Informace a požadavky ke zkoušce z MA1 (NMTM101)

Písemná část zkoušky bude sestávat z části početní (90 minut) a teoretické (70 minut); mezi oběma částmi bude zhruba čtvrthodinová pauza. Hodnocení bude založeno na obvyklém bodovém systému s tím, že maximální součet bodů z obou částí bude $50 + 50 = 100$ bodů. K úspěšnému napsání písemky bude nutné získat stanovený minimální počet bodů v obou částech a také stanovený minimální součet z obou částí (například minimálně 16 z početní i teoretické části a nejméně 42 bodů celkem). Není tedy možné zkoušku složit jen na základě excelentního počtářství nebo excelentní znalosti teorie - do jisté míry bude potřeba obojí. Také bude takřka nemožné získat lepší známku než „dobře“ bez znalosti důkazů.

Bodové hranice jsou spíše orientační nutné podmínky; v případě nerozhodného výsledku (tj. nebudu-li se moci rozhodnout) může přijít na řadu ústní část, na jejímž čase konání se s každým dohodnu individuálně přes e-mail. Následuje podrobný popis požadavků k oběma částem zkoušky.

Nebudou dovoleny žádné elektronické pomůcky, sešity ani tabulky vzorců.

Početní část

bude testovat zvládnutí početních metod vesměs probraných na cvičení, a bude tedy obsahovat vcelku standardní početní úlohy následujících typů.

- Limita posloupnosti;
- limita funkce;
- derivace funkce;
- vyšetřování průběhu funkce;
- konvergence nekonečných číselných řad.

Početní úlohy nebudou potřebovat znalost *l'Hospitalova pravidla*, ale jeho použití bude dovoleno. V mnoha případech to však vede spíše ke komplikacím a možným chybám, a proto vám použití tohoto vzorce spíše nedoporučuji.

Teoretická část

Tato část písemky bude testovat především (ale ne výhradně) vaši znalost látky probrané na přednášce. Budou zadány čtyři úlohy, z nichž každá může mít několik částí. V Úloze A budete psát pouze znění definic a vět. Úloha B bude požadovat formulaci a důkaz jednodušších vět, Úloha D těžších vět. Speciální postavení má Úloha C, kde se mohou objevit jednoduché úlohy na přemýšlení založené na probraných věcech. (Mohou to být otázky typu „rozhodněte o pravdivosti tvrzení“, nebo jednoduché důkazy, případně i poněkud teoretičtější početní úlohy a podobně.)

Vycházíme ze skript a z přednášky. Pokud jsem na přednášce uvedl jiný důkaz, než je ve skriptech, můžete si vybrat. Akceptovat budu ovšem jakýkoliv *správný* důkaz. Teorii lze rozdělit do několika základních témat: (a) Úvodní teorie (Kapitola 1); (b) limita posloupnosti; (c) limita a spojitost funkce; (d) derivace funkce; (e) nekonečné řady.

Budeme se řídit následujícími obecnými zásadami: Číslovaným větám, příkladům a poznámkám je potřeba věnovat zvýšenou pozornost; požaduji znalost znění všech definicí a všech číslovaných vět i s důkazem (s níže uvedenými výjimkami). Číslovaným poznámkám a příkladům je také potřeba věnovat patřičnou pozornost; nebudu sice zkoušet znění poznámky, ale nepřímo se informace z poznámek a příkladů mohou na zkoušce objevit. Pokud nějaký důkaz nebyl na přednášce, nebudu ho zkoušet - s výjimkou drobných částí důkazů, které jsem ponechal jako snadná cvičení (tyto chybějící kousky tedy zkoušet budu).

Kapitola 1: Tato kapitola (viz skripta) je poněkud specifická. Z jejího obsahu nebudete (mnou) zkoušeni přímo *s výjimkou znění Věty o supremu a Archimédova axiomu.* Věnujte pozornost i dvěma tvrzením pod Archimédovým axiomem (na konci kapitoly): související věci se můžou objevit v Úloze C. Raději ještě explicitně poznamenám, že z této kapitoly nebudu požadovat žádné důkazy.

Následující věty požaduji bez důkazu (tj. pouze přesnou formulaci): Věta 2.10 (iii), Věta 2.10*, Věta 2.18, Věta 2.19, Věta 3.3, Věta 3.9, Věta 3.15, Věta 3.16, Věta 3.17, Věty 4.16, 4.17, Důsledek 4.18, Věta 4.19, Věta 5.12 (přerovnání abs. k. řady), Věta 5.13 (Riemannova).

Další témata (Kapitola 6 ve skriptech):

- Věta 6.1 – stačí pouze přesná formulace.
- Věta 6.2 (l'Hospital): stačí „$\frac{0}{0}$“, tj. stačí znát důkaz tak, jak je uveden ve skriptech.
- **Pozor, Větu 6.3** (ekvivalence (BC) a konvergence posloupnosti) požaduji **i s důkazem.**
- Věty 6.4 a 6.5 (tj. věty o zavedení elementárních funkcí, jak jsou očíslovány ve skriptech) se učit nemusíte vůbec, stačí, budete-li vědět, že elementární funkce lze jednoznačně určit pomocí několika málo axiomů.
- Vzorce pro goniometrické funkce (Věta 6.5 (ii)) sice nebudu zkoušet přímo, často jsou ale potřeba a každý je musí znát.

Klíčové pojmy: Kromě stanoveného bodového zisku bude ještě jedna nutná podmínka úspěšného složení zkoušky, a to **správně znát všechny *klíčové pojmy***. Je totiž nesmyslné studenta zkoušet například z důkazu věty o derivaci složené funkce, pokud student nezná samotnou definici derivace. **Pokud se tedy u zkoušky ukáže neznalost některého klíčového pojmu, bude to znamenat neúspěšný pokus.**

Klíčové pojmy jsou následující:

- Prostá funkce;
- supremum a infimum množiny, respektive minimum a maximum (+ rozdíl mezi nimi);
- limita posloupnosti (konečná i nekonečná);
- vybraná posloupnost;
- limita funkce (konečná i nekonečná, jednostranná, ve vlastním i nevlastním bodě);
- spojitost funkce;
- rostoucí, neklesající, klesající a nerostoucí posloupnost nebo funkce;
- derivace funkce;
- součet nekonečné číselné řady jako limita posloupnosti částečných součtů;
- absolutní a relativní konvergence řady;
- Bolzanova-Cauchyova podmínka pro posloupnost.

Důležitá poznámka: Chybička se vždycky může vloudit. Pokud jsem na přednášce o nějakém důkazu říkal, že ho nebudu požadovat, a na seznamu výše příslušná věta chybí, dejte mi o tom vědět co nejdřív a já to zde opravím.

Obecné poznámky, časté chyby, rady atd.

Vaším cílem při studiu je látku pochopit; vaším cílem u zkoušky je prokázat, že se vám to povedlo. Toto pozorování vám může připadat banální; letitá praxe ale ukazuje, že spousta studentů jako by ho neučinila.

Rady k početní části a nejčastější chyby: (Praxe ukázala, že početní část je obvykle problematičtější.)

- Limitu posloupnosti lze v mnoha případech převést na limitu funkce pomocí Heineho věty. Z Heineho věty plyne, že pokud n nahradíme x a limita takto vzniklé funkce existuje, existuje i limita původní posloupnosti a je stejná. To znamená, že onu limitu posloupnosti můžeme takto vypočítat: převedeme posloupnost na funkci a její limitu vypočítáme s využitím všech metod, které známe pro výpočet limity funkce. Dostaneme-li smysluplný výsledek, pak tento výsledek platí i pro původní limitu posloupnosti.
- Ve zkouškové písemce mi nemusíte mi dlouhé odstavce komentářů k výpočtům limit; už vůbec nemusíte vysvětlovat, jakým způsobem jste uvažovali. Stačí naznačit, jaká tvrzení nebo věty používáte a jak.
- Často se vyskytuje chyba „dosazování limity podvýrazu“ neboli „částečné limitění“. Obvykle to vede ke ztrátě většiny bodů, takže si na ni dávejte pozor. Pozor si na tuto chybu dáte tak, že budete při výpočty používat pouze věty z přednášky.
- Při výpočtu limity funkce je obvykle potřeba použít Větu o limitě složené funkce (VOLSF). Aspoň na jednom takovém místě od vás chci, abyste to napsali - a rozepsali, co je vnější funkce, co je vnitřní funkce a naznačili, proč je splněna podmínka (P) (resp. podmínka (ii)). Pokud je VOLSF potřeba použít vícekrát, záleží na tom, do jaké míry je druhá (třetí...) aplikace podobná té první. Pokud jde v podstatě o totéž, nemusíte to už znovu vypisovat.
- Můžete mi napsat i docela alternativní důkazy, ty ale musí a) být správně a b) vycházet z nám známých faktů.[1] Pokud se rozhodnete pro alternativní důkaz, můžu se vás na něj zeptat při ústní části. Mějte na paměti, že matematická teorie se dá budovat různými způsoby; pokud například použijete důkaz Bolzanovy věty z textu, kde se používá jiná (byť ekvivalentní) definice spojitosti funkce, než která byla na přednášce, bude to už malinký problém (pravděpodobně v takovém případě budu potřebovat dovysvětlení při ústní části).

Naučte se derivovat, jako když bičem mrská.

- Bez naprosto spolehlivé schopnosti mechanicky aplikovat všechny vzorečky pro derivování je obtížné zkoušku složit a takřka nemožné pokračovat ve studiu v dalších ročnících. I ti z vás, kdo nakonec dokázali některé derivace v písemce vypočítat správně, na to obvykle potřebovali příliš mnoho přemýšlení a času (a tedy i stresu). Získat vzoreček pro derivaci by pro vás měl být naprosto mechanický proces, který nezabere víc než pár vteřin. Pak máte čas přemýšlet o tom, ve kterých bodech vzoreček platí, jak je to s jednostrannými derivacemi v problematických bodech atd.
- K derivování chci ještě poznamenat, že ne vždy je potřeba po aplikaci vzorečků a obdržení derivace v "surové formě"potřeba ztrácet čas všemožnými úpravami. Ptám-li se pouze na derivaci funkce, potřeba to často není (nebo se teprve ukáže, jaké úpravy se hodí, při výpočtu limity derivace v problematických bodech). Pokud chcete zjistit znaménko derivace (při vyšetřování průběhu funkce), potřeba to být může a nemusí.

[1] A to navíc z takových, které dokazované tvrzení při výstavbě teorie přirozeně předcházejí.

- Při vyšetřování průběhu funkce je obvykle potřeba určit intervaly monotonie, což standardně děláme pomocí určení znaménka derivace ve všech bodech, kde je definována. V souvislosti s tím chci ještě jednou upozornit na užitečnost funkce $\operatorname{sgn} x$, která je (všude kromě bodu 0) derivací funkce $|x|$. Toto se hodí při derivování složených funkcí s absolutní hodnotou, například: $\big(|\sin x|\big)' = \operatorname{sgn}(\sin x) \cdot \cos x$ podle výše uvedeného vzorce a věty o derivaci složené funkce.