Písemka z matematické analýzy pro učitele (NMTM101)
1. ročník, zimní semestr – 2. termín dne 7. ledna 2022

Početní část

Příklad 1. Spočtěte (pokud existuje) limitu posloupnosti [**10** bodů]

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3-6n}-\sqrt[3]{n^3-6}\right)\cdot\ln(n^4+4^n).$$

Příklad 2. Spočtěte (pokud existuje) limitu funkce [**10** bodů]

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x^4-x^3-x+1)\cdot\ln x}{x^3-3x^2+3x-1}.$$

Příklad 3. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady [**10** bodů]

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2n}\cdot\left(\frac{2n+1}{n}\right)^{n^2+n}}{(n^2+1)^n\cdot\left(\frac{2n+2}{n}\right)^{n^2}}.$$

Příklad 4. Vyšetřete průběh funkce zadané předpisem [**20** bodů]

$$f(x)=\operatorname{arctg}\left(\frac{x+2}{x}\right)\quad\text{pro } x\neq 0\quad\text{a}\quad f(0)=\frac{\pi}{2}.$$

Součástí řešení je také náčrt grafu, který souhlasí s vašimi výpočty a závěry.
Nezapomeňte vyšetřit též: limity v krajních bodech a bodech nespojitosti, jednostrannou spojitost a derivace, lokální extrémy, intervaly monotonie a konvexity, obor hodnot, asymptoty.

Hodnocení:

Nutné podmínky na hodnocení **dobře**:

- dosažení aspoň **10** bodů z *Úloh A a B* teoretické části;
- dosažení aspoň **16** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **42** bodů.

Nutné podmínky na hodnocení **velmi dobře**:

- dosažení aspoň **14** bodů z *Úloh A a B* teoretické části;
- dosažení aspoň **21** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **56** bodů.

Nutné podmínky na hodnocení **výborně**:

- dosažení aspoň **30** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **70** bodů.

Písemka z matematické analýzy pro učitele (NMTM101)
1. ročník, zimní semestr – 2. termín dne 7. ledna 2022

Teoretická část

Úloha A.

(a) Napište definici zápisu $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. [**2** body]

(b) Definujte lokální maximum funkce. [**2** body]

(c) Definujte součet řady, absolutní a relativní konvergenci řady. [**2** body]

(d) Zformulujte Cantorův princip vnořených intervalů. [**2** body]

(e) Zformulujte Weierstrassovu větu. [**2** body]

Úloha B.

(a) Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti splňující $\forall n \in \mathbb{N}\colon a_n \leqslant b_n$.
Dokažte, že potom $\lim_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim_{n\to\infty} b_n$, mají-li obě strany smysl. [**5** bodů]

(b) Z definice dokažte, že konstantní funkce má nulovou derivaci. [**2** body]

(c) Dokažte, že pokud existuje vlastní derivace $f'(a)$, pak je funkce f v bodě a spojitá. [**4** body]

(d) Dokažte, že každá absolutně konvergentní řada je konvergentní. [**5** bodů]

Úloha C. Rozhodněte o platnosti následujících výroků a své odpovědi stručně zdůvodněte.

(a) Existuje přerovnání řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ se součtem 1. *(Platí: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.)* [**2** body]

(b) Nechť je funkce f klesající na $\mathbb{R}$. Potom f není na $\mathbb{R}$ neklesající. [**2** body]

(c) Nechť je funkce f nerostoucí na $\mathbb{R}$. Potom f není na $\mathbb{R}$ neklesající. [**2** body]

(d) Nechť je funkce f spojitá v bodě a. Potom existuje derivace $f'(a)$. [**2** body]

(e) Každá omezená posloupnost s limitou ∞ má všechny vybrané posloupnosti konvergentní. [**2** body]

Úloha D. Vyberte si **jednu** z následujících dvou možností.

(a) Zformulujte a dokažte Bolzanovu větu. [**12** bodů]

Nebo:

(b) Zformulujte a dokažte Heineho větu. [**14** bodů]

Pokud používáte nějaká pomocná tvrzení, musí být jasně patrné, že znáte jejich znění.