Písemka z matematické analýzy pro učitele (NMTM101)
1. ročník, letní semestr – 1. termín dne 23. prosince 2021

Početní část

Příklad 1. Spočtěte (pokud existuje) limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n n^8 + 8^n + n! + \ln(8n)}{\ln(8^n) + (n+1)! + 9n^9 + \sin(n^n)} \cdot \operatorname{arctg} n \cdot \ln(e^n + 1). \qquad [\mathbf{10}\text{ bodů}]$$

Příklad 2. Spočtěte (pokud existuje) limitu funkce

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sin x \cdot (e^{x-4} - 1)}{\sqrt{x^2+20} - \sqrt{4x+20}}. \qquad [\mathbf{10}\text{ bodů}]$$

Příklad 3. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n^3 + 1 + \sqrt{n}) - \ln(n^3+1)}{\sin \frac{1}{n^2}}. \qquad [\mathbf{10}\text{ bodů}]$$

Příklad 4. Vyšetřete průběh funkce zadané předpisem

$$f(x) = |x-2| - 2\operatorname{arctg} x. \qquad [\mathbf{20}\text{ bodů}]$$

Součástí řešení je také náčrt grafu, který souhlasí s vašimi výpočty a závěry.
Nezapomeňte vyšetřit též: limity v krajních bodech a bodech nespojitosti, jednostrannou spojitost a derivace, lokální extrémy, intervaly monotonie a konvexity, obor hodnot, asymptoty.

Hodnocení:

Nutné podmínky na hodnocení **dobře**:

- dosažení aspoň **10** bodů z *Úloh A a B* teoretické části;
- dosažení aspoň **16** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **42** bodů.

Nutné podmínky na hodnocení **velmi dobře**:

- dosažení aspoň **14** bodů z *Úloh A a B* teoretické části;
- dosažení aspoň **21** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **56** bodů.

Nutné podmínky na hodnocení **výborně**:

- dosažení aspoň **30** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **70** bodů.

Písemka z matematické analýzy pro učitele (NMTM101)
1. ročník, letní semestr – 1. termín dne 23. prosince 2021

Teoretická část

Úloha A.

(a) Napište definici vlastní limity posloupnosti. [**2** body]

(b) Napište, co se myslí výrokem, že „funkce f je rostoucí v bodě a“. [**2** body]

(c) Definujte součet řady, absolutní a relativní konvergenci řady. [**2** body]

(d) Zformulujte Cantorův princip vnořených intervalů. [**2** body]

(e) Zformulujte větu o limitě derivace. [**2** body]

Úloha B.

(a) Zformulujte a dokažte Lemma o dvou policajtech pro posloupnosti. [**5** bodů]

(b) Dokažte vzorec pro derivaci součinu dvou funkcí. [**5** bodů]

(c) Zformulujte a dokažte Rolleovu větu. Pomocná tvrzení zformulujte bez důkazu. [**6** bodů]

Úloha C.

(a) Pomocí „teleskopického součtu“ určete součet řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. [**3** body]

(b) Naznačte myšlenku důkazu skutečnosti, že harmonická řada diverguje. [**4** body]

(c) Na protipříkladech vysvětlete, proč o konvergenci řady s nezápornými členy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nelze rozhodnout pouze na základě informace, že $\forall n \in \mathbb{N}\colon\ \sqrt[n]{a_n} < 1$. [**3** body]

Úloha D. Vyberte si **jednu** z následujících dvou možností.

(a) Definujte Bolzanovu-Cauchyovu podmínku pro posloupnosti a dokažte, že posloupnost tuto podmínku splňuje, právě když je konvergentní. [**14** bodů]

Nebo:

(b) Zformulujte a dokažte Heineho větu. [**14** bodů]

Pokud používáte nějaká pomocná tvrzení, musí být jasně patrné, že znáte jejich znění.