\ln^2 x-2x\ln x+2x+C$.

Úlohy k samostatnému řešení

1. a) $\int x^2\sin x\,dx$ b) $\int (2x+3)\cos 2x dx$ c) $\int 3x\cos\frac{x}{2}dx$

d) $\int xe^{2x}dx$ e) $\int \left(x^2+2x\right)e^{\frac{x}{3}}dx$ f) $\int x^2 2^{-x}dx$

2. a) $\int x^2\ln x dx$ b) $\int 2x\,\mathrm{arctg}\,x dx$ c) $\int \sqrt{x}\ln 2x dx$

d) $\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}dx$ e) $\int x\ln^2 x dx$ f) $\int 4x^3\,\mathrm{arctg}\,x dx$

3. a) $\int \ln x dx$ b) $\int \ln^2 x dx$ c) $\int \mathrm{arctg}\,x dx$

d) $\int \mathrm{arccotg}\,x dx$ e) $\int \arcsin x dx$ f) $\int \arccos x dx$

4. a) $\int e^x\cos x dx$ b) $\int e^{-2x}\sin 3x dx$ c) $\int 2^x\cos 2x dx$

d) $\int \cos(\ln x) dx$ e) $\int \sin(\ln 2x) dx$ f) $\int e^{-x}\sin^2 x dx$

5. a) $\int \frac{2x}{\sin^2 x}dx$ b) $\int \frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x}dx$ c) $\int \mathrm{arctg}(2x+3)dx$

d) $\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ e) $\int \ln^3 x dx$ f) $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) $\left(2-x^2\right)\cos x+2x\sin x+C$; b) $\left(x+\frac{3}{2}\right)\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x+C$;

c) $6\left(x\sin\frac{x}{2}+2\cos\frac{x}{2}\right)+C$; d) $\frac{1}{2}e^{2x}\left(x-\frac{1}{2}\right)+C$; e) $3e^{\frac{x}{3}}\left(x^2-4x+12\right)+C$;

f) $-\frac{2^{-x}}{\ln 2}\left(x^2+\frac{2x}{\ln 2}+\frac{2}{\ln^2 2}\right)$. **2.** a) $\frac{x^3}{3}\left(\ln x-\frac{1}{3}\right)+C$; b) $\left(x^2+1\right)\mathrm{arctg}\,x-x+C$;

c) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\left(\ln 2x-\frac{2}{3}\right)+C$; d) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\left(\ln x+\frac{3}{2}\right)+C$; e) $\frac{x^2}{2}\left(\ln^2 x-\ln x+\frac{1}{2}\right)+C$;

f) $\left(x^4-1\right)\operatorname{arctg} x-\frac{x^3}{3}+x+C$. **3.** a) $x\ln x-x+C$; b) $x\left(\ln^2 x-2\ln x+2\right)+C$;

c) $x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C$; d) $x\operatorname{arccotg} x+\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C$; e) $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$;

f) $x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C$. **4.** a) $\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)+C$;

b) $-\frac{1}{13}e^{-2x}(3\cos 3x+2\sin 3x)+C$; c) $\frac{2^{x+2}\ln 2}{4+\ln^2 2}(\cos 2x-\ln 2\sin 2x)+C$;

d) $\frac{x}{2}\left(\cos(\ln x)+\sin(\ln x)\right)+C$; e) $\frac{x}{2}\left(\sin(\ln x)-\cos(\ln x)\right)+C$;

f) $e^{-x}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\sin 2x+\frac{1}{10}\cos 2x\right)+C$. **5.** a) $2\ln|\sin x|-2x\operatorname{cotg} x+C$;

b) $\operatorname{tg} x\left(\ln(\cos x)+1\right)-x+C$; c) $\left(x+\frac{3}{2}\right)\operatorname{arctg}(2x+3)-\frac{1}{4}\ln\left(4x^2+12x+10\right)+C$;

d) $x-\sqrt{1-x^2}\arcsin x+C$; e) $x\left(\ln^3 x-3\ln^2 x-6\ln x+6\right)+C$; f) $\frac{e^x}{x+1}+C$.

Kontrolní test

1. Doplňte funkci $v(x)$, je-li $u'(x)=x$ a výsledný integrál je $I=-\frac{x}{4}\cos 2x+\frac{1}{8}\sin 2x+C$.

   a) $v(x)=\sin 2x$, b) $v(x)=\sin x\cos x$,

   c) $v(x)=x\sin 2x$, d) $v(x)=\sin\frac{x}{2}$.

2. Doplňte funkci $v(x)$, je-li $u'(x)=1$ a výsledný integrál je $I=x\ln^2 x-2x\ln x+2x+C$.

   a) $v(x)=\ln 2x$, b) $v(x)=2\ln x$, c) $v(x)=\ln x^2$, d) $v(x)=\ln^2 x$.

3. Jak volit funkce $u'(x)$ a $v(x)$ při výpočtu integrálu $\int x\operatorname{arctg} x\,dx$?

   a) $u'=x,\quad v=\operatorname{arctg} x$, b) $u'=\operatorname{arctg} x,\quad v=x$,

   c) $u'=1,\quad v=x\operatorname{arctg} x$. d) $u'=x\operatorname{arctg} x,\quad v=1$

4. Jak volit funkce $u'(x)$ a $v(x)$ při výpočtu integrálu $\int\frac{x^3}{e^x}dx$?

   a) $u'=x^3,\quad v=e^x$, b) $u'=x^3,\quad v=e^{-x}$,

   c) $u'=\frac{1}{e^x},\quad v=x^3$, d) $u'=1,\quad v=x^3e^{-x}$.

5. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx$.

a) $x \operatorname{cotg} x - \ln|\sin x| + C$, b) $x \operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + C$,

c) $x \operatorname{tg} x - \ln|\cos x| + C$, d) $x \operatorname{cotg} x + \ln|\sin x| + C$.

6. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{\ln \cos x}{\sin^2 x}\,dx$.

a) $-\operatorname{cotg} x \ln \cos x - x + C$, b) $-\operatorname{cotg} x \ln \cos x + x + C$,

c) $\operatorname{cotg} x \ln \cos x - x + C$, d) $\operatorname{cotg} x \ln \cos x + x + C$.

7. Vypočtěte neurčitý integrál $\int (x^2 - x)\sin 2x\,dx$.

a) $(-\frac{x^2}{2} + x)\cos 2x - \frac{1}{2}(x-1)\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$,

b) $(x^2 - 2x)\cos 2x - (x-1)\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x + C$,

c) $(-\frac{x^2}{2} + x)\cos 2x + (x-1)\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x + C$,

d) $(-\frac{x^2}{2} + x)\cos 2x + \frac{1}{2}(x-1)\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$.

8. Čemu se rovná neurčitý integrál $\int x3^x\,dx$?

a) $x3^x \ln 3 - 3^x \ln^2 3 + C$, b) $\frac{3^x}{\ln 3}(x - \frac{1}{\ln 3}) + C$,

c) $x3^x - 3^x \ln 3 + C$, d) $\frac{x3^x}{\ln 3} + \frac{3^x}{\ln 3^2} + C$.

9. Čemu se rovná neurčitý integrál $\int x \ln(1-x)\,dx$?

a) $\frac{x^2 - 1}{2}\ln(1-x) - \frac{1}{2}(x + \frac{x^2}{2}) + C$, b) $\frac{x^2 - 1}{2}\ln(1-x) + \frac{1}{2}(x + \frac{x^2}{2}) + C$,

c) $\frac{x^2}{2}\ln(1-x) + \frac{1}{2}(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}) + C$, d) $\frac{-x}{1-x} + \ln(1-x) + C$.

10. Čemu se rovná neurčitý integrál $\int e^{2x} \sin x dx$?

a) $\frac{1}{5} e^{2x}(2\sin x + \cos x) + C$, b) $\frac{1}{5} e^{2x}(2\sin x - \cos x) + C$,

c) $\frac{1}{2} e^{2x}(\sin x - \cos x) + C$, d) $\frac{1}{5} e^{2x}(\cos x + 2\sin x) + C$.

Výsledky testu

1. b); 2. d); 3. a); 4. c); 5.b); 6. a); 7. d); 8. b); 9. a); 10. b).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v 8 případech, pokračujte další kapitolou.
V opačném případě je třeba prostudovat kapitolu 1.3 znovu a propočítat další úlohy k samostatnému řešení.

Shrnutí lekce

Pro integraci součinu dvou funkcí $f(x) \cdot g(x)$ nelze nalézt obecnou formuli (na rozdíl od derivování součinu funkcí). Při integraci součinu funkce a derivace jiné funkce lze často užít metodu per partes (po částech). Nejčastěji je tato metoda využívána při výpočtu integrálů typu $\int P(x) \cdot f(x) dx$, kde $P(x)$ je polynomická funkce (může být i $P(x) = 1$) a $f(x)$ je trigonometrická, exponenciální, logaritmická nebo cyklometrická funkce. Metoda bude úspěšná, pokud zbývající integrál bude jednodušší než integrál původní.

1.4. Integrace substitucí

Průvodce studiem

Integrály, které nelze řešit pomocí základních vzorců, lze velmi často řešit substituční metodou. Vzorce pro derivace elementárních funkcí a věty o derivaci součtu a součinu funkcí nám v kapitolách 1.2 a 1.3 umožnily nalézt vzorce, resp. metody pro výpočet některých neurčitých integrálů. V této kapitole pro výpočet využijeme větu o derivaci složené funkce. Pomocí ní získáme větu, která nám poskytne jednu z nejdůležitějších a nejčastěji používaných metod integrování – substituční metodu. Připomínáme, že neexistuje univerzální návod, kdy substituční metodu použít, ani jakou substituci zvolit. Doporučujeme pečlivě prostudovat tuto kapitolu a propočítat si řešené úlohy. Důležité je získat zkušenosti se substituční metodou samostatným řešením většího množství příkladů.

Cíle

Seznámíte se s principem integrace substituční metodou a se základními typy integrálů, které lze touto metodou vypočítat.

Předpokládané znalosti

Předpokládáme, že znáte pojem primitivní funkce k dané funkci, znáte základní integrály uvedené v tabulce 1.2.1 a umíte vypočítat jednoduché integrály úpravou integrované funkce (integrandu). Bude užíváno pravidlo pro výpočet derivace složené funkce, diferenciálu funkce jedné proměnné a inverzní funkce.

Výklad

Velmi často se vyskytují integrály typu

$$\int f\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x)\,dx$$

nebo integrály, které se dají na tento tvar upravit. Tento tvar má například integrál

$$\int 2x\sin(x^2+1)\,dx\,.$$

V tomto případě je $f(u)=\sin u$, $u=\varphi(x)=x^2+1$, a tedy $u'=\varphi'(x)=2x$.

Všimněte si, že integrovaná funkce má tyto vlastnosti:

- Je součinem dvou funkcí $f\left(\varphi(x)\right)$ a $\varphi'(x)$.

- První z nich je složená funkce s vnější funkcí f a vnitřní funkcí φ. Druhá je derivací vnitřní funkce.

Předpokládejme, že funkce $f(u)$ je spojitá na intervalu (α,β) a funkce $u=\varphi(x)$ má derivaci $\varphi'(x)$ na intervalu (a,b), a nechť pro každé $x\in(a,b)$ platí $\varphi(x)\in(\alpha,\beta)$ (funkce $\varphi(x)$ zobrazuje interval (a,b) do intervalu (α,β)).

Protože funkce $f(u)$ je spojitá na intervalu (α,β), má na něm spojitou primitivní funkci $F(u)$, takže platí $f(u)=F'(u)$. Funkce $F(u)$ je na uvedeném intervalu složenou funkcí $F(\varphi)$, tedy pro derivaci složené funkce platí:

$$[F(\varphi(x))]'=F'(u)\varphi'(x)=f(u)\varphi'(x)=f(\varphi(x))\varphi'(x).$$

To znamená (podle definice 1.1.1), že funkce $F(\varphi(x))$ je primitivní funkcí k funkci $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ na intervalu (a,b) a tedy

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx=F(\varphi(x))=F(u)=\int f(u)du .$$

Získaný výsledek zformulujeme ve větě:

Věta 1.4.1. (Integrování substituční metodou $\varphi(x)=u$)

Nechť $F(u)$ je primitivní funkce ke spojité funkci $f(u)$ na intervalu (α,β). Nechť má funkce $u=\varphi(x)$ derivaci $\varphi'(x)$ na intervalu (a,b) a nechť pro každé $x\in(a,b)$ platí $\varphi(x)\in(\alpha,\beta)$. Potom je funkce $F(\varphi(x))$ primitivní funkce k funkci $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ na intervalu (a,b). Tedy platí

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx=\int f(u)\,du .$$

Poznámka

Vzorec ve větě 1.4 si zapamatujeme velmi snadno. V integrálu $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$ *položíme* $u=\varphi(x)$ *(provedeme substituci). Diferencováním dostaneme* $du=\varphi'(x)dx$. *Takže za výraz* $\varphi'(x)dx$ *v daném integrálu můžeme formálně dosadit* du.

Tvrzení věty 1.4.1 můžeme přehledně shrnout:

Substituce typu $\varphi(x) = u$

Máme vypočítat integrál typu $\int f\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x)\,dx$.

Jsou-li splněny předpoklady věty 1.4.1, položíme (provedeme substituci)

$\varphi(x) = u$. Diferencováním této rovnice dostaneme

$\varphi'(x)dx = du$. Daný integrál tedy převedeme na tvar

$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int f(u)\,du$.

Postup bude úspěšný, pokud umíme vypočítat integrál $\int f(u)\,du$.

Řešené úlohy

Příklad 1.4.1. Vypočtěte integrál $\int 2x\sin(x^2+1)\,dx$.

Řešení:

Je zřejmé, že pro všechna $x \in (-\infty,\infty)$ je $2xdx$ diferenciál funkce x^2+1. Proto položíme $u = x^2+1 = \varphi(x)$, a tedy $du = 2xdx = \varphi'(x)dx$. Funkce $f(u) = \sin u$ je spojitá pro všechna $u \in (-\infty,\infty)$ a má na tomto intervalu primitivní funkci $F(u) = \cos u$. Jsou splněny předpoklady věty 1.4.1, proto platí:

$$\int 2x\sin(x^2+1)\,dx = \int \sin u\,du = -\cos u + C = -\cos(x^2+1) + C.$$

Příklad 1.4.2. Vypočtěte integrál $\int \sin^3 x\cos x\,dx$.

Řešení:

Je zřejmé, že pro všechna $x \in (-\infty,\infty)$ je $\cos x\,dx$ diferenciál funkce $\sin x$. Proto položíme

$u = \sin x$, potom $du = \cos x\,dx$.

$$\int \sin^3 x\cos x\,dx = \left|\begin{array}{l}\text{substituce:}\\ u = \sin x\\ du = \cos x\,dx\end{array}\right| = \int u^3 du = \frac{u^4}{4} + C = \frac{\sin^4 x}{4} + C.$$

Příklad 1.4.3. Vypočtěte integrál $\int f(ax+b)dx$ pro $a \neq 0$, (vzorec [16] v tabulce 1.2.1.)

Řešení:

O platnosti vzorce [16] v tabulce 1.2.1 jsme se mohli snadno přesvědčit derivováním. Ke stejnému výsledku můžeme dospět substitucí. Je-li funkce $f(u)$ spojitá na intervalu (α,β), má na něm spojitou primitivní funkci $F(u)$. Vnitřní funkce $u=\varphi(x)=ax+b$ má na intervalu $(-\infty,\infty)$ nenulovou derivaci $\varphi'(x)=a$ pro $a\neq 0$, a proto

$$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}\int f(ax+b)a\,dx=\left|\begin{array}{l}\text{substituce:}\\ u=ax+b\\ du=adx\end{array}\right|=\frac{1}{a}\int f(u)\,du=\frac{1}{a}F(u)+C=\frac{1}{a}F(ax+b)+C\,.$$

Podle tohoto vztahu dostáváme:

$$\int\frac{1}{3x+5}dx=\frac{1}{3}\ln|3x+5|+C \quad (\ ax+b=3x+7=u \quad \text{a} \quad f(u)=\frac{1}{u}\ ),$$

$$\int(3-2x)^4dx=\frac{1}{-2}\frac{(3-2x)^5}{5}+C=-\frac{1}{10}(3-2x)^5+C \quad (\,ax+b=-2x+3=u \quad \text{a} \quad f(u)=u^4),$$

$$\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x}+C \quad (\,ax+b=2x=u \quad \text{a} \quad f(u)=e^u\,).$$

Příklad 1.4.4. Vypočtěte integrál $\int 3x\sqrt{5+x^2}\,dx$.

Řešení:

$$\int 3x\sqrt{5+x^2}\,dx=\left|\begin{array}{l}\text{substituce:}\\ u=5+x^2\\ du=2xdx\end{array}\right|=\frac{3}{2}\int 2x\sqrt{5+x^2}\,dx=\frac{3}{2}\int\sqrt{u}\,du=\frac{3}{2}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=u^{\frac{3}{2}}+C=$$

$$=\sqrt{\left(5+x^2\right)^3}+C\,.$$

Příklad 1.4.5. Vypočtěte integrál $\int\frac{\operatorname{cotg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$.

Řešení:

$$\int\frac{\operatorname{cotg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx=\left|\begin{array}{l}\text{substituce:}\\ u=\sqrt{x}\\ du=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx\end{array}\right|=2\int\frac{\operatorname{cotg}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx=2\int\operatorname{cotg}u\,du=2\int\frac{\cos u}{\sin u}du=\left|\begin{array}{l}\text{substituce:}\\ t=\sin u\\ dt=\cos u du\end{array}\right|=$$

$$=2\int\frac{1}{t}dt=2\ln|t|+C=2\ln|\sin u|+C=2\ln\left|\sin\sqrt{x}\right|+C\,.$$

Místo druhé substituce bylo možno přímo použít vzorec [13] v tabulce 1.2.1.

Příklad 1.4.6. Vypočtěte integrál $\int \frac{1}{\sin x} dx$.

Řešení:

Při výpočtu integrálu $\int \frac{1}{\sin x} dx$ se musíme omezit na nějaký interval, v němž se $\sin x$ nikdy nerovná nule (pro jednoduchost např. na $x \in (0, \pi)$). Pro úpravu integrandu použijeme vztah $\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha$.

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} dx = \left| \begin{array}{l} \text{substituce:} \\ u = \frac{x}{2} \\ du = \frac{1}{2} dx \end{array} \right| = \int \frac{1}{\sin u \cos u} du = \int \frac{1}{\frac{\sin u}{\cos u} \cos^2 u} du =$$

$$= \int \frac{1}{\operatorname{tg} u \cos^2 u} du \quad \text{pro} \quad u \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

Jelikož $\frac{1}{\cos^2 u}$ je derivace funkce $\operatorname{tg} u$, provedeme substituci $t = \operatorname{tg} u$ (tedy $t > 0$). Dostaneme

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{1}{\operatorname{tg} u \cos^2 u} du = \left| \begin{array}{l} \text{substituce:} \\ t = \operatorname{tg} u \\ dt = \frac{du}{\cos^2 u} \end{array} \right| = \int \frac{1}{t} dt = \ln|t| + C = \ln t + C = \ln \operatorname{tg} u + C =$$

$$= \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C.$$

Výklad

Podle věty 1.4.1 jsme integrál

$\int f(\varphi(x)) \varphi'(x)\, dx$ substitucí $\varphi(x) = u$ převedli na integrál $\int f(u)\, du$.

V některých případech je vhodné zvolit opačný postup.

Máme vypočítat integrál $\int f(x)\, dx$. Substitucí $x = \varphi(t)$ (tedy $dx = \varphi'(t)\, dt$) se snažíme tento integrál převést na integrál $\int f(\varphi(t)) \varphi'(t)\, dt$, který může být jednodušší. Otázkou je, zda po nalezení primitivní funkce k funkci $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ dovedeme najít primitivní funkci k funkci $f(x)$. Je to možné, pokud vedle předpokladů věty 1.4.1 ještě platí:

- funkce $\varphi(t)$ je na intervalu (α,β) ryze monotónní,
- pro každé $t\in(\alpha,\beta)$ je $\varphi'(t)\neq 0$.

Za uvedených předpokladů k funkci $x=\varphi(t)$, $t\in(\alpha,\beta)$ existuje inverzní funkce $t=\varphi^{-1}(x)=\psi(x)$ pro $x\in(a,b)$ a tato inverzní funkce má derivaci

$$\psi'(x)=\frac{1}{\varphi'(t)}.$$

Je-li $G(t)$ primitivní funkce k funkci $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ na intervalu (α,β), pak platí

$G'(t)=f(\varphi(t))\varphi'(t)$.

Složená funkce $F(x)=G(\psi(x))$ definovaná na intervalu (a,b) je na tomto intervalu primitivní funkcí k funkci $f(x)$, protože podle věty o derivaci složené funkce platí:

$$F'(x)=G'(t)\psi'(x)=f(\varphi(t))\varphi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)}=f(\varphi(t))=f(x).$$

Získaný výsledek zformulujeme ve větě:

Věta 1.4.2 (Integrování substituční metodou $x=\varphi(t)$)

Nechť funkce $x=\varphi(t)$ zobrazující interval (α,β) na interval (a,b) je rostoucí, popř. klesající, na intervalu (α,β) a má tam spojitou derivaci $\varphi'(t)\neq 0$ a nechť funkce $t=\psi(x)$ je inverzní funkce k funkci $x=\varphi(t)$ na intervalu (a,b). Je-li $f(x)$ spojitá funkce na intervalu (a,b) a je-li $G(t)$ primitivní funkce k funkci $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ na intervalu (α,β), potom pro všechna $x\in(a,b)$ platí

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt=G(t)+C=G(\psi(x))+C.$$

Tvrzení věty 1.4.2 můžeme přehledně shrnout:

Substituce typu $x=\varphi(t)$

Máme vypočítat integrál typu $\int f(x)dx$.

Jsou-li splněny předpoklady věty 1.4.2, položíme (provedeme substituci)

$x=\varphi(t)$. Diferencováním této rovnice dostaneme

$dx=\varphi'(t)dt$. Daný integrál tedy převedeme na tvar

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt\,.$$

Postup bude úspěšný, pokud umíme vypočítat integrál $\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$.

Poznámka

Při výpočtu integrálů substituční metodou obvykle počítáme podle vzorce z věty 1.4.1 nebo 1.4.2, dokud nenalezneme primitivní funkci. Obvykle teprve potom zkontrolujeme, zda jsou splněny předpoklady použité věty. O správnosti výsledku se můžeme snadno přesvědčit derivováním nalezené primitivní funkce.

Řešené úlohy

Příklad 1.4.7. Vypočtěte integrál $\int \sqrt{4-x^2}\,dx$.

Řešení:

Funkce $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ je spojitá pro $x \in (-2,2)$. Zavedeme substituci $x = 2\sin t$, $dx = 2\cos t\,dt$. Je však nutno omezit proměnnou x tak, aby bylo možno nalézt funkci inverzní $t = \arcsin\frac{x}{2}$. Pro $t \in (0,\frac{\pi}{2})$ bude $x \in (0,2)$ a funkce $\varphi(t) = 2\sin t$ bude mít rostoucí nenulovou derivaci $\varphi'(t) = 2\cos t$. Dostaneme

$$\int \sqrt{4-x^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} \text{substituce:} \\ x = 2\sin t \\ dx = 2\cos t\,dt \end{array} \right| = \int \sqrt{4-4\sin^2 t}\;2\cos t\,dt = 4\int \sqrt{1-\sin^2 t}\;\cos t\,dt =$$

$$= 4\int \cos^2 t\,dt = 4\int \frac{1+\cos 2t}{2}dt = 2\int (1+\cos 2t)dt =$$

$$= 2\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right) + C = 2t + 2\sin t\cos t + C = 2t + 2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t} + C =$$

$$= 2\arcsin\frac{x}{2} + x\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2} + C = 2\arcsin\frac{x}{2} + \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + C\,.$$

Při výpočtu jsme použili vzorce

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \quad \text{a} \quad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha\,.$$

Analogický výsledek bychom dostali pro $t \in (-\frac{\pi}{2},0)$, kdy $x \in (-2,0)$.

Příklad 1.4.8. Vypočtěte integrál $\int \sin\sqrt{x}dx$.

Řešení:

Integrovaná funkce je definována pro $x \in < 0,\infty)$. Provedeme substituci $x = t^2$, abychom odstranili odmocninu v integrandu. Ze substituce vyplývá, že $t = \sqrt{x}$ nebo $t = -\sqrt{x}$. Zvolíme $t = \sqrt{x}$, takže t je z intervalu $(0,\infty)$. Dostaneme

$$\int \sin\sqrt{x}\,dx = \left| \begin{array}{l} \text{substituce:} \\ x = t^2 \\ dx = 2t\,dt \end{array} \right| = 2\int t\sin t\,dt\,.$$

Získaný integrál řešíme metodu per partes podobně jako příklad 1.3.1:

$$2\int t\sin t\,dt = \left| \begin{array}{ll} u' = \sin t & v = t \\ u = -\cos t & v' = 1 \end{array} \right| = 2(-t\cos t + \int \cos t\,dt) = 2(-t\cos t + \sin t) + C =$$

$$= 2(\sin\sqrt{x} - \sqrt{x}\cos\sqrt{x}) + C\,.$$

Sami vyzkoušejte, že pro volbu $t = -\sqrt{x}$ tj. $t \in (-\infty,0)$ dostaneme stejný výsledek.

Příklad 1.4.9. Vypočtěte integrál $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

Řešení:

Funkce $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ je spojitá pro $x \in (-\infty,\infty)$. Položíme $x = \operatorname{cotg} t$. Funkce $\operatorname{cotg} t$ je pro $t \in (0,\pi)$ klesající a zobrazuje tento interval na interval $(-\infty,\infty)$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \left| \begin{array}{l} \text{substituce:} \\ x = \operatorname{cotg} t \\ dx = \dfrac{-1}{\sin^2 t}dt \end{array} \right| = \int \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2 t}} \frac{-1}{\sin^2 t}dt = -\int \frac{1}{\sqrt{\dfrac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\sin^2 t}}} \frac{1}{\sin^2 t}dt =$$

$$= -\int \frac{|\sin t|}{\sin^2 t}dt = -\int \frac{1}{\sin t}dt\,,$$ neboť pro $t \in (0,\pi)$ je $\sin t > 0$.

Dostali jsme integrál, který jsme řešili v příkladu 1.4.6.

$$-\int \frac{1}{\sin t}dt = -\ln \operatorname{tg}\frac{t}{2} + C = -\ln \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arccotg} x\right) + C\,.$$

Poznámka

Pokud zadáme integrál nějakému matematickému programu (např. Derive, Maple, *Mathematica), získáme výsledek* $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$. *Na první pohled se zdá, že se jedná o úplně jinou funkci. Derivováním se však snadno přesvědčíme, že výsledek je správný. Znamená to, že programy použily jinou metodu výpočtu, než jsme uvedli my.*

V literatuře [9] lze nalézt postup, jak převést jeden výsledek na druhý. Druhé řešení můžeme dostat následujícím postupem:

✖ Provedeme substituci $\sqrt{1+x^2}=t-x$.

Po umocnění uvedené rovnice snadno vypočteme $x=\dfrac{t^2-1}{2t}$ a tedy $dx=\dfrac{2t^2+2}{4t^2}dt$.

Dosazením do integrálu dostaneme:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\int\frac{1}{t-\dfrac{t^2-1}{2t}}\frac{2(t^2+1)}{4t^2}dt=\int\frac{1}{t}dt=\ln|t|+C=\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|+C.$$

Jelikož je $x+\sqrt{x^2+1}>0$, dostaneme $\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$, což je hledaný výsledek.

Poznámka

Použitá substituce patří mezi Eulerovy substituce použitelné při výpočtu složitějších integrálů z racionální funkce, která navíc obsahuje výraz typu $\sqrt{ax^2+bx+c}$. *Podrobnější informace naleznete v literatuře* [6], [9], [14], [17].

Příklad 1.4.10. Vypočtěte integrál $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx$.

Řešení:

Funkce $\dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}$ je definována pro $x\in\langle 0,\infty)$. Ve funkci se vyskytují mocniny $x^{\frac{1}{2}}$, $x^{\frac{1}{3}}$.

Zavedeme substituci $x=t^k$ tak, abychom odstranili všechny odmocniny ve výrazu. V našem případě bude k nejmenší společný násobek čísel 2 a 3. Pro $x=t^6$ bude $\sqrt{x}=t^3$ a $\sqrt[3]{x}=t^2$. Analogicky jako v příkladu 1.4.8 budeme volit $t=\sqrt[6]{x}$ pro $t\in\langle 0,\infty)$.

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx = \left| \begin{array}{l} \text{substituce:} \\ x = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right| = \int \frac{t^3}{1+t^2} 6t^5 dt = 6\int \frac{t^8}{1+t^2} dt = 6\int \left(t^8 : (t^2+1) \right) dt =$$

$$= 6\int \left(t^6 - t^4 + t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2} \right) dt = 6\left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} - t + \operatorname{arctg} t \right) + C =$$

$$= 6\left(\frac{\sqrt[6]{x^7}}{7} - \frac{\sqrt[6]{x^5}}{5} + \frac{\sqrt[6]{x^3}}{3} - \sqrt[6]{x} + \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x} \right) + C .$$

Kontrolní otázky

1. Uveďte princip substituční metody.
2. Kdy a za jakých podmínek použijeme substituci typu $\varphi(x) = u$?
3. Kdy a za jakých podmínek použijeme substituci typu $x = \varphi(t)$?
4. Jakou substituci zvolíte při výpočtu integrálu $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$?
5. Jakou substituci zvolíte při výpočtu integrálu $\int \cos x \sin x \, dx$?
6. Jakou substituci zvolíte při výpočtu integrálu $\int x\sqrt{1-x^2} dx$?
7. Jakou substituci zvolíte při výpočtu integrálu $\int x^2\sqrt{1-x^2} dx$?

Úlohy k samostatnému řešení

1. a) $\int x^2 \sqrt[3]{x^3+3}\, dx$ b) $\int \frac{x}{\left(x^2+4\right)^6} dx$ c) $\int \frac{3x^3}{\sqrt[3]{x^4+1}} dx$

d) $\int x\sqrt{1-x^2} dx$ e) $\int \frac{3}{2-5x} dx$ f) $\int \sqrt{7-3x}\, dx$

2. a) $\int \frac{\ln^4 x}{x} dx$ b) $\int \cos^3 x \sin x \, dx$ c) $\int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx$

d) $\int e^{\cos^2 x} \sin 2x \, dx$ e) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{2+\cos x}} dx$ f) $\int \frac{\ln x - 2}{x\sqrt{\ln x}} dx$

3. a) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{e^{\frac{2}{x}}}{x^2}\,dx$ c) $\displaystyle\int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x+3}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{x-\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$ e) $\displaystyle\int \frac{e^x\sqrt{\operatorname{arctg} e^x}}{1+e^{2x}}\,dx$ f) $\displaystyle\int \frac{\sin x-\cos x}{\sqrt[4]{\sin x+\cos x}}\,dx$

4. a) $\displaystyle\int \frac{3^x}{4+9^x}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$ c) $\displaystyle\int \frac{\ln^2(\operatorname{tg} x)}{\sin x\cos x}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{2-\ln^2 x}}$ e) $\displaystyle\int \frac{\arccos x-x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ f) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg}\frac{2x}{3}}{9+4x^2}\,dx$

5. a) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x+\sqrt[6]{x^5}}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$ c) $\displaystyle\int \frac{x}{(x-1)\sqrt{x-3}}\,dx$

d) $\displaystyle\int \sqrt{9-x^2}\,dx$ e) $\displaystyle\int \cos\sqrt[3]{x}\,dx$ f) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}}\,dx$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) $\frac{1}{4}\left(x^2+3\right)^{\frac{2}{3}}+C$; b) $\frac{-1}{10\left(x^2+4\right)^5}+C$; c) $\frac{9}{8}\left(x^4+1\right)^{\frac{2}{3}}+C$; d) $-\frac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}+C$;

e) $-\frac{3}{5}\ln|2-5x|+C$; f) $-\frac{2}{9}(7-3x)^{\frac{3}{2}}+C$. **2.** a) $\frac{1}{5}\ln^5 x+C$; b) $-\frac{1}{4}\cos^4 x+C$;

c) $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x+C$; d) $-e^{\cos^2 x}+C$; e) $-2\sqrt{2+\cos x}+C$; f) $2\sqrt{\ln x}\left(\frac{\ln x}{3}-1\right)+C$.

3. a) $-2\ln\left|\cos\sqrt{x}\right|+C$; b) $-\frac{1}{2}e^{\frac{2}{x}}+C$; c) $\ln\left(\sin^2 x+3\right)+C$;

d) $\frac{1}{2}\left(\ln\left(1+x^2\right)-\operatorname{arctg}^2 x\right)+C$; e) $\frac{2}{3}\operatorname{arctg}^{\frac{3}{2}} e^x+C$; f) $-\frac{4}{3}(\cos x+\sin x)^{\frac{3}{4}}+C$.

4. a) $\frac{1}{2\ln 3}\operatorname{arctg}\frac{3^x}{2}+C$; b) $\sqrt{x}(\ln x-2)+C$; c) $\frac{1}{3}\ln^3(\operatorname{tg} x)+C$; d) $\arcsin\left(\frac{\ln x}{\sqrt{2}}\right)+C$;

e) $\sqrt{1-x^2}-\frac{1}{2}\arccos^2 x+C$; f) $\frac{1}{12}\operatorname{arctg}^2\frac{2x}{3}+C$. **5.** a) $3\sqrt[3]{x}-6\sqrt[6]{x}+\ln\left(\sqrt[6]{x}+1\right)+C$;

b) $4\sqrt{x}-x-4\ln\left(\sqrt{x}+1\right)+C$; c) $2\sqrt{x-3}+\sqrt{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-3}{2}}+C$;

d) $\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}+\frac{x\sqrt{9-x^2}}{2}+C$; e) $3\left(\sqrt[3]{x^2}\sin\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x}\cos\sqrt[3]{x}-2\sin\sqrt[3]{x}\right)+C$;

f) $-\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arccotg}\frac{x}{3}\right)\right|+C$.

Kontrolní test

1. Jakou substituci použijete při výpočtu integrálu $\int\frac{3}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}\,dx$?

   a) $\frac{1}{x}=t$, b) $\ln x=t$,

   c) $\ln^2 x=t$, d) $\sqrt{1-\ln^2 x}=t$.

2. Jakou substituci použijete při výpočtu integrálu $\int\sin^3 x\cos 2x\,dx$?

   a) $\cos x=t$, b) $\sin x=t$,

   c) $\cos 2x=t$, d) $\sin^3 x=t$.

3. Jakou substituci použijete při výpočtu integrálu $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$?

   a) $x=t^2$, b) $\frac{1}{\sqrt{x}}=t$,

   c) $\frac{1}{\sqrt[4]{x}}=t$, d) $x=t^4$.

4. Jakou substituci použijete při výpočtu integrálu $\int\frac{e^{3x}}{e^{2x}+1}$?

   a) $e^{2x}=t$, b) $e^x=t$,

   c) $e^{3x}=t$, d) $e^{2x}+1=t$.

5. Vypočtěte neurčitý integrál $\int(x+2)e^{x^2+4x+5}dx$.

   a) $e^{x^2+4x+5}+C$, b) $(x+2)e^{x^2+4x+5}-e^{x^2+4x+5}+C$,

   c) $2e^{x^2+4x+5}+C$, d) $\frac{1}{2}e^{x^2+4x+5}+C$.

6. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{3^x}{\sqrt{1-9^x}}\,dx$.

a) $\arcsin 3^x + C$, b) $\ln 3 . \arcsin 3^x + C$,

c) $\frac{1}{\ln 3}\arcsin 3^x + C$, d) $2\sqrt{1-9^x}$.

7. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{\operatorname{tg} x - 1}}$.

a) $2\sqrt{\operatorname{tg} x-1}+C$, b) $\operatorname{tg} x+\sqrt{\operatorname{tg} x-1}+C$,

c) $\ln\sqrt{\operatorname{tg} x-1}+C$, d) $\sqrt{\operatorname{tg} x-1}+C$.

8. Čemu se rovná neurčitý integrál $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$?

a) $\frac{1}{3}\sqrt{(1+x^2)^3}-x+C$, b) $\frac{1}{3}\sqrt{(1+x^2)^3}-\sqrt{1+x^2}+C$,

c) $\frac{1}{2}(1+x^2)-\ln\sqrt{1+x^2}+C$, d) $\frac{1}{3}\sqrt{(1+x^2)^3}+\sqrt{1+x^2}+C$.

9. Čemu se rovná neurčitý integrál $\int \cos^3 x\,dx$?

a) $\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+C$, b) $-\sin x+\frac{1}{3}\sin^3 x+C$,

c) $x-\frac{1}{3}\sin^3 x+C$, d) $x+\frac{1}{3}\sin^3 x+C$.

10. Čemu se rovná neurčitý integrál $\int \frac{\sqrt{e^x}}{e^x+4}\,dx$?

a) $\ln(e^x+4)+C$, b) $\operatorname{arctg}\frac{e^x}{2}+C$,

c) $2\sqrt{e^x}-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{e^x}}{2}+C$, d) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{e^x}}{2}+C$.

Výsledky testu

1. b); 2. a); 3. d); 4. b); 5. d); 6. c); 7. a); 8. b); 9. a); 10. d).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v 8 případech, pokračujte další kapitolou.

V opačném případě je třeba prostudovat kapitolu 1.4 znovu a propočítat další úlohy k samostatnému řešení.

Shrnutí lekce

Při výpočtu integrálů je často používána substituční metoda. Substituční metodou lze řešit dva typy úloh. V prvním typu integrálů se snažíme integrand upravit na dva činitele, z nichž jeden je složenou funkcí proměnné x s vnitřní funkcí $\varphi(x)$ a druhý je derivací této funkce $\varphi'(x)$. Tedy se snažíme integrál upravit na tvar $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx$. Jestliže nyní položíme $\varphi(x)=u$, je $\varphi'(x)dx=du$ a daný integrál převedeme na integrál $\int f(u)\,du$. Méně často používáme druhý typ substituce. Integrál $\int f\left(x\right)dx$ lze někdy substitucí $x=\varphi(t)$, a tedy $dx=\varphi'(t)\,dt$, převést na jednodušší integrál $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$. Uvedené metody budou úspěšné, pokud umíme vypočítat nové integrály. Tento postup lze realizovat, pokud jsou splněny podmínky uvedené ve větách v této kapitole. Při výpočtu integrálů substituční metodou obvykle počítáme formálně podle uvedených vztahů, dokud nenalezneme primitivní funkci. Obvykle teprve potom zkontrolujeme, zda jsou splněny předpoklady použité věty. O správnosti výsledku se můžeme snadno přesvědčit derivováním nalezené primitivní funkce. Úspěch při integrování substituční metodou závisí na obratnosti a zkušenosti, abychom dopředu viděli, na jaký integrál určitou substitucí upravíme původní integrál, případně jak integrál upravit, abychom v integrované funkci viděli tvar $f(\varphi(t))\varphi'(t)$. V některých případech můžeme integrál řešit pomocí různých substitucí.

1.5. Integrace racionálních funkcí

Průvodce studiem

V předcházejících kapitolách jsme se naučili počítat neurčité integrály úpravou na základní integrály, metodou per partes a substituční metodou. V této kapitole se budeme podrobněji zabývat integrováním racionálních funkcí. Uvedeme podrobný postup rozkladu racionálních funkcí na součet parciálních zlomků a integraci těchto parciálních zlomků. Podle uvedeného postupu můžeme integrovat libovolnou racionální funkci. Racionální funkce můžeme dostat i po některých substitucích. Nejprve zopakujeme polynomické a racionální funkce, uvedeme některé základní vlastnosti těchto funkcí.

Cíle

Seznámíte se s postupem integrace racionálních funkcí a se základními integrály, které dostaneme po rozložení racionální funkce na součet parciálních zlomků.

Předpokládané znalosti

Předpokládáme, že znáte pojem primitivní funkce k dané funkci, znáte základní integrály uvedené v tabulce 1.2.1., umíte vypočítat jednoduché integrály úpravou integrované funkce (integrandu) a substituční metodou. V této kapitole se vyskytne jen několik málo typů integrálů.

Výklad

Polynomy a jejich vlastnosti

S polynomy jste se seznámili již v Matematice 1. Připomeňme definici polynomické funkce.

Definice 1.5.1.

Polynomem $P_m(x)$ stupně m nazýváme funkci

$$P_m(x) = a_m x^m + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \quad a_m \neq 0.$$

Reálná čísla a_0, a_1 ,..., a_m jsou koeficienty polynomu.

Polynom je funkce, která vznikne konečným počtem operací součet, rozdíl a součin funkcí $y = konst$ a $y = x$.

Stručně můžeme polynom zapsat $P_m(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j x^j$, $a_n \neq 0$.

Číslo m nazýváme **stupněm polynomu** $P_m(x)$.

Pro polynom 1. stupně (tj. polynom tvaru $y = ax + b,\ a \neq 0$) se používá také termín **lineární polynom** a pro polynom 2. stupně (tj. polynom tvaru $y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$) se používá také termín **kvadratický polynom**.

Integrace polynomické funkce je velmi snadná, neboť vystačíme se základními pravidly pro integraci (věta 1.2.1) a s integrací mocninné funkce (vzorec [3] v tabulce 1.2.1).

Řešené úlohy

Příklad 1.5.1. Vypočtěte integrál $\int (2x^5 - x^3 + 3x^2 + 6x - 1)\,dx$.

Řešení:

$$\int (2x^5 - x^3 + 3x^2 + 6x - 1)\,dx = 2\int x^5 dx - \int x^3 dx + 3\int x^2 dx + 6\int x dx - \int dx =$$

$$= 2\frac{x^6}{6} - \frac{x^4}{4} + 3\frac{x^3}{3} + 6\frac{x^2}{2} - x + C = \frac{x^6}{3} - \frac{x^4}{4} + x^3 + 3x^2 - x + C .$$

Výklad

Polynomy hrají v matematické analýze velmi důležitou roli. Polynomy jsou spojité funkce definované pro všechna reálná x. Jestliže dva polynomy spolu sečteme, odečteme nebo vynásobíme, dostaneme opět polynom.

Polynomy můžeme také mezi sebou dělit. V tomto případě však obecně výsledkem nebude polynom, ale funkce, kterou nazýváme **racionální** (racionální lomená): $R(x) = \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$.

Je-li $Q_n(x)$ polynom n-tého stupně, nazývá se rovnice $Q_n(x) = 0$ **algebraická rovnice** n-tého stupně.

Definice 1.5.2.
Číslo α , pro které platí $Q_n(\alpha) = 0$, se nazývá **kořen polynomu** Q a výraz $x - \alpha$ se nazývá **kořenový činitel** polynomu Q.

Dovedete nalézt kořeny rovnice $Q_n(x)=0$ pro polynomy 1. a 2. stupně. Pro polynomy vyšších stupňů se jedná o složitější úlohu, kterou dovedeme vyřešit v některých speciálních případech. Velmi často je pro nalezení kořenů nutno použít numerických metod, o nichž se dozvíte více ve speciálním předmětu Numerické metody.

V algebře se dokazuje, že každý polynom $Q_n(x)$, který není konstanta, má v oboru komplexních čísel n kořenů.

Věta 1.5.1.

Každý polynom $Q_n(x)=a_n x^n+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0$ stupně $n\geq 1$ lze **rozložit na součin kořenových činitelů**

$Q_n(x)=a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ \ldots\ (x-\alpha_n)$,

kde $\alpha_1,\alpha_2,\ \ldots\ ,\alpha_n$ jsou konstanty (obecně komplexní).

Poznámka

1. Čísla $\alpha_1,\alpha_2,\ \ldots\ ,\alpha_n$ nemusí být navzájem různá. Tedy rovnice může mít vícenásobné kořeny. Pokud kořen α_j je r-násobný, můžeme místo r součinů $(x-\alpha_j)(x-\alpha_j)\ \ldots\ (x-\alpha_j)$ psát $(x-\alpha_j)^r$.

2. Kořeny $\alpha_1,\alpha_2,\ \ldots\ ,\alpha_n$ mohou být reálné nebo komplexní.

Věta 1.5.2.

Pokud má polynom r-násobný komplexní kořen $\alpha=c+d\,i$ (c,d jsou reálná čísla), pak také komplexně sdružené číslo $\overline{\alpha}=c-d\,i$ je r-násobným kořenem tohoto polynomu.

Řešené úlohy

Příklad 1.5.2. Rozložte na součin kořenových činitelů $Q_5(x)=3x^5+24x^3-27x$.

Řešení:

Řešíme rovnici $3x^5+24x^3-27x=0$. Rovnici upravíme vytknutím $3x$. Dostaneme $3x(x^4+8x^2-9)=0$. Jedno řešení je $x_1=0$. Další kořeny získáme řešením rovnice $x^4+8x^2-9=0$. Po zavedení pomocné proměnné $t=x^2$ dostaneme kvadratickou rovnici $t^2+8t-9=0$, která má kořeny $t_1=1$ a $t_2=-9$, čili $x^2=1$ a $x^2=-9$.

Odtud $x_2 = 1$, $x_3 = -1$, $x_4 = 3i$, $x_5 = -3i$.

Jelikož je koeficient u nejvyšší mocniny roven 3, můžeme polynom zapsat ve tvaru:

$Q_5(x) = 3x^5 + 24x^3 - 27x = 3x(x-1)(x+1)(x-3i)(x+3i)$.

Výklad

Je nepříjemné, že se ve výsledném rozkladu v příkladu 1.5.2 objevují imaginární čísla $+3i$ a $-3i$. Pokud vynásobíme odpovídající kořenové činitele, dostaneme kvadratický polynom $(x-3i)(x+3i) = x^2 + 9$. Rozklad polynomu z příkladu 1.5.2 bude mít tvar

$Q_5(x) = 3x^5 + 24x^3 - 27x = 3x(x-1)(x+1)(x^2+9)$.

Tento postup můžeme zobecnit. Má-li polynom kořen $\alpha = c + d\,i$ má podle věty 1.5.2 také komplexně sdružený kořen $\overline{\alpha} = c - d\,i$. Pokud vynásobíme odpovídající kořenové činitele, dostaneme kvadratický polynom, který nemá imaginární koeficienty:

$(x-\alpha)(x-\overline{\alpha}) = (x-(c+d\,i))(x-(c-d\,i)) = x^2 - 2cx + c^2 + d^2 = x^2 + px + q$, kde

$p = -2c$ a $q = c^2 + d^2$. Uvědomme si, že diskriminant $D = p^2 - 4q$ je záporný, neboť

$D = p^2 - 4q = 4c^2 - 4c^2 - 4d^2 = -4d^2 < 0$.

Je-li komplexně sdružený kořen $c \pm d \cdot i$ s násobný, dostaneme

$(x-\alpha)^s (x-\overline{\alpha})^s = (x^2 + px + q)^s$.

Pokud tuto úvahu zobecníme, dostaneme důležitou větu o **rozkladu polynomu na základní součin** v reálném oboru:

Věta 1.5.3.

Každý polynom $Q_n(x) = a_n x^n + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ stupně $n \geq 1$ lze jednoznačně zapsat ve tvaru:

$Q_n(x) = a_n (x-\alpha_1)^{r_1} \ \ldots\ (x-\alpha_u)^{r_u} (x^2 + p_1 x + q_1)^{s_1} \ \ldots\ (x^2 + p_v x + q_v)^{s_v}$

se vzájemně různými reálnými kořeny $\alpha_i,\ i = 1, 2, \ \ldots\ u$ a vzájemně různými kvadratickými polynomy $x^2 + p_j x + q_j,\ j = 1, 2, \ \ldots\ v$, které nemají reálné kořeny.

Poznámka

1. Stručně lze říci, že každý polynom s reálnými koeficienty stupně $n \geq 1$ lze rozložit na součin polynomů prvního a druhého stupně, přičemž polynomy druhého stupně se dále nedají rozložit na součin polynomů prvního stupně.

2. Je zřejmé, že platí $n = r_1 + r_2 + \ldots + r_u + 2(s_1 + s_2 + \ldots + s_v)$.

Věta 1.5.3 nám sice zaručuje možnost rozkladu polynomu na základní součin, avšak praktické provedení nemusí být jednoduché. V mnoha případech potřebujeme provést rozklad polynomu Q, který je již částečně rozložen.

Řešené úlohy

Příklad 1.5.3. Rozložte na základní součin polynom $Q(x) = (x^5 - x^2)(x^5 + x^2)(1 - x^4)$.

Řešení:

Je zřejmé, že polynom *Q(x)* je 14. stupně. Polynom *Q(x)* není rozložen na základní součin, neboť se v něm vyskytují polynomy vyššího než 2. stupně. Proto jednotlivé činitele dále rozložíme:

$(x^5 - x^2) = x^2(x^3 - 1) = x^2(x-1)(x^2 + x + 1)$,

$(x^5 + x^2) = x^2(x^3 + 1) = x^2(x+1)(x^2 - x + 1)$,

$(1 - x^4) = -(x^4 - 1) = -(x-1)(x+1)(x^2 + 1)$.

Takže $Q(x) = x^2(x-1)(x^2 + x + 1)x^2(x+1)(x^2 - x + 1)(-1)(x-1)(x+1)(x^2 + 1) =$

$= -x^4(x-1)^2(x+1)^2(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + 1)$.

Uvědomte si, že $x^4 = (x - 0)^4$, tedy se jedná o polynom 1. stupně, který přísluší čtyřnásobnému kořenu $x = 0$. Koeficient $a_n = -1$.

Výklad

Rozklad racionální funkce na součet parciálních zlomků

Definice 1.5.3.

Racionální funkcí *R(x)* nazveme funkci, která je podílem dvou polynomů $P_m(x)$ a $Q_n(x)$:

$$R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}, \quad Q_n(x) \neq 0 .$$

Poznámky

Definičním oborem racionální funkce R(x) je množina všech reálných čísel x, které nejsou reálnými kořeny rovnice $Q_n(x) = 0$.

Definice 1.5.4.

Racionální funkce $R(x)=\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ se nazývá **ryze lomená**, je-li stupeň *m* polynomu $P_m(x)$ menší než stupeň *n* polynomu $Q_n(x)$, tj. $m<n$. Je-li $m\ge n$, pak se funkce *R(x)* nazývá **neryze lomená** racionální funkce.

Jestliže je funkce *R(x)* neryze lomená racionální funkce, pak můžeme polynom $P_m(x)$ v čitateli dělit polynomem $Q_n(x)$ ve jmenovateli. Podílem bude polynom $P_{m_1}(x)$ a zbytek dělení bude polynom $P_{m_2}(x)$, jehož stupeň m_2 je nižší než *n*, tj. $m_2<n$. To můžeme vyjádřit větou.

Věta 1.5.4.

Každou neryze lomenou racionální funkci můžeme vyjádřit jako součet polynomu a ryze lomené racionální funkce, tj. $R(x)=\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}=P_{m_1}(x)+\dfrac{P_{m_2}(x)}{Q_n(x)}$, kde $m_2<n$.

Řešené úlohy

Příklad 1.5.4. Vyjádřete racionální funkci $R(x)=\dfrac{x^3+2x^2+x-1}{x^2-x+1}$ jako součet polynomu a ryze lomené racionální funkce.

Řešení:

Polynom $P_3(x)=x^3+2x^2+x-1$ v čitateli racionální funkce je 3. stupně a polynom $Q_2(x)=x^2-x+1$ ve jmenovateli má stupeň 2. Polynomy můžeme vydělit.

$$
\begin{array}{l}
(x^3+2x^2+x-1):(x^2-x+1)=x+3 \\
\underline{-(x^3-x^2+x)} \\
\quad 3x^2 \qquad -1 \\
\quad \underline{-(3x^2-3x+3)} \\
\qquad\quad 3x-4 \ \ \text{... zbytek}
\end{array}
$$

Danou racionální funkci proto můžeme zapsat ve tvaru

$$\frac{x^3+2x^2+x-1}{x^2-x+1}=x+3+\frac{3x-4}{x^2-x+1}.$$

Průvodce studiem

Hlavním výsledkem předcházející části je věta 1.5.4. Je-li dána neryze lomená racionální funkce, provedeme dělení polynomu $P_m(x)$ v čitateli polynomem $Q_n(x)$ ve jmenovateli racionální funkce. Dostaneme polynom a ryze lomenou racionální funkci. Stačí tedy, když se v dalším omezíme na takové racionální funkce $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, v nichž má čitatel nižší stupeň než jmenovatel (ryze lomené racionální funkce). V další části si ukážeme, jak lze ryze lomené racionální funkce rozložit na součet několika jednodušších zlomků, které bychom již uměli integrovat.

Výklad

Ve větě 1.5.3 jsme ukázali, že každý polynom s reálnými koeficienty stupně $n \geq 1$ lze rozložit na součin polynomů prvního a druhého stupně, přičemž polynomy druhého stupně se již nedají rozložit na součin polynomů prvního stupně s reálnými kořeny (mají komplexně sdružené kořeny). Budeme se snažit racionální funkci rozložit na součet jednoduchých racionálních funkcí, které mají ve jmenovateli mocniny kořenových činitelů $(x-\alpha)$ a kvadratických polynomů (x^2+px+q).

Definice 1.5.5.

Částečnými (parciálními) **zlomky** nazýváme racionální funkce tvaru

$$\frac{A}{(x-\alpha)^{k_1}} \quad \text{nebo} \quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{k_2}} \quad ,$$

kde *A, M, N, p, q* jsou reálná čísla, $k_1,\ k_2$ jsou přirozená čísla a polynom x^2+px+q nemá reálné kořeny ($D = p^2 - 4q < 0$).

Poznámky

1. Parciální zlomky prvního typu odpovídají reálným kořenům jmenovatele a parciální zlomky druhého typu odpovídají dvojicím komplexně sdružených kořenů.

2. Ryze lomenou racionální funkci R(x) lze vyjádřit ve tvaru

$R(x) = R_1(x) + R_2(x) + \ldots + R_s(x)$, *kde* $R_1(x)$, $R_2(x)$, ... $R_s(x)$ *jsou parciální zlomky. Pro integraci ryze lomené racionální funkce stačí umět integrovat tyto parciální zlomky.*

Pro snazší pochopení a jednoduchost uvedeme tvar rozkladu racionální funkce na součet parciálních zlomků podle toho, jaké kořeny má polynom $Q_n(x)$ ve jmenovateli racionální funkce. Postupně se budeme zabývat čtyřmi základními případy.

A. Rozklad pro reálné různé kořeny polynomu $Q_n(x)$

Jestliže polynom $Q_n(x)$ má k ($k \le n$) reálných různých kořenů $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ (jednoduché kořeny), pak lze ryze lomenou racionální funkci $R(x) = \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ rozložit na součet parciálních zlomků: $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \dfrac{A_1}{x-\alpha_1} + \dfrac{A_2}{x-\alpha_2} + \dots + \dfrac{A_k}{x-\alpha_k} + R_{k+1}(x) \dots$,

kde $A_1, A_2, \dots, A_k$ jsou reálné konstanty.

Nalezneme konstanty $A_1, A_2, \dots, A_k$ tak, abychom po sečtení všech parciálních zlomků dostali danou racionální funkci *R(x)*. Jednotlivé parciální zlomky pak můžeme snadno integrovat.

Poznámka

Polynom $Q_n(x)$ může mít vedle k reálných různých kořenů ještě reálné násobné kořeny nebo kořeny komplexně sdružené.

Řešené úlohy

Příklad 1.5.5. Vypočtěte integrál $\int \dfrac{x^2 - 8x + 3}{x^3 - 4x^2 + 3x} dx$.

Řešení:

Výpočet můžeme rozdělit do pěti kroků:

1. Polynom v čitateli je stupně $m = 2$ a polynom ve jmenovateli racionální funkce má stupeň $n = 3$. Jelikož je $m < n$, je daná funkce ryze lomená racionální funkce (není nutno dělit polynomy).
2. Polynom ve jmenovateli $Q_3(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$ rozložíme na základní součin podle věty 1.5.3. Dostaneme $Q_3(x) = x(x^2 - 4x + 3) = x(x-1)(x-3)$. To znamená, že polynom ve jmenovateli má reálné jednoduché kořeny $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$.
3. Racionální funkci rozložíme na součet parciálních zlomků:

$$\frac{x^2-8x+3}{x^3-4x^2+3x}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x-1}+\frac{A_3}{x-3}\ .$$

4. Nalezneme konstanty rozkladu A_1, A_2, A_3. Rovnici v kroku 3 vynásobíme polynomem $Q_3(x)=x^3-4x^2+3x$. Dostaneme rovnost dvou polynomů:

$$x^2-8x+3=A_1(x-1)(x-3)+A_2x(x-3)+A_3x(x-1)\ .$$

Tuto rovnici lze řešit několika způsoby:

a) **Dosazovací metoda.** Oba polynomy se musí rovnat pro libovolné hodnoty *x*.

Dosadíme-li obecně tři různé hodnoty *x*, dostaneme tři rovnice pro tři neznámé koeficienty A_1, A_2, A_3. Tuto soustavu snadno vyřešíme. Pokud má polynom *Q(x)* reálné kořeny, je výhodné dosadit právě tyto kořeny.

Pro $x=0$ dostaneme: $3=3A_1+0A_2+0A_3$. Tedy $A_1=1$.

Pro $x=1$ dostaneme: $-4=0A_1-2A_2+0A_3$. Tedy $A_2=2$.

Pro $x=3$ dostaneme: $-12=0A_1+0A_2+6A_3$. Tedy $A_3=-2$.

b) **Srovnávací metoda.** Rovnice představuje rovnost dvou polynomů.

Rovnost nastane, jestliže se budou rovnat koeficienty polynomu na levé straně a odpovídající koeficienty polynomu na pravé straně rovnice.

$$x^2-8x+3=A_1(x-1)(x-3)+A_2x(x-3)+A_3x(x-1)$$

$$x^2-8x+3=A_1(x^2-4x+3)+A_2(x^2-3x)+A_3(x^2-x)$$

$$x^2-8x+3=x^2(A_1+A_2+A_3)+x(-4A_1-3A_2-A_3)+3A_1$$

Koeficienty u x^2: $1=A_1+A_2+A_3$

Koeficienty u x^1: $-8=-4A_1-3A_2-A_3$

Koeficienty u x^0: $3=3A_1$

Řešením této soustavy rovnic dostaneme $A_1=1$, $A_2=2$, $A_3=-2$.

Metody můžeme kombinovat.

c) **Kombinace metod a), b).**

Metodou a) získáme několik rovnic, zbývající rovnice doplníme metodou b). Tento postup budeme používat v některých dalších příkladech.

5. Integrujeme získané parciální zlomky:

$$\int \frac{x^2-8x+3}{x^3-4x^2+3x}dx = \int\left(\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x-1}+\frac{A_3}{x-3}\right)dx = \int\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x-1}+\frac{-2}{x-3}\right)dx =$$

$$= \int \frac{1}{x}dx + 2\int \frac{1}{x-1}dx - 2\int \frac{1}{x-3}dx = \ln|x| + 2\ln|x-1| - 2\ln|x-3| + C =$$

$$= \ln\frac{|x|(x-1)^2}{(x-3)^2} + C \; .$$

V případě reálných jednoduchých kořenů polynom $Q_n(x)$ dostaneme pouze integrály parciálních zlomků typu

$$\int \frac{A}{x-\alpha}dx = A \;\ln|x-\alpha| + C \, .$$

Poznámka

Předcházející integrál jsme vypočetli podle vzorce [13] *nebo* [16] *z tabulky 1.2.1. Můžeme použít substituci* $x-\alpha=t$.

B. Rozklad pro reálné násobné kořeny polynomu $Q_n(x)$

Jestliže polynom $Q_n(x)$ má r-násobný ($r \le n$) kořen α, pak lze ryze lomenou racionální funkci $R(x) = \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ rozložit na součet parciálních zlomků:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{B_1}{x-\alpha} + \frac{B_2}{(x-\alpha)^2} + \ldots + \frac{B_r}{(x-\alpha)^r} + R_{r+1}(x) + \; \ldots \; ,$$

kde $B_1, B_2, \; \ldots \; , B_r$ jsou reálné konstanty.

Řešené úlohy

Příklad 1.5.6. Vypočtěte integrál $\displaystyle\int \frac{x^4-2x^3+3x^2-x+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}dx$.

Řešení:

Výpočet opět rozdělíme do pěti kroků:

1. Polynom v čitateli je stupně $m=4$ a polynom ve jmenovateli racionální funkce má také stupeň $n=4$. Jelikož není $m<n$, je daná funkce neryze lomená racionální funkce a musíme polynomy vydělit.

$$(x^4-2x^3+3x^2-x+1):(x^4-3x^3+3x^2-x) = 1$$

$$\frac{-(x^4-3x^3+3x^2-x)}{\quad x^3 \qquad\qquad +1}$$

Danou racionální funkci proto můžeme podle věty 1.5.4 zapsat ve tvaru

$$\frac{x^4-2x^3+3x^2-x+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}=1+\frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}\ .$$

Konstanta 1 je zvláštní případ polynomu nultého stupně a zbývající racionální funkce je již ryze lomená. Tuto racionální funkci rozložíme na součet parciálních zlomků.

2. Polynom ve jmenovateli $Q_4(x)=x^4-3x^3+3x^2-x$ rozložíme na základní součin podle věty 1.5.3. Dostaneme $Q_4(x)=x(x^3-3x^2+3x-1)=x(x-1)^3$. To znamená, že polynom ve jmenovateli má jednoduchý reálný kořen $x_1=0$ a trojnásobný reálný kořen $x_{2,3,4}=1$.
3. Racionální funkci rozložíme na součet parciálních zlomků (případ A pro $x_1=0$ a B pro $x_{2,3,4}=1$):

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}=\frac{A}{x}+\frac{B_1}{x-1}+\frac{B_2}{(x-1)^2}+\frac{B_3}{(x-1)^3}\ .$$

4. Nalezneme konstanty rozkladu A,B_1,B_2,B_3. Rovnici v kroku 3 vynásobíme polynomem $Q_4(x)=x(x-1)^3$. Dostaneme rovnost dvou polynomů:

$$x^3+1=A(x-1)^3+B_1x(x-1)^2+B_2x(x-1)+B_3x$$

Pro nalezení neznámých koeficientů použijeme nejprve dosazovací metodu (viz příklad 1.5.5). Do získané rovnice dosadíme reálné kořeny polynomu ve jmenovateli racionální funkce:

Pro $x=0$ dostaneme: $1=-A+0B_1+0B_2+0B_3$. Tedy $A=-1$.

Pro $x=1$ dostaneme: $2=0A+0B_1+0B_2+1B_3$. Tedy $B_3=2$.

Jelikož již nemáme další kořeny, můžeme dosadit dvě jiná reálná čísla a dostaneme dvě rovnice pro dosud neznámé koeficienty B_1 a B_2.

Pro výpočet zbývajících koeficientů můžeme také použít srovnávací metodu (viz příklad 1.5.5):

$$x^3+1=A(x-1)^3+B_1x(x-1)^2+B_2x(x-1)+B_3x$$

$$x^3+1=A(x^3-3x^2+3x-1)+B_1(x^3-2x^2+x)+B_2(x^2-x)+B_3x$$

$$x^3+1=(A+B_1)x^3+(-3A-2B_1+B_2)x^2+(3A+B_1-B_2+B_3)x-A$$

Koeficienty u x^3: $1 = A + B_1$

Koeficienty u x^2: $0 = -3A - 2B_1 + B_2$

Řešením této soustavy rovnic dostaneme $B_1 = 2$, $B_2 = 1$.

5. Integrujeme získané parciální zlomky:

$$\int \frac{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x + 1}{x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x} dx = \int (1 + \frac{x^3 + 1}{x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x}) dx =$$

$$= \int \left(1 + \frac{A}{x} + \frac{B_1}{x-1} + \frac{B_2}{(x-1)^2} + \frac{B_3}{(x-1)^3} \right) dx = \int \left(1 + \frac{-1}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)^3} \right) dx =$$

$$= x - \ln|x| + 2\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} - \frac{2}{2(x-1)^2} = x + \ln\frac{(x-1)^2}{|x|} - \frac{x}{(x-1)^2} + C$$

V případě reálných násobných kořenů polynomu $Q_n(x)$ dostaneme integrály parciálních zlomků typu

$$\int \frac{B_1}{x-\alpha} dx = B_1 \int \frac{1}{x-\alpha} dx = B_1 \ln|x-\alpha| + C$$

a

$$\int \frac{B_k}{(x-\alpha)^k} dx = B_k \int (x-\alpha)^{-k} dx = \frac{B_k}{(1-k)(x-\alpha)^{k-1}} + C, \text{ pro } k \geq 2.$$

Poznámka

Předcházející integrál jsme vypočetli podle vzorce [16] *z tabulky 1.2.1. Použili jsme substituci* $x - \alpha = t$:

$$\int \frac{B_k}{(x-\alpha)^k} dx = \begin{vmatrix} x-\alpha = t \\ dx = dt \end{vmatrix} = B_k \int \frac{dt}{t^k} dt = B_k \int t^{-k} dt = B_k \frac{t^{-k+1}}{-k+1} + C =$$

$$= \frac{B_k}{(1-k)t^{k-1}} + C = \frac{B_k}{(1-k)(x-\alpha)^{k-1}} + C, \ pro\ k \geq 2.$$

C. Rozklad pro komplexně sdružené kořeny polynomu $Q_n(x)$

Z věty 1.5.3 o rozkladu polynomu na základní součin již víme, že pokud má polynom komplexní kořen $\alpha = c + d\,i$, má také komplexně sdružený kořen $\overline{\alpha} = c - d\,i$ a z polynomu $Q_n(x)$ můžeme vytknout kvadratický polynom $x^2 + px + q$, kde diskriminant $D = p^2 - 4q < 0$. V tomto případě můžeme polynom $Q_n(x)$ zapsat ve tvaru $Q_n(x) = (x^2 + px + q)Q_{n-2}(x)$.

Jestliže polynom $Q_n(x)$ má komplexně sdružené kořeny (jednoduché), pak lze ryze lomenou racionální funkci $R(x) = \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ rozložit na součet parciálních zlomků:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{P_m(x)}{(x^2 + px + q)Q_{n-2}(x)} = \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} + \dots ,$$

kde *M, N* jsou reálné konstanty.

Řešené úlohy

Příklad 1.5.7. Vypočtěte integrál $\displaystyle\int \frac{x^5 + x^3 + x^2 + 2}{x^3 + 1}\,dx$.

Řešení:

Jako v předcházejících příkladech rozdělíme výpočet do pěti kroků:

1. Polynom v čitateli je stupně $m = 5$ a polynom ve jmenovateli racionální funkce má stupeň $n = 3$. Jelikož není $m < n$, je daná funkce neryze lomená racionální funkce a musíme polynomy vydělit.

$$\begin{array}{l}
(x^5 + x^3 + x^2 + 2) : (x^3 + 1) = x^2 + 1 \\
\underline{-(x^5 + \qquad x^2)} \\
\qquad\qquad x^3 + 2 \\
\qquad\quad \underline{-(x^3 + 1)} \\
\qquad\qquad\quad 1
\end{array}$$

Danou racionální funkci proto můžeme podle věty 1.5.4 zapsat ve tvaru

$$\frac{x^5 + x^3 + x^2 + 2}{x^3 + 1} = x^2 + 1 + \frac{1}{x^3 + 1}.$$

Racionální funkci $\dfrac{1}{x^3+1}$ rozložíme na součet parciálních zlomků.

2. Polynom ve jmenovateli $Q_3(x) = x^3 + 1$ rozložíme na základní součin podle věty 1.5.3. Dostaneme $Q_3(x) = (x+1)(x^2 - x + 1)$. (Pro rozklad jsme použili vzorec $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$). To znamená, že polynom ve jmenovateli má reálný jednoduchý kořen $x_1 = -1$ a komplexně sdružené kořeny, protože diskriminant kvadratické rovnice $x^2 - x + 1 = 0$ je záporný: $D = (-1)^2 - 4 = -3 < 0$.

3. Racionální funkci rozložíme na součet parciálních zlomků (případ A pro $x_1 = -1$ a C pro trojčlen $x^2 - x + 1$):

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Mx+N}{x^2-x+1} \quad .$$

4. Nalezneme konstanty rozkladu *A, M, N.* Rovnici v kroku 3 vynásobíme polynomem $Q_3(x) = x^3 + 1$. Dostaneme rovnost dvou polynomů:

$$1 = A(x^2 - x + 1) + (Mx + N)(x + 1) .$$

Pro nalezení neznámých koeficientů použijeme nejprve dosazovací metodu (viz příklad 1.5.5). Do získané rovnice dosadíme reálný kořen polynomu ve jmenovateli racionální funkce:

Pro $x = -1$ dostaneme $1 = A(1+1+1) + 0$. Tedy $A = \dfrac{1}{3}$.

Pro výpočet zbývajících koeficientů použijeme srovnávací metodu (viz příklad 1.5.5):

Koeficienty u x^2: $0 = A + M$

Koeficienty u x^0: $1 = A + N$

Řešením této soustavy rovnic dostaneme $M = -\dfrac{1}{3}$, $N = \dfrac{2}{3}$.

5. Integrujeme získané parciální zlomky (nezapomeňme na polynom získaný dělením v kroku 1):

$$\int \frac{x^5 + x^3 + x^2 + 2}{x^3+1}\,dx = \int \left(x^2 + 1 + \frac{1}{x^3+1}\right) dx = \frac{x^3}{3} + x + \int \left(\frac{\frac{1}{3}}{x+1} + \frac{-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}}{x^2 - x + 1} \right) dx \quad .$$

První integrál je snadný, známe jej z případu A:

$$\int \frac{\frac{1}{3}}{x+1}dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}dx = \frac{1}{3}\ln|x+1| + C_1 \ .$$

Druhý integrál se budeme snažit upravit tak, abychom v čitateli zlomku získali derivaci jmenovatele.

$$\int \frac{-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}dx = -\frac{1}{3}\int \frac{x-2}{x^2-x+1}dx = -\frac{1}{6}\int \frac{2x-4}{x^2-x+1}dx = -\frac{1}{6}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx - \frac{1}{6}\int \frac{-3}{x^2-x+1}dx \ .$$

Dostaneme dva integrály. První integrujeme pomocí vzorce [13] z tabulky 1.2.1 (fakticky použijeme substituci $x^2-x+1=t$):

$$-\frac{1}{6}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx = -\frac{1}{6}\ln\left|x^2-x+1\right| + C_2 = -\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + C_2 \ .$$

Doplněním na čtverec upravíme druhý integrál tak, aby bylo možno použít vzorec [14] z tabulky 1.2.1:

$$-\frac{1}{6}\int \frac{-3}{x^2-x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2-x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+1-\frac{1}{4}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C_3 \ .$$

Sečtením integrálů, které jsme postupně vypočítali, dostaneme výsledek:

$$\int \frac{x^5+x^3+x^2+2}{x^3+1}dx = \frac{x^3}{3} + x + \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C \ .$$

Poznámka

Při výpočtu integrálu z parciálního zlomku $\int \frac{Mx+N}{x^2-x+1}dx$ *jsme integrand upravovali tak, abychom dostali zlomek, který bude mít v čitateli derivaci jmenovatele a zlomek s konstantou v čitateli:*

$$\int \frac{Mx+N}{x^2-x+1}dx = \int \left(\frac{K(2x-1)}{x^2-x+1} + \frac{L}{x^2-x+1}\right)dx \ .$$

Pro méně zdatné počtáře bude proto výhodnější ve 3. kroku rozložit tuto racionální funkci na dva zlomky s konstantami K a L.

Postup můžeme zobecnit a modifikovat rozklad pro případ komplexně sdružených kořenů:

Jestliže polynom $Q_n(x)$ má komplexně sdružené kořeny (jednoduché), pak lze ryze lomenou racionální funkci $R(x)=\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ rozložit na součet parciálních zlomků:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{P_m(x)}{(x^2+px+q)Q_{n-2}(x)}=\frac{K(2x+p)}{x^2+px+q}+\frac{L}{x^2+px+q}+\dots ,$$

kde *K, L* jsou reálné konstanty.

Řešené úlohy

Příklad 1.5.8. Vypočtěte integrál $\displaystyle\int\frac{x^5+x^3+x^2+2}{x^3+1}\,dx$.

Řešení:

Kroky 1 a 2 jsou stejné jako v příkladu 1.5.7. V kroku 3 budeme postupovat podle návodu uvedeného v předcházející poznámce.

3. Racionální funkci rozložíme na součet parciálních zlomků (případ A pro $x_1=-1$ a C pro trojčlen x^2-x+1):

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{K(2x-1)}{x^2-x+1}+\frac{L}{x^2-x+1} .$$

4. Nalezneme konstanty rozkladu *A,K,L*. Rovnici v kroku 3 vynásobíme polynomem $Q_3(x)=x^3+1$. Dostaneme rovnost dvou polynomů:

$$1=A(x^2-x+1)+K(2x-1)(x+1)+L(x+1) .$$

Jako v příkladu 1.5.7 dostaneme $A=\dfrac{1}{3}$.

Pro výpočet zbývajících koeficientů použijeme srovnávací metodu (viz příklad 1.5.5):

Koeficienty u x^2: $0=A+2K$

Koeficienty u x^0: $1=A-K+L$

Řešením této soustavy rovnic dostaneme $K=-\dfrac{1}{6}$, $L=\dfrac{1}{2}$.

5. Výpočet integrálů je již uveden v kroku 5 příkladu 1.5.7.

Jestliže má polynom $Q_n(x)$ komplexně sdružené kořeny (jednoduché), dostaneme integrály parciálních zlomků typu

$$\int \frac{K(2x+p)}{x^2+px+q}dx = K \ln\left|x^2+px+q\right| + C$$

a

$$\int \frac{L}{x^2+px+q}dx = L\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C\ .$$

Poznámka

První integrál jsme vypočetli podle vzorce [13] *z tabulky 1.2.1. Prakticky používáme substituci* $x^2+px+q=t$. *Druhý integrál*

$$\int \frac{L}{x^2+px+q}dx = L\int \frac{1}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}}dx = L\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C\,.$$

Tento vzorec si jistě nebudeme pamatovat. Podstatné je, že uvedený integrál upravíme na typ $\int \frac{1}{a^2+t^2}dt$, *kde* $t = x+\frac{p}{2}$ *a výsledkem bude funkce* arctg( ) *podle vzorce* [14] *z tabulky 1.2.1.*

D. Rozklad pro násobné komplexně sdružené kořeny polynomu $Q_n(x)$

Tento případ uvádíme pro úplnost, abychom vyčerpali všechny možnosti. Základní princip rozkladu je jednoduchý a pečlivý čtenář jistě racionální funkci snadno rozloží na parciální zlomky. Výpočet je však pracnější, neboť budeme počítat minimálně 4 koeficienty a i při vlastní integraci racionálních funkcí budeme řešit obtížnější integrál.

Z věty 1.5.3 o rozkladu polynomu na základní součin již víme, že pokud má polynom k-násobný komplexní kořen $\alpha = c + d\,i$, má také k-násobný komplexně sdružený kořen $\bar{\alpha} = c - d\,i$ a z polynomu $Q_n(x)$ můžeme vytknout kvadratický polynom $(x^2+px+q)^k$, kde diskriminant $D = p^2 - 4q < 0$. V tomto případě můžeme polynom $Q_n(x)$ zapsat ve tvaru $Q_n(x) = (x^2+px+q)^k Q_{n-2k}(x)$. Rozklad na parciální zlomky je již zřejmý z případů B a C.

Jestliže polynom $Q_n(x)$ má k-násobné komplexně sdružené kořeny, pak lze ryze lomenou racionální funkci $R(x)=\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ rozložit na součet parciálních zlomků:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{P_m(x)}{(x^2+px+q)^k Q_{n-2k}(x)}=\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{M_kx+N_k}{(x^2+px+q)^k}\ ,$$

kde $M_1, N_1, \ldots, M_k, N_k$ jsou reálné konstanty.

Poznámka

Podobně, jak bylo uvedeno v poznámce u případu C, je výhodnější provést rozklad na parciální zlomky tak, abychom měli v čitateli násobek derivace jmenovatele a konstantu. $\dfrac{M_jx+N_j}{(x^2+px+q)^j}=\dfrac{K_j(2x+p)+L_j}{(x^2+px+q)^j}$, $j=1,2,\ldots,k$. *Zjednoduší nám to další úpravy.*

Řešené úlohy

Příklad 1.5.9. Vypočtěte integrál $\displaystyle\int\frac{2x^2-4x+5}{(x^2+2)^2}dx$.

Řešení:

Výpočet opět rozdělíme do pěti kroků:

1. Polynom v čitateli je stupně $m=2$ a polynom ve jmenovateli racionální funkce má stupeň $n=4$. Daná funkce je ryze lomená racionální funkce.

2. Polynom ve jmenovateli $Q_4(x)=(x^2+2)^2$ má dvojnásobné komplexně sdružené kořeny $x=\pm\sqrt{2}\,i$ a je již rozložen na základní součin.

3. Racionální funkci rozložíme na součet parciálních zlomků:

$$\frac{2x^2-4x+5}{(x^2+2)^2}=\frac{K_1(2x)}{x^2+2}+\frac{L_1}{x^2+2}+\frac{K_2(2x)}{(x^2+2)^2}+\frac{L_2}{(x^2+2)^2}\ .$$

4. Nalezneme konstanty rozkladu K_1, L_1, K_2, L_2 . Rovnici v kroku 3 vynásobíme polynomem $Q_4(x)=(x^2+2)^2$. Dostaneme rovnost dvou polynomů:

$$2x^2-4x+5=2x(x^2+2)K_1+(x^2+2)L_1+2xK_2+L_2\ .$$

Pro výpočet neznámých koeficientů použijeme srovnávací metodu a dostaneme:

$K_1=0$, $L_1=2$, $K_2=-2$, $L_2=1$.

5. Integrujeme získané parciální zlomky:

$$\int \frac{2x^2-4x+5}{(x^2+2)^2}dx = \int\left(\frac{2}{x^2+2}+\frac{-2(2x)}{(x^2+2)^2}+\frac{1}{(x^2+2)^2}\right)dx =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{2}{x^2+2}+\int\frac{1}{(x^2+2)^2}dx \ .$$

První integrál jsme vypočítali podle vzorce [14] z tabulky 1.2.1, druhý snadno vypočteme substitucí $x^2+2=t$. Zbývající integrál $\int\frac{1}{(x^2+2)^2}dx$ vypočteme metodou per partes:

$$\int\frac{1}{x^2+2}dx = \left|\begin{array}{ll} u'=1 & v=\dfrac{1}{x^2+2} \\ u=x & v'=\dfrac{-2x}{(x^2+2)^2}\end{array}\right| = \frac{x}{x^2+2}+2\int\frac{x^2}{(x^2+2)^2}dx =$$

$$= \frac{x}{x^2+2}+2\int\frac{x^2+2-2}{(x^2+2)^2}dx = \frac{x}{x^2+2}+2\int\frac{1}{x^2+2}dx-4\int\frac{1}{(x^2+2)^2}dx$$

Dostáváme rovnici

$$\int\frac{1}{x^2+2}dx = \frac{x}{x^2+2}+2\int\frac{1}{x^2+2}dx-4\int\frac{1}{(x^2+2)^2}dx,$$

ze které vypočítáme hledaný integrál:

$$\int\frac{1}{(x^2+2)^2}dx = \frac{1}{4}\left(\frac{x}{x^2+2}+\int\frac{1}{x^2+2}dx\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{x}{x^2+2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}\right) .$$

Sečtením s již vypočtenými integrály dostaneme

$$\int\frac{2x^2-4x+5}{(x^2+2)^2}dx = \frac{2}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{2}{x^2+2}+\frac{1}{4}\left(\frac{x}{x^2+2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+C =$$

$$= \frac{9\sqrt{2}}{8}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{x+8}{4(x^2+2)}+C \ .$$

Jestliže má polynom $Q_n(x)$ komplexně sdružené násobné kořeny, dostaneme integrály parciálních zlomků uvedené ve variantě C a dále pro $k \geq 2$ integrály

$\int \frac{K(2x+p)}{(x^2+px+q)^k}dx = \frac{K}{(1-k)(x^2+px+q)^{k-1}} + C$ a integrál typu

$$\int \frac{L}{(x^2+px+q)^k}dx = \int \frac{L}{\left((x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}\right)^k}dx = \left| \begin{array}{l} \text{substituce} \\ t = x+\frac{p}{2} \\ dt = dx \\ a^2 = q-\frac{p^2}{4} \end{array} \right| = \int \frac{L}{\left(t^2+a^2\right)^k}dx\ .$$

Poznámka

První integrál jsme snadno vypočetli substitucí $x^2+px+q=t$. *Druhý integrál můžeme po substituci vypočítat metodou per partes stejně jako jsme to udělali v příkladu 1.5.9. Pohodlnější je použít rekurentní formuli*

$$\int \frac{1}{\left(t^2+a^2\right)^k}dt = \frac{1}{(2k-2)a^2}\cdot\frac{x}{\left(t^2+a^2\right)^{k-1}} + \frac{2k-3}{(2k-2)a^2}\int\frac{1}{\left(t^2+a^2\right)^{k-1}}dt$$

, kterou lze odvodit metodou per partes (odvození najdete např. v [6], [9], [14], [17]).

Kontrolní otázky

1. Jaký tvar má polynomická funkce?
2. Popište rozklad polynomu na kořenové činitele.
3. Co rozumíme rozkladem polynomu na základní součin?
4. Jaký tvar má racionální funkce? Jaký má definiční obor?
5. Kdy je racionální funkce ryze lomená?
6. Vyjádřete racionální funkci $R(x) = \frac{x^6+x^2}{x^2+1}$ jako součet polynomu a ryze lomené racionální funkce.
7. Co jsou to parciální zlomky?
8. Uveďte rozklad na parciální zlomky pro reálné různé kořeny jmenovatele racionální funkce.

9. Uveďte rozklad na parciální zlomky pro reálné násobné kořeny jmenovatele racionální funkce.
10. Uveďte rozklad na parciální zlomky pro komplexně sdružené kořeny jmenovatele racionální funkce.
11. Jak můžeme nalézt koeficienty rozkladu na parciální zlomky?
12. Uveďte kroky, kterými postupujeme při integraci racionální funkce.
13. Jaké integrály dostaneme při integraci parciálního zlomku $\dfrac{A}{(x-\alpha)^{k_1}}$?
14. Jaké integrály dostaneme při integraci parciálního zlomku $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{k_2}}$?
15. Je možné, abychom jako výsledek integrace racionální funkce dostali racionální funkci?

Úlohy k samostatnému řešení

1. a) $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2-6x+5}dx$ b) $\displaystyle\int \frac{3x+5}{x^2-3x-4}dx$ c) $\displaystyle\int \frac{x^2-3}{x^2+8x+12}dx$

d) $\displaystyle\int \frac{4x^2-12x-10}{x^3-2x^2-5x+6}dx$ e) $\displaystyle\int \frac{x^3+3}{x^2-3x}dx$ f) $\displaystyle\int \frac{\frac{3}{2}x^2-30}{x^3-4x^2-20x+48}dx$

2. a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(x-1)}$ b) $\displaystyle\int \frac{x-1}{(x+1)(x+2)^2}dx$ c) $\displaystyle\int \frac{-x^3+2x^2+1}{x(x+1)^3}dx$

d) $\displaystyle\int \frac{5x^3-20x^2-70x+78}{\left(x^2+4x+4\right)\left(x^2-10x+25\right)}dx$ e) $\displaystyle\int \frac{2x^3-11x^2+4x+-4}{x^4-2x}dx$

f) $\displaystyle\int \frac{x^4-2x^3+3x^2+2x+1}{x^5-3x^4+3x^3+x^2}dx$

3. a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-4x+6}dx$ b) $\displaystyle\int \frac{3x+4}{x^2+2x+2}dx$ c) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2-6x+12}dx$

d) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+3x+3}dx$ e) $\displaystyle\int \frac{5x-1}{x^2-x+1}dx$

f) $\displaystyle\int \frac{3x^4-9x^3+13x^2-x+2}{x^2+2x+2}dx$

4. a) $\int \frac{x+2}{x^4-16}dx$ b) $\int \frac{x-3}{x^4-81}dx$ c) $\int \frac{x+8}{x^3+8}dx$

d) $\int \frac{3x+1}{x^3-1}dx$ e) $\int \frac{x^5+x^4+3x^3+x^2-2}{x^4-1}dx$

f) $\int \frac{x^2-2x-7}{\left(x^2-2x+1\right)\left(x^2+2x+5\right)}dx$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) $\frac{5}{2}\ln|x-5|-\frac{1}{2}\ln|x-1|+C$; b) $\frac{17}{5}\ln|x-4|-\frac{2}{5}\ln|x+1|+C$;

c) $x-\frac{17}{2}\ln|x+6|+\frac{1}{2}\ln|x+2|+C$; d) $3\ln|x-1|+2\ln|x+2|-\ln|x-3|+C$;

e) $\frac{1}{2}x^2+3x+10\ln|x-3|-\ln|x|+C$; f) $\frac{1}{2}\ln|x-2|-\frac{1}{2}\ln|x+4|+\frac{3}{2}\ln|x-6|+C$.

2. a) $\ln|x-1|-\ln|x|+\frac{1}{x}+C$; b) $2\ln|x+2|-2\ln|x+1|-\frac{3}{x+2}+C$;

c) $\ln|x|-2\ln|x+1|-\frac{3}{x+1}+\frac{2}{(x+1)^2}+C$; d) $2\ln|x+2|+3\ln|x-5|+\frac{2}{x+2}+\frac{3}{x-5}+C$;

e) $5\ln|x|-3\ln|x-2|+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+C$; f) $2\ln|x-1|-\ln|x|-\frac{1}{x}+\frac{2}{x-1}-\frac{1}{2(x-1)^2}+C$.

3. a) $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{\sqrt{2}}+C$; b) $\frac{3}{2}\ln\left|x^2+2x+2\right|+\operatorname{arctg}(x+1)+C$;

c) $\ln\left|x^2-6x+12\right|+\frac{7}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{\sqrt{3}}+C$; d) $\frac{1}{2}\ln\left|x^2+3x+3\right|+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+3}{\sqrt{3}}+C$;

e) $\frac{5}{2}\ln\left|x^2-x+1\right|+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$; f) $x^3+x+\ln\left|x^2-3x+4\right|+\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x-3}{\sqrt{7}}+C$.

4. a) $\frac{1}{8}\ln|x-2|-\frac{1}{16}\ln\left|x^2+4\right|-\frac{1}{8}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$; b) $\frac{1}{18}\ln|x+3|-\frac{1}{36}\ln\left|x^2+9\right|-\frac{1}{18}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+C$;

c) $\frac{1}{2}\ln|x+2|-\frac{1}{4}\ln\left|x^2-2x+4\right|-\frac{5}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C$;

d) $\frac{4}{3}\ln|x-1|-\frac{2}{3}\ln\left|x^2+x+1\right|-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$;

e) $\frac{1}{2}x^2 + x + \ln\left|x^2 - 1\right| + \frac{1}{2}\ln\left|x^2 + 1\right| + \operatorname{arctg} x + C$;

f) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln\left|x^2 + 2x + 5\right| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2} + C$.

Kontrolní test

1. Rozložte na základní součin polynom $(x^3+1)(x^2-1)(x^2-x^5)$.

   a) $(x^2-1)(x+1)(1-x)x^2(x^2-x+1)(x^2+x+1)$,

   b) $x^2(x+1)^2(x-1)^2(x^2+x+1)(x^2-x+1)$,

   c) $-x^2(x+1)^2(x-1)^2(x^2-x+1)(x^2+x+1)$,

   d) $-x^2(x+1)^2(x-1)^2(x^2+x+1)^2$.

2. Určete kořeny polynomu $x^3 + x^2 - 4x - 4$.

   a) -1, 2, -2, b) 1, 2, -2, c) 1, -1, 2, d) -1, 2, 2.

3. Určete kořeny polynomu $x^3 - 3x^2 - 9x + 27$.

   a) 9, 3, -3, b) -9, 3, -3, c)-27, 3, -9, d) -3, 3, 3.

4. Kolik konstant je třeba určit při rozkladu funkce $R(x) = \frac{x^2+1}{x^4+2x^3+2x^2}$ na parciální zlomky?

   a) 3, b) 4, c) 2, d) 5.

5. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{1-4x}{x^3+x^2-2x}\,dx$.

   a) $\frac{1}{2}\ln|x| - \ln|x-1| + \frac{3}{2}\ln|x+2| + C$, b) $-\frac{1}{2}\ln|x| - \ln|x+1| + \frac{3}{2}\ln|x-2| + C$,

   c) $-\frac{1}{2}\ln|x| + \ln|x-1| - \frac{3}{2}\ln|x+2| + C$, d) $-\frac{1}{2}\ln|x| - \ln|x-1| + \frac{3}{2}\ln|x+2| + C$.

6. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{x^5+x^4-8}{x(x+2)(x-2)}\,dx$.

   a) $\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \ln\left|\frac{(x+2)^3}{x^2(x-2)^5}\right| + C$, b) $\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 4x - \ln\left|\frac{x(x-2)^3}{(x+2)^5}\right| + C$,

   c) $\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \ln\left|\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right| + C$, d) $\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \ln\left|\frac{x^2(x-2)^3}{(x+2)^5}\right| + C$.

7. Rozložte funkci $R(x)=\dfrac{x^3-6x^2+11x-5}{(x-2)^4}$ na parciální zlomky.

a) $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{(x-2)^3}+\dfrac{1}{(x-2)^4}$, b) $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{(x-2)^3}-\dfrac{1}{(x-2)^4}$,

c) $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{(x-2)^2}-\dfrac{1}{(x-2)^3}+\dfrac{1}{(x-2)^4}$, d) $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{(x-2)^2}+\dfrac{1}{(x-2)^3}-\dfrac{1}{(x-2)^4}$.

8. Vypočtěte neurčitý integrál $\int\dfrac{3x-4}{(x-2)(x-1)^3}dx$.

a) $2\ln\left|\dfrac{x-1}{x-2}\right|+\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{1}{(x-1)^2}+C$, b) $2\ln\left|\dfrac{x-2}{x-1}\right|+\dfrac{4x-5}{2(x-1)^2}+C$,

c) $2\ln\left|\dfrac{x-2}{x-1}\right|+\dfrac{4x-3}{2(x-1)^2}+C$, d) $2\ln\left|\dfrac{x-1}{x-2}\right|-\dfrac{4x-5}{2(x-1)^2}+C$.

9. Vypočtěte neurčitý integrál $\int\dfrac{dx}{1-x^4}$.

a) $\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|-\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$, b) $\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{1-x}{1+x}\right|+\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$,

c) $\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|+\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$, d) $\ln\left|\dfrac{1-x}{1+x}\right|-\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$.

10. Vypočtěte neurčitý integrál $\int\dfrac{3x^2-3x+5}{x^3-2x^2+5x}dx$.

a) $\ln|x|+\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{x-1}{2}+C$,

b) $\ln|x|+\ln(x^2-2x+5)+\operatorname{arctg}\dfrac{x-1}{2}+C$,

c) $\ln|x|-\ln(x^2-2x+5)-\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}(x-1)+C$,

d) $\ln|x|+\ln(x^2-2x+5)+\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{x-1}{2}+C$.

Výsledky testu

1. c); 2. a); 3. d); 4. b); 5. d); 6. c); 7. a); 8. b); 9. a); 10. d).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v 8 případech, pokračujte další kapitolou.

V opačném případě je třeba prostudovat kapitolu 1.5 znovu.

Shrnutí lekce

V této kapitole jsme se podrobněji zabývali integrováním racionálních funkcí. Racionální funkce můžeme dostat i po některých substitucích, jak uvidíme v další kapitole. Integrace racionální funkce sestává z pěti kroků:

1. Pokud racionální funkce není ryze lomená, nejprve vydělíme polynom v čitateli polynomem ve jmenovateli racionální funkce a dostaneme polynom a ryze lomenou racionální funkci.
2. Nalezneme kořeny polynomu ve jmenovateli racionální funkce a tento polynom rozložíme na základní součin.
3. Racionální funkci rozložíme na součet parciálních zlomků.
4. Nalezneme koeficienty tohoto rozkladu.
5. Integrujeme získané parciální zlomky.

Rozklad na parciální zlomky závisí na tom, zda polynom ve jmenovateli má jednoduché reálné kořeny, násobné reálné kořeny, komplexní kořeny nebo násobné komplexní kořeny. Pokud jsou kořeny reálné nebo jednoduché komplexní, je vlastní integrace snadná. Princip rozkladu na parciální zlomky je jednoduchý, ale vlastní realizace může být časově náročná v závislosti na tom, kolik koeficientů musíme počítat. Pokud se nejedná o jednoduché školské úlohy, bude nejobtížnější druhý krok, neboť dovedeme dobře řešit kvadratické rovnice, pro polynomy 3. a 4. stupně existují poměrně složité vzorce, ale řešení rovnic vyšších stupňů je obecně problém.

Při integraci parciálních zlomků můžeme dostat pouze tyto funkce:

1. Polynomy.
2. Násobky ryze lomených racionálních funkcí typu $\dfrac{1}{(x-\alpha)^j}$ a $\dfrac{1}{(x^2+px+q)^j}$.
3. Násobky logaritmů $\ln|x-\alpha|$ a $\ln\left|x^2+px+q\right|$.
4. Funkce arcustangens.

Některé další integrály (např. integrály z iracionálních funkcí, goniometrických funkcí) můžeme vhodnou substitucí převést na integrály z racionálních funkcí. V další kapitole se proto budeme podrobněji zabývat integrováním goniometrických funkcí.

1.6. Integrace goniometrických funkcí

Průvodce studiem

V této kapitole se budeme podrobněji zabývat integrací funkcí, které jsou složené z goniometrických funkcí. Takové integrály se často vyskytují v praktických aplikacích. Budeme se s nimi setkávat hlavně při výpočtu vícenásobných integrálů v Matematice III.

Při výpočtu integrálů tohoto typu je obvykle používána substituční metoda. Některé integrály se také dají vypočítat metodou per partes. Vhodnou substitucí lze dané integrály často převést na integrály z racionálních funkcí, které jsme se naučili integrovat v předcházející kapitole. Pro jednotlivé typy integrálů přehledně uvedeme vhodnou metodu výpočtu.

Cíle

Seznámíte se s postupy, které jsou vhodné při integraci funkcí složených z goniometrických funkcí. Uvedeme základní typy těchto integrálů a nejvhodnější metody integrace těchto funkcí.

Předpokládané znalosti

Předpokládáme, že znáte základní integrály uvedené v tabulce 1.2.1 a umíte vypočítat integrály substituční metodou, metodou per partes a umíte integrovat racionální funkce. Předpokládáme, že znáte základní vlastnosti goniometrických funkcí a důležité vztahy, které pro ně platí.

Integrály typu $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$

Výklad

Nejprve se budeme zabývat integrály typu $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$, kde m, n jsou celá čísla. Jeden takový integrál jsme již počítali, viz příklad 1.4.2. Integrály tohoto typu budeme velmi často dostávat při výpočtu dvojných a trojných integrálů v předmětu Matematika III. Postup výpočtu závisí na tom, zda jsou čísla m, n sudá nebo lichá. Nejprve uvedeme přehledně postup pro jednotlivé možnosti a pak pro každou možnost vypočítáme příklad, na kterém postup objasníme.

Výpočet integrálů typu $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$, kde $m,\ n \in \mathbf{Z}$:

a) m je liché — substituce $\cos x = t$,

b) n je liché — substituce $\sin x = t$,

c) m i n sudé, alespoň jedno záporné — substituce $\operatorname{tg} x = t$,

d) m i n sudé nezáporné — použijeme vzorce pro dvojnásobný úhel

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} .$$

Řešené úlohy

Příklad 1.5.1. Vypočtěte integrál $\int \sin^5 x \cos^2 x\, dx$.

Řešení:

V tomto případě je $m = 5$, $n = 2$, takže budeme volit substituci $\cos x = t$. Pro diferenciál dostáváme $-\sin x\, dx = dt$. Z integrované funkce si tedy „vypůjčíme“ jeden sinus pro diferenciál a zbývající siny snadno převedeme na funkci kosinus pomocí známého vztahu $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Dostaneme:

$$\int \sin^5 x \cos^2 x\, dx = \int \sin^4 x \cos^2 x \sin x\, dx = \int \left(\sin^2 x\right)^2 \cos^2 x \sin x\, dx =$$

$$= \int \left(1-\cos^2 x\right)^2 \cos^2 x \sin x\, dx = \left| \begin{array}{c} \text{substituce:} \\ \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{array} \right| = -\int \left(1-t^2\right)^2 t^2 dt =$$

$$= -\int (t^2 - 2t^4 + t^6) dt = -\frac{t^7}{7} + 2\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} + C = -\frac{1}{7}\cos^7 x + \frac{2}{5}\cos^5 x - \frac{1}{3}\cos^3 x + C .$$

Poznámky

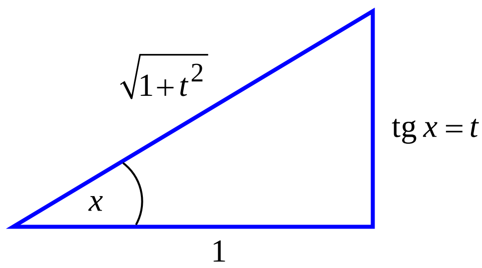
1. Jsou-li lichá m i n, můžeme si vybrat, jakou substituci použijeme, zda a) nebo b). Takovou úlohu jsme již řešili v příkladu 1.4.2.

2. Obecně si stačí pamatovat, že v případě liché mocniny použijeme jednu funkci sinus (resp. kosinus) pro diferenciál a zbývající mocninu (bude sudá) převedeme na druhou funkci (kosinus, resp. sinus) a tu také položíme rovnu nové proměnné.

Příklad 1.5.2. Vypočtěte integrál $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^8 x}\,dx$.

Řešení:

V tomto případě je $m = 2$, $n = -8$. Jelikož je n<0, budeme volit substituci $\operatorname{tg} x = t$ pro $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Pro hodnoty z uvedeného intervalu je $x = \operatorname{arctg} t$, a tedy diferenciál $dx = \frac{dt}{1+t^2}$. Pro výpočet integrálu ještě potřebujeme vyjádřit funkce $\sin x$ a $\cos x$ pomocí funkce $\operatorname{tg} x$. Potřebné vztahy snadno odvodíme z pravoúhlého trojúhelníka, jehož jeden úhel má velikost *x*. Jestliže přilehlou odvěsnu zvolíme rovnu 1, bude mít protilehlá odvěsna velikost $\operatorname{tg} x = t$. Z Pythagorovy věty vypočteme velikost přepony $\sqrt{1+t^2}$. Z definic funkcí sinus a kosinus (poměr velikostí protilehlé, resp. přilehlé odvěsny ku přeponě) dostaneme:



$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ a $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^8 x}\,dx = \left| \begin{array}{l} \text{substituce} \\ \operatorname{tg} x = t \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{\left(\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^8} \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{\dfrac{t^2}{1+t^2}}{\dfrac{1}{\left(1+t^2\right)^4}} \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{t^2\left(1+t^2\right)^4}{\left(1+t^2\right)^2}\,dt =$$

$$= \int t^2\left(1+t^2\right)^2 dt = \int t^2\left(1+2t^2+t^4\right)dt = \int\left(t^2+2t^4+t^6\right)dt = \frac{t^3}{3}+\frac{2t^5}{5}+\frac{t^7}{7}+C =$$

$$= \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + \frac{2}{5}\operatorname{tg}^5 x + \frac{1}{7}\operatorname{tg}^7 x + C \; .$$

Příklad 1.5.3. Vypočtěte integrál $\int \sin^4 x\,dx$.

Řešení:

Máme $m = 4$ a $n = 0$. Jelikož je m>0 a je sudé, snížíme mocninu použitím vzorce pro poloviční úhel.

$$\int \sin^4 x\,dx = \int \left(\sin^2 x\right)^2 dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1-2\cos 2x+\cos^2 2x)dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int (1-2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2})dx = \frac{1}{4}\left[x-\frac{2\sin 2x}{2}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\frac{\sin 4x}{4}\right]+C =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}x-\sin 2x+\frac{\sin 4x}{8}\right]+C\ .$$

Poznámka

Integrál z funkcí $\cos 2x$ *a* $\cos 4x$ *jsme vypočetli podle vzorce* [16] *z tabulky 1.2.1. Prakticky používáme substituci* $2x = t$ *, resp.* $4x = t$.

Integrály typu $\int R(\sin x, \cos x)dx$

Výklad

V další části se budeme zabývat integrály racionálních funkcí, které dostaneme z funkcí $\sin x$, $\cos x$ a reálných čísel pomocí konečného počtu aritmetických operací (sčítání, odčítání, násobení a dělení). Často jsou tyto integrály značeny jako integrály typu $\int R(\sin x, \cos x)dx$, kde $R(u,v)$ představuje racionální funkci dvou proměnných $u = \sin x$ a $v = \cos x$.

Jedná se například o integrály funkcí:

$$R(\sin x, \cos x) = \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x},$$

$$R(\sin x, \cos x) = \frac{1}{\sin x},$$

$$R(\sin x, \cos x) = \frac{1+\sin x+\cos x}{1-\sin x-\cos x}.$$

Poznámka

Pokud bychom mezi výchozí funkce přidali ještě funkce $\operatorname{tg} x$ *a* $\operatorname{cotg} x$, *nedostaneme nic nového, neboť* $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ *a* $\operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$. *Po úpravě dostaneme opět racionální funkci vytvořenou ze sinů a kosinů.*

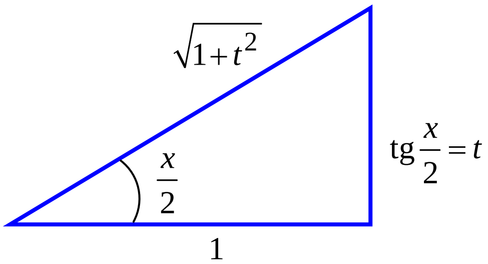
Univerzální substituce

Ukážeme, že integrál typu $\int R(\sin x, \cos x)dx$ můžeme substitucí

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t\,, \qquad x \in (-\pi, \pi)$$

převést na integrál racionální lomené funkce. K tomu musíme nejprve funkce $\sin x$ a $\cos x$ vyjádřit pomocí $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

Analogicky jako v příkladu 1.5.2. snadno odvodíme potřebné vztahy pro poloviční úhel $\frac{x}{2}$ z pravoúhlého trojúhelníka. Jestliže přilehlou odvěsnu zvolíme rovnu 1, bude mít protilehlá odvěsna velikost $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$.



Z Pythagorovy věty vypočteme velikost přepony $\sqrt{1+t^2}$. Z definic funkcí sinus a kosinus (poměr velikostí protilehlé resp. přilehlé odvěsny ku přeponě) dostaneme:

$$\sin\frac{x}{2} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \quad \text{a} \quad \cos\frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,.$$

S použitím vzorců pro dvojnásobný úhel

($\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$) získáme

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{2t}{1+t^2}\,,$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2 - \left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2 = \frac{1-t^2}{1+t^2}\,.$$

Podstatné je, že po substituci dostáváme místo funkcí sinus a kosinus racionální funkce.

Ze vztahu $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ pro $x \in (-\pi, \pi)$ dostáváme $\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t$, $x = 2\operatorname{arctg} t$, a tedy $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$. Po dosazení dostáváme integrál racionální funkce

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt \; .$$

Shrnutí:

Integrály typu $\int R(\sin x, \cos x)dx$ můžeme řešit substitucí

$$\mathrm{tg}\frac{x}{2} = t \,, \qquad x \in (-\pi, \pi) \,.$$

Pak vyjádříme

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \,, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \,, \quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt \,.$$

Řešené úlohy

Příklad 1.5.4. Vypočtěte integrál $\int \frac{1}{\sin x}dx \,, \;\; x \in (0, \pi)$.

Řešení:

Uvedený integrál jsme již jednou řešili substitucí (příklad 1.4.6). Z výše odvozených vztahů snadno dostaneme:

$$\int \frac{1}{\sin x}dx = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{1}{t}dt = \ln|t| + C = \ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| + C \,.$$

Příklad 1.5.5. Vypočtěte integrál $\int \frac{1}{\cos x - 2\sin x + 3}dx$.

Řešení:

Použijeme substituci $\mathrm{tg}\frac{x}{2} = t$. Z výše odvozených vztahů snadno dostaneme:

$$\int \frac{1}{\cos x - 2\sin x + 3}dx = \int \frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2} - 2\frac{2t}{1+t^2} + 3} \frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{2}{1-t^2-4t+3+3t^2}dt =$$

$$= \int \frac{2}{2t^2-4t+4}dt = \int \frac{1}{t^2-2t+2}dt = \int \frac{1}{t^2-2t+1+1}dt = \int \frac{1}{1+(t-1)^2}dt =$$

$$= \mathrm{arctg}(t-1) + C = \mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\frac{x}{2} - 1) + C \,.$$

Příklad 1.5.6. Vypočtěte integrál $\int \frac{1+\sin x+\cos x}{1-\sin x-\cos x}\,dx$.

Řešení:

Použijeme substituci $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$. Z výše odvozených vztahů dostaneme:

$$\int \frac{1+\sin x+\cos x}{1-\sin x-\cos x}\,dx=\int \frac{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}{1-\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt=\int \frac{2+2t}{2t^2-2t}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt=$$

$$=\int \frac{2(t+1)}{(t^2-t)(1+t^2)}\,dt=\int \frac{2(t+1)}{t(t-1)(1+t^2)}\,dt$$

Dostali jsme integrál z racionální funkce ryze lomené. Pro rozklad racionální funkce na parciální zlomky použijeme postup uvedený v kapitole 1.5. Polynom ve jmenovateli má reálné kořeny $t_1=0$, $t_2=1$ a komplexně sdružené kořeny $t_{3,4}=\pm i$. Rozklad na součet parciálních zlomků bude mít tvar:

$$\frac{2(t+1)}{t(t-1)(1+t^2)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t-1}+\frac{C2t}{1+t^2}+\frac{D}{1+t^2}\,.$$

Nalezneme neznámé koeficienty *A, B, C, D* rozkladu z rovnice

$$2(t+1)=A(t-1)(1+t^2)+Bt(1+t^2)+C2t^2(t-1)+Dt(t-1)\,.$$

Dostaneme: $A=-2,\ \ B=2,\ \ C=0,\ \ D=-2$.

Integrujeme parciální zlomky:

$$\int \frac{2(t+1)}{t(t-1)(1+t^2)}dt=\int \left(\frac{-2}{t}+\frac{2}{t-1}+\frac{-2}{1+t^2}\right)dt=-2\ln|t|+2\ln|t-1|-2\operatorname{arctg}t+C=$$

$$=-2\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+2\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right|-2\operatorname{arctg}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C=2\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right|-x+C\,.$$

Poznámka

Substitucí $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$ *pro* $x\in(-\pi,\pi)$ *můžeme řešit každý integrál typu* $\int R(\sin x,\cos x)dx$.

Vzniklé racionální funkce však mohou být komplikované a integrace pracná. V některých speciálních případech může k cíli rychleji vést substituce $\sin x=t$, $\cos x=t$, *případně* $\operatorname{tg}x=t$.

Kontrolní otázky

1. Jakou substituci zvolíte při výpočtu integrálu typu $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$, $m, n \in \mathbf{Z}$, je-li m liché?
2. Jakou substituci zvolíte při výpočtu integrálu typu $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$, $m, n \in \mathbf{Z}$, je-li n liché?
3. Jakou substituci zvolíte při výpočtu integrálu typu $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$, $m, n \in \mathbf{Z}$, jsou-li m i n sudé?
4. Jakou substituci zvolíte při výpočtu integrálu $\int \sin^3 x \cos^2 x\, dx$?
5. Jakou substituci zvolíte při výpočtu integrálu $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}\, dx$?
6. Jakou substituci zvolíte při výpočtu integrálu $\int \frac{1}{\sin^3 x}\, dx$?
7. Jaký postup zvolíte při výpočtu integrálu $\int \sin^4 x \cos^2 x\, dx$?
8. Jakou substituci zvolíte při výpočtu integrálu $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}\, dx$?
9. Jakou funkci představuje zápis $R(\sin x, \cos x)$?
10. Kdy je vhodná univerzální substituce $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$?
11. Je vhodná univerzální substituce při výpočtu integrálu $\int \frac{1}{2-\cos x}\, dx$?
12. Při výpočtu integrálu $\int \frac{\sin x}{2-\cos x}\, dx$ je vhodnější jiná než univerzální substituce. Jaká?

Úlohy k samostatnému řešení

1. a) $\int \cos^3 x\, dx$ b) $\int \sin^5 x\, dx$ c) $\int \sin^3 x \cos^2 x\, dx$

d) $\int \sin^3 x \cos^3 x\, dx$ e) $\int \sin^4 x\, dx$ f) $\int \cos^4 x\, dx$

g) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\, dx$ h) $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^4 x}\, dx$ i) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}\, dx$

j) $\int \frac{\cos^2 x}{\sin x}\, dx$ k) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos x}\, dx$ l) $\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx$

2. a) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin^2 x + 4\sin x}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\cos x + 2}\,dx$ c) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{2+\cos^2 x}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{3+\sin^2 x}\,dx$ e) $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}\,dx$ f) $\displaystyle\int \sqrt[3]{\sin x}\cos^5 x\,dx$

3. a) $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}\,dx$ c) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x\cos x}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{dx}{3\sin^2 x + 5\cos^2 x}$ e) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$ f) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x + 1}\,dx$

4. a) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\,dx$ c) $\displaystyle\int \frac{1}{1-\sin x}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{dx}{4\sin x - 7\cos x - 7}$ e) $\displaystyle\int \frac{\sin x - 1}{\cos x - 1}\,dx$ f) $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\cos x}$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) $\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C$; b) $-\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C$; c) $-\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{1}{5}\cos^5 x + C$;

d) $\frac{1}{4}\sin^4 x - \frac{1}{6}\sin^6 x + C$; e) $\frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$; f) $\frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$;

g) $\cos x + \frac{1}{\cos x} + C$; h) $\sin x + \frac{2}{\sin x} - \frac{1}{3\sin^3 x} + C$; i) $\ln|\cos x| + \frac{1}{2\cos^2 x} + C$;

j) $\cos x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x + 1}{\cos x - 1}\right| + C$; k) $-\sin x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x + 1}{\sin x - 1}\right| + C$; l) $\frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32} + C$.

2. a) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sin x}{\sin x + 4}\right| + C$; b) $\frac{1}{2}\cos^2 x - 3\cos x + 6\ln|\cos x + 2| + C$; c) $-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\cos x}{\sqrt{2}} + C$;

d) $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sin x}{\sqrt{3}}\right) + C$; e) $\frac{5}{2}\sqrt{\cos^5 x} - 2\sqrt{\cos x} + C$;

f) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{\sin^4 x} - \frac{3}{4}\sqrt[3]{\sin^8 x} + \frac{3}{14}\sqrt[3]{\sin^{14} x} + C$. **3.** a) $\operatorname{tg} x - x + C$; b) $\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x + C$;

c) $\ln|\operatorname{tg} x| + C$; d) $\frac{1}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\operatorname{tg} x\right) + C$; e) $\operatorname{tg} x - \frac{1}{\operatorname{tg} x} + C$; f) $\ln|\operatorname{tg} x + 1| - 2x + C$.

4. a) $\ln\left|\frac{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right| + C$; b) $\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$; c) $\frac{2}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + C$; d) $\frac{1}{4}\ln\left|4\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 7\right| + C$;

e) $\ln\left|\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1\right|-\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C$; f) $\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C$.

Kontrolní test

1. Jakou substituci zvolíte při výpočtu integrálu $\int\frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}dx$?

a) $\cos x = t$, b) $\sin x = t$,

c) univerzální, d) $\operatorname{tg} x = t$.

2. Jakou substituci zvolíte při výpočtu integrálu $\int\sin^7 x\,dx$?

a) $\cos x = t$, b) $\sin x = t$,

c) univerzální, d) $\operatorname{tg} x = t$.

3. Jakou substituci zvolíte při výpočtu integrálu $\int\frac{dx}{4\sin^2 x+9\cos^2 x}$?

a) univerzální, b) $\sin x = t$,

c) $\operatorname{tg} x = t$, d) $\cos x = t$.

4. Vypočtěte neurčitý integrál $\int\cos^5 x\,dx$.

a) $\sin x+\frac{2}{3}\sin^3 x-\frac{1}{5}\sin^5 x+C$, b) $\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{1}{5}\sin^5 x+C$,

c) $\cos x-\frac{2}{3}\cos^3 x+\frac{1}{5}\cos^5 x+C$, d) $\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{1}{5}\cos^5 x+C$.

5. Vypočtěte neurčitý integrál $\int\frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx$.

a) $-\frac{1}{3\sin^3 x}+\frac{1}{\sin x}+C$, b) $\frac{1}{3\cos^3 x}-\frac{1}{\cos x}+C$,

c) $-\frac{1}{3\cos^3 x}+\frac{1}{\cos x}+C$, d) $\frac{3}{\cos^3 x}+\frac{1}{\cos x}+C$.

6. Vypočtěte neurčitý integrál $\int\sin^2 x\cos^4 x\,dx$.

a) $\frac{1}{8}(x-\frac{1}{2}\sin 4x+\frac{1}{6}\sin^3 2x)+C$, b) $\frac{1}{6}(\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\sin 4x+\frac{1}{3}\sin^3 2x)+C$,

c) $\frac{1}{8}(\frac{x}{2}-\frac{1}{8}\sin 4x+\frac{1}{6}\sin^3 x)+C$, d) $\frac{1}{6}(x-\frac{1}{8}\sin 4x-\frac{1}{6}\sin^3 2x)$.

7. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^4 x} dx$ (lze i bez substituce).

a) $-\operatorname{cotg} x + 2\operatorname{tg} x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + C$, b) $\frac{1}{\operatorname{tg} x} + 2\operatorname{cotg} x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + C$,

c) $-\operatorname{cotg} x + \frac{1}{2}\operatorname{tg}^3 x + C$, d) $-\operatorname{tg} x + 2\operatorname{cotg} x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + C$.

8. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{\cos^3 x}{2 - \sin x} dx$.

a) $-\frac{1}{2}\sin^2 x - 2\sin x - 3\ln|\sin x - 2| + C$, b) $\frac{1}{2}\sin^2 x + 2\sin x - 3\ln|2 - \sin x| + C$,

c) $\frac{1}{2}\sin^2 x - 2\sin x + 3\ln|2 - \sin x| + C$, d) $\frac{1}{2}\sin^2 x + 2\sin x + 3\ln|\sin x - 2| + C$.

9. Vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}$.

a) $2\ln\left|1 + \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$, b) $\ln|1 + \operatorname{tg} x| + C$, c) $\ln\left|1 + \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$, d) $2\ln|1 + \operatorname{tg} x| + C$.

10. Bez použití univerzální substituce vypočtěte neurčitý integrál $\int \frac{1}{1 - \sin x} dx$.

a) $-\operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x} + C$, b) $\operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x} + C$, c) $\operatorname{cotg} x - \frac{1}{\cos x} + C$, d) $\operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x} + C$.

Výsledky testu

1. b); 2. a); 3. c); 4. b); 5. b); 6. c); 7. a); 8. d); 9. c); 10. d).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v 8 případech, pokračujte další kapitolou.

V opačném případě je třeba prostudovat kapitolu 1.6 znovu a propočítat další úlohy k samostatnému řešení.

Shrnutí lekce

V praktických aplikacích se velmi často vyskytují integrály, které obsahují goniometrické funkce. Při výpočtu integrálů tohoto typu je obvykle užívána substituční metoda. V této kapitole jsou přehledně uvedeny substituce používané pro základní typy integrálů, se kterými se často setkáváme. Často se vyskytují integrály, které je možno řešit několika způsoby. Je dobré zvolit takovou metodu, která povede nejrychleji k cíli. Obvykle postupujeme takto:

- Nejprve uvažíme, zda nelze použít substituci $\sin x = t$ nebo $\cos x = t$,
- pak zkoušíme, zda není vhodná substituce $\operatorname{tg} x = t$,
- nakonec se pokusíme problém vyřešit univerzální substitucí $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$.

1.7. Neelementární integrály

Výklad

Každá funkce $f(x)$, která je spojitá na otevřeném intervalu *I*, má na tomto intervalu primitivní funkci. V předcházejících kapitolách jsme se zabývali metodami výpočtu primitivních funkcí. Každá primitivní funkce byla vyjádřena konečným výrazem obsahujícím známé elementární funkce (např. x^3, $\sqrt[5]{x^3}$, $\sqrt{a^2-x^2}$, e^x, $\ln x$, $\sin x$, $\operatorname{arctg} x$, ...).

Existují však spojité funkce jedné proměnné, jejichž primitivní funkce nelze vyjádřit pomocí konečného počtu elementárních funkcí. Takovými funkcemi jsou např. funkce

$$\sin x^2,\ \cos x^2,\ e^{x^2},\ e^{-x^2},\ \frac{e^x}{x},\ \frac{\sin x}{x},\ \frac{\cos x}{x},\ \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}.$$

K těmto funkcím sice primitivní funkce existují, ale nelze je vyjádřit elementárními funkcemi v konečném tvaru. V tomto případě integrál takové funkce představuje neelementární funkci, kterou nazýváme **vyšší transcendentní funkce**.

Obecně nelze říci, kdy se nám nedaří nalézt primitivní funkci, protože jsme použili nevhodnou metodu a kdy z toho důvodu, že ji nelze vyjádřit v konečném tvaru (jde o vyšší transcendentní funkci). Tuto otázku dovedeme odpovědět jen u některých integrálů, u nichž víme, že se jedná o vyšší transcendentní funkce:

$\int e^{-x^2}dx$ (Gaussova funkce), $\int \frac{e^x}{x}dx = \int \frac{\ln t}{t}dt$ (integrální logaritmus), $\int \frac{\sin x}{x}dx$ (integrální sinus), $\int \frac{\cos x}{x}dx$ (integrální kosinus), $\int \frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}$, $|k|<1$ (eliptický integrál prvního druhu), $\int \sin x^2 dx$, $\int \cos x^2 dx$ (Fresnelovy integrály).

Integrály tohoto typu se vyskytují v řadě praktických aplikací např. v teorii chyb, pravděpodobnosti a statistice.

Jistou výhodou při počítání integrálů je fakt, že v případě pochybností můžeme správnost výpočtu ověřit zkouškou, neboť z definice primitivní funkce plyne

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)\ .$$

Pokud je náš výpočet správný, zderivováním výsledné funkce dostaneme integrovanou funkci.

2. URČITÝ INTEGRÁL

Průvodce studiem

V předcházející kapitole jsme se seznámili s pojmem neurčitý integrál, který dané funkci přiřazoval opět funkci (přesněji množinu funkcí). V této kapitole se budeme věnovat určitému integrálu, který dané funkci přiřazuje číslo.

Určitý integrál má využití ve velkém množství aplikací. Pomocí určitého integrálu můžeme počítat obsahy ploch, délky křivek, objemy a pláště rotačních těles, statické momenty rovinných obrazců, křivek a rotačních těles, souřadnice těžiště. Velké množství aplikací naleznete ve fyzice (výpočet rychlosti, dráhy, práce, ...). Další aplikace naleznete v ekonomice, financích, pravděpodobnosti a statistice a v mnoha dalších oborech.

Existuje několik přístupů, jak vybudovat pojem určitý integrál a tomu odpovídá několik druhů určitých integrálů (Newtonův, Riemannův, Lebesgueův). Podle způsobu zavedení se mění třída integrovatelných funkcí. Dnes bývá obvyklé používat definici, jak ji zavedl významný německý matematik B. Riemann (1826 – 1866). Potřeba vybudování tohoto pojmu vychází z potřeb řešení geometrických problémů a problémů klasické mechaniky. Množina funkcí, které jsou integrovatelné v Riemannově smyslu je dostatečně široká pro inženýrskou praxi. Způsob zavedení je východiskem pro numerické výpočty určitých integrálů.

2.1. Pojem Riemannova určitého integrálu

Cíle

Seznámíte se s pojmem Riemannova integrálu funkce jedné proměnné a geometrickým významem tohoto integrálu.

Předpokládané znalosti

Předpokládáme, že znáte pojem primitivní funkce, neurčitý integrál a jejich výpočet.

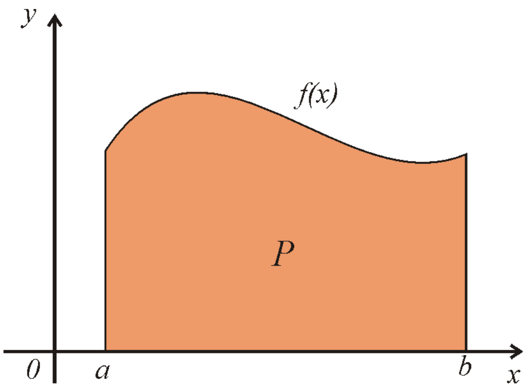
Výklad

Historickou motivací pro vznik určitého integrálu byl výpočet obsahů ploch. Tento problém řešili již staří Egypťané v souvislosti s určováním velikostí pozemků, jejichž velikost se měnila v důsledku záplav Nilu. Problém řešili tak, že danou plochu rozdělili na trojúhelníky, spočítali jejich obsahy a ty pak sečetli. Tyto metody později rozvinuli staří Řekové. V 16. a 17. století byla velká pozornost věnována studiu křivek, byla rozvíjena klasická mechanika. Vzniká otázka, jakým způsobem je vhodné definovat obsah obecných útvarů, které se nedají rozložit na konečný počet trojúhelníků.

Motivace

Zabývejme se následující úlohou:

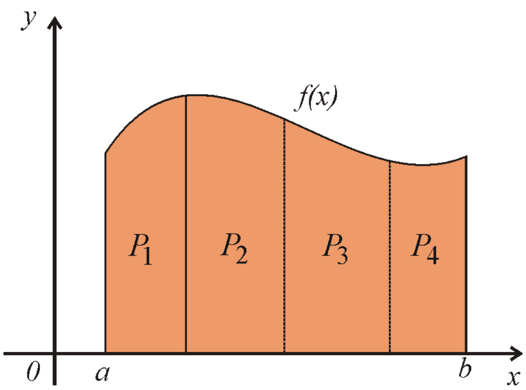
Mějme funkci $f(x)$, která je spojitá a nezáporná na intervalu $< a,b >$. Geometrický útvar ohraničený shora grafem funkce $f(x)$, přímkami $x = a$, $x = b$ a osou x (obr. 2.1.1) nazveme „křivočarý lichoběžník“. Naším úkolem je vypočítat obsah tohoto útvaru.



Obr. 2.1.1. Křivočarý lichoběžník

Ze střední školy znáte vztahy pro výpočet obsahu trojúhelníka, obdélníka, kruhu a možná několika dalších jednoduchých obrazců. Pro obecnou funkci $y = f(x)$ však zatím obsah obrazce na obr. 2.1.1 vypočítat nedovedeme. Navrhněme, jak vypočítat obsah tohoto útvaru alespoň přibližně:

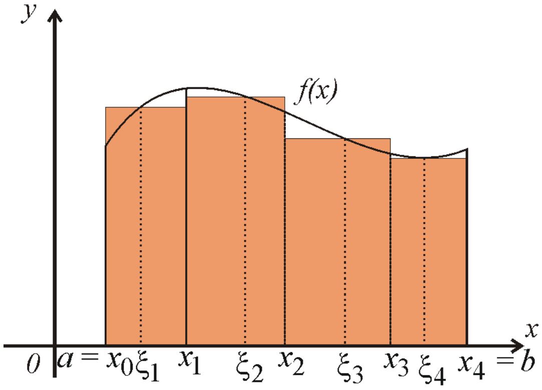
1. Rozdělíme obrazec rovnoběžkami s osou y na „proužky“ (na ilustračním obrázku 2.1.2 jsou čtyři). Je zřejmé, že obsah obrazce dostaneme jako součet obsahů jednotlivých proužků. V uvedeném případě $P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$.



Obr. 2.1.2. Rozdělení na „proužky"

2. Vypočteme obsah jednotlivých „proužků“. Jelikož shora jsou ohraničeny funkcí $f(x)$, provedeme výpočet přibližně. Funkci v daném pásku nahradíme funkční hodnotou $f(\xi)$ v nějakém bodě ξ, který jsme zvolili v základně tohoto „proužku“. Daný proužek tedy

aproximujeme obdélníčkem. Tím se dopouštíme určité chyby, neboť někde obdélníček přesahuje funkci $f(x)$ a někde je zase nižší.



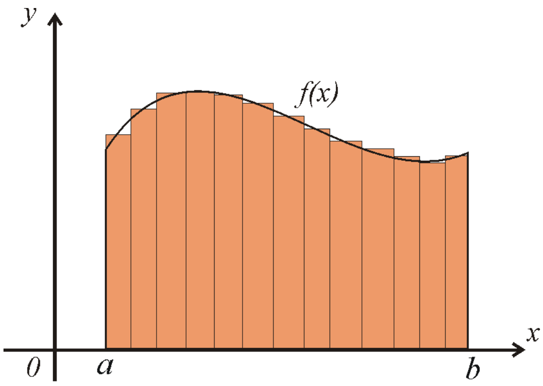
Obr. 2.1.3. Aproximace obrazce obdélníčky

Obsah obrazce na obr. 2.1.2 bude přibližně roven součtu obsahů jednotlivých obdélníčků:

$$P \doteq (x_1 - x_0)\, f(\xi_1) + (x_2 - x_1)\, f(\xi_2) + (x_3 - x_2)\, f(\xi_3) + (x_4 - x_3)\, f(\xi_4) =$$

$$= \sum_{i=1}^{4} (x_i - x_{i-1})\, f(\xi_i)$$

3. Dá se předpokládat, že pro „rozumné“ funkce bude chyba tím menší, čím větší bude počet proužků, na které byl obrazec rozdělen (obr. 2.1.4).



Obr. 2.1.4. Zvětšení počtu obdélníčků

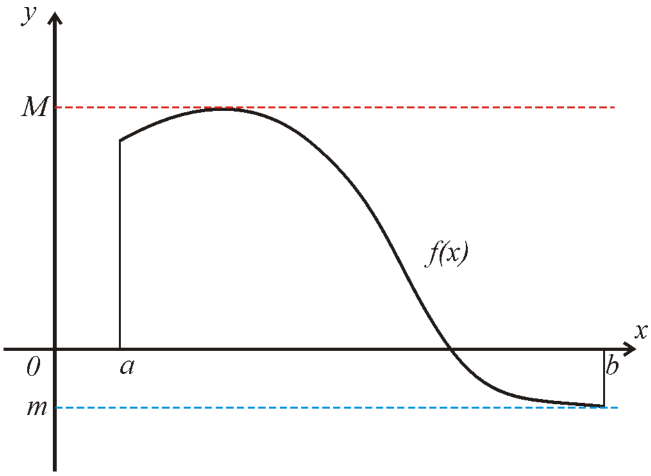
Budeme-li počet „proužků“ neomezeně zvětšovat a současně je zužovat, měla by se přibližná hodnota daná součtem obdélníčků stále více přibližovat obsahu P daného obrazce. Tedy obsah P dostaneme jako limitu pro nekonečný počet obdélníčků.

K podobnému problému dospějeme při řešení jednoduché úlohy z klasické mechaniky. Chceme vypočítat práci, která se vykoná při přímočarém pohybu, má-li síla směr dráhy. Nechť na hmotný bod pohybující se po dráze $< a, b >$ působí síla $f(x)$. Je-li tato síla konstantní, je vykonaná práce rovna součinu síly a dráhy. Pokud se velikost síly mění (dána funkcí $f(x)$ na intervalu $< a, b >$) můžeme postupovat tak, že dráhu rozdělíme na dílčí intervaly a v každém použijeme hodnotu síly $f(\xi_i)$ v nějakém bodě dílčího intervalu. Tedy stejně jako v předcházející úloze je celková vykonaná práce aproximována součtem práce na dílčích intervalech. Limitním přechodem, kdy zvyšujeme počet dělících bodů, přičemž se šířka dílčích intervalů blíží k nule, dostaneme celkovou práci.

Analogický postup použijeme při zavedení určitého integrálu.

Definice určitého integrálu

Definice určitého integrálu je poměrně složitá. K pojmu určitý integrál dospějeme následujícím způsobem. Uvažujme funkci $y = f(x)$, která je definována na **uzavřeném intervalu** $< a,b >$ a je na tomto intervalu **spojitá a ohraničená**. Musejí tedy existovat konstanty m a M takové, že pro všechna $x \in < a,b >$ platí $m \leq f(x) \leq M$.



Obr. 2.1.5. Ohraničená funkce na uzavřeném intervalu $< a,b >$

Výklad omezíme na funkce po částech spojité na intervalu $< a,b >$, tj. na funkce, které mají na tomto intervalu konečný počet bodů nespojitosti (body nespojitosti 1. druhu). S takto definovaným určitým integrálem vystačíme při běžných aplikacích integrálního počtu v přírodních a technických vědách.

Poznámka

1. Předpoklad ohraničené funkce na uzavřeném intervalu je podstatný. Někdy lze pojem Riemannova integrálu rozšířit i na případy, kdy funkce není ohraničená nebo interval není uzavřený. Pak mluvíme o nevlastních integrálech (kap. 2.5).

Definice 2.1.1.

Říkáme, že funkce $f(x)$ je na intervalu $< a,b >$ integrovatelná (schopná integrace), je-li na něm ohraničená a aspoň po částech spojitá.

Postup při zavedení pojmu určitý integrál:

1. Interval $< a,b >$ rozdělíme na n dílčích intervalů. Množinu dělících bodů $D_n = \{x_0, x_1, \ \dots \ , x_n\}$, kde $a = x_0 < x_1 < \ \dots \ x_{n-1} < x_n = b$, nazveme **dělením intervalu** $< a,b >$ na n intervalů $< x_{i-1}, x_i >, \ i = 1, 2, \ \dots \ , n$.

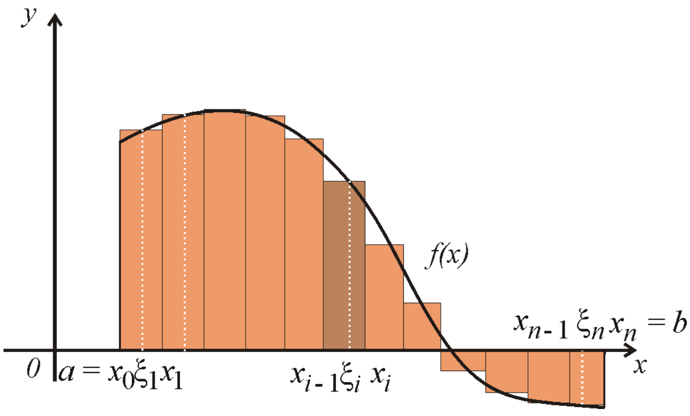
   Číslo $\nu(D_n) = \max\limits_{i=1,\dots,n} (x_i - x_{i-1})$ budeme nazývat **normou dělení** D_n. Toto číslo nám říká, jaká je délka největšího intervalu v daném dělení. Samozřejmě intervalů s touto maximální délkou může být více, případně mohou být intervaly stejně dlouhé (ekvidistantní body). Norma dělení charakterizuje, jak je dělení jemné.

2. V každém dílčím intervalu dělení D_n vybereme jeden bod $\xi_i \in < x_{i-1}, x_i >, \ i = 1, 2, \ \dots \ , n$. Množinu těchto bodů $R_n = \{\xi_1, \xi_2, \ \dots \ , \xi_n\}$ budeme nazývat **výběrem reprezentantů** příslušných k dělení D_n.

3. Pro dané dělení D_n intervalu $< a,b >$ a výběr reprezentantů R_n vytvoříme součet

   $\sigma(f, D_n, R_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$. Tato suma se nazývá **integrálním součtem funkce *f*** nebo také **Riemannův součet** (Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826 – 1866). Geometrický význam tohoto součtu je znázorněn na obr. 2.1.6. Jedná se vlastně o součet obsahů obdélníků se základnami $(x_i - x_{i-1})$ a výškami $f(\xi_i)$, kde $i = 1, 2, \ \dots \ , n$. Je zřejmé, že pro $f(\xi_i) < 0$ bude hodnota pro daný obdélník záporná. Označení $\sigma(f, D_n, R_n)$ znamená, že integrální součet závisí na funkci *f*, na konkrétním dělení D_n a na výběru reprezentantů R_n.

4. Budeme vytvářet integrální součty pro stále jemnější dělení D_n intervalu $< a,b >$ při libovolných výběrech reprezentantů R_n. Pokud bude existovat limita integrálních součtů $\sigma(f, D_n, R_n)$ pro $n \to \infty$ a normu dělení $\nu(D_n) \to 0$ nezávisle na výběrech reprezentantů, nazveme ji určitý integrál funkce $f(x)$ na intervalu $< a,b >$.



Obr. 2.1.6. Integrální součet funkce *f*

Definice 2.1.2.

Nechť je funkce $f(x)$ integrovatelná na intervalu $< a,b >$, D_n je dělení intervalu $< a,b >$ a R_n výběr reprezentantů. Řekneme, že funkce f je **Riemannovsky integrovatelná** na intervalu $< a,b >$, jestliže existuje číslo $I \in \mathbf{R}$ s vlastností

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(f, D_n, R_n) = I$$

pro libovolnou posloupnost dělení D_n, pro kterou platí $\lim\limits_{n\to\infty} \nu(D_n) = 0$ při libovolné volbě reprezentantů R_n. Číslo *I* nazýváme **určitý (Riemannův) integrál** funkce f na intervalu $< a,b >$ a píšeme $I = \int\limits_a^b f(x)dx$.

Číslo *a* nazýváme **dolní mez**, číslo *b* **horní mez**, interval $< a,b >$ **integrační obor** a funkci f **integrand**.

Geometrický význam určitého integrálu

Je-li $f(x) \geq 0$ na intervalu $< a,b >$, pak $\int\limits_a^b f(x)dx$ představuje obsah „křivočarého lichoběžníka“ ohraničeného shora grafem funkce $f(x)$, přímkami $x = a$, $x = b$ a osou x (obr. 2.1.1).

Poznámky

1. Zápis neurčitého integrálu $\int f(x)dx$ *a určitého integrálu* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *je formálně velmi* *podobný. U určitého integrálu jsou pouze navíc integrační meze. To má za následek, že je studenti považují prakticky za stejné. Určitý a neurčitý integrál se však zásadně liší!*

Výsledkem ***neurčitého integrálu*** *je* ***funkce*** *(množina funkcí),*

výsledkem ***určitého integrálu*** *je* ***číslo****. Přestože se jedná o zcela odlišné pojmy, existuje mezi nimi důležitá souvislost, jak uvidíme dále (věta 2.2.1).*

2. Z konstrukce určitého integrálu je zřejmé, že výsledek nezávisí na tom, jak označíme integrační proměnnou. Tedy $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$.

3. Symbol integrálu $\int$ *vznikl protažením písmene S, které označovalo sumu. Z definice určitého integrálu vidíme, o jakou sumu (integrální součet) se jedná.*

4. Postup uvedený v předcházející části jsme mohli realizovat nejlépe s použitím počítače. Daný interval $< a,b >$ *bychom rozdělili ekvidistantními body na dostatečný počet dílčích intervalů (třeba milion), jako reprezentanty bychom zvolili levé nebo pravé hranice těchto dílčích intervalů. Snadno naprogramujeme výpočet integrálního součtu. Pokud určitý integrál existuje, bude tento integrální součet jistou aproximací určitého integrálu. Uvedený postup je základem obdélníkové metody numerického výpočtu určitých integrálů. Těmito postupy a odhadem chyby se zabývá numerická matematika.*

2.2. Výpočet a vlastnosti určitého integrálu

Cíle

Základní věta integrálního počtu (Newton – Leibnizova) nám umožní výpočet určitých integrálů. Poznáte základní vlastnosti určitých integrálů.

Předpokládané znalosti

Předpokládáme, že znáte zavedení a význam určitého integrálu, pojem primitivní funkce, neurčitý integrál a jeho výpočet.

Výpočet určitého integrálu

Výklad

V předcházející kapitole jsme uvedli definici určitého integrálu. Kromě konstantní funkce (určitý integrál je vlastně obsah obdélníka) jsme dosud nebyli schopni žádný integrál spočítat. Následující věta je pojmenována podle dvou matematiků, kteří se zasloužili o vybudování základů integrálního počtu funkce jedné proměnné – Newtona a Leibnize (Isaac Newton 1643-1727, Gottfried Wilhelm Leibniz 1646-1716).

Věta 2.2.1. (Newtonova – Leibnizova formule)

Nechť funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu $< a,b >$ a $F(x)$ je primitivní funkce k funkci $f(x)$ v intervalu $< a,b >$, pak

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Důkaz:

Ukážeme, že rozdíl $F(b) - F(a)$ je pro libovolné dělení D_n intervalu $< a,b >$ roven integrálnímu součtu $\sigma(f, D_n, R_n)$.

Zvolme libovolné dělení $D_n = \{x_0, x_1, \ \dots \ , x_n\}$, kde $a = x_0 < x_1 < \ \dots \ < x_{n-1} < x_n = b$, intervalu $< a,b >$. Jelikož $F(x)$ je primitivní funkce k funkci $f(x)$ v intervalu $< a,b >$, splňuje v každém subintervalu $< x_{i-1}, x_i >$, $i = 1, 2, \ \dots \ , n$ předpoklady Lagrangeovy věty (věta 3.2.5, Matematika I, část II). To znamená, že existují čísla $\xi_i \in < x_{i-1}, x_i >$ taková, že platí $F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$. Protože $F'(\xi_i) = f(x_i)$, dostáváme $F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$.

Sečtením přes všechna i dostaneme

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = F(x_1) - F(x_0) + F(x_2) - F(x_1) + \ \dots \ + F(x_n) - F(x_{n-1}) =$$

$$= F(x_n) - F(x_0) = F(b) - F(a)\,.$$

Obdrželi jsme, že pro libovolné dělení D_n je integrální součet

$$\sigma(f, D_n, R_n) = F(b) - F(a)\,.$$

Podle předpokladu je funkce $f(x)$ integrovatelná, což znamená, že pro zjemňující se dělení s normou dělení $\nu(D_n) \to 0$ bude integrální součet konvergovat k jisté konstantě I (hodnotě integrálu $\int_a^b f(x)dx$). Hodnota integrálního součtu je vždy rovna $F(b) - F(a)$. Tedy

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(f, D_n, R_n) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)\,.$$

Poznámky

1. Pro rozdíl $F(b) - F(a)$ *se vžil zápis* $[F(x)]_a^b$, *takže Newtonovu – Leibnizovu formuli obvykle zapisujeme ve tvaru* $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

2. Z věty 1.1.1 víme, že k dané funkci existuje nekonečně mnoho primitivních funkcí, které se liší konstantou. Je otázkou, jaký výsledek dostaneme pro jinou primitivní funkci $G(x) = F(x) + C$. *Snadno zjistíme, že* $G(b) - G(a) = [F(b) + C] - [F(a) + C] = F(b) - F(a)$. *Tedy hodnota integrálu nezávisí na integrační konstantě C. Proto v dalších příkladech integrační konstantu nebudeme používat.*

3. Newtonova – Leibnizova formule může být použita pro definování určitého integrálu a historicky byl určitý integrál nejprve definován tímto způsobem. Tento integrál je nazýván ***Newtonův určitý integrál*** *funkce* $f(x)$. *U funkcí spojitých na integračním intervalu jsou si oba integrály (tj. Newtonův a Riemannův) rovny. Obecně tak tomu není.*

4. Newtonovu - Leibnizovu formuli lze zobecnit i na ohraničené, po částech spojité funkce. Výpočet však vyžaduje určité opatrnosti, abychom vhodnou volbou integrační konstanty dostali funkci $F(x)$ *spojitou na* $< a, b >$.

Řešené úlohy

Příklad 2.2.1. Vypočtěte integrál $\int_1^2 x^3 dx$.

Řešení:

Funkce $f(x) = x^3$ je spojitá pro každé $x \in \boldsymbol{R}$ a primitivní funkci k ní nalezneme pomocí vzorce v tab. 1.2.1. S využitím Newtonovy – Leibnizovy formule dostaneme

$$\int_1^2 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}.$$

Příklad 2.2.2. Vypočtěte integrál $\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1} dx$.

Řešení:

Funkce $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ je spojitá pro každé $x \in \boldsymbol{R}$.

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx = \int_0^1 1 - \frac{1}{x^2+1} dx = [x - \operatorname{arctg} x]_0^1 =$$

$$= (1 - \operatorname{arctg} 1) - (0 - \operatorname{arctg} 0) = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

Příklad 2.2.3. Vypočtěte integrál $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx$.

Řešení:

Funkce $f(x) = \sin 2x$ je spojitá pro každé x, pro nalezení primitivní funkce použijeme vztah [16] v tabulce základních integrálů (tab. 1.2.1).

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx = \left[-\frac{\cos 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\cos\frac{2\pi}{2}}{2} + \frac{\cos 0}{2} = -\left(\frac{-1}{2}\right) + \frac{1}{2} = 1.$$

Příklad 2.2.4. Vypočtěte integrál $\int_0^1 \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx$.

Řešení:

Funkce $f(x)=\frac{e^{3x}+1}{e^x+1}$ je spojitá pro každé $x\in\boldsymbol{R}$. Primitivní funkci jsme již hledali v příkladu 1.2.5.

$$\int_0^1 \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx=\int_0^1 \frac{(e^x+1)(e^{2x}-e^x+1)}{e^x+1}dx=\int_0^1 (e^{2x}-e^x+1)dx=\left[\frac{1}{2}e^{2x}-e^x+x\right]_0^1=$$

$$=\left(\frac{1}{2}e^2-e+1\right)-\left(\frac{1}{2}e^0-e^0+0\right)=\frac{1}{2}e^2-e+1-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}e^2-e+\frac{3}{2}.$$

(Při úpravě čitatele zlomku jsme použili vztah $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$).

Příklad 2.2.5. Vypočtěte integrál $\int_{-1}^1 \frac{1}{x}dx$. **(Výstražný)**

Řešení:

Pokud budeme postupovat zcela mechanicky, dostaneme:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x}dx=\left[\ln|x|\right]_{-1}^1=\ln 1-\ln 1=0.$$

Avšak funkce $f(x)=\frac{1}{x}$ není na intervalu $<-1,1>$ spojitá (alespoň po částech). V bodě $x=0$ má bod nespojitosti 2. druhu, není tedy v okolí počátku ohraničená. Vzhledem k tomu nelze použít Newtonovu – Leibnizovu formuli (není na daném intervalu definován Newtonův integrál). Získaný výsledek je nesprávný. Správný výsledek si ukážeme později.

Vlastnosti určitého integrálu

Výklad

V této části uvedeme základní vlastnosti určitého (Riemannova) integrálu, které budeme v dalším běžně používat při praktických výpočtech.

Věta 2.2.2.

Nechť funkce $f(x)$ a $g(x)$ jsou integrovatelné na intervalu $<a,b>$ a c je libovolná konstanta. Pak platí

a) $$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx,$$

b) $$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx.$$

Důkaz:

Z definice Riemannova integrálu pro normální posloupnost dělení dostáváme:

a) $$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n [f(\xi_i) \pm g(\xi_i)](x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \pm \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n g(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

b) $$\int_a^b cf(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n cf(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = c \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = c\int_a^b f(x)dx.$$

Poznámky

1. První vlastnost se nazývá aditivita vzhledem k integrandu, druhá homogenita .

2. Podobné vlastnosti měl i neurčitý integrál (věta 1.2.1). Vlastnost aditivity snadno rozšíříme na libovolný konečný počet sčítanců.

Příklad 2.2.6. Vypočtěte integrál $\int_4^{20} \frac{1}{\sqrt{x+5}-\sqrt{x-4}}\,dx$.

Řešení:

Funkce $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+5}-\sqrt{x-4}}$ je spojitá pro $x\geq 4$, tedy na oboru integrace je spojitá. Integrovanou funkci nejprve rozšíříme součtem odmocnin.

$$\int_4^{20} \frac{1}{\sqrt{x+5}-\sqrt{x-4}}\,dx = \int_4^{20} \frac{1}{\sqrt{x+5}-\sqrt{x-4}}\frac{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-4}}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-4}}\,dx =$$

$$= \int_4^{20} \frac{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-4}}{(x+5)-(x-4)}\,dx = \int_4^{20} \frac{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-4}}{9}\,dx$$

Použijeme větu 2.2.2 a integrál rozdělíme na součet dvou integrálů:

$$\int_4^{20} \frac{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-4}}{9}\,dx = \frac{1}{9}\int_4^{20}\sqrt{x+5}dx + \frac{1}{9}\int_4^{20}\sqrt{x-4}dx = \frac{1}{9}\left[\frac{(x+5)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_4^{20} + \frac{1}{9}\left[\frac{(x-4)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_4^{20} =$$

$$= \frac{2}{27}\left(25^{\frac{3}{2}}-9^{\frac{3}{2}}\right) + \frac{2}{27}\left(16^{\frac{3}{2}}-0^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{2}{27}\left(25\sqrt{25}-9\sqrt{9}\right)+\frac{2}{27}\left(16\sqrt{16}-0\right)=$$

$$= \frac{2}{27}(125-27+64) = \frac{2}{27}162 = 2\cdot 6 = 12.$$

Pro výpočet integrálů byl použit vztah [16] z tabulky základních integrálů (tab. 1.2.1).

Příklad 2.2.7. Vypočtěte integrál $\int_2^{4} \frac{x^3+1}{x^3-x^2}\,dx$.

Řešení:

Jmenovatel integrované racionální funkce se nesmí rovnat nule $x^3-x^2=x^2(x-1)\neq 0$

Funkce $f(x)=\frac{x^3+1}{x^3-x^2}$ má body nespojitosti $x=0$ a $x=1$, tedy na oboru integrace je spojitá. Interand je racionální funkce, musíme nejprve provést rozklad na součet parciálních zlomků (viz kap. 1.5).

1. Polynom v čitateli je stupně $m=3$ a polynom ve jmenovateli racionální funkce má také stupeň $n=3$. Jelikož není $m<n$, je daná funkce neryze lomená racionální funkce a

musíme polynomy vydělit.

$$
\begin{array}{l}
(x^3+1):(x^3-x^2)=1 \\
\underline{-(x^3-x^2)} \\
\qquad x^2+1
\end{array}
$$

Danou racionální funkci proto můžeme podle věty 1.5.4 zapsat ve tvaru

$$\frac{x^3+1}{x^3-x^2}=1+\frac{x^2+1}{x^3-x^2} .$$

2. Polynom ve jmenovateli $Q_3(x)=x^3-x^2$ rozložíme na základní součin podle věty 1.5.3. Dostaneme $Q_3(x)=x^2(x-1)$.

3. Racionální funkci rozložíme na součet parciálních zlomků:

$$\frac{x^2+1}{x^2(x-1)}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{B}{x-1} .$$

4. Nalezneme konstanty rozkladu A_1, A_2, B (viz kap. 1.5). Dostaneme

$$A_1=-1,\ \ A_2=-1,\ \ \mathrm{B}=2 .$$

5. Integrujeme získané parciální zlomky:

$$\int_2^4 \frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx=\int_2^4\left(1+\frac{-1}{x}+\frac{-1}{x^2}+\frac{2}{x-1}\right)dx=\int_2^4 dx-\int_2^4\frac{1}{x}dx-\int_2^4\frac{1}{x^2}dx+2\int_2^4\frac{1}{x-1}dx=$$

$$=\left[x\right]_2^4-\left[\ln|x|\right]_2^4+\left[\frac{1}{x}\right]_2^4+2\left[\ln|x-1|\right]_2^4=(4-2)-(\ln 4-\ln 2)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)+2(\ln 3-\ln 1)=$$

$$=2-\frac{1}{4}-\ln 4+\ln 2+2\ln 3=\frac{7}{4}+\ln\frac{9}{2} .$$

Definice 2.2.1.

Nechť je funkce $f(x)$ integrovatelná na intervalu $<a,b>$. Pak

$$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx .$$

Poznámky

1. Pro spojité funkce (Newtonův integrál) je uvedená vlastnost triviální, neboť

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = -\int_b^a f(x)dx\ .$$

2. Důsledkem této definice, je následující vlastnost pro každou integrovatelnou funkci

$$\int_a^a f(x)dx = 0\,.$$

Věta 2.2.3.

Nechť je funkce $f(x)$ integrovatelná na intervalu $< a,b >$ a c je libovolné reálné číslo $a < c < b$. Pak je $f(x)$ integrovatelná na intervalech $< a,c >$ a $< c,b >$ a platí

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx\,.$$

Poznámky

1. Vlastnost se nazývá aditivita určitého integrálu vzhledem k mezím.

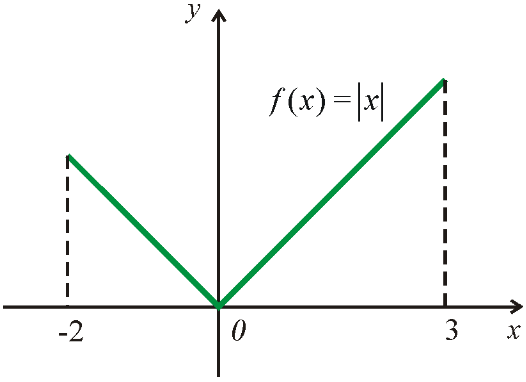
2. Větu lze zobecnit na libovolný konečný počet částečných intervalů a tedy na konečný počet sčítanců.

3. Větu využíváme zejména v případech, kdy integrand nemá na intervalu $< a,b >$ jednotný analytický předpis.

Příklad 2.2.8. Vypočtěte integrál $\int_{-2}^{3} |x|\,dx$.

Řešení:

Z definice absolutní hodnoty platí $|x| = \begin{cases} -x & \text{pro } x \in < -2, 0 >, \\ x & \text{pro } x \in < 0, 3 >, \end{cases}$ viz obr. 2.2.1.



Obr. 2.2.1. Graf funkce $f(x)=|x|,\ x\in<-2,3>$

Funkce je integrovatelná, protože je na daném intervalu spojitá a ohraničená. Podle věty 2.2.3 bude platit

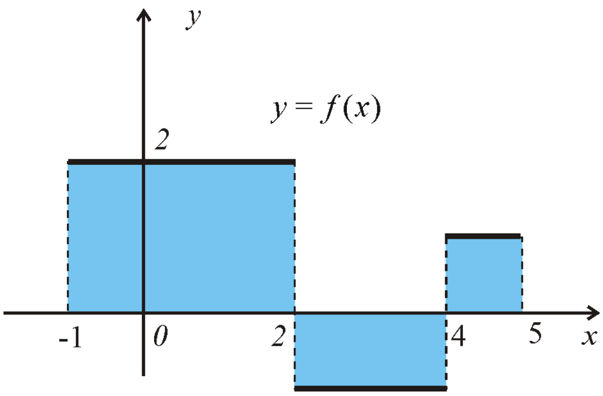
$$\int_{-2}^{3}|x|\,dx=\int_{-2}^{0}|x|\,dx+\int_{0}^{3}|x|\,dx=-\int_{-2}^{0}x\,dx+\int_{0}^{3}x\,dx=-\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{0}+\left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{3}=$$

$$=-(0-2)+\left(\frac{9}{2}-0\right)=\frac{13}{2}.$$

Příklad 2.2.9. Vypočtěte integrál $\int_{-1}^{5}f(x)dx$, kde $f(x)=\begin{cases}2 & \text{pro } x\in<-1,2>,\\ -1 & \text{pro } x\in(2,4),\\ 1 & \text{pro } x\in<4,5>.\end{cases}$.

Řešení:

Daná funkce je ohraničená a má dva body nespojitosti $x=2$ a $x=4$ (obr. 2.2.2).



Obr. 2.2.2. Graf funkce z příkladu 2.2.9

Podle věty 2.2.3 bude platit

$$\int_{-1}^{5}f(x)dx=\int_{-1}^{2}f(x)dx+\int_{2}^{4}f(x)dx+\int_{4}^{5}f(x)dx=\int_{-1}^{2}2dx+\int_{2}^{4}(-1)dx+\int_{4}^{5}1dx.$$

Všimněte si, že jsme u druhého integrálu mlčky změnili hodnoty funkce *f(x)* v krajních bodech na -1. To nemá vliv na hodnotu integrálu. Dostaneme

$$\int_{-1}^{5} f(x)dx = 2[x]_{-1}^{2} - [x]_{2}^{4} + [x]_{4}^{5} = 2(2-(-1)) - (4-2) + (5-4) = 5.$$

Výsledek je dán součtem obsahů dvou obdélníků a čtverce. Plocha druhého obdélníka je však brána záporně!

Věta 2.2.4.

Nechť je funkce $f(x)$ integrovatelná na intervalu $<a,b>$ a pro všechna $x \in <a,b>$ je $f(x) \geq 0$. Pak platí $\int_{a}^{b} f(x)dx \geq 0$.

Důkaz:

Plyne přímo z definice Riemannova integrálu (def. 2.1.2).

Poznámka

Uvedenou vlastnost můžeme často použít k jisté hrubé kontrole výsledku. Je-li integrovaná funkce nezáporná, nemůže vyjít záporná hodnota určitého integrálu.

Věta 2.2.5.

Nechť jsou funkce $f(x)$ a $g(x)$ integrovatelné na intervalu $<a,b>$ a pro všechna $x \in <a,b>$ je $f(x) \leq g(x)$. Pak platí $\int_{a}^{b} f(x)dx \leq \int_{a}^{b} g(x)dx$.

Důkaz:

Podle předpokladu je $g(x) - f(x) \geq 0$ pro všechna $x \in <a,b>$. Podle věty 2.2.4 bude $\int_{a}^{b} (f(x) - g(x))dx \geq 0$. Odtud s použitím věty 2.2.2 dostaneme tvrzení.

Věta 2.2.6. (Věta o střední hodnotě integrálního počtu.)

Nechť je funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $<a,b>$. Pak existuje číslo $\xi \in <a,b>$ takové, že platí

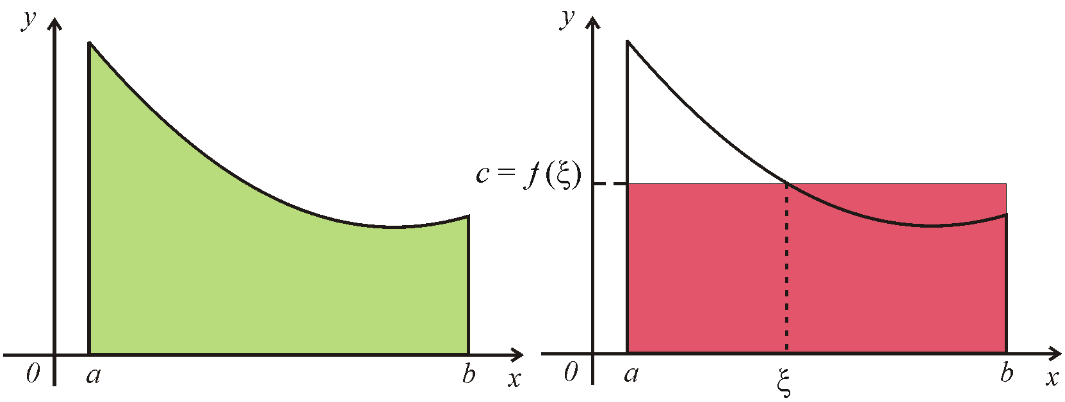
$$\int_{a}^{b} f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

Číslo $c = f(\xi)$ se nazývá **střední hodnota funkce** $f(x)$ na intervalu $<a,b>$.

Důkaz:

Je-li funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $< a,b >$ a $F(x)$ je primitivní funkce k funkci $f(x)$ v intervalu $< a,b >$, tedy $F'(x) = f(x)$. Funkce $F(x)$ je spojitá a splňuje předpoklady Lagrangeovy věty (věta 3.2.5, Matematika 1, část II). To znamená, že existuje číslo $\xi \in < a,b >$ takové, že platí $F(b) - F(a) = F'(\xi)(b-a) = f(\xi)(b-a)$. Odtud a z věty 2.2.1 dostaneme $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$.

Předcházející věta má názorný geometrický význam. Pro jednoduchost předpokládejme, že funkce $f(x)$ je spojitá a nezáporná. Z motivace na začátku kapitoly 2.1 víme, že $\int_a^b f(x)dx$ vyjadřuje obsah obrazce ohraničeného grafem funkce $f(x)$, osou x a přímkami $x = a$, $x = b$. Věta říká, že lze nad intervalem $< a,b >$ sestrojit obdélník se stejným obsahem. Výška je rovna funkční hodnotě ve vhodném bodě $\xi \in < a,b >$, aby $c = f(\xi) = \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx$.



Obr. 2.2.3. Geometrický význam věty o střední hodnotě

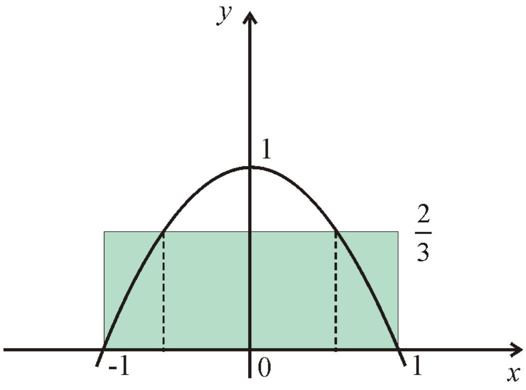
Z obrázku je zřejmé, že bod ξ nemusí být určen jednoznačně (přímka $y = c$ může graf funkce protnout několikrát).

Příklad 2.2.10. Vypočtěte střední hodnotu funkce $f(x) = 1 - x^2$ na intervalu $< -1,1 >$.

Řešení:

$$c = \frac{1}{1-(-1)}\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right) - \left(-1+\frac{1}{3}\right)\right] = \frac{2}{3}.$$

Obsah obrazce pod parabolou lze vyjádřit jako obsah obdélníka s jednou stranou $<-1,1>$ délky 2 a velikost druhé strany bude $\frac{2}{3}$ (obr. 2.2.4).



Obr. 2.2.4. Střední hodnota funkce $f(x)=1-x^2$ na intervalu $<-1,1>$

Určeme ještě, ve kterém bodě $\xi \in <-1,1>$ je střední hodnota rovna funkční hodnotě funkce $f(x)=1-x^2$. Řešíme rovnici

$\frac{2}{3}=1-x^2$ a dostaneme $\xi=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ (dva body s touto vlastností).

Příklad 2.2.11. Rychlost určitého objektu $v(t)$ v metrech za sekundu se v průběhu prvních 20 sekund pohybu měnila. Od začátku pohybu ($t=0$) byl 4 sekundy pohyb rovnoměrně zrychlený $v(t)=0,5t$, od 4. do 10. sekundy se pohyboval konstantní rychlostí $v(t)=2$, posledních 10 sekund byla rychlost $v(t)=0,8t-6$ m/s. Určete střední hodnotu rychlosti objektu (průměrnou rychlost) za 20 sekund. Ve kterém časovém okamžiku jel touto rychlostí?

Řešení:

$$c=\frac{1}{20}\int_0^{20} v(t)dt=\frac{1}{20}\left[\int_0^4 0,5t dt+\int_4^{10} 2dt+\int_{10}^{20}(0,8t-6)dt\right]=$$

$$=\frac{1}{20}\left[\left[\frac{0,5t^2}{2}\right]_0^4+\left[2t\right]_4^{10}+\left[\frac{0,8t^2}{2}-6t\right]_{10}^{20}\right]=\frac{1}{20}\left[4+12+60\right]=\frac{76}{20}=3,8 \text{ m/s}.$$

Jelikož je funkce $v(t)$ spojitá na intervalu $<0,20>$, určitě existuje alespoň jeden časový okamžik, kdy se objekt pohyboval právě touto rychlostí. Z konstrukce grafu funkce je zřejmé, že tento okamžik nastal mezi 10. a 20. sekundou (průměrná rychlost je větší než 2) a na jeho určení je nutno řešit rovnici $3{,}8 = 0{,}8t - 6$. Dostaneme $\xi = 12{,}25$ sekund.

Kontrolní otázky

1. Které funkce jsou Riemannovsky integrovatelné?.
2. Formulujte větu, pomocí které se provádí výpočet určitého integrálu.
3. Vysvětlete rozdíl mezi definicí Newtonova a Riemannova integrálu.
4. Uveďte vlastnost určitého integrálu.
5. Jak vypočtete integrál $\int_{-7}^{5} |x+1|\, dx$?
6. Jak vypočtěte integrál $\int_{0}^{\pi} |\cos x|\, dx$?
7. Ukažte, že platí vztah $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\, dx = 0$, kde $n \in \boldsymbol{N}$.
8. Jaká je střední hodnota funkce $f(x) = \sin x$ na intervalu $< 0, \pi >$?

Úlohy k samostatnému řešení

1. a) $\int_{1}^{3} x^2 dx$ b) $\int_{-1}^{3} \left(x^2 + 6x - 2\right) dx$ c) $\int_{-3}^{2} \left(3x^3 - x^2 + 1\right) dx$

d) $\int_{2}^{6} \frac{1}{x} dx$ e) $\int_{0}^{2} \frac{1}{x+1} dx$ f) $\int_{1}^{27} \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} dx$

2. a) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos^2 x}{\sin^2 x} dx$ b) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos 2x\, dx$ c) $\int_{0}^{\pi} \cos^2 2x\, dx$

d) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x\, dx$ e) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^2\, x\, dx$ f) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$

3. a) $\int\limits_0^6 e^{3x}dx$ b) $\int\limits_0^1 \left(5^x-3^x\right)^2 dx$ c) $\int\limits_0^2 \sqrt{e^{5x}}dx$

d) $\int\limits_0^1\int \frac{e^x}{e^x+3}dx$ e) $\int\limits_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}dx$ f) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\arcsin x\sqrt{1-x^2}}$

4. a) $\int\limits_1^9 \frac{3x+2}{x}dx$ b) $\int\limits_{-1}^1 \frac{x^5}{x+2}dx$ c) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{x^2+4x+5}$

d) $\int\limits_5^7 \frac{3x+5}{x^2-3x-4}dx$ e) $\int\limits_2^3 \frac{dx}{x^2-4x+7}$ f) $\int\limits_2^3 \frac{dx}{x^2(x-1)}$

5. a) $\int\limits_{-1}^2 |x|\,dx$ b) $\int\limits_1^4 \left|x^3-8\right|dx$ c) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x|\,dx$

d) $\int\limits_{-1}^2 2^{|x|}dx$ e) $\int\limits_2^4 \left|x^2-4x+3\right|dx$ f) $\int\limits_{-1}^2 \left(|x|-3|x-1|\right)dx$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) $\frac{26}{3}$; **b)** $\frac{76}{3}$; **c)** $-\frac{665}{12}$; **d)** $\ln 3$; **e)** $\ln 3$; **f)** 2. **2. a)** $2-\frac{\pi}{4}$; **b)** 0; **c)** $\frac{\pi}{2}$; **d)** $\frac{1}{2}$; **e)** $1-\frac{\pi}{4}$; **f)** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **3. a)** $\frac{1}{3}\left(e^{18}-1\right)$; **b)** $\frac{12}{\ln 5}-\frac{28}{\ln 15}+\frac{4}{\ln 3}$; **c)** $\frac{2}{5}\left(e^5-1\right)$; **d)** $\ln\left(\frac{e+3}{4}\right)$; **e)** $\ln 2$; **f)** $\ln 3$. **4. a)** $24+4\ln 3$; **b)** $\frac{35}{15}-32\ln 3$; **c)** $\operatorname{arctg} 4-\operatorname{arctg} 2$; **d)** $\frac{17}{5}\ln 3-\frac{6}{5}\ln 2+\frac{2}{5}\ln 6$; **e)** $\frac{\sqrt{3}}{18}\pi$; **f)** $\ln\frac{4}{3}-\frac{1}{6}$. **5. a)** $\frac{5}{2}$; **b)** $\frac{193}{4}$; **c)** 2; **d)** $\frac{4}{\ln 2}$; **e)** 2; **f)** -5.

Kontrolní test

1. Vypočtěte integrál $\int\limits_1^8 \frac{2-x}{\sqrt[3]{x^5}}dx.$

   a) $2\sqrt[3]{2}$, b) $-\frac{3}{4}$, c) $\frac{3}{4}$, d) $-\frac{3}{8}$.

2. Vypočtěte integrál $\int\limits_0^{\ln 2} (e^x - e^{-x})dx.$

a) $\frac{1}{2}$, b) $\frac{5}{2}$, c) $\frac{3}{2}$, d) $-\frac{1}{2}$.

3. Vypočtěte integrál $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx.$

a) $2+\frac{4}{3}\sqrt{3}$, b) $2-\frac{4}{3}\sqrt{3}$, c) 0, d) $-\frac{4}{3}\sqrt{3}$.

4. Vypočtěte integrál $\int\limits_0^{2\pi} (2+\cos\varphi)d\varphi.$

a) 8π, b) 4π, c) 10π, d) 9π.

5. Čemu se rovná integrál $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^3}{x^2-3x+2} dx$?

a) $\frac{1}{8}+8\ln\frac{3}{2}-\ln\frac{1}{2}$, b) $\frac{13}{8}+8\ln\frac{3}{2}-8\ln 2$,

c) $\frac{13}{8}+8\ln 3-15\ln 2$, d) $\frac{1}{8}-8\ln 3+15\ln 2$.

6. Čemu se rovná integrál $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x+x^3}$?

a) $\frac{1}{2}\ln\frac{8}{5}$, b) $\ln 8-\ln 5$, c) $\ln 2-\frac{1}{2}\ln 5$, d) $\frac{1}{2}\ln\frac{2}{5}$.

7. Vypočtěte integrál $\int\limits_{-1}^{3} |4-2x|\, dx.$

a) 6, b) 8, c) 10, d) 4.

8. Vypočtěte integrál $\int\limits_0^5 f(x)dx$, kde $f(x)=\begin{cases} 2x & \text{pro } 0\le x\le 2, \\ 4x-x^2 & \text{pro } 2\le x\le 3, \\ 3 & \text{pro } 3\le x\le 5. \end{cases}$

a) $\frac{25}{3}$, b) 14, c) $\frac{89}{3}$, d) $\frac{41}{3}$.

9. Vypočtěte střední hodnotu funkce $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ na intervalu $<1,4>$.

a) $\dfrac{20}{3}$, b) $\dfrac{20}{9}$, c) $\dfrac{24}{9}$, d) $\dfrac{32}{9}$.

10. Vypočtěte střední hodnotu funkce $f(x)=\dfrac{1}{x^2+x}$ na intervalu $<1;1{,}5>$.

a) $\ln\dfrac{6}{5}$, b) $2\ln\dfrac{5}{6}$, c) $2\ln 3+\ln 2$, d) $2\ln\dfrac{6}{5}$.

Výsledky testu

1. b); 2. a); 3. b); 4. d); 5. c); 6. a); 7. c); 8. d); 9. b); 10. d).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v 8 případech, pokračujte další kapitolou.

V opačném případě je třeba prostudovat kapitoly 2.1 a 2.2 znovu.

Shrnutí lekce

Hlavním záměrem kapitol 2.1 a 2.2 bylo zavést pojem určitého Riemannova integrálu a uvést základní vlastnosti tohoto integrálu, které jsou využívány při praktickém výpočtu. Riemannův integrál je pro spojité funkce totožný s integrálem Newtonovým. Zjednodušeně řečeno - Riemannův integrál můžeme vždy v konkrétních výpočtech počítat jako integrál Newtonův, tedy prostřednictvím primitivních funkcí. A s těmi již v tuto chvíli máme dostatek zkušeností.

Definovat Riemannův určitý integrál je bezesporu mnohem obtížnější, než zavést pojem určitého integrálu Newtonova. Proč se tedy Riemannovým integrálem v tomto úvodním kurzu zabýváme? Především pro jeho názornou geometrickou interpretaci. Pro spojitou nezápornou funkci odpovídá totiž její Riemannův integrál na zadaném uzavřeném intervalu plošnému obsahu oblasti vymezené zadaným intervalem a grafem integrované funkce. O dalších užitečných aplikacích Riemannova integrálu se můžete dočíst v kapitole 3.

2.3. Metoda per partes pro určité integrály

Cíle

Seznámíte se s použitím metody per partes při výpočtu určitých integrálů. Základní typy integrálů, které lze touto metodou vypočítat jsou stejné, jako při výpočtu neurčitých integrálů v kap. 1.3.

Předpokládané znalosti

Předpokládáme, že znáte princip metody per partes a víte, pro které typy integrálů je tato metoda vhodná. Předpokládá se znalost pojmu určitý integrál a dovednost počítat určité integrály pomocí Newtonovy – Leibnizovy formule.

Výklad

Při výpočtu složitějších integrálů používáme i u určitých integrálů metodu per partes a substituční metodu.

Při výpočtu určitých integrálů ze složitějších funkcí můžeme postupovat v zásadě dvěma způsoby:

- Oddělíme fázi nalezení primitivní funkce od fáze výpočtu určitého integrálu. Nejprve si nevšímáme mezí a počítáme pouze neurčitý integrál. Po vypočítání vybereme jednu z nalezených primitivních funkcí (obvykle volíme integrační konstantu $C = 0$) a podle Newtonovy – Leibnizovy formule dosadíme horní a dolní mez.
- Neoddělujeme fázi výpočtu primitivní funkce od výpočtu určitého integrálu. U metody per partes průběžně dosazujeme meze do již vypočtené části primitivní funkce, u substituční metody změníme integrační meze, jak uvidíme v další kapitole.

V dalším se zaměříme na druhou možnost výpočtu.

Věta 2.3.1.

Mají-li funkce $u(x)$ a $v(x)$ v intervalu $< a,b >$ spojité derivace $u'(x)$ a $v'(x)$, pak platí

$$\int_a^b u'(x)\cdot v(x)\, dx = \left[u(x)\cdot v(x)\right]_a^b - \int_a^b u(x)\cdot v'(x)dx .$$

Důkaz:

Ze spojitosti derivací $u'(x)$ a $v'(x)$ plyne, že jsou spojité i funkce $u(x)$ a $v(x)$ v intervalu $< a,b >$. Potom budou spojité a tedy integrovatelné i součiny $u'(x)\cdot v(x)$ a $u(x)\cdot v'(x)$.

Podle věty 2.2.2 bude integrovatelná i funkce $u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$. K ní primitivní funkce je $u(x)\cdot v(x)$, protože $\left[u(x)\cdot v(x)\right]'=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$. Podle Newtonovy – Leibnizovy formule platí $\int_a^b\left[u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)\right]dx=\left[u(x)\cdot v(x)\right]_a^b$. Pomocí věty 2.2.2 dostaneme $\int_a^b u'(x)\cdot v(x)dx+\int_a^b u(x)\cdot v'(x)dx=\left[u(x)\cdot v(x)\right]_a^b$ a po úpravě obdržíme tvrzení věty.

Poznámka

Praktické použití metody per partes je zcela analogické jako v případě neurčitého integrálu (kap. 1.3). Zejména platí návody, pro které funkce je metoda per partes vhodná.

Řešené úlohy

Příklad 2.3.1. Vypočtěte integrál $\int_0^\pi x^2\sin x\,dx$

Řešení:

Předvedeme první způsob výpočtu, kdy nejprve nalezneme primitivní funkci a teprve potom dosadíme meze:

$$\int x^2\sin x\,dx=\begin{vmatrix}u'=\sin x & v=x^2\\ u=-\cos x & v'=2x\end{vmatrix}=-x^2\cos x+\int 2x\cos x\,dx=$$

$$=\begin{vmatrix}u'=\cos x & v=2x\\ u=\sin x & v'=2\end{vmatrix}=-x^2\cos x+2x\sin x-2\int\sin x\,dx=-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C\,.$$

Použijeme jednu z primitivních funkcí pro $C=0$ a dostaneme

$$\int_0^\pi x^2\sin x\,dx=\left[-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x\right]_0^\pi=(-\pi^2(-1)+0+2(-1))-(0+0+2)=$$

$$=\pi^2-4\,.$$

Při druhém způsobu výpočtu použijeme větu 2.3.1:

$$\int_0^\pi x^2\sin x\,dx=\begin{vmatrix}u'=\sin x & v=x^2\\ u=-\cos x & v'=2x\end{vmatrix}=\left[-x^2\cos x\right]_0^\pi+\int_0^\pi 2x\cos x\,dx=$$

$$=\begin{vmatrix} u' = \cos x & v = 2x \\ u = \sin x & v' = 2 \end{vmatrix} = (\pi^2 - 0) + \left[2x \sin x\right]_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi} \sin x \, dx = \pi^2 + (0-0) + 2\left[\cos x\right]_0^{\pi} =$$

$$= \pi^2 + 2(-1-1) = \pi^2 - 4 .$$

Výhoda druhého způsobu spočívá v tom, že meze průběžně dosazujeme do částečně vypočtené primitivní funkce a nemusíme ji neustále opisovat až do konce výpočtu. Výpočet se tím zkrátí a zpřehlední. V dalších příkladech budeme používat tento způsob výpočtu.

Příklad 2.3.2. Vypočtěte integrál $\int_0^2 (x^2 - x)e^x dx$.

Řešení:

$$\int_0^2 (x^2 - x)e^x dx = \begin{vmatrix} u' = e^x & v = x^2 - x \\ u = e^x & v' = 2x-1 \end{vmatrix} = \left[(x^2 - x)e^x\right]_0^2 - \int_0^2 (2x-1)e^x dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u' = e^x & v = 2x-1 \\ u = e^x & v' = 2 \end{vmatrix} = \left[(4-2)e^2 - 0\right] - \left[(2x-1)e^x\right]_0^2 + \int_0^2 2e^x dx =$$

$$= 2e^2 - \left[3e^2 + e^0\right] + 2\left[e^x\right]_0^2 = -e^2 - 1 + 2\left(e^2 - e^0\right) = e^2 - 3 .$$

Příklad 2.3.3. Vypočtěte integrál $\int_1^e \ln x \, dx$.

Řešení:

$$\int_1^e \ln x \, dx = \begin{vmatrix} u' = 1 & v = \ln x \\ u = x & v' = \dfrac{1}{x} \end{vmatrix} = \left[x \ln x\right]_1^e - \int_1^e 1 dx = (e \ln e - \ln 1) - \left[x\right]_1^e =$$

$$= (e - 0) - (e - 1) = 1 .$$

Příklad 2.3.4. Vypočtěte integrál $\int_0^1 x \operatorname{arctg} x \, dx$.

Řešení:

$$\int_0^1 x \operatorname{arctg} x \, dx = \begin{vmatrix} u' = x & v = \operatorname{arctg} x \\ u = \dfrac{x^2}{2} & v' = \dfrac{1}{1+x^2} \end{vmatrix} = \left[\frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx =$$

$$=\left(\frac{1}{2}\frac{\pi}{4}-0\right)-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\left[x-\operatorname{arctg}x\right]_0^1=$$

$$=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.$$

Příklad 2.3.5. Nalezněte rekurentní formuli pro výpočet integrálu

$$S_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^n dx\,,\qquad n=0,1,2,\dots.$$

Řešení:

Pro $n=0$ je $S_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1dx=\frac{\pi}{2}$ a pro $n=1$ je $S_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$.

Pro $n\geq 2$ metodou per partes dostaneme:

$$S_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^n dx=\left|\begin{matrix}u'=\sin x & v=(\sin x)^{n-1}\\ u=-\cos x & v'=(n-1)(\sin x)^{n-2}\cos x\end{matrix}\right|=\left[-\cos x(\sin x)^{n-1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+$$

$$+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(n-1)(\sin x)^{n-2}\cos^2 x\,dx=\left[0-0\right]+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(n-1)(\sin x)^{n-2}(1-\sin^2 x)\,dx=$$

$$=(n-1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{n-2}dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^n dx\right)=(n-1)(S_{n-2}-S_n).$$

Z rovnice $S_n=(n-1)(S_{n-2}-S_n)$ snadno dostaneme

$S_n=\dfrac{n-1}{n}S_{n-2}\qquad(n\geq 2)$. Tato rekurentní formule nám umožní vypočítat uvedený integrál pro libovolnou mocninu $n\geq 2$. Například:

$$S_3=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^3 dx=\frac{3-1}{3}S_1=\frac{2}{3}\cdot 1=\frac{2}{3},$$

$$S_4=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^4 dx=\frac{4-1}{4}S_2=\frac{3}{4}\frac{2-1}{2}S_0=\frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{16}.$$

Kontrolní otázky

1. Proč je integrační metoda nazývána per partes?
2. Jak se liší výpočet určitého integrálu metodou per partes od použití této metody v neurčitém integrálu.
3. Jak by se podle věty 2.3.1 vypočítal integrál typu $\int_a^b u(x)\cdot v'(x)dx$?
4. Jak volit funkce $u'(x)$ a $v(x)$ při výpočtu integrálu $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^3 \sin x\, dx$?
5. Jak volit funkce $u'(x)$ a $v(x)$ při výpočtu integrálu $\int_1^e x^3 \ln x\, dx$?
6. Jak volit funkce $u'(x)$ a $v(x)$ při výpočtu integrálu $\int_e^{2e} \ln^2 x\, dx$?
7. Jak volit funkce $u'(x)$ a $v(x)$ při výpočtu integrálu $\int_0^{\pi} e^{2x} \sin x\, dx$?
8. Vypočtěte integrál $\int_0^1 xe^{-x}\, dx$.
9. Vypočtěte integrál $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\pi} (x-1)\sin x\, dx$.
10. Odvoďte rekurentní formuli pro výpočet integrálu $L_n = \int_{\frac{1}{e}}^{1} (\ln x)^n\, dx$.

Úlohy k samostatnému řešení

1. a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x\, dx$ b) $\int_0^{\ln 2} xe^{-x} dx$ c) $\int_0^{\pi} x^2 \sin x\, dx$

d) $\int_0^1 xe^{3x} dx$ e) $\int_0^{\pi} x^2 \cos x\, dx$ f) $\int_0^1 \left(x^2+2x\right)e^{\frac{x}{3}}\, dx$

2. a) $\displaystyle\int_1^e x^3 \ln x\,dx$ b) $\displaystyle\int_1^2 (3x+2)\ln x\,dx$ c) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x\,dx$

d) $\displaystyle\int_0^1 4x^3 \operatorname{arctg} x\,dx$ e) $\displaystyle\int_1^{e^2} \sqrt{x}\ln x\,dx$ f) $\displaystyle\int_1^e x\ln^2 x\,dx$

3. a) $\displaystyle\int_1^{e^3} \ln x\,dx$ b) $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx$ c) $\displaystyle\int_1^e \ln^2 x\,dx$

d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arccos x\,dx$ e) $\displaystyle\int_{-1}^1 \ln(x+2)\,dx$ f) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \operatorname{arctg} 2x\,dx$

4. a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\,dx$ b) $\displaystyle\int_1^{e^\pi} \cos(\ln x)\,dx$ c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \sin x\,dx$

d) $\displaystyle\int_{e^{-\pi}}^{e^\pi} \sin(\ln x)\,dx$ e) $\displaystyle\int_0^\pi e^{-x}\sin^2 x\,dx$ f) $\displaystyle\int_{-\pi}^\pi e^x \cos x\,dx$

5. a) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2x}{\sin^2 x}\,dx$ b) $\displaystyle\int_1^e \ln^3 x\,dx$ c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{xe^x}{(x+1)^2}\,dx$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) $\frac{1}{2}$; **b)** $\frac{1}{2}(1-\ln 2)$; **c)** π^2-4; **d)** $\frac{2}{9}e^3$; **e)** -2π; **f)** $27\sqrt[3]{e}-36$. **2. a)** $\frac{1}{16}\left(3e^4+1\right)$;
b) $10\ln 2-\frac{17}{4}$; **c)** $\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$; **d)** $\frac{2}{3}$; **e)** $\frac{4}{9}\left(2e^3+1\right)$; **f)** $\frac{1}{4}\left(e^2-1\right)$. **3. a)** $2e^3+1$;
b) $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$; **c)** $e-2$; **d)** $\frac{\sqrt{3}}{12}\pi+\frac{1}{2}$; **e)** $3\ln 3-2$; **f)** $\frac{\pi}{8}-\frac{\ln 2}{4}$. **4. a)** $\frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}}+1\right)$;
b) $-\frac{1}{2}\left(e^\pi+1\right)$; **c)** $\frac{1}{5}\left(2e^\pi+1\right)$; **d)** $\frac{1}{2}\left(e^\pi+e^{-\pi}\right)$; **e)** $\frac{3}{5}\left(e^{-\pi}-1\right)$; **f)** $-\frac{1}{2}\left(e^\pi+e^{-\pi}\right)$.
5. a) $\frac{\pi}{2}+\ln 2$; **b)** $6-2e$; **c)** $\frac{e}{2}-1$.

Kontrolní test

1. Vypočtěte integrál $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)\cos x\, dx$.

   a) $\frac{\pi}{2}$, b) 1, c) 0, d) π.

2. Vypočtěte integrál $\int\limits_{-1}^{0} x^2 e^{-x} dx$.

   a) $2+e$, b) $-2-e$, c) $-2+e$, d) -2.

3. Vypočtěte integrál $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x\, dx$.

   a) $\frac{1}{4}(\pi-1)$, b) $\frac{1}{4}(\pi+1)$, c) $\frac{\pi}{4}$, d) $\frac{1}{4}$.

4. Čemu se rovná integrál $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x dx$?

   a) $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi-\ln 2$, b) $\frac{\sqrt{3}}{6}\pi+\ln 2$, c) $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi+\frac{1}{2}\ln 4$, d) $\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{1}{2}\ln 4$.

5. Čemu se rovná integrál $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{6}} \frac{x}{\sin^2 x} dx$?

   a) $\frac{\pi}{6}\sqrt{3}-\ln 2$, b) $-\frac{\pi}{6}\sqrt{3}+\ln 2$, c) $-\frac{\pi}{6}\sqrt{3}+\ln 2$, d) $-\frac{\pi}{6}\sqrt{3}+\frac{1}{2}\ln\sqrt{3}$.

6. Čemu se rovná integrál $\int\limits_0^{e-1} \ln(x+1)\, dx$?

   a) 1, b) $e+1$, c) $1-e$, d) $2e+1$.

7. Vypočtěte integrál $\int\limits_{-1}^{1} \ln(x^2+1)\, dx$.

   a) 0, b) $2\ln 2-4+\pi$, c) $2\ln 2+\pi$, d) $-2+\frac{\pi}{2}$.

8. Vypočtěte integrál $\int\limits_{-1}^{0} x \operatorname{arccotg} x \, dx$.

a) $\frac{1}{2}$, b) $\frac{1}{2}(1+\pi)$, c) $\frac{1}{2}(1-\pi)$, d) $-\frac{\pi}{2}$.

9. Vypočtěte integrál $\int\limits_{\frac{1}{e}}^{e} x^2 \ln x \, dx$.

a) $\frac{2}{9}(e^3 - \frac{1}{e^3})$, b) $\frac{2}{9}(e^3 + \frac{1}{e^3})$, c) $\frac{2}{9}(e^3 - \frac{2}{e^3})$, d) $\frac{2}{9}(e^3 + \frac{2}{e^3})$.

10. Odvoďte rekurentní vzorec pro výpočet integrálu $S_n = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx,\ n = 0,1,2,\ldots$.

a) $S_0 = \pi,\ S_1 = 0,\ S_n = \frac{n+1}{n} S_{n-2}$ pro $n \geq 2$,

b) $S_0 = \pi,\ S_1 = 2,\ S_n = \frac{n+1}{n} S_{n-2}$ pro $n \geq 2$,

c) $S_0 = \pi,\ S_1 = 2,\ S_n = \frac{n-1}{n} S_{n-2}$ pro $n \geq 2$,

d) $S_0 = \pi,\ S_1 = 2,\ S_n = \frac{1}{1-n} S_{n-2}$ pro $n \geq 2$.

.

Výsledky testu

1. b); 2. c); 3. b); 4. a); 5. c); 6. a); 7. b); 8. c); 9. d); 10. c).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v 8 případech, pokračujte další kapitolou.
V opačném případě je třeba prostudovat kapitoly 1.3 a 2.3 znovu.

Shrnutí lekce

Použití metody per partes v určitém integrálu je zcela analogické jako v případě neurčitého integrálu. Typy integrálů řešitelných metodou per partes jsou uvedeny v kapitole 1.3. Při výpočtu určitých integrálů metodou per partes průběžně dosazujeme meze do částečně vypočtené primitivní funkce a nemusíme ji neustále opisovat až do konce výpočtu. Výpočet se tím zkrátí a zpřehlední.

2.4. Substituční metoda pro určité integrály

Cíle

Seznámíte se s použitím substituční metody při výpočtu určitých integrálů. Základní typy integrálů, které lze touto metodou vypočítat, jsou podobné jako při výpočtu neurčitých integrálů v kap. 1.4.

Předpokládané znalosti

Předpokládáme, že znáte princip substituční metody a víte, pro které typy integrálů je tato metoda vhodná. Předpokládá se znalost pojmu určitý integrál a dovednost počítat určité integrály pomocí Newtonovy – Leibnizovy formule.

Výklad

Jak již bylo uvedeno v předcházející kapitole, můžeme při výpočtu určitých integrálů ze složitějších funkcí postupovat v zásadě dvěma způsoby:

- Oddělíme fázi nalezení primitivní funkce od fáze výpočtu určitého integrálu. Nejprve si nevšímáme mezí a počítáme pouze neurčitý integrál. Po vypočítání vybereme jednu z nalezených primitivních funkcí (obvykle volíme integrační konstantu $C = 0$) a podle Newtonovy – Leibnizovy formule dosadíme horní a dolní mez.
- Neoddělujeme fázi výpočtu primitivní funkce od výpočtu určitého integrálu. U substituční metody kromě zavedení správné substituce ještě určíme nové meze a již se nemusíme vracet k původní proměnné.

První způsob nebude čtenáři patrně dělat problémy. Proto se v dalším zaměříme na druhou možnost výpočtu, která je kratší a elegantnější. Vzorce pro integraci substituční metodou v určitém integrálu připomínají vztahy uvedené ve větách 1.4.1 a 1.4.2.

Věta 2.4.1. (Integrování substituční metodou $\varphi(x) = u$)

Nechť funkce $f(u)$ je spojitá na intervalu $<\alpha, \beta>$. Nechť funkce $u = \varphi(x)$ má spojitou derivaci $\varphi'(x)$ na intervalu $<a,b>$ a nechť pro každé $x \in <a,b>$ platí $\alpha \le \varphi(x) \le \beta$, $\alpha = \varphi(a)$, $\beta = \varphi(b)$ (tedy funkce φ zobrazuje interval $<a,b>$ na interval $<\alpha, \beta>$).

Potom platí

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_\alpha^\beta f(u)du .$$

Důkaz:

Z předpokladů věty vyplývá, že existují integrály na levé i pravé straně tvrzení věty 2.4.1.

Z toho plyne, že existuje primitivní funkce $F(u)$ k funkci $f(u)$ na intervalu $<\alpha,\beta>$.

Podle věty 1.4.1 je funkce $F(\varphi(x))$ primitivní funkce k funkci $f(\varphi(x))\varphi'(x)$. Proto podle Newtonovy – Leibnizovy formule (věta 2.2.1) platí

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = F(\beta) - F(\alpha) = \int_\alpha^\beta f(u)du .$$

Poznámky

1. Při výpočtu určitého integrálu zavedeme vhodnou substituci $u=\varphi(x)$ a vypočteme diferenciál $du=\varphi'(x)dx$ jako u neurčitého integrálu. Navíc musíme ještě určit nové meze. „Staré“ meze a, b jsou pro původní proměnnou x. „Nová“ proměnná u bude mít meze $\alpha=\varphi(a)$, $\beta=\varphi(b)$.

2. V řešených příkladech vyznačíme změnu mezí takto: $a \mapsto \varphi(a)$ (staré dolní mezi a odpovídá nová dolní mez $\varphi(a)$), resp. $b \mapsto \varphi(b)$ (staré horní mezi b odpovídá nová horní mez $\varphi(b)$).

3. V konkrétním případě se může stát, že $\varphi(a) > \varphi(b)$ (nová dolní mez je větší než mez horní). Podle definice 2.2.1 můžeme meze zaměnit a znaménko integrálu se změní na opačné. Pokud dostaneme $\varphi(a)=\varphi(b)$, je podle poznámky k definici 2.2.1 integrál roven nule a nemusíme dále počítat.

Řešené úlohy

Příklad 2.4.1. Vypočtěte integrál $\int_0^2 3x\sqrt{5+x^2}\,dx$.

Řešení:

a) Bylo by možno nejprve vypočítat neurčitý integrál (nalézt primitivní funkci) jako v příkladu 1.4.4.

$$\int 3x\sqrt{5+x^2}\,dx = \left|\begin{array}{l}\text{substituce:}\\ 5+x^2=u\\ 2xdx=du\end{array}\right| = \frac{3}{2}\int 2x\sqrt{5+x^2}\,dx = \frac{3}{2}\int\sqrt{u}\,du = \frac{3}{2}\,\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = u^{\frac{3}{2}} + C =$$

$= \sqrt{\left(5+x^2\right)^3} + C$.

Použijeme primitivní funkci pro $C = 0$ (jiné C se stejně odečte): $F(x) = \sqrt{\left(5+x^2\right)^3}$ a z Newtonovy – Leibnizovy věty dostáváme:

$$\int_0^2 3x\sqrt{5+x^2}\,dx = \left[F(x)\right]_0^2 = \left[\sqrt{\left(5+x^2\right)^3}\right]_0^2 = \sqrt{\left(5+2^2\right)^3} - \sqrt{\left(5+0^2\right)^3} = 27 - 5\sqrt{5}.$$

b) Praktičtější je počítat podle věty 2.4.1 (při substituci určit nové meze). Použijeme substituci $5+x^2 = u$. Nová dolní mez bude $u = 5+0^2 = 5$ a nová horní mez je $u = 5+2^2 = 9$. Celý výpočet bude vypadat takto:

$$\int_0^2 3x\sqrt{5+x^2}\,dx = \frac{3}{2}\int_0^2 2x\sqrt{5+x^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} \text{substituce:} \\ 5+x^2 = u \\ 2x\,dx = du \\ 0 \mapsto 5,\ 2 \mapsto 9 \end{array} \right| = \frac{3}{2}\int_5^9 \sqrt{u}\,du = \frac{3}{2}\left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_5^9 = \left[u^{\frac{3}{2}}\right]_5^9 =$$

$$9^{\frac{3}{2}} - 5^{\frac{3}{2}} = 27 - 5\sqrt{5}.$$

Příklad 2.4.2. Vypočtěte integrál $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}\,dx$.

Řešení:

Použijeme substituci $\ln x = u$. Funkce $\varphi(x) = \ln x$ je spojitá na intervalu $< 1, e >$ a má na něm spojitou derivaci. Pro $x \in < 1, e >$ bude $0 \le \ln x \le 1$.

$$\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}\,dx = \left| \begin{array}{l} \text{substituce:} \\ \ln x = u \\ \frac{1}{x}\,dx = du \\ 1 \mapsto 0,\ \mathrm{e} \mapsto 1 \end{array} \right| = \int_0^1 u^2\,du = \left[\frac{u^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Poznámka

Při výpočtu musíme dávat pozor, zda jsou splněny podmínky věty 2.4.1. U neurčitých integrálů se můžeme po výpočtu dodatečně derivováním přesvědčit, zda jsme postupovali správně. U určitých integrálů tuto možnost zkoušky nemáme.

Příklad 2.4.3. Vypočtěte integrál $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos x}{5+\sin^2 x}\,dx$.

Řešení:

Použijeme substituci $\sin x = u$. Pro novou dolní mez dostaneme $\sin(-\pi)=0$ a pro horní mez vyjde $\sin\pi = 0$. Podle poznámky k definici 2.2.1 bude výpočet integrálu krátký:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos x}{5+\sin^2 x}\,dx = \left|\begin{array}{l}\text{substituce:}\\ \sin x = u\\ \cos x dx = du\\ -\pi \mapsto 0,\ \pi \mapsto 0\end{array}\right| = \int_0^0 \frac{1}{5+u^2}\,du = 0 \ .$$

Příklad 2.4.4. Vypočtěte integrál $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^3 x\,dx$.

Řešení:

Provedeme jednoduchou úpravu, abychom nalezli vhodnou substituci:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^3 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1-\cos^2 x)\sin x}{\cos^3 x}\,dx\,.$$

Je zřejmé, že vhodná substituce je $\cos x = u$, neboť $-\sin x\,dx = du$. Pro novou dolní mez vyjde $\cos 0 = 1$ a pro horní mez dostaneme $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, takže nová dolní mez je větší než nová horní mez. Podle definice 2.2.1 obrátíme meze a změníme znaménko integrálu:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1-\cos^2 x)\sin x}{\cos^3 x}\,dx = \left|\begin{array}{l}\text{substituce:}\\ \cos x = u\\ -\sin x dx = du\\ 0 \mapsto 1,\ \frac{\pi}{4} \mapsto \frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right| = -\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1-u^2}{u^3}\,du = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{1-u^2}{u^3}\,du = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \left(\frac{1}{u^3}-\frac{1}{u}\right)du =$$

$$\left[-\frac{1}{2u^2} - \ln|u|\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} = -\frac{1}{2} - \ln 1 + \frac{1}{2\frac{2}{4}} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2}\ln 2 - \ln 2 = \frac{1}{2}(1-\ln 2)\,.$$

Výklad

Větu 2.4.1. můžeme použít i v opačném směru (zprava doleva). V běžných úlohách nebývá integrační proměnnou u, ale obvykle běžně používáme proměnnou x, což je jen jiné písmenko ve vztazích. To odpovídá substituci typu $x = \varphi(t)$ v neurčitém integrálu, která je popsána ve větě 1.4.2. V určitém integrálu budeme muset po uvedené substituci změnit meze. V tomto případě vlastně známe hodnoty $\varphi(a)$ a $\varphi(b)$. Musíme nalézt hodnoty a a b, aby byly splněny předpoklady věty 2.4.1. V praxi obvykle bývá funkce $x = \varphi(t)$ taková, že lze zvolit interval $< a,b >$ tak, aby na něm byla funkce $\varphi(t)$ ryze monotonní, tj. aby jej prostě zobrazila na zadaný integrační obor $< \varphi(a), \varphi(b) >$.

Příklad 2.4.5. Vypočtěte integrál $\int\limits_{-1}^{1} x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$.

Řešení:

Integrovaná funkce je spojitá pro $x \in < -1,1 >$, takže určitý integrál existuje.

Použijeme substituci

$x = \sin t$, takže $dx = \cos t dt$. Transformujme meze integrálu:

Pro $x_1 = -1$ je $-1 = \sin t_1$, takže $t_1 = -\frac{\pi}{2}$. Pro $x_2 = 1$ je $1 = \sin t_2$, takže $t_2 = \frac{\pi}{2}$. Protože na intervalu $< -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} >$ je funkce $x = \sin t$ monotonně rostoucí a tento interval se uvedenou funkcí zobrazí na interval $< -1,1 >$, lze psát

$$\int\limits_{-1}^{1} x^2\sqrt{1-x^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} \text{substituce:} \\ x = \sin t \\ dx = \cos t dt \\ -1 \mapsto -\frac{\pi}{2},\ 1 \mapsto \frac{\pi}{2} \end{array} \right| = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,dt =$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\sqrt{\cos^2 t}\,\cos t\,dt = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\left|\cos t\right|\cos t\,dt = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cos^2 t\,dt = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}\sin^2(2t)\,dt.$$

V předcházející úpravě jsme využili skutečnosti, že pro $t \in < -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} >$ je $\cos t \geq 0$, a tedy $\left|\cos t\right| = \cos t$. Po užití známého vztahu $\sin 2t = 2\sin t\cos t$ dostáváme integrál typu

$\int \sin^m x \cos^n x \, dx$ (viz kapitola 1.6).

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}\sin^2 2t \, dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{8}(1-\cos 4t)\, dt = \frac{1}{8}\left[t - \frac{\sin 4t}{4}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8}.$$

Příklad 2.4.6. Vypočtěte integrál $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\, dx$. ✖

Řešení:

Integrovaná funkce je spojitá pro každé reálné x, takže určitý integrál existuje.

Použijeme substituci

$x = \operatorname{tg} t$, takže $dx = \frac{1}{\cos^2 t} dt$. (Je možno použít i substituci $x = \operatorname{cotg} t$). Transformujme meze integrálu:

Pro $x_1 = 0$ je $0 = \operatorname{tg} t_1$, takže $t_1 = 0$. Pro $x_2 = 1$ je $1 = \operatorname{tg} t_2$, takže $t_2 = \frac{\pi}{4}$. Protože na intervalu $< 0, \frac{\pi}{4} >$ je funkce $x = \operatorname{tg} t$ monotonně rostoucí a tento interval $< 0, \frac{\pi}{4} >$ se funkcí $x = \varphi(t) = \operatorname{tg} t$ zobrazí na interval $< 0,1 >$, lze psát

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\, dx = \left| \begin{array}{l} \text{substituce:} \\ x = \operatorname{tg} t \\ dx = \frac{1}{\cos^2 t} dt \\ 0 \mapsto 0,\ 1 \mapsto \frac{\pi}{4} \end{array} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}\, \frac{1}{\cos^2 t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos^2 t}}\, \frac{1}{\cos^2 t} dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}}\, \frac{1}{\cos^2 t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{|\cos t|} \frac{1}{\cos^2 t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^3 t} dt.$$

V předcházející úpravě jsme využili skutečnosti, že pro $t \in < 0, \frac{\pi}{4} >$ je $\cos t > 0$, a tedy $|\cos t| = \cos t$. Dostáváme integrál typu $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$. Jelikož $n = -3$ je liché, řešíme integrál opět substitucí, a to $\sin t = v$ (viz kapitola 1.6). Bylo by možno použít rovněž univerzální substituci $\operatorname{tg} \frac{t}{2} = v$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^3 t}dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t}{\cos^4 t}dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t}{(1-\sin^2 t)^2}dt = \left| \begin{array}{l} \text{substituce:} \\ \sin t = v \\ \cos t dt = dv \\ 0 \mapsto 0,\ \frac{\pi}{4} \mapsto \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right| = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dv}{(1-v^2)^2} =$$

$$= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dv}{(1-v)^2(1+v)^2}.$$

Dostáváme integrál z racionální funkce, kdy polynom ve jmenovateli má reálné násobné kořeny. Je nutno provést rozklad racionální funkce na součet parciálních zlomků (viz kapitola 1.5).

$$\frac{1}{(1-v)^2(1+v)^2} = \frac{A_1}{1-v} + \frac{A_2}{(1-v)^2} + \frac{B_1}{1+v} + \frac{B_2}{(1+v)^2}$$

Nalezneme konstanty rozkladu A_1, A_2, B_1, B_2. Rovnici vynásobíme polynomem $Q_4(v) = (1-v)^2(1+v)^2$. Dostaneme rovnost dvou polynomů:

$$1 = A_1(1-v)(1+v)^2 + A_2(1+v)^2 + B_1(1-v)^2(1+v) + B_2(1-v)^2$$

Pro $v = 1$ dostaneme $1 = 0A_1 + 4A_2 + 0B_1 + 0B_2$. Tedy $A_2 = \frac{1}{4}$.

Pro $v = -1$ dostaneme $1 = 0A_1 + 0A_2 + 0B_1 + 4B_2$. Tedy $B_2 = \frac{1}{4}$.

Pro výpočet zbývajících koeficientů můžeme použít srovnávací metodu (viz příklad 1.5.5):

Koeficienty u v^3: $0 = -A_1 + B_1$

Koeficienty u v^0: $1 = A_1 + A_2 + B_1 + B_2$

Řešením této soustavy rovnic dostaneme $A_1 = \frac{1}{4}$, $B_1 = \frac{1}{4}$.

Integrujeme získané parciální zlomky:

$$= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dv}{(1-v)^2(1+v)^2} = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left[\frac{1}{1-v} + \frac{1}{(1-v)^2} + \frac{1}{1+v} + \frac{1}{(1+v)^2} \right] dv =$$

$$= \frac{1}{4}\left[-\ln|1-v| + \frac{1}{1-v} + \ln|1+v| - \frac{1}{1+v} \right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{4}\left[\frac{2v}{1-v^2} + \ln\left|\frac{1+v}{1-v}\right| \right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{\sqrt{2}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)} + \ln\left|\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}\right|\right] = \frac{1}{4}\left[2\sqrt{2} + \ln\left|\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right|\right] = \frac{1}{4}\left[2\sqrt{2} + \ln\left|\frac{\left(2+\sqrt{2}\right)^2}{2}\right|\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[2\sqrt{2} + \ln(3+2\sqrt{2})\right].$$

Poznámky

1. Úlohu lze rovněž řešit substitucí $\sqrt{1+x^2} = t - x$. *Postup výpočtu je popsaný v poznámce k příkladu 1.4.8.*

2. Tento příklad nám ukazuje, že výpočet určitého integrálu i zdánlivě jednoduché funkce může být pracný a zdlouhavý. Je věcí cviku zvolit co nejúspornější postup. U takových příkladů nám mohou hodně pomoci vhodné počítačové programy.

3. Pokud zadáme integrál nějakému matematickému programu (např. Derive, Maple, Mathematica), získáme výsledek $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}-1)$. *Na první pohled se zdá, že se jedná o úplně jinou funkci. Snadno se však přesvědčíme, že* $-2\ln(\sqrt{2}-1) = \ln(3+2\sqrt{2})$ *a tedy* $-\frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}-1) = \frac{1}{4}\ln(3+2\sqrt{2})$.

Integrace sudých nebo lichých funkcí

Výklad

Výpočet určitého integrálu je jednodušší, pokud je integrovaná funkce sudá nebo lichá na intervalu $< -a, a >$. Připomeňme si definici 1.4.3 z část Matematika I.

Funkce f se nazývá **sudá** , jestliže $\forall x \in D_f : f(-x) = f(x)$ (graf funkce je souměrný podle osy y).

Funkce f se nazývá **lichá,** jestliže $\forall x \in D_f : f(-x) = -f(x)$ (graf funkce je souměrný podle počátku).

Věta 2.4.2. (Integrál sudé, popř. liché funkce)

Nechť je funkce $f(x)$ integrovatelná na intervalu $<-a,a>$.

Je-li $f(x)$ na intervalu $<-a,a>$ sudá, pak

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx,$$

Je-li $f(x)$ na intervalu $<-a,a>$ lichá, pak

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

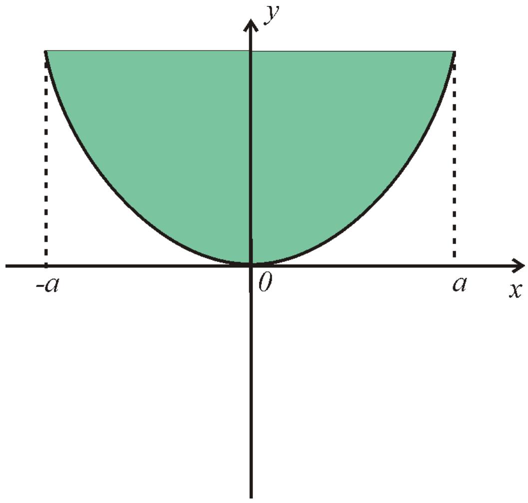
Důkaz: Je-li $f(x)$ na intervalu $<-a,a>$ sudá, pak platí $f(-x)=f(x)$. Integrál můžeme zapsat jako součet integrálů (věta 2.2.3):

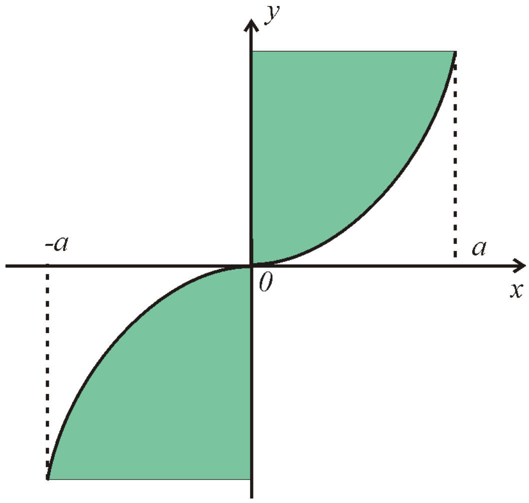
$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(-x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx.$$

První integrál řešíme substitucí $-x=t$, z níž plyne $dx=-dt$, meze $0 \mapsto 0$, $-a \mapsto a$.

Dostaneme $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = -\int_{a}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(t)dt + \int_{0}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx.$

Druhou část věty o integraci liché funkce dokážeme analogicky.





Obr. 2.4.1. Integrál ze sudé a z liché funkce

Příklad 2.4.7. Vypočtěte integrál $\int_{-1}^{1} x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$.

Řešení:

Tuto úlohu jsme již řešili v příkladu 2.4.5. Integrovaná funkce je sudá pro každé $x \in \boldsymbol{R}$, protože

$f(-x) = (-x)^2\sqrt{1-(-x)^2} = x^2\sqrt{1-x^2} = f(x)$.

Podle věty 2.4.2 můžeme výpočet poněkud zjednodušit, neboť stačí počítat integrál na intervalu $<0,1>$, kdy máme jednodušší dolní mez.

$$\int_{-1}^{1} x^2\sqrt{1-x^2}\,dx = 2\int_{0}^{1} x^2\sqrt{1-x^2}\,dx = \quad \ldots \quad = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}\sin^2 2t\,dt = \quad \ldots \quad = \frac{1}{4}\left[t - \frac{\sin 4t}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8}\ .$$

Příklad 2.4.8. Vypočtěte integrál $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\cos 2x\,dx$.

Řešení:

Jelikož $\sin(-x) = -\sin x$ a $\cos(-x) = \cos x$ snadno ukážeme, že integrovaná funkce je lichá:

$f(-x) = \sin^3(-x)\cos(-2x) = -\sin^3 x\cos 2x = -f(x)$.

Podle věty 2.4.2 není nutno integrál vůbec počítat, neboť

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\cos 2x\,dx = 0\ .$$

Ověřte výpočtem platnost uvedeného výsledku!

Kontrolní otázky

1. Uveďte princip substituční metody při výpočtu určitého integrálu.
2. Čím se při výpočtu odlišuje substituční metoda pro určitý integrál od substituční metody pro integrál neurčitý?

3. Ukažte, že $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$ pro lichou funkci *f(x)*.

4. Ukažte, že platí $\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(a+b-x)dx$.

5. Ukažte, že platí $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{a} f(-x)dx$

6. Zdůvodněte, proč jsou všechny následující integrály rovny nule.

$$\int_{-1}^{1} \sin 3x \cos 5x\, dx, \quad \int_{-a}^{a} \frac{x^3}{\sqrt{a^2-x^2}} dx, \quad \int_{0}^{2\pi} \sin x \sqrt{\cos^3 x + 1}\, dx, \quad \int_{-\ln 2}^{\ln 2} x \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx.$$

7. Ukažte, že $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\, dx = 0$ pro $m \neq n$ a $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\, dx = \pi$ pro $m = n$.

Návod: Užijte vztah $\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right]$.

Úlohy k samostatnému řešení

1. a) $\int_{0}^{1} x\left(2x^2-1\right)^{10} dx$ b) $\int_{-1}^{1} \frac{2x}{\sqrt{5-x^2}} dx$ c) $\int_{0}^{4} x^3\sqrt{x^2+9}\,dx$

d) $\int_{0}^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx$ e) $\int x^2 \sin\left(1-x^3\right) dx$ f) $\int_{1}^{3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$

2. a) $\int_{0}^{\pi} e^{\cos x} \sin x\, dx$ b) $\int_{0}^{1} \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$ c) $\int_{e}^{e^2} \frac{dx}{x \ln^2 x}$

d) $\int_{0}^{1} \sqrt{1+x}\, dx$ e) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx$ f) $\int_{0}^{\frac{\pi^2}{16}} \frac{\operatorname{tg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

3. a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \sin^3 x\, dx$ b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^3 x\, dx$ c) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x\sqrt{\sin x}}\,dx$

d) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{3\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin x}}\,dx$ e) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+\sin 2x}$ f) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{\sin x}\,dx$

4. a) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ b) $\displaystyle\int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{x+1}\,dx$ c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$

d) $\displaystyle\int_1^{27} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{3+\sqrt[3]{x^2}}\,dx$ e) $\displaystyle\int_2^5 \frac{x-1}{\sqrt{4x-2}}\,dx$ f) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{4-x^2}\,dx$

5. a) $\displaystyle\int_1^2 x\ln\left(1+x^2\right)dx$ b) $\displaystyle\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\,dx$ c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}\,\mathrm{arctg}\sqrt{x}}{x+1}\,dx$

d) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^4 x\, dx$ e) $\displaystyle\int_1^e \frac{1+\ln x}{x}\,dx$ f) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 x\, dx$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) $\frac{1}{22}$; **b)** 0; **c)** $\frac{1412}{5}$; **d)** 1; **e)** $\frac{1}{3}(1-\cos 1)$; **f)** $2\sqrt{\ln 3+1}-2$. **2. a)** $e-\frac{1}{e}$; **b)** $\mathrm{arctg}\, e-\frac{\pi}{4}$; **c)** $\frac{1}{2}$; **d)** $\frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$; **e)** $\frac{1}{2}$; **f)** $\ln 2$. **3. a)** $\frac{1}{16}$; **b)** $-\frac{1}{4}\ln 2$; **c)** $2\left(\sqrt{2}-1\right)$; **d)** $\frac{9}{32}\left(7\sqrt[3]{4}-12\right)$; **e)** $\frac{2}{\sqrt{5}}\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}$; **f)** $\frac{\ln 3}{2}$. **4. a)** $2\left(\sqrt{2}-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right)$; **b)** $4-2\,\mathrm{arctg}\, 2$; **c)** $2\ln 2-1$; **d)** $8+\frac{3\pi\sqrt{3}}{2}$; **e)** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$; **f)** $1+\frac{\pi}{2}$. **5. a)** $\frac{5}{2}\ln 5-\ln 2-\frac{3}{2}$; **b)** $4-\pi$; **c)** $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi^2}{16}-\ln 2$; **d)** $\frac{3\pi}{8}$; **e)** $\frac{3}{2}$; **f)** 0.

Kontrolní test

1. Vypočtěte integrál $\displaystyle\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\,dx$.

   a) $7-2\ln 2$, b) $7+2\ln 2$, c) $12+2\ln 2$, d) $15+2\ln 2$.

2. Vypočtěte integrál $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$.

   a) $\dfrac{\pi}{12}$, b) π, c) $\dfrac{\pi}{6}$, d) $\dfrac{\pi}{3}$.

3. Vypočtěte integrál $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^6}}\,dx$.

   a) $\dfrac{\pi}{18}$, b) $\dfrac{\pi}{6}$, c) $\dfrac{1}{3}$, d) $\dfrac{\pi}{3}$.

4. Vypočtěte integrál $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{cotg}^3 x\,dx$.

   a) $1-\ln 2$, b) $1+\dfrac{1}{2}\ln 2$, c) $1-\dfrac{1}{2}\ln 2$, d) $1+\ln 2$.

5. Vypočtěte integrál $\displaystyle\int_1^3 \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}+1}\,dx$.

   a) $\dfrac{3}{2}\ln 3$, b) $4+\ln 3$, c) $\ln 3$, d) $\dfrac{3}{2}$.

6. Vypočtěte integrál $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^9}{(1+x^5)^3}\,dx$.

   a) $\dfrac{1}{5}$, b) $\dfrac{1}{8}$, c) $\dfrac{9}{40}$, d) $\dfrac{1}{40}$.

7. Vypočtěte integrál $\displaystyle\int_3^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}}\,dx$.

   a) $8+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi$, b) $8+\dfrac{3}{2}\pi\sqrt{3}$, c) $8+\dfrac{2}{3}\pi\sqrt{3}$, d) $8+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi$.

8. Vypočtěte integrál $\int_0^{\sqrt{3}} x^5\sqrt{1+x^2}\,dx$.

a) $\frac{846}{105}$, b) $\frac{831}{105}$, c) $\frac{848}{105}$, d) $\frac{851}{105}$.

9. Vypočtěte integrál $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{3+e^x}\,dx$.

a) $4+\pi$, b) $4-\frac{\pi}{2}$, c) $4+\frac{\pi}{2}$, d) $4-\pi$.

10. Vypočtěte integrál $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x-\cos^3 x}\,dx$.

a) $\frac{4}{3}$, b) 0, c) $\frac{2}{3}$, d) $\frac{3}{2}$.

Výsledky testu

1. b); 2. c); 3. a); 4. c); 5. a); 6. d); 7. b); 8. c); 9. d); 10. a).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v 8 případech, pokračujte další kapitolou.

V opačném případě je třeba prostudovat kapitoly 1.4 a 2.4 znovu.

Shrnutí lekce

Substituční metoda patří k nejčastěji používaným metodám výpočtu určitých integrálů. Jsou možné dva postupy výpočtu. V prvním případě vhodnou substitucí vypočteme neurčitý integrál (nalezneme primitivní funkci) a teprve potom pomocí Newtonovy – Leibnizovy formule dosadíme horní a dolní mez. Výhodnější bývá druhá možnost, kdy vedle zavedení správné substituce ještě určíme nové meze a již se nemusíme vracet k původní proměnné.

2.5. Nevlastní integrály

Cíle

V této kapitole poněkud rozšíříme definici Riemannova určitého integrálu i na případy, kdy je integrační obor neohraničený (tj. $(-\infty, b>$, $<a, \infty)$, případně $(-\infty, \infty)$) nebo je neohraničená integrovaná funkce. Tyto zobecněné určité integrály se nazývají nevlastní. Seznámíme se se dvěma typy nevlastních integrálů.

Předpokládané znalosti

Předpokládáme, že znáte pojem určitý integrál, předpoklady existence a vlastnosti určitého integrálu, že znáte základní metody výpočtu určitého integrálu. Předpokládá se znalost pojmu limita funkce a postupy výpočtu těchto limit (Matematika I, kapitoly 2.1. 2.2).

Výklad

V definici Riemannova určitého integrálu $\int_a^b f(x)dx$ jsme vycházeli ze dvou předpokladů:

1. Integrační obor je konečný **uzavřený interval** $<a, b>$.
2. Integrovaná funkce $f(x)$ je na tomto intervalu ohraničená (ohraničená zdola i shora viz obr. 2.1.5).

Integrály definované za těchto předpokladů nazýváme **vlastní integrály**.

Jestliže se v určitém integrálu objeví neohraničený interval nebo neohraničená funkce, hovoříme o **nevlastních integrálech**. Rozeznáváme dva druhy nevlastních integrálů:

1. Je-li interval, na kterém integrujeme, neohraničený, hovoříme o **nevlastním integrálu prvního druhu** (nevlastní integrál na neohraničeném intervalu). Jde o integrály typu

   $$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx, \ \int_{a}^{\infty} f(x)dx, \ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \ .$$

2. Je-li integrovaná funkce v intervalu $<a, b>$ neohraničená (tedy nespojitá), hovoříme o **nevlastních integrálech druhého druhu**.

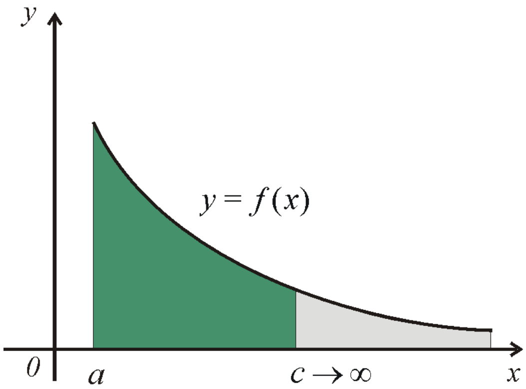
Může se vyskytnout i kombinace uvedených dvou typů, například integrál $\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx$.

Nevlastní integrály 1. druhu (integrály na neohraničeném intervalu)

Uvažujme funkci $f(x)$ definovanou na intervalu $< a,\infty)$, $a \in \boldsymbol{R}$. Předpokládejme, že pro každé $c \in < a,\infty)$ existuje určitý integrál $\int_a^c f(x)dx$. Pak můžeme definovat funkci F vztahem

$$F(c) = \int_a^c f(x)dx\,,\quad c \geq a\,.$$

Nyní budeme neomezeně zvětšovat horní mez c a budeme sledovat, jak se chová veličina $F(c)$. Situace je znázorněna na obrázku 2.5.1.



Obr. 2.5.1. Definice nevlastního integrálu na neohraničeném intervalu $< a,\infty)$

Zelená plocha představuje hodnotu integrálu $\int_a^c f(x)dx$. Při posouvání $c \to \infty$ nás bude zajímat, zda se hodnota tohoto integrálu blíží k nějakému konečnému číslu L (tj. zda existuje konečná limita) nebo tato hodnota roste nade všecky meze (limita je $+\infty$ nebo $-\infty$), případně hodnota neexistuje (hodnota osciluje).

Definice 2.5.1. (Definice nevlastního integrálu 1. druhu)

Je-li funkce $f(x)$ spojitá pro všechna čísla $c \geq a$, pak integrál tvaru

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

nazýváme **nevlastní integrál prvního druhu** (na nekonečném intervalu) a přiřazujeme mu hodnotu rovnou limitě

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{c\to+\infty} \int_a^c f(x)dx = L\,.$$

Je-li L konečné číslo, říkáme, že uvažovaný **nevlastní integrál konverguje** (je konvergentní). V opačném případě, tj. když limita je nevlastní ($L = +\infty$ nebo $L = -\infty$) nebo neexistuje, říkáme, že **nevlastní integrál diverguje** (je divergentní).

Řešené úlohy

Příklad 2.5.1. Vypočtěte integrál $\int\limits_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$.

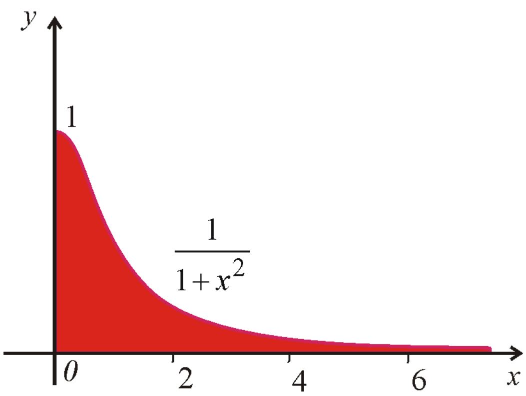
Řešení:

Budeme postupovat podle definice 2.5.1. Nejprve nalezneme pomocnou funkci horní meze $F(c) = \int\limits_a^c f(x) dx$ a potom spočítáme její limitu $L = \lim\limits_{c \to +\infty} F(c)$.

$F(c) = \int\limits_0^c \frac{1}{1+x^2} dx = [\operatorname{arctg} x]_0^c = \operatorname{arctg} c - \operatorname{arctg} 0 = \operatorname{arctg} c$, takže

$L = \lim\limits_{c \to +\infty} F(c) = \lim\limits_{c \to +\infty} \operatorname{arctg} c = \frac{\pi}{2}$.

Integrál tedy konverguje a platí $\int\limits_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2}$.



Obr. 2.5.2. Graf funkce $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ pro $x \geq 0$

Příklad 2.5.2. Vypočtěte integrál $\int\limits_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx$.

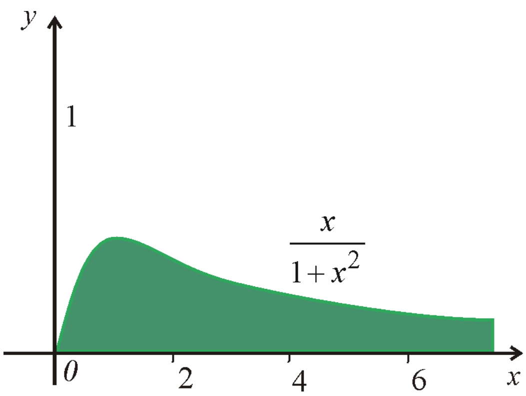
Řešení:

Postupujeme stejně jako v předcházejícím příkladu.

$$F(c)=\int\limits_0^c \frac{x}{1+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^c \frac{2x}{1+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\Big[\ln(1+x^2)\Big]_0^c=\frac{1}{2}\ln(1+c^2)\quad\text{, takže}$$

$$L=\lim_{c\to+\infty}F(c)=\lim_{c\to+\infty}\frac{1}{2}\ln(1+c^2)=+\infty\,.$$

Integrál tedy diverguje.



Obr. 2.5.3. Graf funkce $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$ pro $x\ge 0$

Příklad 2.5.3. Vypočtěte integrál $\int\limits_0^{\infty} \cos x\,dx$.

Řešení:

V tomto případě je

$$F(c)=\int\limits_0^c \cos x\,dx=[\sin x]_0^c=\sin c\quad\text{, takže}$$

$L=\lim\limits_{c\to+\infty}F(c)=\lim\limits_{c\to+\infty}\sin c$ neexistuje (hodnoty funkce oscilují mezi -1 a +1.

Integrál tudíž rovněž diverguje.

Příklad 2.5.4. Pro která p je nevlastní integrál $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$, $p > 0$ konvergentní?

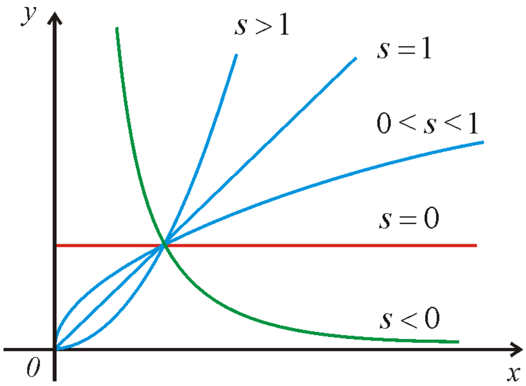
Řešení:

Nejprve počítejme tento integrál pro $p \neq 1$.

$$F(c) = \int_1^c \frac{1}{x^p}\, dx = \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_1^c = \frac{1}{1-p}\left(c^{1-p} - 1\right).$$

Musíme určit limitu $\lim\limits_{c \to +\infty} c^{1-p}$. Jedná se o mocninnou funkci s exponentem $s = 1 - p$.

Na obrázku 2.5.4 jsou grafy mocninné funkce $y = x^s$, $x > 0$ pro různá s (viz Matematika I, kapitola 1.5.4).



Obr. 2.5.4. Graf funkce $y = x^s$, $s \in \boldsymbol{R}$, $x > 0$

Z grafu 2.5.4 vidíme, že pro $s = 1 - p > 0$ (tedy pro $p < 1$) je $\lim\limits_{c \to +\infty} c^{1-p} = +\infty$, a proto

$$L = \lim_{c \to +\infty} F(c) = \frac{1}{1-p} \lim_{c \to +\infty}\left(c^{1-p} - 1\right) = +\infty \text{, integrál diverguje.}$$

Pro $s = 1 - p < 0$ (tedy pro $p > 1$) je $\lim\limits_{c \to +\infty} c^{1-p} = 0$, a proto

$$L = \lim_{c \to +\infty} F(c) = \frac{1}{1-p} \lim_{c \to +\infty}\left(c^{1-p} - 1\right) = \frac{-1}{1-p} = \frac{1}{p-1} \text{, integrál konverguje.}$$

Ještě musíme uvažovat možnost, že $p = 1$. V tomto případě

$$F(c) = \int_1^c \frac{1}{x}\, dx = \left[\ln x\right]_1^c = \ln c - \ln 1 = \ln c \text{, pak}$$

$L = \lim\limits_{c \to +\infty} F(c) = \lim\limits_{c \to +\infty} \ln c = +\infty$, integrál diverguje.

Shrnutí: $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx \quad \begin{cases} \text{konverguje} & \text{pro } p > 1 \\ \text{diverguje} & \text{pro } p \le 1 \end{cases}.$

Poznámky

1. Hranice mezi konvergencí a divergencí je $p = 1$ *.*

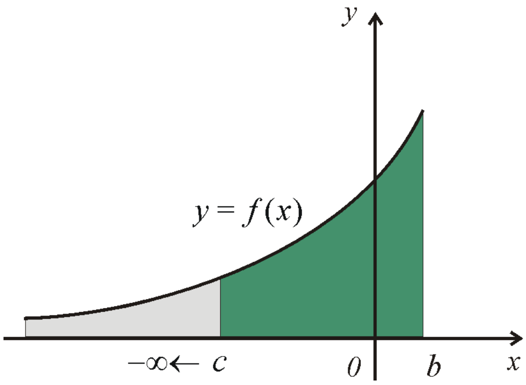
2. Stejný výsledek dostaneme i pro případy, kdy dolní mez integrálu nebude 1*, ale libovolné číslo* $d > 0$.

Výklad

Naprosto analogicky definujeme nevlastní integrál $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ na intervalu $(-\infty, b>$, $b \in \boldsymbol{R}$. Předpokládejme, pro každé $c \in (-\infty, b>$ existuje určitý integrál $\displaystyle\int_c^b f(x)dx$.

Pak můžeme definovat funkci G vztahem

$G(c) = \displaystyle\int_c^b f(x)dx$, $c \le b$ a vyšetřujeme limitu $L = \lim\limits_{c \to -\infty} G(c)$. Terminologie je stejná jako v definici 2.5.1.



Obr. 2.5.5. Definice nevlastního integrálu na neohraničeném intervalu $(-\infty, b>$

Poznámka

Je-li funkce $f(x)$ *spojitá na intervalu* $(-\infty, \infty)$ *a konvergují-li pro libovolné číslo a oba* *nevlastní integrály* $L_1=\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx$, $L_2=\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$, *pak definujeme nevlastí integrál na intervalu* $(-\infty,\infty)$*:* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = L_1 + L_2$.

Příklad 2.5.5. Vypočtěte integrál $\int\limits_{-\infty}^{0} x^2 e^{x^3} dx$.

Řešení:

Funkce $f(x)=x^2e^{x^3}$ je spojitá pro všechna reálná x. Nalezněme nejprve primitivní funkci k dané funkci:

$$\int x^2 e^{x^3} dx = \left| \begin{array}{l} \text{substituce:} \\ x^3 = t \\ 3x^2 dx = dt \end{array} \right| = \frac{1}{3}\int e^t dt = \frac{1}{3}e^t = \frac{1}{3}e^{x^3} + C .$$

$$G(c)=\int\limits_{c}^{0} x^2 e^{x^3} dx = \left[\frac{1}{3}e^{x^3}\right]_c^0 = \frac{1}{3}\left(1-e^{c^3}\right), \text{ takže}$$

$$L=\lim_{c\to-\infty} G(c) = \lim_{c\to-\infty}\frac{1}{3}\left(1-e^{c^3}\right) = \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\lim_{c\to-\infty} e^{c^3} = \frac{1}{3}-\frac{1}{3}0=\frac{1}{3}.$$

Integrál tedy konverguje a platí $\int\limits_{-\infty}^{0} x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3}$.

Příklad 2.5.6. Vypočtěte integrál $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4+x^2}dx$.

Řešení:

Integrál rozdělíme na dva nevlastní integrály např.

$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4+x^2}dx = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{1}{4+x^2}dx + \int\limits_{0}^{\infty} \frac{1}{4+x^2}dx$. Pro první integrál platí

$$G(c)=\int\limits_{c}^{0}\frac{1}{4+x^2}dx = \frac{1}{4}\int\limits_{c}^{0}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}dx = \frac{1}{4}\frac{1}{\frac{1}{2}}\left[\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right]_c^0 = -\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{c}{2},$$

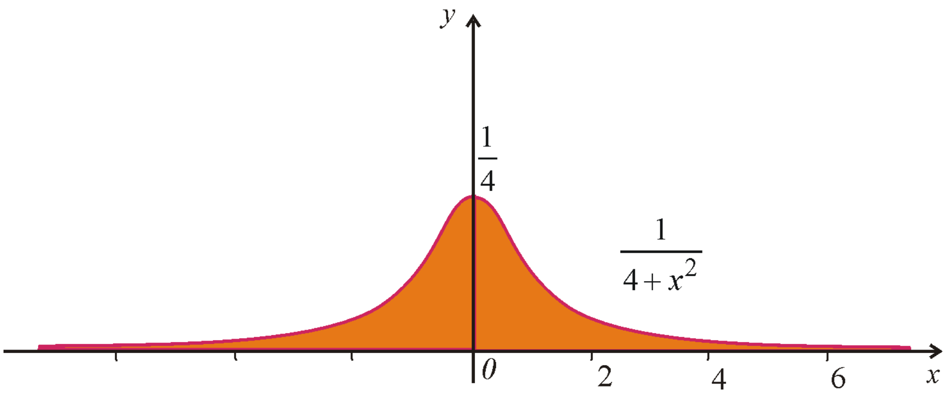
$$L_1 = \lim_{c\to-\infty} G(c) = \lim_{c\to-\infty} \left(-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{c}{2}\right) = -\frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4} \text{ (konverguje).}$$

Pro druhý integrál dostaneme

$$F(c) = \int_0^c \frac{1}{4+x^2}dx = \frac{1}{4}\int_0^c \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}dx = \frac{1}{4}\frac{1}{\frac{1}{2}}\left[\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right]_0^c = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{c}{2},$$

$$L_2 = \lim_{c\to\infty} F(c) = \lim_{c\to\infty} \left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{c}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} \text{ (konverguje).}$$

Tedy $L_1 = L_2$. To nás nepřekvapuje, protože integrovaná funkce $f(x) = \dfrac{1}{4+x^2}$ je sudá (graf je souměrný podle osy y).



Obr. 2.5.6. Graf funkce $f(x) = \dfrac{1}{4+x^2}$

Proto $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4+x^2}dx = L_1 + L_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ (integrál konverguje).

Poznámka

*Pomocí nevlastního integrálu 1. druhu definujeme pro $x > 0$ **funkci Gama**:*

$\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$*, která má řadu zajímavých vlastností. Například platí*

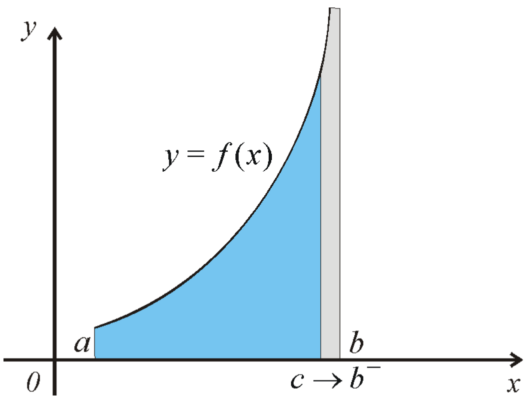
$\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(n+1) = n!$ *pro* $n \in \mathbf{N}$.

Nevlastní integrály 2. druhu (integrály z neohraničené funkce)

Uvažujme funkci $f(x)$ definovanou na intervalu $< a,b)$, $a,b \in \boldsymbol{R}$, $a < b$. Předpokládejme, že je tato funkce spojitá na intervalu $< a,c)$ pro každé $c \in < a,b)$ (tedy existuje určitý integrál $\int_a^c f(x)dx$), zatímco $\lim_{x \to b^-} f(x) = \infty$. Pak můžeme definovat funkci F vztahem

$$F(c) = \int_a^c f(x)dx\,,\quad a \le c < b\,.$$

Nyní budeme sledovat, jak se chová veličina $F(c)$, když se horní mez c přibližuje k bodu b zleva. Situace je znázorněna na obrázku 2.5.7.



Obr. 2.5.7. Definice nevlastního integrálu z neohraničené funkce na intervalu $< a,b)$

Modrá plocha představuje hodnotu integrálu $\int_a^c f(x)dx$. Při posouvání $c \to b^-$ nás bude zajímat, zda se hodnota tohoto integrálu blíží k nějakému konečnému číslu L (tj. zda existuje konečná limita), nebo zda se tato hodnota nekonečně zvětšuje (limita je $+\infty$ nebo $-\infty$), případně hodnota neexistuje (hodnota osciluje).

Definice 2.5.2. (Definice nevlastního integrálu 2. druhu)

Je-li funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $< a,b)$, zatímco $\lim_{x \to b^-} f(x) = \infty$, pak integrál tvaru

$$\int_a^b f(x)dx$$

nazýváme **nevlastní integrál druhého druhu** (neohraničené funkce) a přiřazujeme mu hodnotu rovnou limitě

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)dx = L .$$

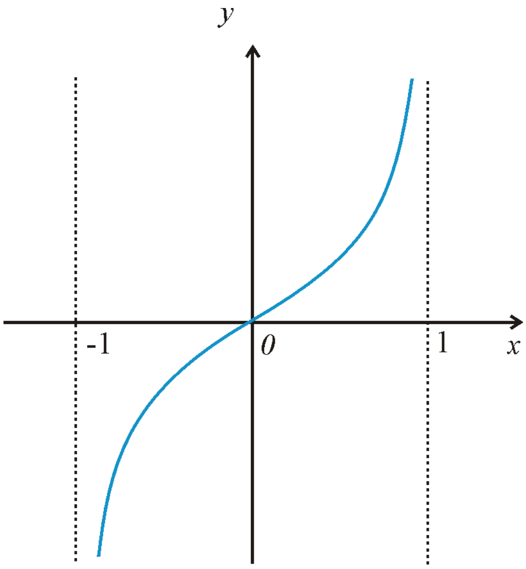
Je-li L konečné číslo, říkáme, že uvažovaný **nevlastní integrál konverguje** (je konvergentní). V opačném případě, tj. když limita je nevlastní ($L = +\infty$ nebo $L = -\infty$) nebo neexistuje, říkáme, že **nevlastní integrál diverguje** (je divergentní).

Řešené úlohy

Příklad 2.5.7. Vypočtěte integrál $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

Řešení:

Integrovaná funkce je spojitá na intervalu $\langle a,b)$ a v bodě $x=1$ není definována (obr. 2.5.8). Protože platí $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \left(\frac{1}{0^+}\right) = +\infty$, jedná se o nevlastní integrál 2. druhu (z neohraničené funkce).



Obr. 2.5.8. Graf funkce $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

Nejprve nalezneme pomocnou funkci $F(c) = \displaystyle\int_0^c f(x)dx$, $0 \le c < 1$ a potom spočítáme její limitu zleva $L = \displaystyle\lim_{c\to 1^-} F(c)$.

$$F(c)=\int_0^c \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\left|\begin{array}{l}\text{substituce:}\\ 1-x^2=t\\ -2xdx=dt\\ xdx=-\frac{1}{2}dt\\ 0\mapsto 1,\ c\mapsto 1-c^2\end{array}\right|=-\frac{1}{2}\int_1^{1-c^2}\frac{1}{\sqrt{t}}\,dt=-\frac{1}{2}\left[\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_1^{1-c^2}=\left[\sqrt{t}\right]_{1-c^2}^{1}=$$

$=1-\sqrt{1-c^2}$. Vypočteme limitu pro $c\to 1^-$:

$$L=\lim_{c\to 1^-}F(c)=\lim_{c\to 1^-}\left(1-\sqrt{1-c^2}\right)=1-0=1\,.$$

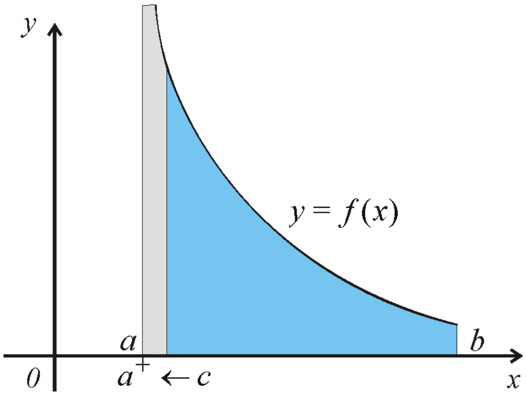
Integrál je tedy konvergentní a platí: $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=1$.

Výklad

Naprosto analogicky definujeme nevlastní integrál $\int_a^b f(x)dx$ na intervalu $(a,b>$, $a,b\in \boldsymbol{R}$, $a<b$. Předpokládejme, že je tato funkce spojitá na intervalu $(c,b>$ pro každé $c\in(a,b>$ (tedy existuje určitý integrál $\int_c^b f(x)dx$), zatímco $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$. Pak můžeme definovat funkci G vztahem

$$G(c)=\int_c^b f(x)dx\,,\quad a<c\le b\,.$$

Vyšetřujeme limitu pro $c\to a^+$. Terminologie a označení jsou stejné jako v definici 2.5.2.



Obr. 2.5.9. Definice nevlastního integrálu z neohraničené funkce na intervalu $(a, b>$

Poznámka

Má-li integrovaná funkce více bodů, v nichž je funkce neohraničená ($\lim f(x) = \infty$), rozdělíme interval integrace na tolik dílčích intervalů, aby v každém z nich byl jediný bod v horní nebo v dolní mezi, ve kterém je limita nevlastní. Konvergují-li nevlastní integrály ve všech těchto dílčích intervalech, pak za jeho hodnotu na celém intervalu považujeme součet jeho hodnot na dílčích intervalech. Je-li nevlastní integrál divergentní aspoň na jednom dílčím intervalu, považujeme jej za divergentní na celém intervalu.

Řešené úlohy

Příklad 2.5.8. Vypočtěte integrál $\int_0^4 \frac{1}{x}\,dx$.

Řešení:

Integrovaná funkce je spojitá na intervalu $(0, 4>$ a v bodě $x = 0$ není definována. Protože platí $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \left(\frac{1}{0^+}\right) = +\infty$, jedná se o nevlastní integrál 2. druhu (z neohraničené funkce). Grafem funkce je rovnoosá hyperbola s asymptotami $x = 0$ a $y = 0$.

Nejprve vypočteme určitý integrál na intervalu $(c, 4>$, $0 < c \le 4$:

$$G(c) = \int_c^4 \frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_c^4 = \ln 4 - \ln c\,.$$

Nyní vypočteme limitu pro $c \to 0^+$:

$L = \lim\limits_{c\to 0^+} G(c) = \lim\limits_{c\to 0^+} \left(\ln 4 - \ln c\right) = \ln 4 - (-\infty) = +\infty$. Integrál je tedy divergentní.

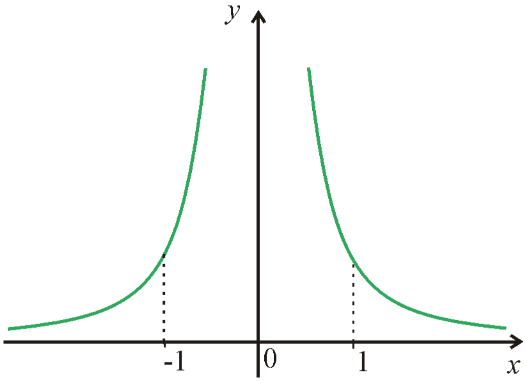
Příklad 2.5.9. Vypočtěte integrál $\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\, dx$.

Řešení:

Studenti obvykle postupují následujícím způsobem:

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{1} = -1 + (-1) = -2.$$

Někteří studenti dvakrát podtrhnou výsledek a jsou spokojeni, jak to lehce zvládli. Přemýšlivé studenty výsledek zarazí. Vždyť pro integrační obor $<-1,1>$ je integrand vždy kladný ($\frac{1}{x^2} > 0$, viz obr. 2.5.10), a tedy hodnota integrálu musí být kladná (lze ji interpretovat jako obsah plochy pod danou funkcí). Kde je chyba?



Obr. 2.5.10. Graf funkce $f(x) = \frac{1}{x^2}$

Je zřejmé, že daná funkce je na intervalu $<-1,1>$ neohraničená a není definována v bodě $x = 0$. Rozdělíme tento interval na dílčí intervaly, aby nevlastní limita byla vždy jen v jednom krajním bodě intervalu:

$\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{x^2} dx = \int\limits_{-1}^{0} \frac{1}{x^2} dx + \int\limits_{0}^{1} \frac{1}{x^2} dx$ a budeme počítat dva nevlastní integrály.

$F(c) = \int\limits_{-1}^{c} \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{c} = -\frac{1}{c} - 1$ a $L = \lim\limits_{c\to 0^-} F(c) = \lim\limits_{c\to 0^-} \left(-\frac{1}{c} - 1\right) = \frac{-1}{0^-} - 1 = +\infty$.

Proto $\int\limits_{-1}^{0} \frac{1}{x^2}dx$ diverguje. Pro druhý integrál vypočteme (podle předcházející poznámky to není nutné):

$$G(c) = \int\limits_{c}^{1} \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_c^1 = -1 + \frac{1}{c} \quad L = \lim_{c \to 0^+} F(c) = \lim_{c \to 0^+} \left(-1 + \frac{1}{c}\right) = -1 + \frac{1}{0^+} = +\infty .$$

Proto také $\int\limits_{0}^{1} \frac{1}{x^2}dx$ diverguje.

Shrnutí: Integrál $\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}dx$ je divergentní.

Poznámka

1. Nevlastní integrál prvního druhu (na neohraničeném intervalu) poznáte snadno, neboť v mezích figuruje symbol $+\infty$ nebo $-\infty$. Problematičtější je situace u nevlastních integrálů druhého druhu, neboť na první pohled nemusí být patrné, že je integrand neohraničená funkce, a že se jedná o nevlastní integrál. Pokud bude student postupovat, jako by se jednalo o „obyčejný" integrál, může dostat nesprávný výsledek.

2. To, že v některém bodě není integrovaná funkce definována ještě neznamená, že musí jít o nevlastní integrál. Například funkce $\frac{\sin x}{x}$ není definována pro $x = 0$, ale $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, a tedy funkce je ohraničená. Proto integrál $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{\sin x}{x}dx$ není nevlastní, ale jedná se o „obyčejný" integrál. To, že nám bude výpočet tohoto integrálu dělat potíže (viz kapitola 1.7), je jiný problém. Bude nutno použít nějakou numerickou metodu.

Kontrolní otázky

1. Zapište definici nevlastního integrálu na intervalu $(-\infty, b>$, $b \in \boldsymbol{R}$ (analogie definice 2.5.1).
2. Kdy je nevlastní integrál konvergentní a kdy je divergentní?
3. Jaký je rozdíl mezi nevlastními integrály prvního a druhého druhu?

4. Zapište definici nevlastního integrálu na intervalu $(a,b>$, $a,b \in \boldsymbol{R}$, $a<b$, jestliže $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \infty$ (analogie definice 2.5.2).

5. Je nevlastní integrál $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4} dx$ konvergentní?.

6. Jsou integrály $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ a $\int\limits_{0}^{1} x \ln x dx$ nevlastní?

7. Pro která p je integrál $\int\limits_{0}^{1} \frac{1}{x^p} dx$ konvergentní? (Analogie příkladu 2.5.4.)

Úlohy k samostatnému řešení

1. a) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ b) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ c) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x^3+1}{x^4} dx$

d) $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4}$ e) $\int\limits_{-\infty}^{1} \frac{dx}{x^2+2x+5}$ f) $\int\limits_{-\infty}^{-\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^2+x+1}$

g) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$ h) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$ i) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x}$

2. a) $\int\limits_{1}^{+\infty} 3^{-2x} dx$ b) $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$ c) $\int\limits_{e}^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx$

d) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} dx$ e) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$ f) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} dx$

g) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2} dx$ h) $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$ i) $\int\limits_{0}^{+\infty} x e^{-x^2} dx$

3. a) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt[5]{x^3}}$ b) $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2-x}}$ c) $\int\limits_{0}^{1} \ln x \, dx$

d) $\int\limits_{-8}^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ e) $\int\limits_{1}^{4} \frac{dx}{(x-1)^3}$ f) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

4. a) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin x \cos x}$ c) $\int_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}$

d) $\int_0^1 x \ln x\,dx$ e) $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\arcsin x\sqrt{1-x^2}}$ f) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x\,dx$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) diverguje; **b)** 1; **c)** diverguje; **d)** $\frac{\pi}{8}$; **e)** $\frac{3\pi}{8}$; **f)** $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$; **g)** $\frac{\pi\sqrt{5}}{5}$; **h)** π; **i)** $\ln 2$.

2. a) $\frac{1}{18\ln 3}$; **b)** diverguje; **c)** 1; **d)** 0; **e)** $\frac{\pi^2}{8}$; **f)** $1-\frac{1}{e}$; **g)** $\frac{\pi^3}{12}$; **h)** $\frac{\pi}{4}$; **i)** $-\frac{1}{2}$. **3. a)** $\frac{5}{2}$; **b)** $2\sqrt{2}$; **c)** -1; **d)** $\frac{15}{2}$; **e)** diverguje; **f)** π. **4. a)** 1; **b)** diverguje; **c)** diverguje; **d)** $-\frac{1}{4}$; **e)** $\ln 3$; **f)** diverguje.

Kontrolní test

1. Rozhodněte, zda nevlastní integrál $\int_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}$ je

   a) 1. druhu a rovná se 3, b) 2. druhu a diverguje,
   c) 2. druhu a rovná se 3, d) 1. druhu a diverguje.

2. Rozhodněte, zda nevlastní integrál $\int_1^\infty \frac{x^3+1}{x^4}\,dx$ je

   a) 1. druhu a rovná se $\frac{1}{3}$, b) 2. druhu a rovná se $\frac{1}{3}$,
   c) 1. druhu a diverguje, d) 2. druhu a diverguje.

3. Rozhodněte, zda nevlastní integrál $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+2x+2}$ je

   a) 2. druhu a diverguje, b) 1. druhu a rovná se π,
   c) 2. druhu a rovná se π, d) 1. druhu a diverguje.

4. Rozhodněte, zda nevlastní integrál $\int_{-1}^{0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}\,dx$ je

a) 1. druhu a diverguje, b) 1. druhu a rovná se $-\frac{2}{e}$,

c) 2. druhu a diverguje, d) 2. druhu a rovná se $-\frac{2}{e}$.

5. Vypočtěte nevlastní integrál $\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{3+x^2}$.

a) $\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$, b) $-\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$, c) $\frac{\pi}{2}$, d) diverguje.

6. Vypočtěte nevlastní integrál $\int_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

a) $\frac{\pi}{4}$, b) diverguje, c) $-\frac{\pi}{4}$, d) 0.

7. Vypočtěte nevlastní integrál $\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}\,dx$.

a) $\frac{1}{2}$, b) $-\frac{1}{2}$, c) diverguje, d) 0.

8. Vypočtěte nevlastní integrál $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2}{3}\pi} \operatorname{tg} x\,dx$.

a) 0, b) $\ln 2$, c) diverguje, d) $-\ln 2$.

9. Vypočtěte nevlastní integrál $\int_{0}^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{x\ln^2 x}$.

a) 0, b) -1, c) diverguje, d) 1.

10. Vypočtěte nevlastní integrál $\int_{2}^{6} \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$.

a) $-6\sqrt[3]{2}$, b) diverguje, c) 0, d) $6\sqrt[3]{2}$.

Výsledky testu

1. b); 2. c); 3. b); 4. d); 5. a); 6. a); 7. b); 8. c); 9. d); 10. a).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v 8 případech, pokračujte další kapitolou.

V opačném případě je třeba prostudovat kapitolu 2.5 znovu.

Shrnutí lekce

Rozlišujeme dva druhy nevlastních integrálů. Jednak může být integrál nevlastní kvůli tomu, že je integrační obor neohraničený (nevlastní integrály prvního druhu) nebo není na integračním oboru ohraničená integrovaná funkce (nevlastní integrály druhého druhu). Je-li funkce $f(x)$ definována na intervalu $a \le x < b$, $b \in \boldsymbol{R}$ zprava otevřeném a integrovatelná na každém dílčím uzavřeném intervalu $< a, c >$, $c < b$, pak definujeme nevlastní integrál prvního druhu $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{c \to +\infty} \int_a^c f(x)dx$ na intervalu $< a, \infty)$, resp. nevlastní integrál druhého druhu $\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)dx$ pro funkci $f(x)$ neohraničenou pro $x \to b^-$.

Analogicky se zavedou nevlastní integrály na zleva otevřeném intervalu $a < x \le b$, $a \in \boldsymbol{R}$.

3. APLIKACE URČITÉHO INTEGRÁLU

V matematice, ale zejména v přírodních a technických vědách, existuje nepřeberné množství problémů, při jejichž řešení je nutno tím či oním způsobem použít integrálního počtu. V této kapitole uvádíme stručný přehled těch nejběžnějších aplikací určitých integrálů v geometrii a ve fyzice.

Budeme se zabývat výpočtem délek, obsahů a objemů. Během dosavadní školní docházky jste si vytvořili jistou intuitivní představu, co je to délka křivky, obsah nějakého geometrického obrazce či objem tělesa. Seznámili jste se se vzorci pro výpočet délky úsečky nebo kružnice, dovedete vypočítat obsah trojúhelníka, obdélníka, čtverce, kruhu, objem krychle, kvádru, jehlanu, koule a dalších obrazců či těles.

Jistě máte představu, že pravidelný pětiúhelník má určitý obsah, i když neznáte vzorec pro jeho výpočet. Dovedete však tento pětiúhelník rozložit na konečný počet trojúhelníků a po určité námaze byste vypočítali obsah pětiúhelníka jako součet obsahů těchto trojúhelníků. Vzniká otázka, jak definovat obsahy obecnějších obrazců, které nelze rozložit na konečný počet trojúhelníků.

Vzhledem k určení a rozsahu těchto studijních materiálů není možné přesně zavést pojmy délka, obsah a objem. Precizním zavedením těchto pojmů se zabývá teorie míry, což je poměrně náročná matematická partie. Pro potřeby inženýrské praxe vystačíme s jednoduchými objekty, kde je intuitivně jasné, že mají určitou délku, obsah, resp. objem. Budeme se zabývat výpočtem těchto veličin.

Při řešení geometrických a fyzikálních úloh postupujeme ve dvou krocích:

1. Převedeme řešení úlohy na výpočet určitého integrálu.
2. Tento určitý integrál vypočítáme.

3.1. Obsah rovinné oblasti

Cíle

Seznámíte se se základní aplikací určitého integrálu – výpočtem obsahu křivočarého lichoběžníka a obsahu složitějších rovinných oblastí.

Předpokládané znalosti

Předpokládáme, že jste si prostudovali zavedení pojmu určitý integrál (kapitola 2.1), kde je výpočet obsahu křivočarého lichoběžníka užitý jako motivace zavedení určitého integrálu. Dále předpokládáme, že znáte základní metody výpočtu určitého integrálu.

Výklad

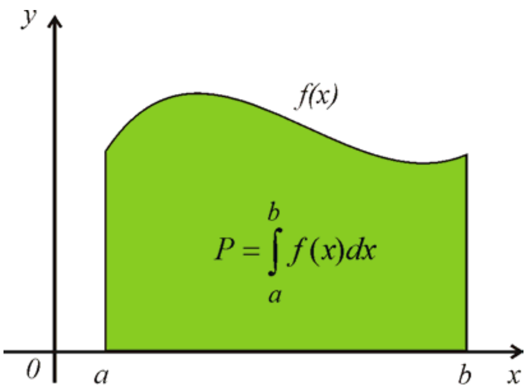
Věta 3.1.1.

Nechť je funkce $f(x)$ integrovatelná na intervalu $< a,b >$ a je na něm nezáporná. Pak pro obsah křivočarého lichoběžníka ohraničeného shora grafem funkce $f(x)$, přímkami $x = a$, $x = b$ a osou x platí

$$P = \int_a^b f(x)dx \,.$$

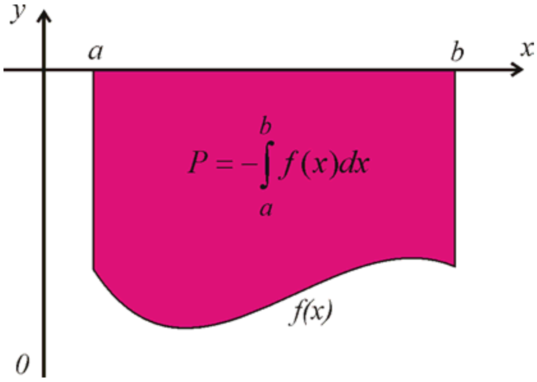
Důkaz:

Tvrzení plyne z definice Riemannova určitého integrálu (definice 2.1.2).



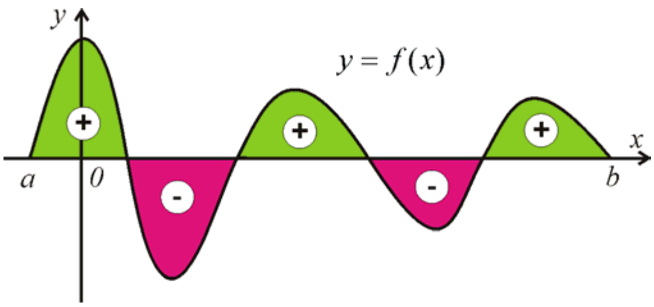
Obr. 3.1.1. Obsah křivočarého lichoběžníka pro nezápornou funkci ($f(x) \geq 0$)

Uvedený vztah pro obsah křivočarého lichoběžníka platí pro **nezápornou funkci** $f(x)$ na intervalu $< a,b >$. Z definice určitého integrálu je zřejmé, že pro funkci $f(x)$, která je naopak na intervalu $< a,b >$ **nekladná** ($f(x) \leq 0$), bude určitý integrál $\int_a^b f(x)dx \leq 0$, a proto obsah křivočarého lichoběžníka ohraničeného zdola grafem funkce $f(x)$, přímkami $x = a$, $x = b$ a osou x bude $P = -\int_a^b f(x)dx = \int_a^b |f(x)|dx$ (obr. 3.1.2).



Obr. 3.1.2. Obsah křivočarého lichoběžníka pro nekladnou funkci ($f(x) \le 0$)

V obecném případě může funkce $f(x)$ libovolně měnit znaménko. Při výpočtu obsahu plochy ohraničené grafem funkce $f(x)$ a osou x na intervalu $< a,b >$ je nutno brát části nad osou x kladně a části pod osou x záporně. Pokud bychom vypočetli integrál $\int_a^b f(x)dx$ na celém intervalu, odečítaly by se kladné a záporné části (obr. 3.1.3).



Obr. 3.1.3. Obsah plochy mezi osou x a grafem funkce $f(x)$ se znaménky

Větu 3.1.1. můžeme zobecnit na případ, kdy je obrazec zdola ohraničen další funkcí $g(x)$.

Věta 3.1.2.

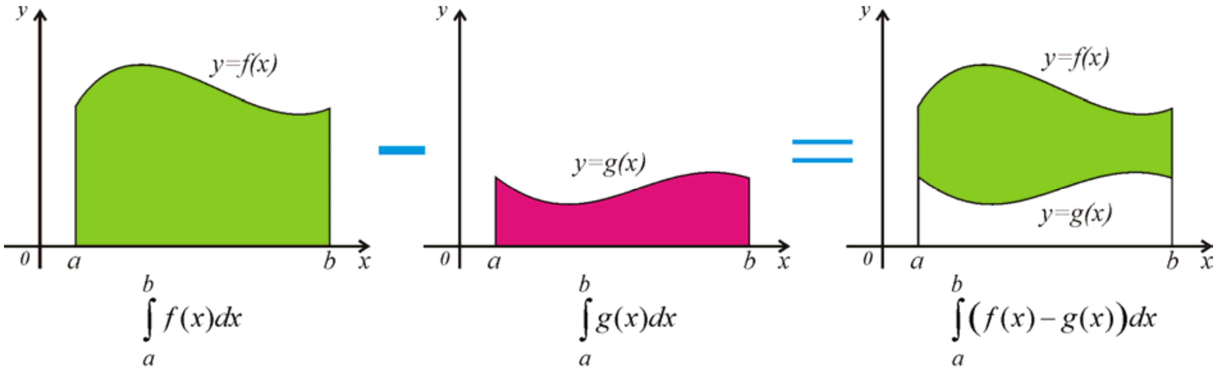
Nechť jsou funkce $f(x)$ a $g(x)$ integrovatelné a platí $g(x) \le f(x)$ pro každé $x \in < a,b >$. Pak pro obsah křivočarého lichoběžníka ohraničeného zdola grafem funkce $g(x)$, shora grafem funkce $f(x)$ a přímkami $x = a$, $x = b$ platí

$$P = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,dx .$$

Důkaz:

Jsou-li obě funkce $f(x)$ a $g(x)$ nezáporné, je obsah uvažovaného křivočarého lichoběžníka roven rozdílu obsahu plochy pod grafem funkce $f(x)$ a obsahu plochy pod grafem funkce $g(x)$, viz obr. 3.1.4.

$$P=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx=\int_a^b \big(f(x)-g(x)\big)dx$$



Obr. 3.1.4. Obsah plochy mezi funkcemi $g(x)$ a $f(x)$ na intervalu $<a,b>$

Obecně by mohly funkce $f(x)$ a $g(x)$ protínat osu *x* (část obrazce by ležela pod osou *x*). V tomto případě stačí k oběma funkcím přičíst vhodnou konstantu *C*, aby byly obě funkce $f(x)+C$ a $g(x)+C$ nezáporné. Obsah uvažovaného křivočarého lichoběžníka se tím nezmění.

$$P=\int_a^b [f(x)+C]dx-\int_a^b [g(x)+C]dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b Cdx-\int_a^b g(x)dx-\int_a^b Cdx=\int_a^b \big(f(x)-g(x)\big)dx\,.$$

Poznámky

1. Z důkazu věty 3.1.2 vyplývá, že při výpočtu obsahu křivočarého lichoběžníka mezi grafy dvou funkcí $g(x)\le f(x)$ *není důležité, zda tento obrazec nebo jeho část leží pod osou x.*

2. Věta 3.1.1 je speciálním případem věty 3.1.2 pro $g(x)=0$.

Grafem funkce $y=f(x)$ je křivka. Tato funkce (křivka) může být dána parametrickými rovnicemi $x=\varphi(t)$ a $y=\psi(t)$ pro $t\in<\alpha,\beta>$. Proměnnou *t* nazýváme parametr (ve fyzice mívá obvykle význam času a funkce $\varphi(t)$ a $\psi(t)$ mohou udávat *x*-ovou a *y*-ovou souřadnici pohybujícího se bodu). Pro výpočet obsahu křivočarého lichoběžníka (obr. 3.1.1) ohraničeného funkcí danou parametrickými rovnicemi můžeme modifikovat větu 3.1.1 následujícím způsobem:

Věta 3.1.3.

Nechť funkce *f* je dána parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t)$ a $y = \psi(t)$, přičemž funkce $\varphi(t)$ a $\psi(t)$ jsou spojité pro $t \in <\alpha, \beta>$. Je-li funkce $\varphi(t)$ ryze monotonní a má spojitou derivaci na intervalu $<\alpha, \beta>$, přičemž $\varphi(\alpha) = a$ a $\varphi(\beta) = b$, pak pro obsah křivočarého lichoběžníka ohraničeného shora grafem funkce *f*, přímkami $x = a$, $x = b$ a osou *x* platí

$$P = \left| \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\varphi'(t)dt \right|.$$

Důkaz:

Je-li funkce $x = \varphi(t)$ ryze monotonní na intervalu $<\alpha, \beta>$, pak k ní existuje inverzní funkce $t = \varphi^{-1}(x)$. Rovnici křivky můžeme proto psát ve tvaru $y = \psi(\varphi^{-1}(x)) = f(x)$. Uvažovaná plocha bude mít obsah

$$P = \left| \int_a^b f(x)dx \right| = \left| \int_a^b \psi(\varphi^{-1}(x))dx \right|.$$

Odtud substitucí $x = \varphi(t)$, ze které plyne $dx = \varphi'(t)dt$, dostaneme

$$P = \left| \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\varphi'(t)dt \right|.$$

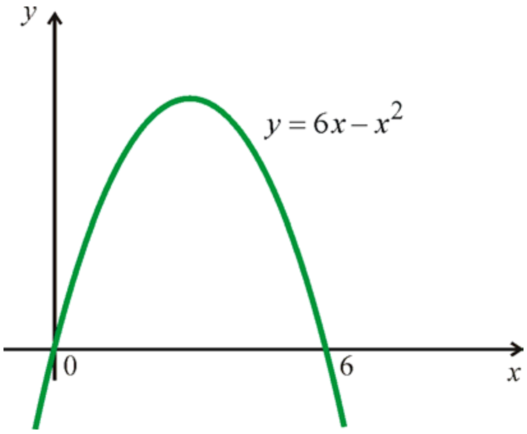
Řešené úlohy

Příklad 3.1.1. Vypočtěte obsah rovinného obrazce ohraničeného křivkou $y = 6x - x^2$ a osou *x*.

Řešení:

U příkladů tohoto typu je dobré si udělat náčrtek. Je zadána kvadratická funkce, tedy grafem bude parabola. Nejprve upravíme rovnici paraboly, abychom nalezli její vrchol.

$y = 6x - x^2 = -(x^2 - 6x) = -(x-3)^2 + 9$. Z rovnice $y - 9 = -(x-3)^2$ je zřejmé, že vrchol paraboly je v bodě $V = (3,9)$ a ramena paraboly budou orientována směrem dolů (obr. 3.1.5). Řešením rovnice $6x - x^2 = 0$ dostaneme průsečíky dané paraboly s osou x: $a = 0$ a $b = 6$.



Obr. 3.1.5. Graf funkce $y = 6x - x^2$

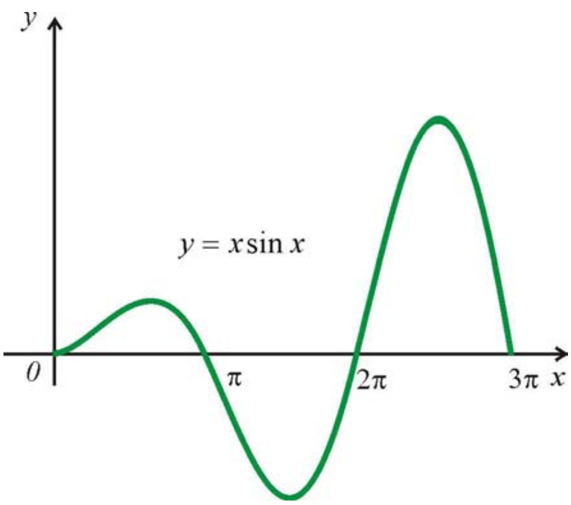
Hledaný obsah je

$$P = \int_0^6 (6x - x^2)dx = \left[3x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^6 = 108 - 2 \cdot 36 = 36 .$$

Příklad 3.1.2. Vypočtěte obsah rovinného obrazce ohraničeného křivkou $y = x \sin x$, osou x a přímkami $x = 0$, $x = 3\pi$.

Řešení:

Na intervalu $< 0, 3\pi >$ je $x \geq 0$, avšak funkce $\sin x$ bude měnit znaménko. Proto bude $x \sin x \geq 0$ pro $x \in < 0, \pi >$, $x \sin x \leq 0$ pro $x \in < \pi, 2\pi >$ a $x \sin x \geq 0$ pro $x \in < 2\pi, 3\pi >$ (obr. 3.1.6).



Obr. 3.1.6. Graf funkce $y = x \sin x$

Hledaný obsah bude sestávat ze tří částí:

$$P = \int_0^{\pi} x \sin x \, dx - \int_{\pi}^{2\pi} x \sin x \, dx + \int_{2\pi}^{3\pi} x \sin x \, dx .$$

Potřebnou primitivní funkci k funkci $y = x \sin x$ nalezneme metodou per partes:

$$\int x \sin x \, dx = \begin{vmatrix} u' = \sin x & v = x \\ u = -\cos x & v' = 1 \end{vmatrix} = -x \cos x + \int \cos x \, dx = \sin x - x \cos x .$$

Dosadíme příslušné meze:

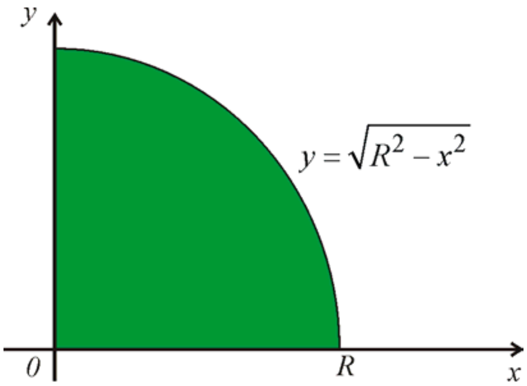
$$P = \left[\sin x - x \cos x\right]_0^{\pi} - \left[\sin x - x \cos x\right]_{\pi}^{2\pi} + \left[\sin x - x \cos x\right]_{2\pi}^{3\pi} =$$

$$= \left[0 - \pi(-1) - 0 + 0\right] - \left[0 - 2\pi - 0 + \pi(-1)\right] + \left[0 - 3\pi(-1) - 0 + 2\pi\right] = \pi + 3\pi + 5\pi = 9\pi .$$

Příklad 3.1.3. Odvoďte vzorec pro výpočet obsahu kruhu o poloměru R.

Řešení:

Vzorec pro výpočet obsahu kruhu jistě znáte už ze základní školy. Dosud jste však neměli dostatečné znalosti, abyste mohli dokázat platnost tohoto vzorce. Střed kruhu umístíme do počátku, což nemá vliv na obsah kruhu. Rovnice hraniční kružnice bude $x^2 + y^2 = R^2$. Pro jednoduchost vypočteme obsah jedné čtvrtiny kruhu ležící v prvním kvadrantu a potom výsledek vynásobíme čtyřmi. Pro $x \in < 0, R >$ z rovnice kružnice dostaneme $y = \sqrt{R^2 - x^2}$.



Obr. 3.1.7. Obsah čtvrtiny kruhu

Pro obsah celého kruhu bude platit $P = 4\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} \, dx$. Podobný integrál jsme již počítali. Podívejte se na příklad 1.4.7. Použijeme substituční metodu:

$$P = 4\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\,dx = \left|\begin{array}{l}\text{substituce:}\\ x = R\sin t\\ dx = R\cos t\,dt\\ 0 \mapsto 0,\quad R \mapsto \frac{\pi}{2}\end{array}\right| = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2 - R^2\sin^2 t}\; R\cos t\,dt =$$

$$= 4R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,dt = 4R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = 4R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = 2R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\,dt =$$

$$= 2R^2\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2R^2\left[\frac{\pi}{2} - 0\right] = \pi R^2 .$$

Poznámka

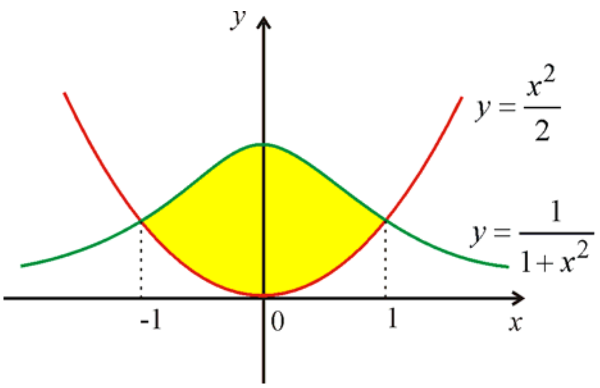
Při úpravě (výpočet odmocniny $\sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t}$ *) jsme využili toho, že pro* $x \in <0, \frac{\pi}{2}>$ *je* $\cos x \geq 0$.

Příklad 3.1.4. Vypočtěte obsah rovinného obrazce ohraničeného křivkami

$$y = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{a} \quad y = \frac{x^2}{2}.$$

Řešení:

Je zřejmé, že funkce $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ bude vždy kladná a největší hodnoty nabude pro $x = 0$. Grafem druhé funkce je parabola (obr. 3.1.8).



Obr. 3.1.8. Obrazec ohraničený křivkami $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ a $y = \dfrac{x^2}{2}$

Nejprve musíme nalézt průsečíky daných křivek. Řešíme rovnici

$\dfrac{1}{1+x^2}=\dfrac{x^2}{2}$. Po úpravě dostaneme $x^4+x^2-2=0$, tedy $(x^2-1)(x^2+2)=0$.

Uvedená rovnice má dva reálné kořeny $x_1=-1$ a $x_1=1$.

Podle věty 3.1.2 je obsah oblasti ohraničené danými křivkami roven

$$P=\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{x^2}{2}\right)dx=2\int_{0}^{1}\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{x^2}{2}\right)dx=2\left[\operatorname{arctg}x-\frac{x^3}{6}\right]_0^1=2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{6}\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}.$$

Poznámka

Využili jsme toho, že oblast je souměrná podle osy y (integrand je sudá funkce).

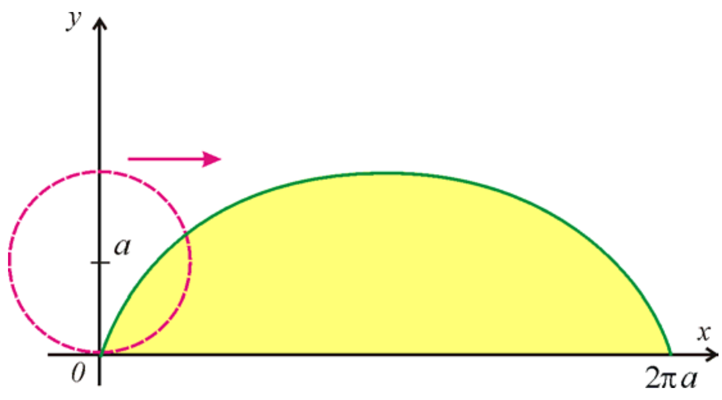
Příklad 3.1.5. Vypočtěte obsah rovinného obrazce ohraničeného osou x a jedním obloukem prostá cykloidy.

Řešení:

Prostá cykloida je křivka, kterou opisuje bod pevně spojený s kružnicí o poloměru a při kotálení kružnice po přímce (obr. 3.1.9). Tato cykloida má parametrické rovnice:

$x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $t\in\boldsymbol{R}$.

První oblouk cykloidy dostaneme pro parametr $t\in<0,2\pi>$.



Obr. 3.1.9. První oblouk cykloidy

Protože $dx=a(1-\cos t)dt$, dostaneme z věty 3.1.3

$$P=\int_0^{2\pi}a(1-\cos t)a(1-\cos t)dt=a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2dt=a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)dt=$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \frac{1+\cos 2t}{2}) dt = a^2 \left[t - 2\sin t + \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{2\pi} = a^2 \left[2\pi + \pi \right] = 3\pi a^2 .$$

Poznámka

Body uvnitř kružnice by při kotálení kružnice po přímce opisovaly ***zkrácenou cykloidu*** *a myšlené body vně tzv.* ***prodlouženou cykloidu****. Cykloida se v přírodě a technice objevuje na nečekaných místech a v různých zajímavých souvislostech. Například vlny na vodě mají tvar cykloidy, s oblibou se využívají cykloidiální ozubená kola v převodovkách, cykloida snese největší zatížení, což má využití v mostních a tunelových konstrukcích (nové tunely pražského metra, tunel Mrázovka), dále je užíván cykloidiální výřez na carvingových lyžích.*

Kontrolní otázky

1. Uveďte vzorec pro výpočet obsahu obrazce ohraničeného osou x a grafem funkce $y = f(x)$, která protíná osu x ve dvou bodech.
2. Jak se liší vztahy pro výpočet obsahu křivočarého lichoběžníka ohraničeného grafem funkce $f(x)$, přímkami $x = a$, $x = b$ a osou x pro nezápornou a pro nekladnou funkci $f(x)$?
3. Jak vypočítáme obsah rovinného obrazce ohraničeného dvěma funkcemi $g(x) \le f(x)$?.
4. Jak vypočítáme obsah rovinného obrazce ohraničeného dvěma funkcemi, pokud celá oblast leží pod osou x (tj. $g(x) \le f(x) < 0$)?
5. Jak vypočítáte obsah obrazce ohraničeného funkcí $y = \sin 2x$ a osou x pro $x \in < 0, 2\pi >$.
6. Určete parametr k tak, aby obsah oblasti ohraničené parabolou $y = x - x^2$ a přímkou $y = kx$ byl roven $\frac{9}{2}$.
7. Odvoďte vzorec pro výpočet obsahu elipsy o poloosách a a b. (Parametrické rovnice této elipsy jsou $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $t \in < 0, 2\pi >$).

Úlohy k samostatnému řešení

1. Vypočtěte obsah rovinného obrazce ohraničeného křivkami

a) $y = 4 - x^2$; $y = 0$ b) $y = 6x - x^2$; $y = 0$

c) $y = 4 - x^2; \quad y = x^2$

d) $y = -x^2 + 4x - 2; \quad x + y = 2$

e) $y = x^2 - 2x; \quad y = x$

f) $y = x^2; \quad x = y^2$

g) $y = x^2 - x - 6; \quad y = -x^2 + 5x + 14$

h) $y = x^3; \quad y = 4x$

i) $xy = 4; \quad x + y = 5$

j) $y = \operatorname{tg} x; \quad y = 0; \quad x = \frac{\pi}{4}$

k) $y = \sin x; \quad y = \frac{2x}{\pi}$

l) $y = e^x; \quad y = e^{-x}; \quad x = \ln 2$

2. Vypočtěte obsah rovinného obrazce ohraničeného křivkami

a) $y = \ln^2 x; \quad y = \ln x$

b) $y = \sin x; \quad y = \cos x; \quad x = \frac{\pi}{4}; \quad x = \frac{3\pi}{4}$

c) $y = \arcsin x; \quad y = 0; \quad x = 0; \quad x = 1$

d) $y = \frac{x^2}{4}; \quad y = \frac{8}{x^2 + 4}$

e) $y = 2^x; \quad x = -1; \quad x = 0; \quad y = 0$

f) $y = 2x^3; \quad y = \frac{2}{x}; \quad x - y = 1; \quad x \geq 0$

3. Vypočtěte obsah rovinného obrazce ohraničeného

a) parabolou $y = x^2 - 2x + 2$, její tečnou v bodě $(3,5)$ a souřadnicovými osami.

b) křivkou $y = e^x$, její tečnou v bodě $(0,1)$ a přímkou $x = -1$.

c) grafem funkce $y = x^3 + x^2 - 6x$ pro $-3 \leq x \leq 3$ a osou x.

d) parabolou $y = x^2 - 6x + 8$ a jejími tečnami v bodech $(1,3)$ a $(4,0)$.

4. Vypočtěte obsah rovinného obrazce ohraničeného osou x a křivkou zadanou parametrickými rovnicemi

a) $x = 3t^2,\ y = 3t - t^3; \quad -\sqrt{3} \leq t \leq \sqrt{3}$

b) $x = 2\sin t,\ y = 2\cos t; \quad 0 \leq t \leq \pi$ $x = 2\sin t, \quad y = 2\cos t; \quad 0 \leq t \leq \pi$

c) $x = 2(t - \sin t),\ y = 2(1 - \cos t); \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

d) $x = 3\sin^3 t,\ y = 3\cos^3 t; \quad 0 \leq t \leq \pi$

e) $x = 2t - t^2,\ y = 2t^2 - t^3; \quad 0 \leq t \leq 2$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. **a)** $\frac{32}{3}$; **b)** 36; **c)** $\frac{16\sqrt{2}}{3}$; **d)** $\frac{9}{2}$; **e)** $\frac{9}{2}$; **f)** $\frac{1}{3}$; **g)** $\frac{343}{3}$; **h)** 8; **i)** $\frac{15}{2}-8\ln 2$; **j)** $\frac{\ln 2}{2}$; **k)** $2-\frac{\pi}{2}$; **l)** $\frac{1}{2}$. **2.** **a)** $3-e$; **b)** $\sqrt{2}$; **c)** $\frac{\pi}{2}-1$; **d)** $\pi-\frac{4}{3}$; **e)** $\frac{1}{2\ln 2}$; **f)** $\frac{1}{2}+2\ln 2$. **3.** **a)** $\frac{23}{8}$; **b)** $\frac{1}{2}-\frac{1}{e}$; **c)** $\frac{86}{3}$; **d)** $\frac{9}{4}$. **4.** **a)** $\frac{72\sqrt{3}}{5}$; **b)** 2π; **c)** 12π; **d)** $\frac{27\pi}{8}$; **e)** $\frac{7}{15}$.

Kontrolní test

1. Vypočtěte obsah rovinné oblasti ohraničené křivkami $xy=6$ a $x+y-7=0$.

   a) $\frac{35}{2}-6\ln 6$, b) $\frac{35}{2}+6\ln 6$, c) $\frac{35}{2}-\ln 6$, d) $\frac{35}{2}+\ln 6$.

2. Vypočtěte obsah rovinné oblasti ohraničené křivkami $y=x^2-8x+14$ a $y=-x^2+4x+14$.

   a) 144, b) 72, c) 36, d) 108.

3. Vypočtěte obsah rovinné oblasti ohraničené křivkami $y^2=2x+1$ a $x-y-1=0$.

   a) $\frac{14}{3}$, b) $\frac{29}{3}$, c) $\frac{28}{3}$, d) $\frac{16}{3}$.

4. Vypočtěte obsah rovinné oblasti dané nerovnostmi $x^2+y^2\le 8$ a $2y\ge x^2$.

   a) $\frac{2}{3}+\pi$, b) $\frac{4}{3}+2\pi$, c) $-\frac{8}{3}+2\pi$, d) $\frac{8}{3}+2\pi$.

5. Vypočtěte obsah rovinné oblasti ohraničené křivkami $y=\operatorname{tg}x$, $y=\frac{2}{3}\cos x$ a $y=0$.

   a) $\frac{1}{3}-\ln\frac{\sqrt{3}}{2}$, b) $\frac{1}{3}-\ln 2$, c) $\frac{1}{3}+\ln\frac{\sqrt{3}}{2}$, d) $\frac{1}{3}+\ln 2$.

6. Vypočtěte obsah rovinné oblasti dané nerovnostmi $y\le 4$, $x^2\ge y$ a $x^2\le 4y$.

   a) $\frac{16}{3}$, b) 20, c) 40, d) $\frac{32}{3}$.

7. Vypočtěte obsah rovinné oblasti ohraničené křivkami $y=\operatorname{arctg}x$, $y=\operatorname{arccotg}x$ a $x=0$.

   a) $\ln 2$, b) $\frac{\pi}{2}+\ln 2$, c) $\frac{\pi}{2}$, d) $\frac{\pi}{2}-\ln 2$.

8. Vypočtěte obsah rovinné oblasti ohraničené křivkami

$k_1 : x = a\cos t,\quad y = b\sin t,\quad k_2 : x = b\cos t,\ y = b\sin t,\ a > b > 0$ konst., pro

$t \in < -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} >$.

a) $\pi b(a-b)$, b) $\pi a(a-b)$, c) $\frac{\pi b}{2}(a-b)$, d) $\frac{\pi a}{2}(a-b)$.

9. Vypočtěte obsah smyčky křivky $x = 3t^2,\ y = 3t - t^3,\ -\sqrt{3} \le t \le \sqrt{3}$.

a) $\frac{36}{5}\sqrt{3}$, b) $\frac{72}{5}\sqrt{3}$, c) $\frac{6}{5}\sqrt{3}$, d) $\frac{12}{5}\sqrt{3}$.

10. Vypočtěte obsah rovinného obrazce ohraničeného křivkami $y = \frac{\ln x}{4x}$ a $y = x\ln x$.

a) $\frac{3}{16} + \frac{1}{8}(\ln^2 2 + \ln 2)$, b) $\frac{1}{8}\ln 2(1+\ln 2) - \frac{3}{16}$,

c) $\frac{3}{16} + \frac{1}{8}(\ln^2 2 - \ln 2)$, d) $\frac{3}{16} - \frac{1}{8}(\ln 2 + \ln^2 2)$.

Výsledky testu

1. a); 2. b); 3. d); 4. b); 5. c); 6. d); 7. a); 8. c); 9. b); 10. d).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v 8 případech, pokračujte další kapitolou.
V opačném případě je třeba prostudovat kapitolu 3.1 znovu.

Shrnutí lekce

Z definice Riemannova určitého integrálu vyplývá, že integrál $\int_a^b f(x)dx$ pro nezápornou funkci $f(x)$ na intervalu $< a,b >$ dává obsah křivočarého lichoběžníka ohraničeného shora grafem funkce $f(x)$, přímkami $x = a$, $x = b$ a osou x. Jestliže funkce $f(x)$ na uvedeném intervalu protíná osu x, je nutno rozdělit obrazec na části nad osou x a na části pod osou x, kde jsou hodnoty určitého integrálu z dané funkce záporné. Při výpočtu obsahu rovinného obrazce ohraničeného zdola grafem funkce $g(x)$ a shora grafem funkce $f(x)$ pro $x \in < a,b >$ není důležité, zda obrazec nebo jeho část leží pod osou x.

3.2. Délka oblouku křivky

Cíle

Seznámíte se s další aplikací určitého integrálu – výpočtem délky křivky.

Předpokládané znalosti

Předpokládáme, že jste si prostudovali zavedení pojmu určitý integrál (kapitola 2.1). Dále předpokládáme, že znáte základní metody výpočtu určitého integrálu. Budeme také používat parametrické rovnice křivky.

Výklad

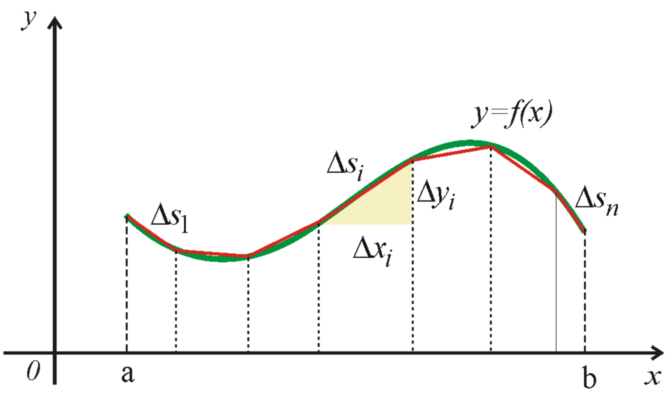
Mějme část rovinné křivky dané rovnicí $y = f(x)$ pro $a \le x \le b$ (obr. 3.2.1). Zajímá nás, jaká je délka této křivky.

Předpokládejme, že jsou funkce $f(x)$ a její derivace $f'(x)$ spojité na intervalu $<a,b>$. Budeme postupovat analogicky jako při zavedení Riemannova určitého integrálu (kap. 2.1). Křivku nahradíme lomenou čarou, která se bude skládat z n úseček (obr. 3.2.1). Z Pythagorovy věty bude délka i – té úsečky rovna

$\Delta s_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$. Norma dělení bude $\nu(D_n) = \max\limits_{i=1,\dots,n} \Delta x_i$.

Délka celé křivky bude přibližně rovna součtu délek jednotlivých úseček:

$$s \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i .$$



Obr. 3.2.1. Aproximace křivky $y = f(x)$ lomenou čarou

Je zřejmé, že pro zvětšující se počet dílčích úseček budeme dostávat přesnější aproximaci délky oblouku křivky. Pro $n \to \infty$ a normu dělení $\nu(D_n) \to 0$ bude $\Delta x \to dx$, $\Delta y \to dy$ a pro délku uvažované křivky dostaneme:

$$s = \int_a^b \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}\ .$$

Jelikož $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$ (Matematika I, část II, kapitola 3.6), snadno vztah upravíme na tvar

$$s = \int_a^b \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \int_a^b \sqrt{1 + \frac{(dy)^2}{(dx)^2}}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + [\, f'(x)]^2}\, dx\,.$$

Věta 3.2.1.

Nechť je funkce $f(x)$ definovaná na intervalu $< a, b >$ a má zde spojitou derivaci. Pak délka této křivky

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [\, f'(x)]^2}\, dx\,.$$

Křivka nemusí být vždy zadána explicitní funkcí $y = f(x)$, může být dána rovněž parametrickými rovnicemi

$$x = \varphi(t)\,, \quad y = \psi(t)\,, \quad t \in < \alpha, \beta >.$$

Křivku si můžeme představit jako trajektorii, kterou urazí bod, který se v čase spojitě pohybuje v rovině. Spojité funkce $\varphi(t)$ a $\psi(t)$ udávají x-ovou a y-ovou souřadnici pohybujícího se bodu. Délka takové křivky je z fyzikálního hlediska vlastně dráha, kterou bod urazí od okamžiku α do okamžiku β.

Věta 3.2.2.

Nechť je křivka dána parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in < \alpha, \beta >$, přičemž funkce $\varphi(t)$ a $\psi(t)$ mají spojité derivace na intervalu $< \alpha, \beta >$. Pak je délka této křivky

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt\ .$$

Důkaz: Funkce $\varphi(t)$ a $\psi(t)$ mají spojité derivace na intervalu $<\alpha,\beta>$, pak platí

$dx=\varphi'(t)dt$ a $dy=\psi'(t)dt$. Dosazením do vztahu

$$s=\int_a^b\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\int_\alpha^\beta\sqrt{[\varphi'(t)dt]^2+[\psi'(t)dt]^2}=\int_\alpha^\beta\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt$$

dostaneme tvrzení věty.

Poznámka

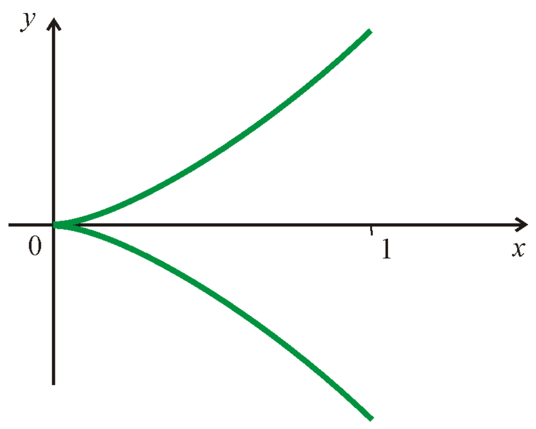
Libovolnou funkci $y=f(x)$, $x\in<a,b>$ *můžeme snadnou parametrizovat, když položíme* $x=t$, $y=f(t)$, $t\in<a,b>$. *Jelikož* $\varphi'(t)=1$, *vidíme, že tvrzení věty 3.2.1 je speciálním případem věty 3.2.2.*

Řešené úlohy

Příklad 3.2.1. Vypočtěte délku semikubické (Neilovy) paraboly $y^2=x^3$ na intervalu $<0,1>$.

Řešení:

Křivka se skládá ze dvou částí $y=x^{\frac{3}{2}}$ a $y=-x^{\frac{3}{2}}$ symetrických podle osy x (obr.3.2.2).



Obr. 3.2.2. Graf semikubické paraboly $y^2=x^3$ pro $x\in<0,1>$

Délka bude rovna dvojnásobku délky části nad osou x. Použijeme vztah z věty 3.2.1, kde

$f(x)=x^{\frac{3}{2}}$ a $f'(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$.

$$s = 2\int_0^1 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\, dx = 2\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{9}\left[\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{16}{27}\left[\left(\frac{13}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right] = \frac{16}{27}\left[\frac{13}{8}\sqrt{13} - 1\right].$$

Poznámka

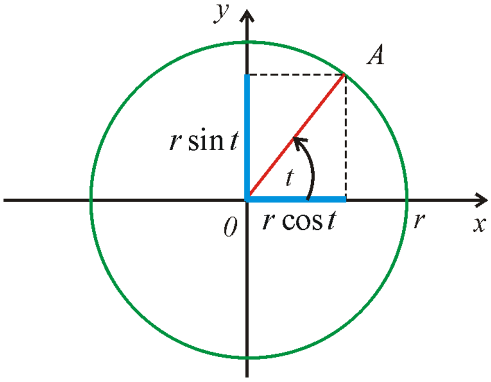
Integrál pro výpočet délky křivky obsahuje odmocninu. Proto se nám i pro jednoduché funkce stane, že neumíme příslušný integrál vypočítat. V takovém případě bude nutno použít nějakou numerickou metodu nebo některý matematický program (např. Derive, Maple, Mathematica).

Příklad 3.2.2. Vypočtěte délku kružnice o poloměru $r > 0$.

Řešení:

Bez újmy na obecnosti uvažujme kružnici se středem v počátku. Rovnice této kružnice je $x^2 + y^2 = r^2$. Odtud $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$, přičemž $x \in < -r, r >$. Vezmeme rovnici horní půlkružnice $y = +\sqrt{r^2 - x^2}$ a vypočítáme její derivaci $y' = \dfrac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$. Problém je v tom, že derivace není definována pro $x = r$ a $x = -r$. Předpoklady věty 3.2.1 nejsou tedy splněny.

Snadno najdeme parametrické rovnice kružnice. Z definice funkcí sinus a kosinus určíme polohu libovolného bodu $A = (x, y)$ ležícího na kružnici (obr. 3.2.3).



Obr. 3.2.3. Odvození parametrických rovnic kružnice

Hledané parametrické rovnice kružnice budou:

$x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $t \in < 0, 2\pi >$.

Měníme-li úhel t od nuly do 2π, oběhne bod A celou kružnici. Pro výpočet délky kružnice použijeme větu 3.2.2.

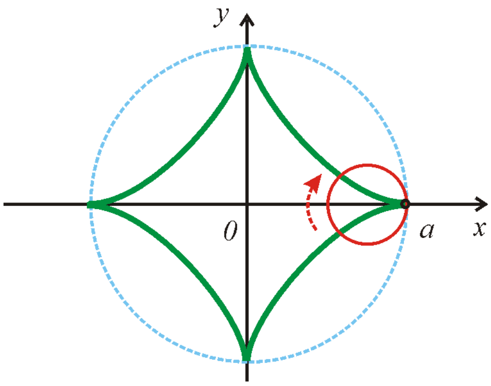
Jelikož $\varphi'(t) = (r\cos t)' = -r\sin t$ a $\psi'(t) = (r\sin t)' = r\cos t$, dostáváme

$$s=\int_0^{2\pi}\sqrt{[-r\sin t]^2+[r\cos t]^2}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2(\sin^2 t+\cos^2 t)}\,dt=\int_0^{2\pi} r\,dt=r[t]_0^{2\pi}=2\pi r\,.$$

Příklad 3.2.3. Vypočtěte délku asteriody.

Řešení:

Asteroida je zvláštním případem hypocykloidy. Hypocykloida je cyklická křivka, kterou vytvoří bod pevně spojený s kružnicí, která se valí (kotálí) po vnitřní straně nehybné kružnice. Asteroidu dostaneme v případě, kdy se kružnice o poloměru $r=\frac{a}{4}$ (na obr. 3.2.4 červená) kotálí po vnitřní straně kružnice poloměru $R=a$.



Obr. 3.2.4. Asteroida

Parametrické rovnice asteroidy jsou

$x=a\cos^3 t\,,\quad y=a\sin^3 t\,,\quad t\in<0,2\pi>\,.$

Protože asteroida je symetrická podle obou souřadnicových os, stačí, určíme-li délku její jedné čtvrtiny v prvním kvadrantu, tj. pro $t\in<0,\frac{\pi}{2}>$. Tím se také vyhneme problémům se znaménky goniometrických funkcí sinus a kosinus v dalších kvadrantech. Vypočteme derivace parametrických rovnic a dosadíme do vztahu ve větě 3.2.2.

$x'=3a\cos^2 t(-\sin t)\,,$

$y'=3a\sin^2 t\cos t\,,$

$$\frac{s}{4}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left[-3a\cos^2 t\sin t\right]^2+\left[3a\sin^2 t\cos t\right]^2}\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9a^2(\cos^4 t\sin^2 t+\sin^4 t\cos^2 t)}dt=$$

$$=3a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin^2 t\cos^2 t(\cos^2 t+\sin^2 t)}\,dt=3a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\,dt=\frac{3a}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\,dt=$$

$$= \frac{3a}{2}\left[-\frac{\cos 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{3a}{4}(\cos\pi - \cos 0) = -\frac{3a}{4}(-1-1) = \frac{3a}{2}.$$

Délka celé asteroidy je tedy $s = 4\frac{3a}{2} = 6a$.

Poznámky

1. Při integraci jsme použili známý vztah $\sin 2t = 2\sin t\cos t$.

2. Vztah pro výpočet délky křivky dané parametrickými rovnicemi lze snadno rozšířit i na prostorové křivky. Přibude pouze třetí souřadnice bodu křivky. Křivka bude mít parametrické rovnice

$x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \zeta(t)$, $t \in <\alpha, \beta>$.

Pro její délku bude (za předpokladu spojitých derivací $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, $\zeta'(t)$ *) platit*

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\zeta'(t)]^2}\, dt .$$

Podrobnější informace naleznete v Matematice III v kapitole Křivkový integrál.

Příklad 3.2.4. Vypočtěte délku elipsy.

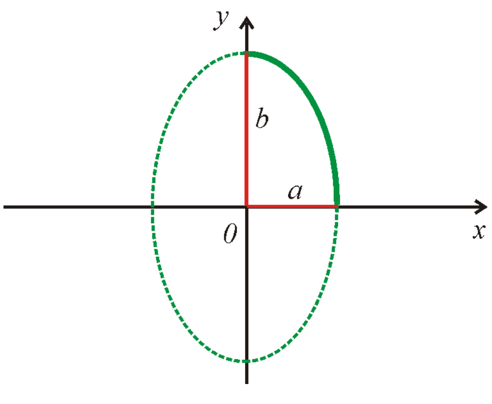
Řešení:

Vzorec pro výpočet obsahu elipsy jste si již odvodili v kapitole 3.1. (Kontrolní otázka.)

Elipsa s poloosami *a*, *b* (předpokládejme $0 < a < b$, obr. 3.2.5) má parametrické rovnice

$x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $t \in <0, 2\pi>$,

pokud vedlejší poloosa leží v ose *x* a hlavní poloosa v ose *y*.



Obr. 3.2.5. Elipsa o poloosách *a*, *b*

Protože elipsa je symetrická podle obou souřadnicových os, stačí, určíme-li délku její jedné čtvrtiny v prvním kvadrantu, tj. pro $t \in <0, \frac{\pi}{2}>$. Vypočteme derivace parametrických rovnic a dosadíme do vztahu ve větě 3.2.2.

$x' = -a\sin t$,

$y' = b\cos t$,

$$\frac{s}{4} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{[-a\sin t]^2 + [b\cos t]^2}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2(1-\sin^2 t)}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{b^2 - (b^2-a^2)\sin^2 t}\,dt = b\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{b^2-a^2}{b^2}\sin^2 t}\,dt =$$

$$= b\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2 t}\,dt, \text{ kde jsme označili } \frac{b^2-a^2}{b^2} = k^2.$$

Délka celé elipsy bude $s = 4b\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2 t}\,dt$.

Problém spočívá v tom, že primitivní funkci nelze vyjádřit pomocí konečného počtu elementárních funkcí. Podívejte se na kapitolu 1.7. Pro konkrétní hodnoty a a b bude nutno použít vhodnou numerickou metodu některého matematického programu (např. Derive, Maple, Mathematica).

Poznámka

Integrál typu $E(k,\varphi) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2\sin^2 t}\,dt$ *je označován jako eliptický integrál druhého druhu, neboť je jím vyjádřena délka elipsy.*

Kontrolní otázky

1. Uveďte vztah pro výpočet délky křivky $y = f(x)$ pro $x \in <a,b>$.
2. Uveďte vztah pro výpočet délky křivky dané parametrickými rovnicemi.

3. Jaká je délka řetězovky $y=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$ pro $x\in<-1,1>$?
4. S řetězovkou se můžeme setkat v architektuře. Tvar této křivky mají samonosné klenby starých staveb stejně jako některé moderní stavby. Zadejte slovo „řetězovka“ do Vašeho vyhledávače (např. Google). Jak vypadá graf této křivky?
5. Jak vypočtete velikost dráhy, kterou urazí bod od $t=0$ do $t=3$ při pohybu po křivce dané parametrickými rovnicemi $x=5t^{2}$, $y=t^{3}$?
6. Sestavte integrál pro výpočet délky paraboly $y=x^{2}$, $-1\le x\le 1$. Navrhněte metodu řešení tohoto integrálu. (Využijte příkladů 2.4.6 a poznámky k příkladu 1.4.8).
7. Sestavte integrál pro výpočet délky kubické paraboly $y=x^{3}$, $0\le x\le 2$. Zkuste integrál řešit pomocí některého matematického programu (např. Derive, Maple, Mathematica).

Úlohy k samostatnému řešení

1. Vypočtěte délku křivky

a) $y=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2};\quad 0\le x\le 3$

b) $y=\arcsin x+\sqrt{1-x^{2}};\quad -1\le x\le 1$

c) $y=\ln x\,;\quad \sqrt{3}\le x\le \sqrt{8}$

d) $y=1-\ln(\cos x)\,;\quad 0\le x\le \dfrac{\pi}{4}$

e) $y^{2}=4x^{3};\quad 0\le x\le 2;\quad y>0$

f) $y=\ln(1-x^{2})\,;\quad 0\le x\le \dfrac{1}{2}$

g} $y=\dfrac{x^{2}}{4}-\dfrac{\ln x}{2};\quad 1\le x\le e$

2. Vypočtěte délku křivky

a) $x=2\cos t,\ y=2\sin t;\quad 0\le t\le \pi$

b) $x=2\cos^{3}t,\ y=2\sin^{3}t;\quad 0\le t\le 2\pi$

c) $x=t^{2},\ y=t-\dfrac{t^{3}}{3};\quad 0\le t\le \sqrt{3}$

d) $x=(3t-\sin t),\ y=3(1-\cos t)$; $0\le t\le 2\pi$

e) $x=\cos t+t\sin t,\ y=\sin t-t\cos t$; $0\le t\le 2\pi$

f) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=4$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. **a)** $\frac{1}{2}\left(e^3-\frac{1}{e^3}\right)$; **b)** 4; **c)** $1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$; **d)** $\ln\left(\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}\right)$; **e)** $\frac{2}{27}\left(\sqrt{19^3}-1\right)$; **f)** $2\ln 3-\frac{1}{2}$; **g)** $\frac{e^2-1}{4}$. **2.** **a)** 2π; **b)** 12; **c)** $2\sqrt{3}$; **d)** 24; **e)** $2\pi^2$; **f)** 48.

Kontrolní test

1. Vypočtěte délku oblouku křivky $y=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{2}\ln x$ pro $1\le x\le e$.

a) $\frac{1}{4}(e^2-1)$, b) $\frac{1}{4}(e^2+1)$, c) $\frac{1}{2}(e^2+1)$, d) $\frac{1}{2}e^2+1$.

2. Vypočtěte délku oblouku křivky $y=\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$ pro $0\le x\le 1$.

a) $2\sqrt{2}$, b) $2\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)$, c) $4-2\sqrt{2}$, d) $4+\sqrt{2}$.

3. Vypočtěte délku oblouku křivky $y=\frac{2+x^6}{8x^2}$ pro $1\le x\le 2$.

a) $\frac{33}{16}$, b) $\frac{33}{8}$, c) 2, d) $\frac{27}{16}$.

4. Vypočtěte obvod křivočarého trojúhelníka, jehož strany tvoří oblouky křivek $x^2+y^2=6$ a $5x^3=y^2$.

a) $\frac{134}{27}+\sqrt{6}(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{\sqrt{6}}{6})$, b) $\frac{134}{27}+2\sqrt{6}(\frac{\pi}{2}+\arcsin\frac{\sqrt{6}}{6})$,

c) $\frac{134}{27}+2\sqrt{6}(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{\sqrt{6}}{6})$, d) $\frac{67}{27}+2\sqrt{6}(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{\sqrt{6}}{6})$.

5. Vypočtěte délku oblouku křivky $y=\ln(1+e^x)-\ln(e^x-1)$ pro $\ln 2\le x\le \ln 5$.

a) $4\ln 2+\ln 5$, b) $8\ln 2-2\ln 5$, c) $\ln\frac{5}{16}$, d) $\ln\frac{16}{5}$.

6. Vypočtěte délku oblouku křivky $y = 2\ln\dfrac{4}{4-x^2}$ pro $0 \le x \le 1$.

a) $\ln 9 - 1$, b) $1 + 2\ln 3$, c) $1 - 2\ln 3$, d) $1 + \ln 3$.

7) Vypočtěte délku smyčky křivky $x = t^2$, $y = t - \dfrac{1}{3}t^3$ pro $-\sqrt{3} \le t \le \sqrt{3}$.

a) $2\sqrt{3}$, b) $4\sqrt{3}$, c) $\dfrac{4}{3}\sqrt{3}$, d) $8\sqrt{3}$.

8) Vypočtěte délku jednoho oblouku prosté cykloidy $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $a > 0$ konst., ($0 \le t \le 2\pi$).

a) $4a$, b) $6a$, c) $12a$, d) $8a$.

9) Vypočtěte délku oblouku křivky $x = \dfrac{1}{3}t^3$, $y = 4 - \dfrac{1}{2}t^2$ mezi průsečíky s osami souřadnic v 1. kvadrantu.

a) $\dfrac{26}{3}$, b) $\dfrac{39}{2}$, c) 9, d) $\dfrac{28}{3}$.

10) Vypočtěte délku oblouku křivky $x = \cos t + \ln\operatorname{tg}\dfrac{t}{2}$, $y = \sin t$ pro $\dfrac{\pi}{6} \le t \le \dfrac{\pi}{2}$.

a) $\ln\dfrac{1}{2}$, b) 1, c) $\ln 2$, d) 2.

Výsledky testu

1. b); 2. c); 3. a); 4. c); 5. d); 6. a); 7. b); 8. d); 9. a); 10. c).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v 8 případech, pokračujte další kapitolou.

V opačném případě je třeba prostudovat kapitolu 3.2 znovu.

Shrnutí lekce

Další možností použití určitého integrálu je výpočet délky křivky. Z Pythagorovy věty odvodíme základní vztah pro výpočet délky křivky $s = \int_a^b \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$. Jednoduchou úpravou dostaneme vzorec $s=\int_a^b \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\, dx$ pro výpočet délky křivky zadané explicitní funkcí $y=f(x)$, $x\in<a,b>$ a vzorec $s=\int_\alpha^\beta \sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2+\left[\psi'(t)\right]^2}\, dt$ pro délku křivky, která je dána parametrickými rovnicemi $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $t\in<\alpha,\beta>$. Problém je v tom, že velmi často neumíme integrál, který obsahuje odmocninu, vypočítat pomocí elementárních funkcí. V těchto případech nezbývá než použít nějakou přibližnou metodu. Vztah pro výpočet délky křivky lze rozšířit i na křivky v prostoru. Podrobnosti naleznete v textu Matematika III, kapitola 4.6.2.

3.3. Objem rotačního tělesa

Cíle

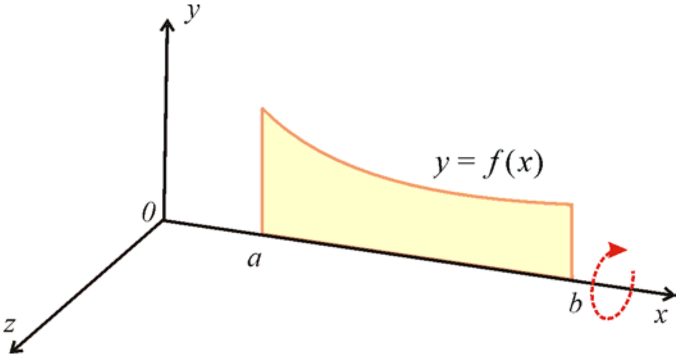
Seznámíte se s další aplikací určitého integrálu – výpočtem objemu rotačního tělesa.

Předpokládané znalosti

Předpokládáme, že jste si prostudovali zavedení pojmu určitý integrál (kapitola 2.1). Dále předpokládáme, že znáte základní metody výpočtu určitého integrálu.

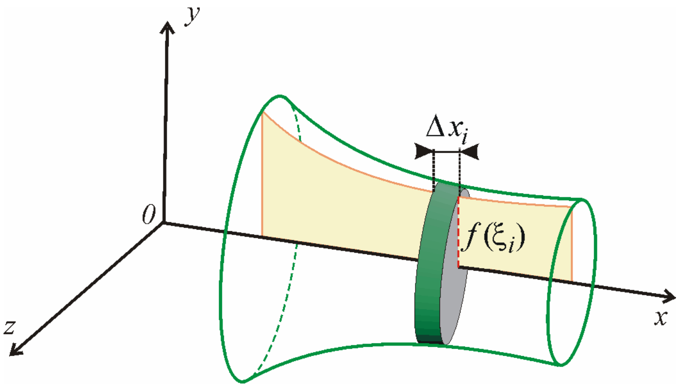
Výklad

Uvažujme křivočarý lichoběžník ohraničený shora grafem nezáporné funkce $f(x)$, přímkami $x = a$, $x = b$ a osou x. Rotací tohoto křivočarého lichoběžníka kolem osy x vznikne rotační těleso. Naším cílem bude vypočítat objem tohoto tělesa.



Obr. 3.3.1. Rotace křivočarého lichoběžníka

Budeme postupovat analogicky jako při zavedení Riemannova určitého integrálu (kap. 2.1). Řezy kolmými na osu x rozdělíme rotační těleso na n tenkých plátků tloušťky Δx (můžete si představit, že těleso krájíte na kráječi jako šunku).



Obr. 3.3.2. Rozřezání tělesa na tenké plátky

Každý plátek můžeme aproximovatválečkem, jehož podstavou je kruh o poloměru $f(\xi_i)$ s výškou Δx_i (obr. 3.3.2). Objem *i* - tého válečku bude $\Delta V_i = \pi f^2(\xi_i)\Delta x_i$.

Objem celého tělesa bude přibližně roven součtu objemů jednotlivých plátků (válečků):

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = \sum_{i=1}^{n} \pi f^2(\xi_i)\Delta x_i .$$

Čím bude dělení intervalu $< a, b >$ jemnější, tím méně se bude součet objemů plátků $\sum_{i=1}^{n} \Delta V_i$ lišit od objemu daného tělesa. Proto objem definujeme jako limitu tohoto součtu pro $n \to \infty$, když zároveň všechny délky $\Delta x_i \to 0$. Klademe

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx .$$

Věta 3.3.1.

Nechť je funkce $f(x)$ spojitá a nezáporná na intervalu $< a, b >$. Pak rotační těleso, které vznikne rotací křivočarého lichoběžníka ohraničeného shora funkcí $f(x)$, osou *x* a přímkami $x = a$, $x = b$ kolem osy *x*, má objem

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx .$$

Graf nezáporné funkce $y = f(x)$ může být popsán parametrickými rovnicemi

$$x = \varphi(t),$$

$$y = \psi(t), \quad t \in < \alpha, \beta > .$$

Je-li funkce $x = \varphi(t)$ ryze monotonní na intervalu $< \alpha, \beta >$, pak k ní existuje inverzní funkce $t = \varphi^{-1}(x)$. Rovnici křivky můžeme proto psát ve tvaru $y = \psi(\varphi^{-1}(x)) = f(x)$. Uvažované rotační těleso bude mít objem $V = \pi \int_a^b f^2(x)dx = \pi \int_a^b \psi^2(\varphi^{-1}(x))dx$.

Odtud substitucí $x = \varphi(t)$, ze které plyne $dx = \varphi'(t)dt$, dostaneme

$$V = \int_\alpha^\beta \psi^2(t)\left|\varphi'(t)\right|dt .$$

Věta 3.3.2.

Nechť funkce f je dána parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in < \alpha, \beta >$, přičemž funkce $\varphi(t)$ má spojitou derivaci na intervalu $< \alpha, \beta >$ a funkce $\psi(t)$ je spojitá a nezáporná na intervalu $< \alpha, \beta >$. Pak pro objem rotačního tělesa, které vznikne rotací elementární oblasti

$\varphi(\alpha) \le x \le \varphi(\beta)$,

$0 \le y \le \psi(t)$,

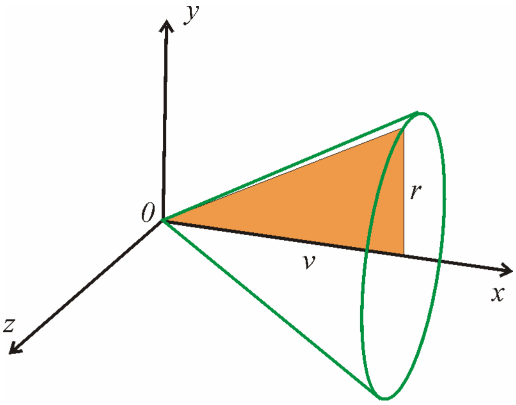
kolem osy x, platí $V = \int_{\alpha}^{\beta} \psi^2(t) \left|\varphi'(t)\right| dt$.

Řešené úlohy

Příklad 3.3.1. Ověřte vzorec pro výpočet objemu kuželu s poloměrem podstavy r a výškou v.

Řešení:

Vrchol kuželu umístíme do počátku souřadné soustavy tak, aby osa kužele splývala s osou x. Plášť kužele vznikne rotací přímky $y = \frac{r}{v}x$ kolem osy x pro $x \in < 0, v >$ (obr. 3.3.3).



Obr. 3.3.3. Objem kužele

Dosazením do vztahu z věty 3.3.1 dostaneme

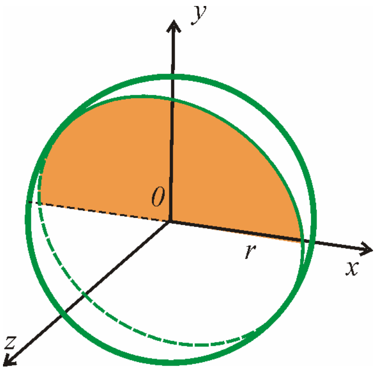
$$V = \pi \int_0^v \left(\frac{r}{v}x\right)^2 dx = \pi \frac{r^2}{v^2} \int_0^v x^2 dx = \pi \frac{r^2}{v^2} \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^v = \frac{1}{3}\pi r^2 v,$$

což je vztah, který znáte z geometrie.

Příklad 3.3.2. Odvoďte vztah pro výpočet objemu koule o poloměru $r > 0$.

Řešení:

Rovnice kružnice se středem v počátku a poloměrem r je $x^2 + y^2 = r^2$. Odtud $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$, přičemž $x \in \langle -r, r \rangle$. Rotací horní půlkružnice $y = +\sqrt{r^2 - x^2}$ dostaneme plášť koule.



Obr. 3.3.4. Objem koule

Pro její objem bude platit

$$V = \pi \int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx = \pi \int_{-r}^{r} \left(r^2 - x^2\right) dx = 2\pi \int_{0}^{r} \left(r^2 - x^2\right) dx = 2\pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^r =$$

$$= 2\pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi r^3 .$$

Poznámka

Při výpočtu jsme využili skutečnosti, že funkce $(r^2 - x^2)$ je sudá. Podle věty 2.4.2 bude integrál s mezemi $\langle -r, r \rangle$ roven dvojnásobku integrálu s mezemi $\langle 0, r \rangle$. Je to logické, neboť objem celé koule se rovná dvojnásobku objemu polokoule.

Pro výpočet objemu koule můžeme také využít parametrické rovnice horní půlkružnice:

$x = r\cos t$,

$y = r\sin t$, $t \in \langle 0, \pi \rangle$ (viz příklad 3.2.2).

Jelikož $\varphi'(t) = (r\cos t)' = -r\sin t$, dostaneme po dosazení do vztahu z věty 3.3.2

$$V = \pi \int_0^{\pi} r^2 \sin^2 t \, r \sin t \, dt = \pi r^3 \int_0^{\pi} \sin^3 t \, dt = \pi r^3 \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 t) \sin t \, dt = \left| \begin{array}{l} \text{substituce} \\ \cos t = u \\ -\sin t \, dt = du \\ 0 \mapsto 1, \ \pi \mapsto -1 \end{array} \right| =$$

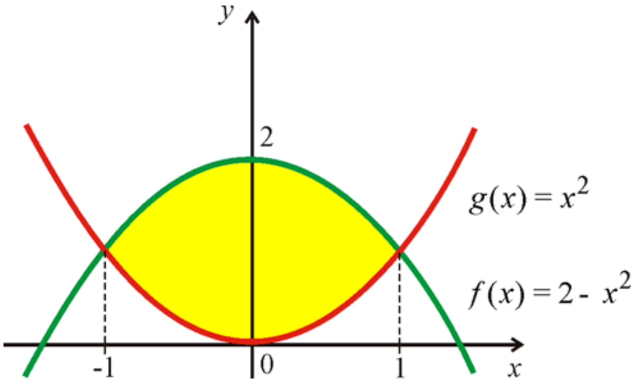
$$= \pi r^3 \int_1^{-1} (-1)(1-u^2)du = \pi r^3 2 \int_0^1 (1-u^2)du = 2\pi r^3 \left[u - \frac{u^3}{3} \right]_0^1 = \frac{4}{3}\pi r^3 .$$

Příklad 3.3.3. Vypočtěte objem tělesa, které vznikne rotací oblasti ohraničené křivkami

$y = x^2$ a $y = 2 - x^2$ kolem osy x.

Řešení:

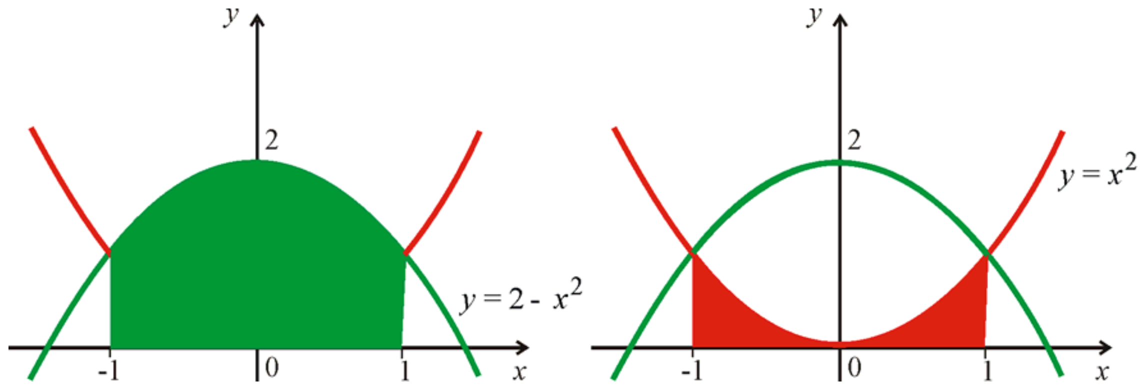
Oblast je ohraničená dvěma parabolami, viz. obr. 3.3.5.



Obr. 3.3.5. Oblast z příkladu 3.3.3

Křivky $f(x) = 2 - x^2$ a $g(x) = x^2$ se protínají v bodech $x_1 = -1$ a $x_2 = 1$.

Hledaný objem dostaneme, když od objemu tělesa, jehož plášť vznikne rotací křivky $f(x) = 2 - x^2$ kolem osy x pro $x \in < -1, 1 >$, odečteme objem tělesa, které vznikne rotací obrazce pod křivkou $g(x) = x^2$ na stejném intervalu (obr. 3.3.6).



$$V \quad = \quad \pi \int_{-1}^{1} \left(2 - x^2\right)^2 dx \qquad - \qquad \pi \int_{-1}^{1} \left(x^2\right)^2 dx$$

Obr. 3.3.6. Odečtení objemů dvou těles

Pro objem rotačního tělesa, které vznikne rotací oblasti ohraničené křivkami $y = x^2$ a $y = 2 - x^2$ kolem osy x, dostaneme:

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx-\pi\int_a^b g^2(x)dx=\pi\int_{-1}^{1}(2-x^2)^2dx-\pi\int_{-1}^{1}(x^2)^2dx=\pi\int_{-1}^{1}\left[(2-x^2)^2-(x^2)^2\right]dx=$$

$$=\pi\int_{-1}^{1}\left[(4-4x^2+x^4)-x^4\right]dx=\pi\int_{-1}^{1}(4-4x^2)\,dx=4\pi\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx=8\pi\int_0^1(1-x^2)dx=$$

$$=8\pi\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=8\pi\left[1-\frac{1}{3}\right]=\frac{16}{3}\pi\,.$$

Poznámka

Upozornění!

Pro výpočet objemu rotačního tělesa, které vznikne rotací oblasti ohraničené křivkami $g(x)\le f(x)$ kolem osy x pro $x\in\langle a,b\rangle$, použijeme vztah

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx-\pi\int_a^b g^2(x)dx=\pi\int_a^b\left[f^2(x)-g^2(x)\right]dx\,.$$

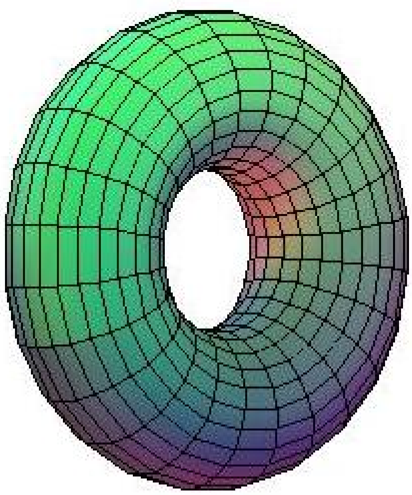
Často se setkáváme s chybou, kdy je umocněn rozdíl funkcí.

Vztah $V=\pi\int_a^b[f(x)-g(x)]^2dx$ *je evidentně nesprávný!*

Příklad 3.3.4. Vypočtěte objem rotačního anuloidu.

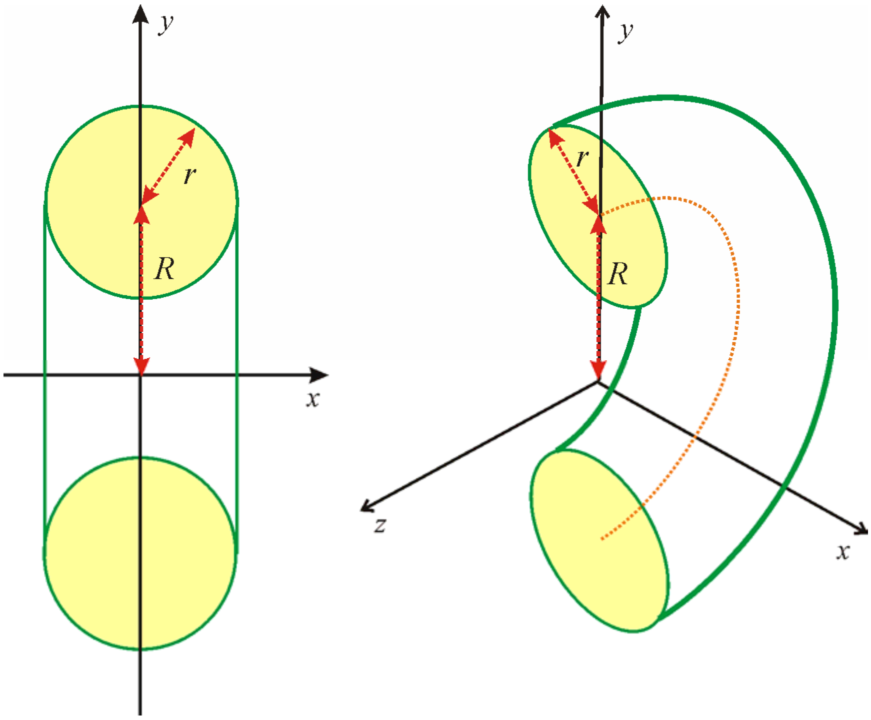
Řešení:

Anuloid (torus), viz obr. 3.3.7, je těleso vytvořené rotací kruhu kolem přímky ležící v rovině tohoto kruhu a neprotínající kruh.



Obr. 3.3.7. Anuloid

Střed kruhu o poloměru r umístíme na osu y do vzdálenosti R od počátku, kde $r < R$ (obr. 3.3.8). Tento kruh necháme rotovat kolem osy x.



Obr. 3.3.8. Vznik anuloidu rotací kruhu kolem osy x

Hranici rotujícího kruhu tvoří kružnice, která má rovnici

$x^2 + (y-R)^2 = r^2$. Odtud $y - R = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$.

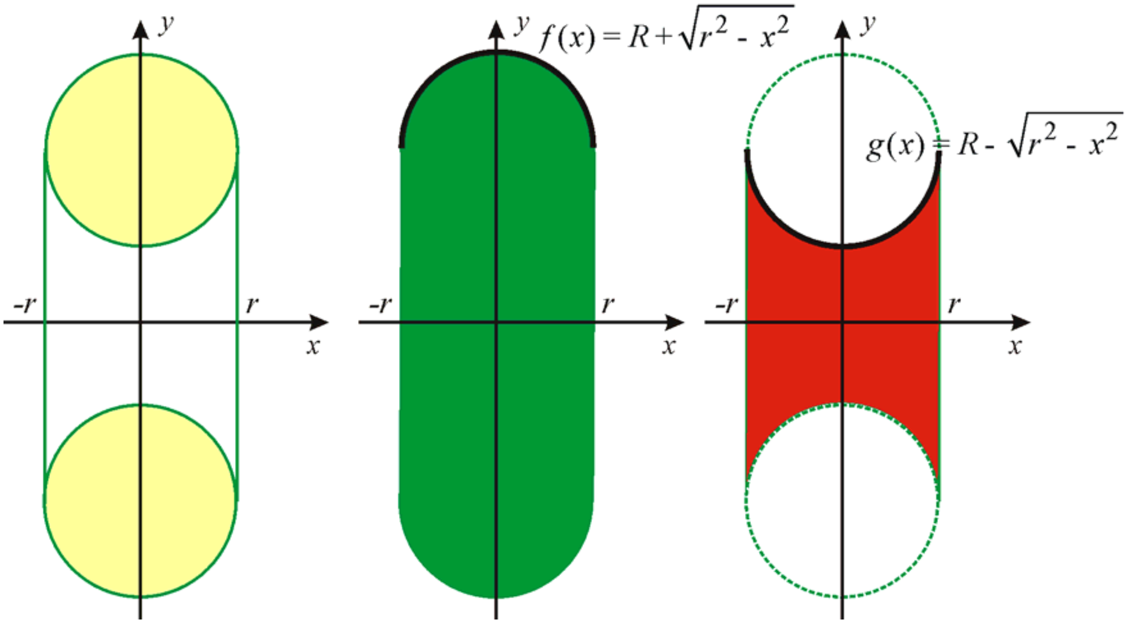
Podobně jako v předcházejícím příkladu je hranice rotující oblasti tvořena dvěma křivkami $f(x) = R + \sqrt{r^2 - x^2}$ a $g(x) = R - \sqrt{r^2 - x^2}$ pro $x \in \langle -r, r \rangle$. Objem anuloidu dostaneme jako rozdíl objemů dvou těles (obr. 3.3.9):

$$V = \pi \int_{-r}^{r} \left[f^2(x) - g^2(x) \right] dx == \pi \int_{-r}^{r} \left[\left(R + \sqrt{r^2 - x^2} \right)^2 - \left(R - \sqrt{r^2 - x^2} \right)^2 \right] dx =$$

$$= 4\pi R \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = 8\pi R \int_{0}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \left| \begin{array}{l} \text{substituce:} \\ x = r \sin u \\ dx = r \cos u\, du \\ 0 \mapsto 0,\ \mathrm{r} \mapsto \frac{\pi}{2} \end{array} \right| = 8\pi R \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 u}\; r \cos u\, du =$$

$$= 8\pi R r^2 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 u}\; \cos u\, du = 8\pi R r^2 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u\, du = 8\pi R r^2 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2u}{2} du =$$

$$= 4\pi Rr^2\left[u + \frac{\sin 2u}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi Rr^2\,\frac{\pi}{2} = 2\pi^2 Rr^2 .$$



$$\mathrm{V} \quad = \quad \pi\int_{-r}^{r} f^2(x)\,dx \quad - \quad \pi\int_{-r}^{r} g^2(x)\,dx$$

Obr. 3.3.9. Výpočet objemu anuloidu

Poznámka

Při výpočtu integrálu byla použita substituční metoda. Podobné integrály jsme již několikrát počítali - viz příklady 1.4.7 nebo 2.4.5.

Příklad 3.3.5. Vypočtěte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací obrazce ohraničeného osou x a jedním obloukem cykloidy kolem osy x.

Řešení:

S cykloidou jsme se podrobněji seznámili v příkladu 3.1.5. Cykloida (obr. 3.1.9) má parametrické rovnice:

$x = a(t - \sin t)$,

$y = a(1 - \cos t)$, $\quad a > 0, \quad t \in \boldsymbol{R}$.

První oblouk cykloidy dostaneme pro parametr $t \in < 0, 2\pi >$.

Protože $dx = a(1 - \cos t)dt$, dostaneme z věty 3.3.2:

$$V=\pi\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2 a(1-\cos t)\,dt=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3\,dt=$$

$$=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-3\cos t+3\cos^2 t-\cos^3 t)\,dt=$$

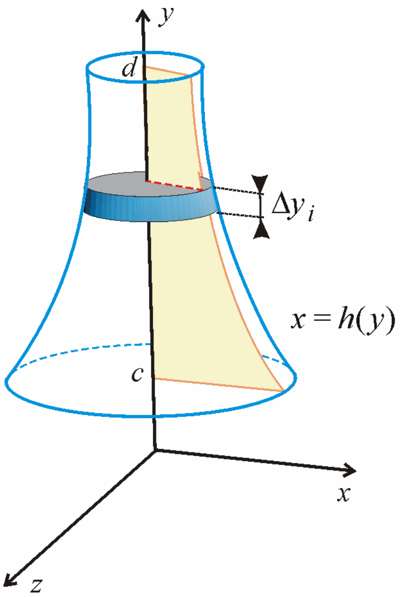
$$=\pi a^3\left(\left[t-3\sin t\right]_0^{2\pi}+3\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt-\int_0^{2\pi}(1-\sin^2 t)\cos t\,dt\right)=\left|\begin{array}{l}\text{substituce:}\\ \sin t=u\\ \cos t\,dt=du\\ 0\mapsto 0,\ 2\pi\mapsto 0\end{array}\right|=$$

$$=\pi a^3\left(2\pi+\frac{3}{2}\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{2\pi}-\int_0^0(1-u^2)\,du\right)=\pi a^3(2\pi+3\pi-0)=5\pi^2a^3.$$

Výklad

V předcházející části byl plášť rotačního tělesa vytvořen rotací spojité křivky $y=f(x)$, kolem osy x.

Zcela analogicky můžeme určit objem rotačního tělesa, jehož plášť vznikl rotací spojité křivky $x=h(y)$ pro $y\in\langle c,d\rangle$ kolem osy y (obr. 3.3.10).



Obr. 3.3.10. Rotace křivočarého lichoběžníka kolem osy y

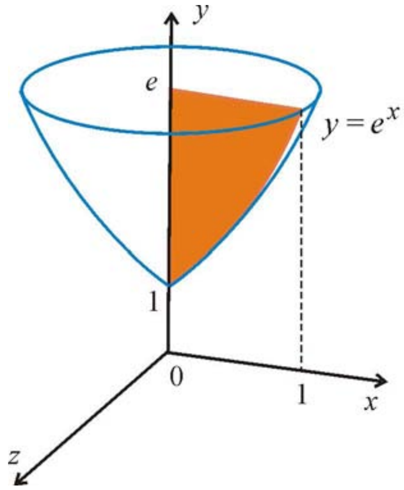
Objem vypočteme ze vztahu:

$$V=\pi\int_c^d h^2(y)\,dy.$$

Příklad 3.3.6. Vypočtěte objem rotačního tělesa, jehož plášť vznikne rotací křivky $y = e^x$ pro $x \in <0,1>$ kolem osy y.

Řešení:

Funkce $y = e^x$ je prostá na definičním oboru a inverzní funkce k ní bude $x = \ln y$, $y > 0$. Pro $x \in <0,1>$ bude $y \in <1,e>$ (obr. 3.3.11).



Obr. 3.3.11. Rotace křivky $y = e^x$ kolem osy y

Objem rotačního tělesa bude:

$$V = \pi\int_1^e \ln^2 y\, dy = \begin{vmatrix} u' = 1 & v = \ln^2 y \\ u = y & v' = (2\ln y)\dfrac{1}{y} \end{vmatrix} = \pi\left(\left[y\ln^2 y\right]_1^e - 2\int_1^e \ln y\, dy\right) =$$

$$= \pi\left(\left[e-0\right] - 2\int_1^e \ln y\, dy\right) = \begin{vmatrix} u' = 1 & v = \ln y \\ u = y & v' = \dfrac{1}{y} \end{vmatrix} = \pi\left(e - 2\left[y\ln y\right]_1^e + 2\int_1^e 1\, dy\right) =$$

$$= \pi\left(e - 2e + 2\left[y\right]_1^e\right) = \pi\left(e - 2e + 2e - 2\right) = \pi\left(e-2\right).$$

Kontrolní otázky

1. Uveďte vztah pro výpočet objemu tělesa, jehož plášť vznikne rotací křivky $y = f(x)$ kolem osy x.
2. Uveďte vztah pro výpočet objemu tělesa při rotaci kolem osy x, je-li rotující křivka dána parametrickými rovnicemi.

3. Jak bude vypadat vztah pro výpočet objemu tělesa, jestliže křivka daná parametrickými rovnicemi bude rotovat kolem osy y?

4. Jak vypočtete objem tělesa, jehož plášť vytvoří křivka $y = x^2$, $0 \le x \le 1$, při rotaci kolem osy x? Jaký bude objem při rotaci kolem osy y?

5. Jak vypočtěte objem tělesa, jehož plášť vytvoří křivka $y = \sqrt{1+x^2}$, $0 \le x \le 1$, při rotaci kolem osy x. Jaké těleso vznikne?

6. Jak vypočtete objem rotačního elipsoidu, jehož plášť vytvoří elipsa $2x^2 + y^2 = 4$ při rotaci kolem osy x (kolem osy y)?

Úlohy k samostatnému řešení

1. Vypočtěte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací rovinného obrazce ohraničeného zadanými křivkami kolem osy x:

a) $y = x^2; \quad x = y^2$

b) $y = x^2; \quad x = y^3$

c) $y = x^2; \quad y = 1 - x^2$

d) $y = x; \quad y = \dfrac{1}{x}; \quad x = 2$

e) $y = 2 - 2x^2; \quad y = 1 - x^2$

f) $y = \operatorname{tg} x; \quad y = 0; \quad x = 0; \quad x = \dfrac{\pi}{4}$

g) $y = \arcsin x; \quad y = 0; \quad x = 0; \quad x = 1$

h) $xy = 4; \quad y = 0; \quad x = 1; \quad x = 4$

i) $y = 2^x; \quad 3x - 4y + 5 = 0$

j) $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 1}{x - 3}}; \quad y = 0; \quad |x| = 1$

k) $x^2 + y^2 = 4; \quad x + y = 2$

l) $y = \sin x; \quad y = 0; \quad x = 0; \quad x = \pi$

2. Vypočtěte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací rovinného obrazce ohraničeného zadanými křivkami kolem osy y:

a) $y = x^2; \quad x = y^2$

b) $y^2 + x - 4 = 0; \quad x = 0$

c) $y = \sin x; \quad y = \dfrac{1}{2}; \quad x = 0$

d) $y = e^{-x}; \quad y = 0; \quad x = 0; \quad x = 1$

e) $y^2 = x^3; \quad y = 0; \quad x = 1$

f) $y = \dfrac{x^2}{2}; \quad y = \dfrac{|x|}{2}$

g) $4y = x^2; \quad 4x = y^2$

h) $y = \ln x; \quad y = 0; \quad y = 1; \quad x = 0$

3. Vypočtěte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací rovinného obrazce ohraničeného osou x a danou, parametricky popsanou, křivkou při rotaci kolem osy x:

a) $x=t^2,\ y=t-\dfrac{t^3}{3};\quad 0\le t\le\sqrt{3}$

b) $x=t-\sin t,\ y=1-\cos t;\quad 0\le t\le 2\pi$

c) $x=\sin^3 t,\ y=\cos^3 t;\quad 0\le t\le\pi$

d) $x=3\sin t,\ y=3\cos t;\quad 0\le t\le\pi$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) $\dfrac{3\pi}{10}$; **b)** $\dfrac{2\pi}{5}$; **c)** $\dfrac{2\pi\sqrt{2}}{3}$; **d)** $\dfrac{11\pi}{6}$; **e)** $\dfrac{16\pi}{5}$; **f)** $\pi-\dfrac{\pi^2}{4}$; **g)** $\dfrac{\pi^3}{4}-2\pi$; **h)** 12π; **i)** $\dfrac{\pi}{2}\left(7-\dfrac{15}{4\ln 2}\right)$; **j)** $\pi\left(9-8\ln 2\right)$; **k)** $\dfrac{8\pi}{3}$; **l)** $\dfrac{\pi^2}{2}$. **2. a)** $\dfrac{3\pi}{10}$; **b)** $\dfrac{512\pi}{15}$; **c)** $\dfrac{\pi^3}{72}+\dfrac{\sqrt{3}\pi^2}{6}-\pi$; **d)** $2\pi\left(1-\dfrac{2}{e}\right)$; **e)** $\dfrac{4\pi}{7}$; **f)** $\dfrac{\pi}{12}$; **g)** $\dfrac{96\pi}{5}$; **h)** $\dfrac{\pi}{2}\left(e^2+1\right)$. **3. a)** $\dfrac{3\pi}{4}$; **b)** 5π; **c)** $\dfrac{32\pi}{105}$; **d)** 36π.

Kontrolní test

1. Vypočtěte objem tělesa, jehož plášť vytvoří oblouk křivky $y = \operatorname{tg} x$ pro $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$ rotací kolem osy x.

   a) $\pi(4-\pi)$, b) $\pi(1-\pi)/4$, c) $\pi(4-\pi)/4$, d) $\pi(1-\pi)$.

2. Vypočtěte objem tělesa, jehož plášť vytvoří oblouk křivky $xy = 6$ pro $1 \le x \le 10$ otáčením kolem osy x.

   a) 36π, b) $32{,}4\pi$, c) $39{,}6\pi$, d) $5{,}4\pi$.

3. Vypočtěte objem tělesa, které vytvoří rovinný obrazec ohraničený osami x, y a obloukem křivky $y = \cos(x - \frac{\pi}{3})$ otáčením kolem osy x.

   a) $\frac{5}{12}\pi^2 + \frac{\sqrt{3}}{8}\pi$, b) $\frac{5}{12}\pi^2 - \frac{\sqrt{3}}{8}\pi$, c) $\frac{5}{12}\pi^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}\pi$, d) $\frac{5}{12}\pi^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}\pi$.

4. Vypočtěte objem tělesa, jehož plášť vytvoří oblouk řetězovky $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ pro $-2 \le x \le 2$.

   a) $\frac{\pi}{4}(e^4 + 8 + e^{-4})$, b) $\frac{\pi}{4}(e^4 + 8 - e^{-4})$,

   c) $\frac{\pi}{2}(e^4 - 8 + e^{-4})$, d) $\frac{\pi}{2}(e^4 + 8 - e^{-4})$.

5. Vypočtěte objem tělesa, které vznikne rotací rovinného obrazce ohraničené křivkami $y = 2(\frac{x}{5})^2$ a $y = 2\left|\frac{x}{5}\right|$ kolem osy x.

   a) $\frac{8}{3}\pi$, b) $\frac{8}{5}\pi$, c) $\frac{16}{5}\pi$, d) $\frac{16}{3}\pi$.

6. Vypočtěte objem úseče koule o poloměru r, je-li výška úseče $v < r$.

   a) $\pi v^2(r - \frac{1}{3}v)$, b) $\pi v^2(2r - \frac{1}{3}v)$,

   c) $\pi v^2(r - \frac{2}{3}v)$, d) $2\pi v^2(r - \frac{1}{3}v)$.

7. Vypočtěte objem tělesa, které vznikne rotací rovinné oblasti ohraničené křivkami

$x^2 - y^2 = 1$ a $x^2 + 4y^2 = 16$ v polorovině $x \geq 0$ kolem osy x.

a) $\frac{16}{3}\pi$, b) $\frac{20}{3}\pi$, c) $\frac{14}{3}\pi$, d) $\frac{10}{3}\pi$.

8. Vypočtěte objem tělesa, které vznikne rotací rovinné oblasti ohraničené křivkami

$x^2 - y^2 = 1$ a $x^2 + 4y^2 = 16$ v polorovině $x \geq 0$ kolem osy y.

a) $10\pi\sqrt{3}$, b) $24\pi\sqrt{3}$, c) $4\pi\sqrt{3}$, d) $20\pi\sqrt{3}$.

9. Vypočtěte objem tělesa, jehož plášť vytvoří oblouk křivky $x = 4\cos t,\ y = 3\sin t$ pro

$0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$ otáčením kolem osy x.

a) $3\pi(\sqrt{2}+8)$, b) $3\pi(5\sqrt{2}+8)$ c) $3\pi(5\sqrt{2}-8)$, d) $3\pi(-5\sqrt{2}+8)$.

10. Vypočtěte objem tělesa, jehož plášť vytvoří oblouk křivky $x = \cos t + \ln \operatorname{tg}\frac{t}{2},\ y = \sin t$

pro $\frac{\pi}{3} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ otáčením kolem osy x.

a) $\frac{\pi}{3}$, b) $\frac{\pi}{6}$, c) $\frac{\pi}{2}$, d) $\frac{\pi}{4}$.

Výsledky testu

1. c); 2. b); 3. a); 4. b); 5. d); 6. a); 7. c); 8. d); 9. d); 10. b).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v 8 případech, pokračujte další kapitolou.

V opačném případě je třeba prostudovat kapitolu 3.3 znovu.

Shrnutí lekce

Objem rotačního tělesa, které vznikne rotací křivočarého lichoběžníka $0 \leq y \leq f(x)$ pro $a \leq x \leq b$ kolem osy x, vypočteme ze vztahu $V = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx$. Analogicky pro objem rotačního tělesa, které vznikne rotací křivočarého lichoběžníka $0 \leq x \leq h(y)$ pro $c \leq y \leq d$

kolem osy y, užijeme vztah $V = \pi \int_c^d h^2(y)\,dy$. Jelikož se v integrandu vyskytuje druhá mocnina, nečiní obvykle výpočet příslušného integrálu větší problémy.

Objemy obecnějších těles, která nejsou rotační, lze vypočítat pomocí dvojných nebo trojných integrálů. Podrobnosti naleznete v textu Matematika III.

3.4. Obsah pláště rotačního tělesa

Cíle

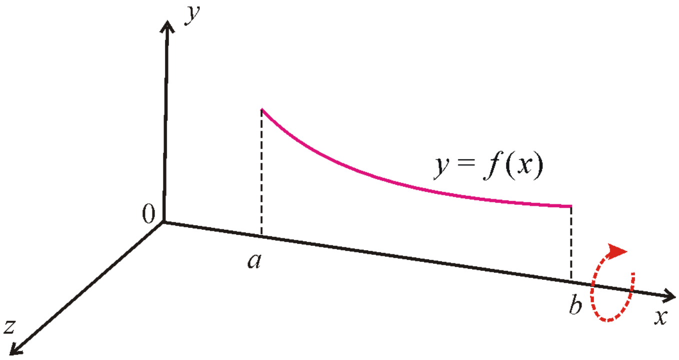
Seznámíte se s další aplikací určitého integrálu – výpočtem obsahu pláště rotačního tělesa.

Předpokládané znalosti

Předpokládáme, že jste si prostudovali zavedení pojmu určitý integrál (kapitola 2.1). Dále předpokládáme, že znáte základní metody výpočtu určitého integrálu. Budeme také používat vztahy pro výpočet délky oblouku křivky (kapitola 3.2).

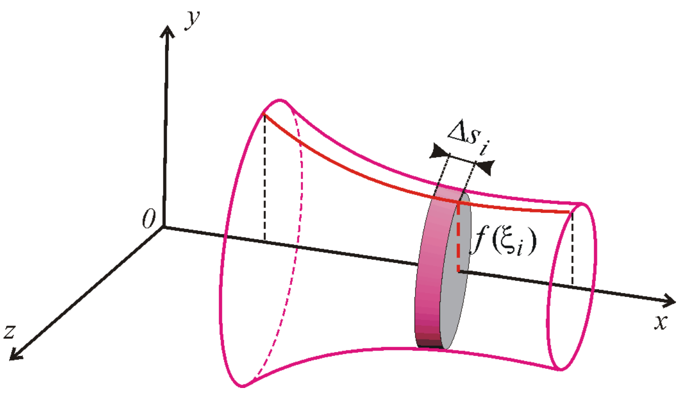
Výklad

Uvažujme nezápornou funkci $f(x)$ na intervalu $< a,b >$. Naším úkolem bude vypočítat obsah pláště rotačního tělesa, které vznikne rotací grafu této funkce kolem osy x (obr.3.4.1).



Obr. 3.4.1. Rotace křivky kolem osy x

Budeme postupovat analogicky jako při výpočtu objemu rotačního tělesa (kap. 3.3). Řezy kolmými na osu x rozdělíme rotační těleso na n tenkých plátků. (Opět si můžete představit, že těleso krájíte na kráječi jako šunku. Tentokrát nás zajímá slupka jednotlivých plátků.)



Obr. 3.4.2. Rozřezání tělesa na tenké plátky

Každý plátek můžeme aproximovat komolým kuželem, jehož plášť vytvoří úsečka Δs_i rotující kolem osy x (obr. 3.4.2). Plášť i - tého komolého kuželu bude $\Delta S_i \approx 2\pi f(\xi_i)\Delta s_i$.

Obsah pláště celého tělesa bude přibližně roven součtu obsahů plášťů jednotlivých plátků (komolých kuželů):

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} 2\pi f(\xi_i)\Delta s_i \,.$$

Čím bude dělení intervalu $< a, b >$ jemnější, tím méně se bude součet obsahů plášťů plátků $\sum_{i=1}^{n} \Delta S_i$ lišit od obsahu pláště daného tělesa. Proto obsah pláště definujeme jako limitu tohoto součtu pro $n \to \infty$, když zároveň všechny délky $\Delta s_i \to 0$. Klademe

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\, ds \,.$$

Z kapitoly 3.2 víme, že pro element délky křivky platí

$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$. Dosazením za ds dostaneme:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx \,.$$

Věta 3.4.1.

Nechť je funkce $f(x)$ spojitá a nezáporná na intervalu $< a, b >$ a má zde spojitou derivaci $f'(x)$. Pak pro obsah rotační plochy vzniklé rotací oblouku křivky $y = f(x)$ kolem osy x platí

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx \,.$$

Poznámka

Vzorec z věty 3.4.1 můžeme zapsat ve tvaru

$$S = 2\pi\int_a^b y\,ds = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx.$$ *Tento vzorec můžeme snadno použít i v případě, že je uvažovaná křivka dána parametrickými rovnicemi.*

Je-li rotující křivka popsána parametrickými rovnicemi

$x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $t\in<\alpha,\beta>$,

pak pro ds platí (věta 3.2.2) $ds=\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt$.

Pro výpočet obsahu plochy, která byla vytvořena rotací uvedené křivky kolem osy x, dostáváme:

$$S = 2\pi\int_a^b y\,ds = 2\pi\int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt.$$

Věta 3.4.2.

Nechť je funkce f dána parametrickými rovnicemi $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $t\in<\alpha,\beta>$, přičemž funkce $\varphi(t)$ a $\psi(t)$ mají spojité derivace na intervalu $<\alpha,\beta>$ a funkce $\psi(t)$ je nezáporná na intervalu $<\alpha,\beta>$. Pak pro obsah plochy, která vznikne rotací grafu funkce f kolem osy x platí

$$S = 2\pi\int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt.$$

Řešené úlohy

Příklad 3.4.1. Vypočtěte obsah pláště rotačního kužele, který je vytvořen úsečkou $y=x$ pro $x\in<0,3>$ rotující kolem osy x.

Řešení:

V příkladu 3.3.1 jsme již počítali objem kuželu (obr. 3.3.3).

Pro danou úsečku $y=x$ pro $x\in<0,3>$ dostáváme

$$ds = \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \sqrt{1+1^2}\,dx = \sqrt{2}dx\,.$$

Obsah pláště rotačního kužele bude

$$S = 2\pi\int_0^3 y\,ds = 2\pi\int_0^3 x\sqrt{2}\,dx = 2\pi\sqrt{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3 = 9\pi\sqrt{2}\,.$$

Příklad 3.4.2. Odvoďte vztah pro výpočet povrchu koule o poloměru $r > 0$.

Řešení:

Rovnice kružnice se středem v počátku a poloměrem r je $x^2 + y^2 = r^2$. Odtud $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$, přičemž $x \in < -r, r >$. Rotací horní půlkružnice $y = +\sqrt{r^2 - x^2}$ dostaneme plášť koule (viz obr. 3.3.4).

Před dalším výpočtem si upravíme výraz $1 + (y')^2$.

$$y' = \frac{1}{2}\left(r^2 - x^2\right)^{-\frac{1}{2}}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\,,$$

$$1 + (y')^2 = 1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2} = \frac{r^2}{r^2 - x^2}\,.$$

Pro povrch koule bude z věty 3.4.1 platit

$$S = 2\pi\int_{-r}^{r} y\sqrt{1+(y')^2}\,dx = 2\pi\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2 - x^2}\sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}}dx = 2\pi r\int_{-r}^{r} dx = 2\pi r\left[x\right]_{-r}^{r} = 4\pi r^2\,.$$

Dostali jsme známý vztah pro povrch koule.

Poznámka

Musíme přiznat, že předcházející výpočet nebyl zcela korektní, protože derivace funkce $y' = \dfrac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$ *není definována pro* $x = \pm r$. *Nejsou tedy splněny předpoklady věty 3.4.1. Mohli bychom to napravit tak, že bychom počítali integrál na intervalu* $< -r + \varepsilon, r - \varepsilon >$, *kde* $\varepsilon > 0$ *je malé číslo (vlastně bychom z koule odřezali dva malé vrchlíky). Plášť koule bez vrchlíků by byl* $S = 4\pi r(r - \varepsilon)$. *Pro* $\varepsilon \to 0$ *dostaneme očekávaný výsledek.*

Pro výpočet povrchu koule můžeme také využít parametrické rovnice horní půlkružnice:

$x = r\cos t$,

$y = r\sin t$, $\quad t \in < 0, \pi >$ (viz příklad 3.2.2).

Po dosazení do vztahu z věty 3.4.2 dostaneme

$$S = 2\pi\int_0^{\pi} \psi(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt = 2\pi\int_0^{\pi} r\sin t\sqrt{[-r\sin t]^2 + [r\cos t]^2}\,dt =$$

$$= 2\pi r^2\int_0^{\pi} \sin t\sqrt{[\sin t]^2 + [\cos t]^2}\,dt = 2\pi r^2\int_0^{\pi} \sin t\;dt = 2\pi r^2\left[-\cos t\right]_0^{\pi} = 4\pi r^2 .$$

Příklad 3.4.3. Vypočtěte obsah rotační plochy, která vznikne rotaci asteroidy kolem osy *x*.

Řešení:

Postup výpočtu bude analogický jako v příkladu 3.2.3. Vznik asteroidy je objasněn na obrázku 3.2.4.

Parametrické rovnice asteroidy jsou

$x = a\cos^3 t$,

$y = a\sin^3 t$, $a > 0$.

Vzhledem k symetrii asteroidy se můžeme omezit na $t \in < 0, \frac{\pi}{2} >$. Rotací dostaneme polovinu rotační plochy. Pro její obsah platí (srovnej s příkladem 3.2.3):

$$\frac{S}{2} = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin^3 t\sqrt{\left[-3a\cos^2 t\sin t\right]^2 + \left[3a\sin^2 t\cos t\right]^2}\,dt = 2\pi a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t(3a\sin t\cos t)\;dt =$$

$$= 6\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\cos t\;dt = 6\pi a^2\left[\frac{\sin^5 t}{5}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{6\pi a^2}{5} .$$

Obsah celé rotační plochy bude dvojnásobný:

$$S = 2\frac{6\pi a^2}{5} = \frac{12\pi a^2}{5} .$$

Příklad 3.4.4. Vypočtěte povrch rotačního anuloidu.

Řešení:

S anuloidem jsme se podrobně seznámili v příkladu 3.3.4. Podívejte se na obrázky 3.3.7 a 3.3.8. Povrch anuloidu je složený ze dvou ploch.

První vznikne rotací křivky $f(x)=R+\sqrt{r^2-x^2}$ (obr. 3.3.9), druhá plocha vznikne rotací křivky $g(x)=R-\sqrt{r^2-x^2}$ pro $x\in<-r,r>$ kolem osy *x*.

Je zřejmé, že $f'(x)=-g'(x)$ a proto $1+[f'(x)]^2=1+[g'(x)]^2$.

Povrch anuloidu bude

$$S=S_1+S_2=2\pi\int_{-r}^{r} f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx+2\pi\int_{-r}^{r} g(x)\sqrt{1+[g'(x)]^2}\,dx=$$

$$=2\pi\int_{-r}^{r}[f(x)+g(x)]\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx=2\pi\int_{-r}^{r}2R\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx=$$

$$=4\pi R\int_{-r}^{r}\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx=4\pi R\pi r=4\pi^2 rR\,.$$

Využili jsme toho, že $\int_{-r}^{r}\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx=\pi r$, neboť hodnota integrálu je rovna délce poloviny kružnice o poloměru *r*.

Kontrolní otázky

1. Uveďte vztah pro výpočet obsahu rotační plochy, která vznikne rotací křivky $y=f(x)$ kolem osy *x*.
2. Uveďte vztah pro výpočet obsahu rotační plochy, je-li rotující křivka dána parametrickými rovnicemi a rotuje kolem osy *x*.
3. Jak bude vypadat vztah pro výpočet obsahu rotační plochy, jestliže křivka daná parametrickými rovnicemi bude rotovat kolem osy *y*?
4. Odvoďte vztah pro výpočet obsahu pláště rotačního kužele s poloměrem podstavy *r* a výškou *v*. (Viz příklad 3.3.1.)
5. Jak vypočtete obsah pláště rotačního komolého kužele, který vznikne rotací křivky $y=kx$, $0<a\le x\le b$ kolem osy *x*?
6. Jak vypočtete obsah rotační plochy, která vznikne rotací křivky dané parametrickými rovnicemi $x=2t+1$, $y=4-t$ pro $t\in<0,4>$ kolem osy *x*? Jaké těleso vznikne?

7. Sestavte integrál pro výpočet obsahu rotační plochy, která vznikne rotací paraboly $y = x^2$ pro $0 \le x \le 2$ kolem osy x (kolem osy y). Zkuste integrál řešit pomocí některého matematického programu (např. Derive, Maple, Mathematica).

Úlohy k samostatnému řešení

1. Vypočtěte obsah rotační plochy, která vznikne rotací dané křivky kolem osy x:

a) $y = x^3; \quad -\frac{2}{3} \le x \le \frac{2}{3}$

b) $y = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}; \quad 0 \le x \le 2$

c) $y^2 = 4x; \quad 0 \le x \le 3$

d) $y = \operatorname{tg} x; \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{4}$

e) $y = 2\left(e^{\frac{x}{4}} + e^{-\frac{x}{4}}\right); \quad 0 \le x \le 4$

f) $y = \sin x; \quad 0 \le x \le \pi$

2. Vypočtěte obsah rotační plochy, která vznikne rotací dané křivky kolem osy x:

a) $x = 2\cos t,\ y = 2\sin t; \quad 0 \le t \le \pi$

b) $x = 3\cos^3 t,\ y = 3\sin^3 t; \quad 0 \le t \le \pi$

c) $x = 4(t - \sin t),\ y = 4(1 - \cos t); \quad 0 \le t \le 2\pi$

d) $x = \sin 2t,\ y = 2\sin^2 t; \quad 0 \le t \le \pi$

e) $x = e^t \sin t,\ y = e^t \cos t; \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

f) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 9$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) $\frac{196\pi}{729}$; **b)** $\pi\left(4+e^2-\frac{1}{e^2}\right)$; **c)** $\frac{56\pi}{3}$; **d)** $\frac{\pi}{2}\left[\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{5}-1\right)\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right]$;

e) $4\pi\left(4+e^2-\frac{1}{e^2}\right)$; **f)** $2\pi\left(\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)\right)$. **2. a)** 16π; **b)** $\frac{108\pi}{5}$; **c)** $\frac{512\pi}{3}$; **d)** $4\pi^2$;

e) $\frac{2\pi\sqrt{2}}{5}\left(e^{\pi}-2\right)$; **f)** $\frac{8748\pi}{5}$.

Kontrolní test

1. Vypočtěte povrch vrchlíku kulové plochy o poloměru *r*, jehož výška je $v < r$.

   a) $2\pi rv$, b) $2\pi r(2r+v)$,

   c) πrv, d) $2\pi r(r+v)$.

2. Vypočtěte obsah rotační plochy, kterou vytvoří oblouk paraboly $y = 2\sqrt{x}$ pro $3 \le x \le 8$ při otáčení kolem osy *x*.

   a) $\frac{76}{3}\pi$, b) 36π, c) $\frac{152}{3}\pi$, d) 152π.

3. Vypočtěte obsah rotační plochy, kterou vytvoří oblouk křivky $y = (1-x)\sqrt{\frac{x}{3}}$ pro $\frac{1}{2} \le x \le 1$ při otáčení kolem osy *x*.

   a) $\frac{13}{24}\pi$, b) $\frac{\pi}{3}$, c) $\frac{\pi}{24}$, d) $\frac{\pi}{8}$.

4. Vypočtěte obsah rotační plochy, kterou vytvoří oblouk řetězovky $y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$, $a > 0$ konst. pro $0 \le x \le a$ rotací kolem osy *x*.

   a) $\frac{\pi a^2}{4}(e^2 + e^{-2} + 4)$, b) $\pi a^2(1 + e^2 - e^{-2})$,

   c) $\frac{\pi a^2}{4}(e^2 - e^{-2} + 4)$, d) $\frac{\pi a^2}{4}(4 - e^2 + e^{-2})$.

5. Vypočtěte povrch tělesa, které vznikne rotací rovinné oblasti dané nerovnostmi $y \geq 0$,

$x^2 + y^2 \leq r^2, \quad x + y \leq r, \quad x \geq -\frac{r}{2}$, $r > 0$ konst. kolem osy x.

a) $\pi r^2(1+\sqrt{2})$, b) $\pi r^2(\frac{7}{4}+\sqrt{2})$, c) $\pi r^2(\frac{5}{4}+\sqrt{2})$, d) $\pi r^2(\frac{7}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2})$.

6. Vypočtěte obsah rotační plochy, kterou vytvoří oblouk paraboly $y = 4 - x^2$

pro $-2 \leq x \leq 2$ při otáčení kolem osy y.

a) $\frac{\pi}{6}(17\sqrt{17}+1)$, b) $\frac{\pi}{6}(17\sqrt{17}-1)$, c) $\frac{\pi}{3}(17\sqrt{17}-1)$, d) $\frac{\pi}{3}(17\sqrt{17}+1)$.

7. Vypočtěte obsah rotační plochy, kterou vytvoří oblouk křivky $x = t^2,\ y = \frac{t^3}{3} - t$

pro $-\sqrt{3} \leq t \leq 0$ rotací kolem osy x.

a) 3π, b) 9π, c) 6π, d) 12π.

8. Vypočtěte obsah rotační plochy, kterou vytvoří oblouk křivky $x = \sin 2t,\ y = 2\sin^2 t$

pro $0 \leq t \leq \pi$.

a) $8\pi^2$, b) $16\pi^2$, c) $12\pi^2$, d) $4\pi^2$.

9. Vypočtěte obsah rotační plochy, kterou vytvoří oblouk křivky traktrix

$x = 2\cos t + 2\ln\operatorname{tg}\frac{t}{2},\quad y = 2\sin t$ pro $\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ při otáčení kolem osy x.

a) 4π, b) 8π, c) $8\pi(1-\frac{\sqrt{3}}{2})$, d) 2π.

10. Vypočtěte povrch tělesa, jehož plášť vytvoří oblouk křivky $x = 4\cos t + 4,\quad y = 4\sin t$ pro

$0 \leq t \leq \frac{2}{3}\pi$ otáčením kolem osy x.

a) 48π, b) 36π, c) 60π, d) 54π.

Výsledky testu

1. a); 2. c); 3. d); 4. c); 5. b); 6. b); 7. a); 8. d); 9. a); 10. c).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v 8 případech, pokračujte další kapitolou.

V opačném případě je třeba prostudovat kapitolu 3.4 znovu.

Shrnutí lekce

Obsah rotační plochy, která vznikne rotací křivky $y = f(x)$ pro $a \le x \le b$ kolem osy x, vypočteme podle vztahu $S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx$. Je-li křivka rotující kolem osy x popsána parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ pro $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$, užijeme pro výpočet obsahu rotační plochy vztah $S = 2\pi \int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2 + \left[\psi'(t)\right]^2}\,dt$. Stejně jako u integrálů pro výpočet délky křivky se nám stane, že neumíme integrál, který obsahuje odmocninu, vyjádřit pomocí elementárních funkcí. V těchto případech nezbývá než použít nějakou přibližnou metodu.

Obsahy obecnějších ploch, které nejsou rotační, lze vypočítat pomocí dvojných integrálů. Podrobnosti naleznete v textu Matematika III.

3.5. Fyzikální aplikace

Cíle

Seznámíte se s použitím určitého integrálu při výpočtu hmotnosti, statických momentů, souřadnic těžiště a momentů setrvačnosti.

Předpokládané znalosti

Předpokládáme, že jste si prostudovali zavedení pojmu určitý integrál (kapitola 2.1). Dále předpokládáme, že znáte základní metody výpočtu určitého integrálu.

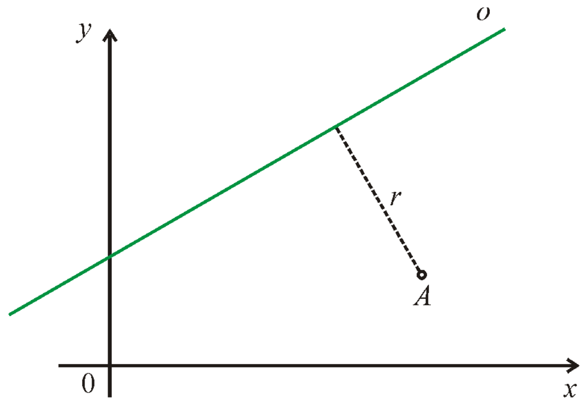
Výklad

Jak již bylo uvedeno v úvodu 3. kapitoly, existuje nepřeberné množství problémů, při jejichž řešení je používán integrální počet. V průběhu studia se seznámíte s použitím integrálů ve fyzice a v dalších odborných předmětech. V této kapitole se omezíme pouze na jednoduché aplikace v mechanice. Půjde o výpočet statických momentů, souřadnic těžiště a momentů setrvačnosti hmotných křivek a rovinných oblastí.

V obecném případě, kdy veličiny závisí na dvou nebo třech proměnných se k výpočtu používají dvojné nebo trojné integrály. Podrobnosti naleznete v textu Matematika III.

Těžiště a moment setrvačnosti soustavy hmotných bodů

Připomeňme si, jak je v mechanice definován statický moment a moment setrvačnosti. Uvažujme v rovině jeden hmotný bod $A=(x,y)$ s hmotností m.



Obr. 3.5.1. Hmotný bod A v rovině

Statický moment hmotného bodu k libovolné ose o je dán vztahem

$$S_o = rm$$

a moment setrvačnosti uvedeného bodu při jeho rotaci kolem osy o je

$I_o = r^2 m$,

kde r je vzdálenost bodu od osy o (obr. 3.5.1). Pokud je uvažovanou osou osa x, je $r = y$ a pro osu y je $r = x$.

Mějme v rovině soustavu hmotných bodů $A_i = (x_i, y_i)$ s hmotnostmi m_i, $i = 1, \ldots, n$.

Celková hmotnost soustavy bude $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$,

statický moment k ose x bude $S_x = \sum_{i=1}^{n} y_i m_i$,

statický moment k ose y bude $S_y = \sum_{i=1}^{n} x_i m_i$

a momenty setrvačnosti budou $I_x = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 m_i$, $I_y = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 m_i$.

Těžiště $T = (\xi, \eta)$ je bod s touto vlastností: Kdyby do něj byla soustředěna všechna hmota soustavy, pak by tento bod měl stejné statické momenty k souřadnicovým osám, jako daná soustava hmotných bodů. Tedy pro těžiště platí

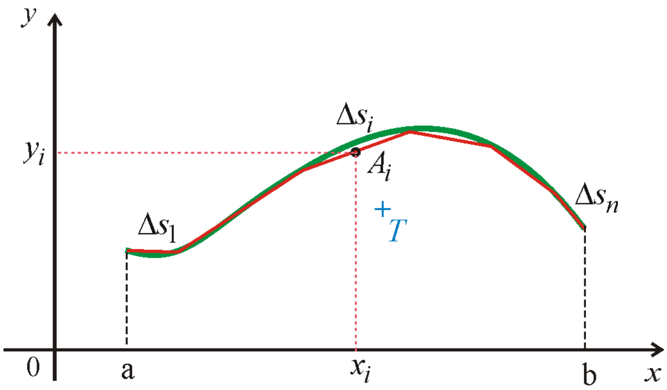
$\xi m = S_y$ a $\eta m = S_x$.

Odtud dostáváme pro souřadnice těžiště vztahy $\xi = \dfrac{S_y}{m}$, $\eta = \dfrac{S_x}{m}$.

Při výpočtu souřadnic těžiště hmotné křivky nebo rovinné oblasti budeme postupovat jako při zavedení určitého integrálu. Křivku (oblast) rozdělíme na malé elementy. Statické momenty (hmotnost) dostaneme jako součet statických momentů (hmotností) těchto elementů. Limitním přechodem pro $n \to \infty$ přejdou sumy na integrály.

Těžiště a moment setrvačnosti rovinné křivky

Křivku v rovině si můžeme představit jako kus drátu z materiálu, který má konstantní délkovou hustotu σ. Chceme nalézt souřadnice těžiště této křivky (obr. 3.5.2).



Obr. 3.5.2. Těžiště rovinné křivky

Předpokládejme, že je křivka dána parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in < \alpha, \beta >$, přičemž funkce $\varphi(t)$ a $\psi(t)$ mají spojité derivace na intervalu $< \alpha, \beta >$.

Její délka (věta 3.2.2) je $s = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt$.

Hmotnost křivky dostaneme jako součin délky a hustoty:

$$m = \sigma s = \sigma \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt .$$

Křivku můžeme aproximovat lomenou čárou složenou z úseček Δs_i, $i = 1, 2, ..., n$. Úsečky budou mít hmotnosti $m_i = \sigma \Delta s_i$, $i = 1, 2, ..., n$. V případě malých elementů si můžeme představit, že hmotnost je soustředěna do jednoho bodu $A_i = (x_i, y_i)$, který leží na dané úsečce Δs_i, $i = 1, 2, ..., n$. Statické momenty této lomené čáry budou

$$S_x = \sum_{i=1}^{n} y_i m_i = \sigma \sum_{i=1}^{n} y_i \Delta s_i ,$$

$$S_y = \sum_{i=1}^{n} x_i m_i = \sigma \sum_{i=1}^{n} x_i \Delta s_i .$$

Je zřejmé, že pro zvětšující se počet úseček budeme dostávat přesnější aproximace statických momentů. Pro $n \to \infty$ dostaneme (analogicky jako v kap. 3.2.)

$$S_x = \sigma \int\limits_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt ,$$

$$S_y = \sigma \int\limits_{\alpha}^{\beta} \varphi(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt .$$

Podobně odvodíme vztahy pro momenty setrvačnosti při rotaci kolem osy *x*, resp. *y*.

Věta 3.5.1.

Nechť je křivka dána parametrickými rovnicemi $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $t\in<\alpha,\beta>$, přičemž funkce $\varphi(t)$ a $\psi(t)$ mají spojité derivace na intervalu $<\alpha,\beta>$. Je-li délková hustota σ křivky konstantní, pak má křivka hmotnost

$$m=\sigma\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\ dt .$$

Pro statické momenty platí:

$$S_x=\sigma\int_{\alpha}^{\beta}\psi(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\ dt ,$$

$$S_y=\sigma\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\ dt .$$

Momenty setrvačnosti této křivky dostaneme ze vztahů:

$$I_x=\sigma\int_{\alpha}^{\beta}\psi^2(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\ dt ,$$

$$I_y=\sigma\int_{\alpha}^{\beta}\varphi^2(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\ dt .$$

Těžiště $T=(\xi,\eta)$ má souřadnice $\xi=\dfrac{S_y}{m}$, $\eta=\dfrac{S_x}{m}$.

Je-li speciálně křivka grafem funkce $y=f(x)$ s konstantní délkovou hustotou, pak je $ds=\sqrt{1+[f'(x)]^2}\ dx$ (věta 3.2.1). Dostáváme následující modifikaci věty 3.5.1.

Věta 3.5.2.

Nechť je hmotná křivka určená explicitní rovnicí $y=f(x)$ se spojitou derivaci $f'(x)$ na intervalu $<a,b>$ a konstantní délkovou hustotou σ. Pak má křivka hmotnost

$$m=\sigma\int_{a}^{b}\sqrt{1+[f'(x)]^2}\ dx .$$

Pro statické momenty platí:

$$S_x = \sigma \int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx,$$

$$S_y = \sigma \int_a^b x\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

Momenty setrvačnosti této křivky dostaneme ze vztahů:

$$I_x = \sigma \int_a^b f^2(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx,$$

$$I_y = \sigma \int_a^b x^2\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

Těžiště $T=(\xi,\eta)$ má souřadnice $\xi = \dfrac{S_y}{m}$, $\eta = \dfrac{S_x}{m}$.

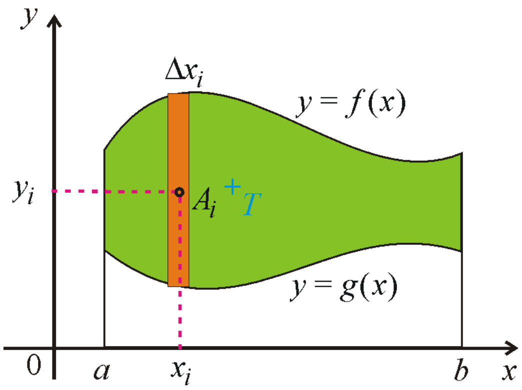
Těžiště a moment setrvačnosti rovinné oblasti

Uvažujme hmotnou rovinnou oblast ohraničenou zdola grafem funkce $g(x)$, shora grafem funkce $f(x)$, ($g(x) \le f(x)$) pro $x \in \langle a,b \rangle$. Předpokládejme, že je plošná hustota σ v každém bodě tohoto obrazce konstantní.

Hmotnost rovinné oblasti dostaneme jako součin obsahu plochy oblasti (věta 3.1.2) a hustoty:

$$m = \sigma \int_a^b \big(f(x)-g(x)\big)\,dx$$

Analogicky jako při zavedení určitého integrálu (kapitola 2.1) rozdělíme obrazec rovnoběžkami s osou y na n „proužků“ (obr. 3.5.3). Každý proužek můžeme aproximovat úzkým obdélníčkem šířky Δx_i, $i=1,2,....,n$, který je zdola ohraničený funkční hodnotou $g(x_i)$ a shora funkční hodnotou $f(x_i)$. Tento obdélníček nahradíme těžištěm $A_i=(x_i,y_i)$ ležícím ve středu obdélníčku. Pro obdélníček bude $y_i = \dfrac{f(x_i)+g(x_i)}{2}$. Do tohoto bodu soustředíme hmotnost celého obdélníčku.



Obr. 3.5.3. Těžiště rovinné oblasti

Hmotnost i - tého obdélníčku bude

$$m_i = \sigma\left[f(x_i) - g(x_i)\right]\Delta x_i, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Statické momenty celé oblasti budou přibližně rovny

$$S_x = \sum_{i=1}^{n} y_i m_i = \sigma \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i) + g(x_i)}{2}\left[f(x_i) - g(x_i)\right]\Delta x_i = \sigma \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[f^2(x_i) - g^2(x_i)\right]\Delta x_i ,$$

$$S_y = \sum_{i=1}^{n} x_i m_i = \sigma \sum_{i=1}^{n} x_i\left[f(x_i) - g(x_i)\right]\Delta x_i .$$

Je zřejmé, že pro zvětšující se počet obdélníčků budeme dostávat přesnější aproximace statických momentů. Pro $n \to \infty$ a $\Delta x_i \to 0$ dostaneme limitním přechodem

$$S_x = \sigma \frac{1}{2}\int_a^b \left[f^2(x) - g^2(x)\right] dx ,$$

$$S_y = \sigma \int_a^b x\left[f(x) - g(x)\right] dx .$$

Podobně odvodíme vztahy pro momenty setrvačnosti při rotaci kolem osy x, resp. y.

Věta 3.5.3.

Nechť je hmotná rovinná oblast ohraničena křivkami $g(x)$ a $f(x)$, kde $g(x) \le f(x)$ na intervalu $< a, b >$. Pak hmotnost této oblasti s konstantní plošnou hustotou σ je

$$m = \sigma \int_a^b \left[f(x) - g(x)\right] \, dx .$$

Pro statické momenty platí:

$$S_x = \sigma \frac{1}{2} \int_a^b \left[f^2(x) - g^2(x) \right] dx ,$$

$$S_y = \sigma \int_a^b x \left[f(x) - g(x) \right] dx .$$

Momenty setrvačnosti této rovinné oblasti dostaneme ze vztahů:

$$I_x = \sigma \frac{1}{3} \int_a^b \left[f^3(x) - g^3(x) \right] dx ,$$

$$I_y = \sigma \int_a^b x^2 \left[f(x) - g(x) \right] dx .$$

Těžiště $T = (\xi, \eta)$ má souřadnice $\xi = \dfrac{S_y}{m}$, $\eta = \dfrac{S_x}{m}$.

Řešené úlohy

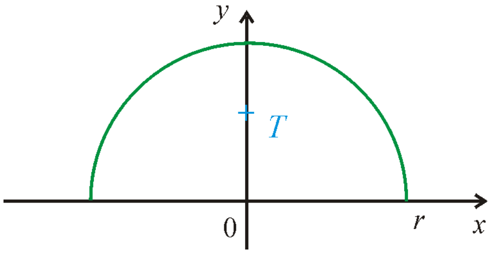
Příklad 3.5.1. Vypočtěte souřadnice těžiště homogenní půlkružnice $x^2 + y^2 = r^2$, $y \ge 0$.

Řešení:

Parametrické rovnice půlkružnice jsou (viz příklad 3.2.2):

$x = r \cos t$,

$y = r \sin t$, $t \in < 0, \pi >$.



Obr. 3.5.4. Souřadnice těžiště homogenní půlkružnice

Je-li délková hustota σ konstantní, je hmotnost rovna součinu hustoty a délky půlkružnice:

$$m = \sigma s = \sigma \frac{1}{2} 2\pi r = \sigma \pi r .$$

Statické momenty jsou:

$$S_x = \sigma \int_0^{\pi} \psi(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\; dt = \sigma \int_0^{\pi} r \sin t \sqrt{[-r\sin t]^2 + [r\cos t]^2}\; dt = \sigma r^2 \int_0^{\pi} \sin t\, dt =$$

$$= \sigma r^2 [-\cos t]_0^{\pi} = \sigma 2r^2,$$

$$S_y = \sigma \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\; dt = \sigma \int_0^{\pi} r \cos t \sqrt{[-r\sin t]^2 + [r\cos t]^2}\; dt = \sigma r^2 \int_0^{\pi} \cos t\, dt =$$

$$= \sigma r^2 [\sin t]_0^{\pi} = 0.$$

Těžiště $T = (\xi, \eta)$ má souřadnice

$$\xi = \frac{S_y}{m} = 0 \text{ a } \eta = \frac{S_x}{m} = \frac{\sigma 2r^2}{\sigma \pi r} = \frac{2r}{\pi}.$$

$$T = (0, \frac{2r}{\pi}).$$

Poznámka

Statický moment S_y jsme nemuseli počítat, protože je evidentní, že pro danou půlkružnici musí těžiště ležet na ose y, a tedy je $S_y = 0$.

Příklad 3.5.2. Vypočtěte momenty setrvačnosti homogenní půlkružnice z příkladu 3.5.2 k souřadnicovým osám.

Řešení:

Moment setrvačnosti půlkružnice k ose *x*:

$$I_x = \sigma \int_{\alpha}^{\beta} \psi^2(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\; dt = \sigma \int_0^{\pi} r^2 \sin^2 t \sqrt{[-r\sin t]^2 + [r\cos t]^2}\; dt =$$

$$= \sigma r^3 \int_0^{\pi} \sin^2 t\, dt = \sigma r^3 \int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2t}{2} dt = \frac{\sigma r^3}{2}\left[t - \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\sigma \pi r^3}{2}.$$

Moment setrvačnosti půlkružnice k ose *y*:

$$I_y = \sigma \int_{\alpha}^{\beta} \varphi^2(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\; dt = \sigma \int_0^{\pi} r^2 \cos^2 t \sqrt{[-r\sin t]^2 + [r\cos t]^2}\; dt =$$

$$= \sigma r^3 \int_0^{\pi} \cos^2 t\, dt = \sigma r^3 \int_0^{\pi} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{\sigma r^3}{2}\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\sigma \pi r^3}{2}.$$

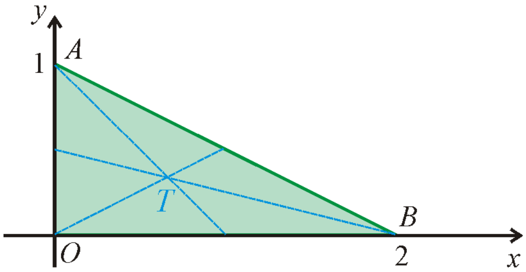
Příklad 3.5.3. Vypočtěte souřadnice těžiště trojúhelníka s vrcholy $O=(0,0)$, $A=(0,1)$ a $B=(2,0)$.

Řešení:

Strana AB daného trojúhelníka leží na přímce

$y-1=\frac{0-1}{2-0}(x-0)$, tj. $y=1-\frac{x}{2}$.

Rovinná oblast je ohraničena shora grafem funkce $f(x)=1-\frac{x}{2}$ a zdola grafem funkce $g(x)=0$ obr. 3.5.5.



Obr. 3.5.5. Těžiště trojúhelníka

Je-li plošná hustota σ konstantní, je hmotnost rovna součinu hustoty a obsahu trojúhelníka:

$m=\sigma P=\sigma\frac{1}{2}2\cdot 1=\sigma$.

Statické momenty jsou (připomínáme, že $g(x)=0$):

$$S_x=\sigma\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\,dx=\sigma\frac{1}{2}\int_0^2(1-\frac{x}{2})^2\,dx=\sigma\frac{1}{2}\int_0^2(1-x+\frac{x^2}{4})\,dx=$$

$$=\sigma\frac{1}{2}\left[x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{12}\right]_0^2=\sigma\frac{1}{2}(2-2+\frac{2}{3})=\sigma\frac{1}{3}.$$

$$S_y=\sigma\int_a^b x\,f(x)\,dx=\sigma\int_0^2 x(1-\frac{x}{2})\,dx=\sigma\int_0^2(x-\frac{x^2}{2})\,dx=\sigma\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right]_0^2=$$

$$=\sigma\left[2-\frac{4}{3}\right]=\sigma\frac{2}{3}.$$

Těžiště $T=(\xi,\eta)$ má souřadnice

$$\xi=\frac{S_y}{m}=\frac{\sigma\frac{2}{3}}{\sigma}=\frac{2}{3} \text{ a } \eta=\frac{S_x}{m}=\frac{\sigma\frac{1}{3}}{\sigma}=\frac{1}{3}.$$

$T = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.

Poznámka

Těžiště trojúhelníka leží v průsečíku těžnic (spojnic vrcholů a středů stran). Těžiště rozděluje těžnici v poměru 1:2. Z podobných trojúhelníků je zřejmé, že x – ová souřadnice těžiště musí ležet v $\frac{1}{3}$ strany OB a y – ová souřadnice těžiště musí ležet v $\frac{1}{3}$ strany OA. Proto $\xi = \frac{1}{3}2 = \frac{2}{3}$ a $\eta = \frac{1}{3}1 = \frac{1}{3}$.

Příklad 3.5.4. Vypočtěte momenty setrvačnosti homogenního trojúhelníka z příkladu 3.5.3 při rotaci kolem osy x, resp. y.

Řešení:

Moment setrvačnosti trojúhelníka k ose x:

$$I_x = \sigma\frac{1}{3}\int_a^b f^3(x)\,dx = \sigma\frac{1}{3}\int_0^2 (1-\frac{x}{2})^3\,dx = \sigma\frac{1}{3}\int_0^2 (1-3\frac{x}{2}+3\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{8})\,dx =$$

$$= \sigma\frac{1}{3}\left[x - 3\frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{4} - \frac{x^4}{32}\right]_0^2 = \sigma\frac{1}{3}(2-3+2-\frac{1}{2}) = \sigma\frac{1}{3}\frac{1}{2} = \sigma\frac{1}{6}.$$

Moment setrvačnosti trojúhelníka k ose y:

$$I_y = \sigma\int_a^b x^2 f(x)\,dx = \sigma\int_0^2 x^2\,(1-\frac{x}{2})\,dx = \sigma\int_0^2 (x^2 - \frac{x^3}{2})\,dx = \sigma\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{8}\right]_0^2 =$$

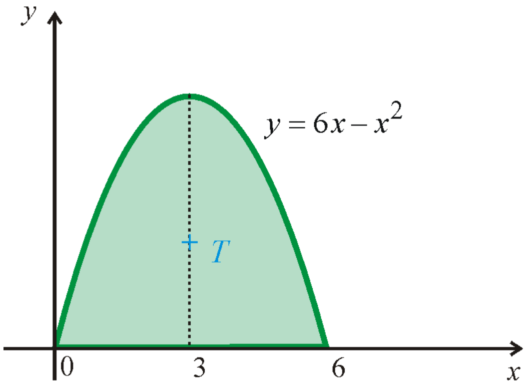
$$= \sigma\left[\frac{8}{3} - 2\right] = \sigma\frac{2}{3}.$$

Příklad 3.5.5. Vypočtěte souřadnice těžiště rovinného obrazce ohraničeného křivkou $y = 6x - x^2$ a osou x.

Řešení:

Grafem paraboly $y = 6x - x^2$ jsme se podrobně zabývali v příkladu 3.1.1. Parabola protíná osu x v bodech $x = 0$ a $x = 6$.

Rovinná oblast je ohraničena shora křivkou $f(x)=6x-x^2$ a zdola křivkou $g(x)=0$ obr. 3.5.6.



Obr. 3.5.6. Těžiště rovinného obrazce ohraničeného křivkou $y=6x-x^2$ a osou x

Je-li plošná hustota σ konstantní, je hmotnost rovna součinu hustoty a plochy oblasti ohraničené parabolou a osou x:

$$P=\sigma\int_0^6 (6x-x^2)dx=\sigma\left[3x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^6=\sigma(108-2\cdot 36)=36\sigma\,.$$

Statické momenty jsou (připomínáme, že $g(x)=0$):

$$S_x=\sigma\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\,dx=\sigma\frac{1}{2}\int_0^6 (6x-x^2)^2\,dx=\sigma\frac{1}{2}\int_0^6 (36x^2-12x^3+x^4)\,dx=$$

$$=\sigma\frac{1}{2}\left[12x^3-3x^4+\frac{x^5}{5}\right]_0^6=\sigma\frac{1}{2}\left[x^3(12-3x+\frac{x^2}{5})\right]_0^6=\sigma\frac{1}{2}6^3(12-18+\frac{36}{5})=$$

$$=\sigma 108\frac{6}{5}=\sigma\frac{648}{5}\,,$$

$$S_y=\sigma\int_a^b x\,f(x)\,dx=\sigma\int_0^6 x(6x-x^2)\,dx=\sigma\int_0^6 (6x^2-x^3)\,dx=\sigma\left[2x^3-\frac{x^4}{4}\right]_0^6=$$

$$=\sigma\left[2\cdot 6^3-\frac{6^4}{4}\right]=\sigma 6^3(2-\frac{3}{2})=108\sigma\,.$$

Těžiště $T=(\xi,\eta)$ má souřadnice

$$\xi=\frac{S_y}{m}=\frac{108\sigma}{36\sigma}=3 \text{ a } \eta=\frac{S_x}{m}=\frac{\sigma\frac{648}{5}}{\sigma 36}=\frac{18}{5}\,.$$

$$T=(3,\frac{18}{5})\,.$$

Poznámka

Statický moment S_y *jsme nemuseli počítat. Protože je obrazec souměrný podle osy* $x = 3$, *musí těžiště ležet na této ose, x - ová souřadnice těžiště musí být* $\xi = 3$.

Kontrolní otázky

1. Uveďte vztah pro statický moment a moment setrvačnosti hmotného bodu.
2. Uveďte vztahy pro výpočet statických momentů a momentů setrvačnosti hmotné křivky dané parametrickými rovnicemi.
3. Jak vypočtete souřadnice těžiště homogenní hmotné křivky dané parametrickými rovnicemi?
4. Uveďte vztahy pro výpočet statických momentů a momentů setrvačnosti hmotné křivky dané explicitní rovnicí.
5. Uveďte vztahy pro výpočet statických momentů a momentů setrvačnosti hmotné rovinné oblasti hraničené křivkami $g(x)$ a $f(x)$, kde $g(x) \le f(x)$ na intervalu $< a,b >$.
6. Uveďte vztahy pro výpočet statických momentů a momentů setrvačnosti hmotné rovinné oblasti hraničené grafem spojité funkce $f(x) \ge 0$ a osou x na intervalu $< a,b >$.
7. Jak vypočtete souřadnice těžiště homogenní hmotné rovinné oblasti ohraničené křivkami $g(x)$ a $f(x)$, kde $g(x) \le f(x)$ na intervalu $< a,b >$?

Úlohy k samostatnému řešení

1. Vypočtěte souřadnice těžiště homogenního rovinného obrazce ohraničeného křivkami

a) $y = 2x - x^2; \quad y = 0$

b) $y^2 = 6x; \quad x = 5$

c) $y^2 = 4x; \quad x = 0; \quad x = 4$

d) $2y = x^2; \quad 2x = y^2$

e) $y = x^2; \quad y = \dfrac{2}{1+x^2}$

f) $y = \sin x; \quad y = 0; \quad 0 \le x \le \pi$

g) $y = \sin x; \quad y = \dfrac{2x}{\pi}; \quad y = 0$

h) $y=\sin x;\quad y=\frac{1}{2};\quad 0\le x\le \pi$

i) $x^2+y^2=4;\quad y\ge 0$

2. Vypočtěte souřadnice těžiště homogenního rovinného obrazce

a) ohraničeného cykloidou $x=3(t-\sin t),\ y=3(1-\cos t), 0\le t\le 2\pi$ a osou x.

b) který leží v prvním kvadrantu a jeho hranici tvoří asteroida $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=4$ a obě souřadné osy.

c) ohraničeného křivkou $x=t^2-t,\quad y=t^3+t^2$ a osou x.

3. Vypočtěte souřadnice těžiště homogenního oblouku dané křivky:

a) $y=-\frac{x^2}{2}+2;\quad -2\le x\le 2$

b) $y=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{2}\ln x;\quad 1\le x\le 2$

c) $x=t^2,\ y=t-\frac{t^3}{3};\quad 0\le t\le\sqrt{3}$

d) $x=2\cos t,\ y=2\sin t;\quad -\frac{\pi}{6}\le t\le\frac{\pi}{6}$

e) $x=3\cos^3 t,\ y=3\sin^3 t;\quad 0\le t\le\pi$

f) $x=2(t-\sin t),\ y=2(1-\cos t);\quad 0\le t\le 2\pi$

g) $x=\cos t+t\sin t,\ y=\sin t-t\cos t;\quad 0\le x\le\pi$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) $\left(1;\frac{2}{5}\right)$; **b)** $(3;0)$; **c)** $\left(\frac{6}{5};3\right)$; **d)** $\left(\frac{9}{10};\frac{9}{10}\right)$; **e)** $\left(0;\frac{15\pi+24}{30\pi-20}\right)$; **f)** $\left(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{8}\right)$;

g) $\left(\frac{4\pi(4\pi+3)}{\pi+4};\frac{5\pi}{6(\pi+4)}\right)$; **h)** $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\sqrt{3}+2\pi}{24\sqrt{3}-8\pi}\right)$; **i)** $\left(0;\frac{8}{3\pi}\right)$. **2. a)** $\left(3\pi;\frac{5}{2}\right)$;

b) $\left(\dfrac{2048}{315\pi};\dfrac{2048}{315\pi}\right)$; **c)** $\left(\dfrac{83}{77};\dfrac{9}{154}\right)$. **3. a)** $(0;0{,}971)$; **b)** $(1{,}52;0{,}397)$; **c)** $\left(\dfrac{7}{5};\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$;

d) $\left(\dfrac{6}{\pi};0\right)$; **e)** $\left(0;\dfrac{6}{5}\right)$; **f)** $\left(2\pi;\dfrac{8}{3}\right)$; **g)** $\left(\dfrac{2\left(\pi^2-6\right)}{\pi^2};\dfrac{6}{\pi}\right)$.

Kontrolní test

1. Vypočtěte moment setrvačnosti vzhledem k ose y homogenní hmotné oblasti ohraničené křivkami $y=\dfrac{2}{1+x^2}$, $y=x^2$.

   a) $\sigma(\frac{18}{5}+\pi)$, b) $\sigma(\frac{18}{5}-\pi)$, c) $\sigma(\frac{18}{5}-\frac{\pi}{2})$, d) $\sigma(\frac{18}{5}+\frac{\pi}{2})$.

2 Vypočtěte moment setrvačnosti vzhledem k ose y homogenního hmotného oblouku křivky dané parametricky $x=t^2$, $y=t-\frac{1}{3}t^3$ pro $0\le t\le\sqrt{3}$.

   a) $\frac{198}{35}\sigma\sqrt{3}$, b) $\frac{189}{35}\sigma\sqrt{3}$, c) $\frac{108}{35}\sigma\sqrt{3}$, d) $\frac{156}{35}\sigma\sqrt{3}$.

3) Vypočtěte statický moment vzhledem k ose x homogenního hmotného oblouku křivky $y=x^3$ pro $0\le x\le 1$.

   a) $\frac{\sigma}{54}(10\sqrt{10}+1)$, b) $\frac{\sigma}{54}(10\sqrt{10}-1)$, c) $\frac{\sigma}{108}(10\sqrt{10}-1)$, d) $\frac{\sigma}{108}(10\sqrt{10}+1)$.

4) Vypočtěte moment setrvačnosti homogenní hmotné oblasti tvaru rovnoramenného trojúhelníka výšky v a základny velikosti a vzhledem k jeho základně.

   a) $\frac{1}{2}\sigma av^3$, b) $\frac{1}{4}\sigma av^2$, c) $\frac{1}{4}\sigma av^3$, d) $\frac{1}{2}\sigma av^2$.

5) Vypočtěte moment setrvačnosti homogenní hmotné oblasti ohraničené elipsou $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $0<b<a$ konst. vzhledem k její hlavní ose.

   a) $\frac{1}{4}\sigma\pi ab^3$, b) $\frac{1}{4}\sigma\pi a^3b$, c) $\frac{1}{2}\sigma\pi ab^3$, d) $\frac{1}{2}\sigma\pi a^3b$.

6) Vypočtěte moment setrvačnosti homogenního hmotného oblouku křivky $y=\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{1}{2}\ln x$ pro $1\le x\le e$ vzhledem k ose y.

a) $\frac{\sigma}{8}(e^4+2e^2-2)$, b) $\frac{\sigma}{8}(e^4+2e^2+3)$,

c) $\frac{\sigma}{8}(e^4+2e^2-3)$, d) $\frac{\sigma}{8}(e^4+2e^2+2)$.

7) Vypočtěte souřadnice těžiště homogenního hmotného oblouku asteroidy

$x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t,\ a>0$ konst. pro $0\le t\le \pi$.

a) $\left(0,\frac{1}{5}a\right)$, b) $\left(0,\frac{3}{5}a\right)$, c) $\left(\frac{2}{5}a,0\right)$, d) $\left(0,\frac{2}{5}a\right)$.

8) Vypočtěte souřadnice těžiště homogenní hmotné oblasti ohraničené křivkami $y=\sin x$ a $y=\frac{1}{2}$ pro x maximálně z intervalu $(0,\pi)$.

a) $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\sqrt{3}+2\pi}{8(3\sqrt{3}-\pi)}\right)$, b) $\left(\frac{\pi}{2},\frac{8(3\sqrt{3}-\pi)}{3\sqrt{3}+2\pi}\right)$,

c) $\left(\frac{3\sqrt{3}+2\pi}{8(3\sqrt{3}-\pi)},\frac{\pi}{2}\right)$, d) $\left(\frac{8(3\sqrt{3}-\pi)}{3\sqrt{3}+2\pi},\frac{\pi}{2}\right)$.

9) Vypočtěte souřadnice těžiště homogenní hmotné oblasti ohraničené křivkami $x=1$ a $y^2=x^3$.

a) $\left(0,\frac{5}{7}\right)$, b) $\left(\frac{5}{7},0\right)$, c) $\left(\frac{4}{7},0\right)$, d) $\left(0,\frac{4}{7}\right)$.

10) Vypočtěte souřadnice těžiště homogenního hmotného oblouku křivky $x=t^2,\ y=t-\frac{1}{3}t^3$ pro $0\le t\le\sqrt{3}$.

a) $\left(\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{7}{5}\right)$, b) $\left(\frac{5}{7},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, c) $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{5}{7}\right)$, d) $\left(\frac{7}{5},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

.

Výsledky testu

1. b); 2. a); 3. b); 4. c); 5. a); 6. c); 7. d); 8. a); 9. b); 10. d).

Průvodce studiem

Pokud jste správně odpověděli nejméně v 8 případech, pokračujte další kapitolou.

V opačném případě je třeba prostudovat kapitolu 3.5 znovu.

Shrnutí lekce

Integrální počet je používán v mnoha disciplínách i tam, kde bychom to neočekávali (např. ekonomie). V této kapitole jsme se omezili na jednoduché aplikace v mechanice. Odvodili jsme vztahy pro výpočet statických momentů, souřadnic těžiště a momentů setrvačnosti křivek a rovinných oblastí. Při výpočtech jsme se omezili na homogenní křivky a oblasti s konstantní hustotou. S výpočty statických momentů, souřadnic těžiště a momentů setrvačnosti křivek v prostoru, rovinných oblastí, těles i v případech, kdy se hustota spojitě mění, se seznámíte v Matematice III.

Za nejdůležitější v této kapitole považujeme metodu, jak lze odvodit potřebné vztahy. Z fyzikálních zákonů se odvodí vztahy pro velmi malé elementy. Provede se součet hodnot pro všechny elementy. Limitním přechodem pro počet elementů $n \to \infty$ přejdou sumy na integrály. Pochopením tohoto principu můžete odvozovat vztahy pro další veličiny.

Stejným způsobem postupovali i tvůrci integrálního počtu Newton a Leibniz.