**Písemka z matematické analýzy pro učitele** (NMTM101)
1. ročník, zimní semestr – 5. termín dne 31. ledna 2022

## Početní část

**Příklad 1.** Spočtěte (pokud existuje) limitu posloupnosti [**10** bodů]

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\big(\ln(n^2)\big)^2}{\sqrt{n+5\ln^2 n}-\sqrt{n+2\ln^2 n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

**Příklad 2.** Spočtěte (pokud existuje) limitu funkce [**10** bodů]

$$\lim_{x\to 0_+} \frac{\cos\sqrt{x}-1}{e^x-1} \cdot \operatorname{arctg}\frac{1}{x^2} \cdot \ln x \cdot \operatorname{arctg} x.$$

**Příklad 3.** Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady [**10** bodů]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n (n+1)^4}{3^n \cdot n! \cdot n^6}.$$

**Příklad 4.** Vyšetřete průběh funkce zadané předpisem [**20** bodů]

$$f(x) = \frac{x}{\ln x}.$$

Součástí řešení je také náčrt grafu, který souhlasí s vašimi výpočty a závěry.
Nezapomeňte vyšetřit též: limity v krajních bodech a bodech nespojitosti, jednostrannou spojitost a derivace, lokální extrémy, intervaly monotonie a konvexity, inflexní body, obor hodnot, asymptoty.

---

**Hodnocení:**

Nutné podmínky na hodnocení **dobře**:

- dosažení aspoň **10** bodů z *Úloh A a B* teoretické části;
- dosažení aspoň **16** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **42** bodů.

Nutné podmínky na hodnocení **velmi dobře**:

- dosažení aspoň **14** bodů z *Úloh A a B* teoretické části;
- dosažení aspoň **21** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **56** bodů.

Nutné podmínky na hodnocení **výborně**:

- dosažení aspoň **30** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **70** bodů.

**Písemka z matematické analýzy pro učitele** (NMTM101)
1. ročník, zimní semestr – 5. termín dne 31. ledna 2022

## Teoretická část

### Úloha A.

(a) Definujte spojitost funkce v bodě a na intervalu. [**2** body]

(b) Napište definici derivace funkce v bodě. [**2** body]

(c) Definujte součet řady, absolutní a relativní konvergenci řady. [**2** body]

(d) Zformulujte Cantorův princip vnořených intervalů. [**2** body]

(e) Zformulujte větu o derivaci inverzní funkce. [**2** body]

### Úloha B.

(a) Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti splňující $\forall n \in \mathbb{N}\colon a_n \leqslant b_n$.
Dokažte, že potom $\lim_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim_{n\to\infty} b_n$, mají-li obě strany smysl. [**5** bodů]

(b) Dokažte, že pokud existuje vlastní derivace $f'(a)$, pak je funkce $f$ v bodě $a$ spojitá. [**4** body]

(c) Zformulujte Fermatovu větu o extrému funkce,
příslušný typ extrému definujte a větu dokažte. [**6** bodů]

### Úloha C.

(a) Rozhodněte o platnosti následujících výroků a své odpovědi stručně zdůvodněte.

- (i) Mezi každými dvěma různými reálnými čísly existuje nějaké číslo racionální. [**1** bod]
- (ii) Je-li $A \subseteq \mathbb{R}$ a $s = \sup A$, potom $-s = \sup(-A)$. (Kde $-A = \{-x\colon x \in A\}$.) [**1** bod]
- (iii) Je-li funkce $f$ nerostoucí, potom $f$ není neklesající. [**1** bod]
- (iv) Nechť je funkce $f$ spojitá v bodě $a$. Potom existuje derivace $f'(a)$. [**1** bod]
- (v) Pokud posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ není omezená zdola ani shora, pak nemá limitu. [**1** bod]
- (vi) Rostoucí funkce má ve všech bodech kladnou derivaci. [**1** bod]

(b) Nechť jsou všechny členy posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ obsaženy v intervalu $I = [a, b]$, kde $a, b$ jsou kladná reálná čísla. Dokažte, že potom [**4** body]

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1.$$

### Úloha D. Vyberte si **jednu** z následujících dvou možností.

(a) Definujte Bolzanovu-Cauchyovu podmínku pro posloupnosti a dokažte,
že posloupnost tuto podmínku splňuje, právě když je konvergentní. [**14** bodů]

**Nebo:**

(b) Zformulujte a dokažte l'Hospitalovo pravidlo „typu $\frac{0}{0}$“. [**15** bodů]

---

Pokud používáte nějaká pomocná tvrzení, musí být jasně patrné, že znáte jejich znění.