

Písemka z matematické analýzy pro učitele (NMTM101)

1. ročník, zimní semestr – 3. termín dne 17. ledna 2022

Počtení část

Příklad 1. Spočtěte (pokud existuje) limitu posloupnosti [10 bodů]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n + n! + n^n + n^3} \cdot \arcsin \frac{1}{n^2} \cdot \arcsin \left(\frac{n^2}{n^2 + 1} \right).$$

Příklad 2. Spočtěte (pokud existuje) limitu funkce [10 bodů]

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} (\sin x)^{\frac{1}{\cos^3 x}}.$$

Příklad 3. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady [10 bodů]

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$

Příklad 4. Vyšetřete průběh funkce zadané předpisem [20 bodů]

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2 - 2x}.$$

Součástí řešení je také náčrt grafu, který souhlasí s vašimi výpočty a závěry.

Nezapomeňte vyšetřit též: limity v krajních bodech a bodech nespojitosti, jednostrannou spojitost a derivace, lokální extrém, intervaly monotonie a konvexity, inflexní body, obor hodnot, asymptoty.

Hodnocení:

Nutné podmínky na hodnocení **dobře**:

- dosažení aspoň **10** bodů z *Úloh A a B* teoretické části;
- dosažení aspoň **16** bodů jak z počtení, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **42** bodů.

Nutné podmínky na hodnocení **velmi dobře**:

- dosažení aspoň **14** bodů z *Úloh A a B* teoretické části;
- dosažení aspoň **21** bodů jak z počtení, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **56** bodů.

Nutné podmínky na hodnocení **výborně**:

- dosažení aspoň **30** bodů jak z počtení, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **70** bodů.

Písemka z matematické analýzy pro učitele (NMTM101)

1. ročník, zimní semestr – 3. termín dne 17. ledna 2022

Teoretická část

Úloha A.

- (a) Napište definici Bolzanovy-Cauchyovy podmínky pro posloupnost. [2 body]
- (b) Napište přesnou definici konvexní funkce na intervalu. [2 body]
- (c) Napište definici asymptoty funkce v ∞ . [2 body]
- (d) Zformulujte Lagrangeovu větu o střední hodnotě. [2 body]
- (e) Zformulujte větu o limitě derivace. [2 body]

Úloha B.

- (a) Z definice spojitosti a limity (uveďte) dokažte spojitost konstantní funkce. [3 body]
- (b) Dokažte, že vlastní limita posloupnosti je jednoznačně určená, pokud existuje. [5 bodů]
- (c) Dokažte, že limita součinu dvou posloupností je součin jejich limit. [7 bodů]
Uvažujte pouze situaci, kdy limity obou posloupností jsou vlastní.

Úloha C.

- (a) Podrobně dokažte, že neexistuje limita $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos x$. [4 body]
- (b) Dokažte (pomocí (a) či jinak), že neexistuje limita $\lim_{x \rightarrow \infty} (\operatorname{arctg} x + 2 \cos x)$. [2 body]
- (c) Rozhodněte o existenci asymptoty v ∞ následující funkce f . Pokud existuje, určete ji. [4 body]

$$f(x) = \frac{3x^2 + 2}{x} - \ln x$$

Úloha D. Vyberte si **jednu** z následujících dvou možností.

- (a) Zformulujte a dokažte Weierstrassovu větu. [12 bodů]

Nebo:

- (b) Zformulujte a dokažte l'Hospitalovo pravidlo „typu $\frac{0}{0}$ “. [15 bodů]

Pokud používáte nějaká pomocná tvrzení, musí být jasně patrné, že znáte jejich znění.