Časté chyby a různá doporučení

Než se pustím do výčtu konkrétních chyb, chci zdůraznit, že se v tomto výčtu v žádném případě nesnažím o úplnost. Řada i velmi častých chyb, na které jsem vás opakovaně upozorňoval v průběhu semestru i po písemkách, v tomto seznamu chybí (zejména „dosazení limity podvýrazu“ resp. „částečné limitění“). Mým cílem bylo hlavně upozornit na některé chyby, které mě svou frekvencí (nebo originalitou) překvapily. Jednotlivé body jsem (celkem volně) rozdělil do několika kategorií, nesnažil jsem se ale o řazení podle závažnosti nebo četnosti. V některých případech jsem si neodpustil poněkud delší vysvětlení, snad se ale i v těchto případech podařilo zamezit zamlžení hlavní myšlenky. Doporučuji vám podívat se na všechny body, je totiž pravděpodobné, že některé z uvedených chyb sami děláte.

Limita funkce:

• Pokus použít VOLSF (S) na známou limitu (typu $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\infty}{\infty}$): to nemůže fungovat. Například pro $\lim_{x\to 2} \frac{\sin(x-2)^3}{(x-2)^3}$ uvažujeme vnější funkci $f(y) = \frac{\sin y}{y}$ (ta má v nule limitu 1) a vnitřní funkci $g(x) = (x-2)^3$, která k nule jde (tj. $\lim_{x\to 2} g(x) = 0$). Protože však vnější funkce f není v nule definována, nepřichází v úvahu použít podmínku (S) (tedy – v tomto případě – spojitost f v nule), a musíme tedy ověřit podmínku (P). Ta v našem případě požaduje toto: $\exists \delta > 0\ \forall x \in P(2,\delta)\colon g(x) \neq 0$, což je skutečně splněno (například pro $\delta = 100$).

Stručně řečeno, se známými limitami musíte použít vždy podmínku (P). Něco jiného je samozřejmě třeba limita typu $\lim_{x\to a} e^{f(x)}$, kdy obvykle počítáme limitu exponentu a pak „dosadíme“. Pokud $\lim_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$, pak podle VOLSF (S) platí $\lim_{x\to a} e^{f(x)} = e^A$. Podmínka (S) zde pouze požaduje, aby vnější funkce e^y byla spojitá v bodě A, což platí (exponenciála je spojitá ve všech bodech $\mathbb{R}$, tedy i v bodě A). Je ovšem dobré si uvědomit, že v případě $A \in \{\infty, -\infty\}$ je opět potřeba použít podmínku (P), neboť nelze mluvit o spojitosti funkce v nevlastních bodech (podmínka (S) tedy v tomto případě z principu nemůže být splněna).

• Kdo si nezapamatoval známou limitu pro arcsin, resp. arctg, mohl si je i při písemce snadno odvodit pomocí l'Hospitalova pravidla:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{1} = \frac{1}{\sqrt{1-0^2}} = 1 \quad \text{a podobně pro arctg.}$$

I tak bych ale spíše doporučil si tyto limity zapamatovat, těžké to není.

- **Předčasné použití VOAL:** Následující výpočet je chybný.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n} \cdot \left(\sqrt{n^2-1} - \sqrt{n^2+1}\right) &\overset{!!}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2-1} - \sqrt{n^2+1}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{1+\frac{1}{n}}{1} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1-(n^2+1)}{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+1}} \\
&= \frac{1+0}{1} \cdot \lim_{n\to\infty} n \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{-2}{n \cdot \left(\sqrt{1-\frac{1}{n^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)} \\
&\overset{!!}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{-2n}{n \cdot \left(\sqrt{1-\frac{1}{n^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)} \\
&= -2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \frac{-2}{\sqrt{1-0}+\sqrt{1+0}} = -1
\end{aligned}$$

Problém je v rovnostech označených „**!!**“: první z těchto úprav má totiž za následek, že místo jedné limity (s šancí na rozumný výsledek) máme náhle součin dvou limit, z nichž (jak je patrné po dvou úpravách) jedna má limitu ∞ a druhá 0. Součin $\infty \cdot 0$ však není definován (z dobrých důvodů, o kterých jsme mluvili), pravá strana první problémové rovnosti tedy nemá smysl, a VOAL jsme tedy nemohli použít – tento pokus byl proto předčasný. A navíc zbytečný: vždyť jakou výhodu nám ve výpočtu přineslo, že jsme s každým z obou výrazů pracovali v rámci samostatné limity? Nic nám nebrání se oběma výrazům věnovat zvlášť ale „v rámci jedné limity“.

Druhá rovnost označená dvěma vykřičníky už se jen snaží napravit nenapravitelné: spojením součinu dvou limit (který neexistuje) vznikne opět jediná limita. Ta je sice „v pořádku“, tj. dospěli bychom k ní i korektním postupem, náš postup však korektní nebyl: obsahuje dvě nepravdivé rovnosti.

Tato chyba je vcelku pochopitelná a velmi často ji dělají i studenti, kteří jsou jinak na zkoušku slušně připravení. Stále je to ale hrubá chyba. Je škoda kvůli ní ztratit třeba 4 body za jinak dobře spočtený příklad.

Derivace:

- Spojitost funkce neimplikuje existenci derivace. Funkce $f(x) = |x|$ je v bodě 0 spojitá, nemá v něm ale derivaci (k čemuž stačí zpozorovat, že derivace zleva je -1, zatímco derivace zprava je 1, oboustranná derivace proto nexistuje). Dokonce existují funkce (tak zvaná „monstra“), které jsou spojité na $\mathbb{R}$, a nemají přitom v *žádném* bodě derivaci.

Platí ovšem implikace: Pokud $f'(a) \in \mathbb{R}$, pak f je v bodě a spojitá. (Důkaz je lehký, zkouším ho často, a přesto ho obvykle neumíte.)

- Při derivování funkce (při vyšetřování průběhu) se vyskytuje chyba související s nepochopením významu znaku „=“. Nechť například $f(x) = \sin x$. Většinou nedělá problém napsat si $f'(x) = \cos x$. Při výpočtu druhé derivace to však někdy vypadá takto:

$f''(x) = \cos x = -\sin x$. Je to dáno tím, že si řeknete: „Tak a teď jdu počítat druhou derivaci.“ Napíšete si $f''(x) =$. „Druhá derivace je přece derivace derivace, tak si tu derivaci sem napíšu.“ Píšete $\cos x$. „Tohle chci derivovat. OK, napíšu =.“ A píšete $= -\sin x$.

Možná vám to v tomto případě (kde jsou zúčastněné vzorce jednoduché) připadá absurdní a myslíte si, že byste to neudělali. Jakmile jsou však ty formulky složitější (a není na první pohled zřejmé, že rovnost neplatí), tak to leckdo klidně napíše.

Znaménko „=“ neslouží k oddělovaní jednotlivých kroků vašich úvah nebo výpočtů!

Správně byste tedy měli psát něco jako:

$$f''(x) = (f'(x))' = (\cos x)' = -\sin x.$$

- Pozor, občas se dělá chyba v derivaci cosinu. Správné je $(\cos x)' = -\sin x$.

- Vzorce jako $\frac{1}{(x^2-1)^2}$ je lepší derivovat jako složenou funkci (vnější funkce je $f(y) = y^{-2}$, vnitřní je $g(x) = x^2 - 1$) než jako podíl dvou funkcí:

$$\left(\frac{1}{(x^2-1)^2}\right)' = \frac{-2}{(x^2-1)^3} \cdot 2x,$$

resp. – chcete-li – obšírněji:

$$\left(\frac{1}{(x^2-1)^2}\right)' = \left((x^2-1)^{-2}\right)' = -2(x^2-1)^{-3} \cdot 2x = \frac{-2}{(x^2-1)^3} \cdot 2x,$$

- Vzorce s absolutní hodnotou je dobré derivovat pomocí funkce sgn. Základní vzorec (jehož platnost si každý ověří triviálně) je $\big(|x|\big)' = \operatorname{sgn} x$ pro všechna $x \neq 0$. Toho lze využít při derivování složitějších výrazů s absolutní hodnotou. Například:

$$\left(e^{6x} \cdot |x^2-1|\right)' = 6e^{6x} \cdot |x^2-1| + e^{6x} \cdot \operatorname{sgn}(x^2-1) \cdot 2x,$$

což platí pro všechna x taková, že do absolutní hodnoty nedosazujeme nulu (absolutní hodnota zde hraje roli vnější funkce a ta musí mít (vlastní) derivaci, jinak standardní vzorec pro derivaci složené funkce nefunguje), v tomto případě tedy vzorec platí pro všechna $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Řady:

- „$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{\sqrt{n}} \overset{\text{LSK}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$:“ To je samozřejmě nesmysl. Uvedenou rovnost lze chápat dvěma způsoby: jako rovnost řad, nebo jako rovnost jejich součtů. První možnost znamená, že všechny sčítance jsou stejné (a jsou ve stejném pořadí). Ať už se tuto rovnost rozhodneme chápat v tom, či onom smyslu, je nepravdivá. LSK, tedy Limitní srovnávací kritérium, nám neříká nic o rovnosti řad ani jejich součtů; v ideálním případě nám pouze umožňuje ukázat, že dvě řady se „chovají stejně“ z hlediska konvergence/divergence. U uvedeného příkladu tedy provedeme srovnání obou řad: vyjde nám

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \ldots = 1 \in (0,\infty),$$

takže obě řady „se chovají stejně“. Protože víme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverguje, obě řady divergují.

• Relativní konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ zahrnuje dvě informace: (a) řada konverguje, tj. má konečný součet; (b) řada nekonverguje absolutně, tj. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty$. Stručně se to dá zapsat takto RK $\Leftrightarrow$ K $\wedge$ $\neg$AK.

Není tedy pravda, že když řada nekonverguje relativně, musí divergovat: platí totiž $\neg$RK $\Leftrightarrow$ $\neg$K $\vee$ AK. Řečeno slovy, když řada nekonverguje relativně, znamená to buďto přímo její divergenci ($\neg$K) *nebo* absolutní konvergenci.

• Uvažujme třeba řadu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin(\frac{10}{\sqrt{n}})$. Můžeme si všimnout, že posloupnost $a_n := \sin(\frac{10}{\sqrt{n}})$ není monotónní. Z toho ovšem *nelze* podle Leibnizova kritéria odvodit, že by řada nebyla relativně konvergentní. Taková úvaha obsahuje hned několik hrubých chyb:

(a) Leibnizovo kritérium zahrnuje pouze *jednu implikaci*: pokud je splněna jistá podmínka, pak řada konverguje. O opačné implikaci se neříká nic (a lze snadno ukázat pomocí protipříkladu, že neplatí; jako protipříklad může posloužit např. výše uvedená řada).

(b) Leibnizovo kritérium *hovoří pouze o konvergenci, nikoliv o relativní konvergenci.* To by totiž zahrnovalo i informaci o absolutní konvergenci řady, kterou Leibnizovo kritérium z principu nemůže dát. Pokud tedy úspěšně aplikujete L. kritérium na jistou řadu a ukážete, že je konvergentní, o absolutní konvergenci nevíte stále nic a je potřeba ji vyšetřit zvlášť – jinou metodou. (A v případě, že podmínka z L. kritéria není splněna, nevíte vůbec nic.)

(c) Navíc se může stát, že podmínka monotonie posloupnosti a_n z Leibnizova kritéria – v našem případě $a_n = \sin\frac{10}{\sqrt{n}}$ – je splněna až „od jistého indexu“. V tomto případě tedy celkem snadno dokážeme, že například od $n_0 = 100$ je už posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ klesající (a má limitu nula), takže $\sum_{n=100}^{\infty}(-1)^n \sin\frac{10}{\sqrt{n}}$ konverguje a konverguje i tedy původní řada ($\sum_{n=1}^{\infty}\ldots$).

• U Leibnizova kritéria nezapomeňte ověřit monotonii. Velmi často je to jednoduché. Pokud například $a_n = e^{\frac{1}{n^2+1}}$, zdůvodníme monotonii asi takto (neformálně): jmenovatel v exponentu je rostoucí, takže exponent je klesající. Exponenciála je rostoucí funkce, takže čím menší argument, tím menší hodnota. Posloupnost a_n je proto klesající, což jsme dokázali, aniž bychom potřebovali derivovat funkci $e^{\frac{1}{x^2+1}}$ a dokazovat, že derivace je záporná (a funkce – i původní posloupnost – tedy klesající)

Obecně, když do rostoucí funkce dosadíme klesající (resp. rostoucí) posloupnost, dostaneme klesající (resp. rostoucí) posloupnost, „směr“ monotonie tedy zůstane zachován.

S klesající funkcí je tomu jinak, dosazením klesající posloupnosti dostaneme posloupnost rostoucí a naopak. Těchto jednoduchých postřehů je možné využít v mnoha příkladech na Leibnizovo kritérium.

• Není potřeba vždy explicitně ověřovat tzv. *nutnou podmínku konvergence*. Je samozřejmě dobré, když to v rychlosti promyslíte, pokud ale řada NPK splňuje, nemá cenu to explicitně psát: je to jako kdybyste napsali „řada možná konverguje“. Pochopitelně, pokud si uvědomíte, že řada NPK nesplňuje, okamžitě z toho plyne, že je divergentní, a je tedy namístě to napsat.

Průběh funkce:

• Zapomínáte určit definiční obor funkce f a její body spojitosti. Velmi často je funkce spojitá na celém definičním oboru, případně má jen několik málo bodů nespojitosti. Ty obvykle vznikají dělením nulou nebo v důsledku použití funkce sgn v definici f. Je dobré mít v bodech nespojitosti jasno už dopředu.

• Související chyba je, že když nějakou funkci „uměle“ dodefinuji v jistém bodě (viz zadání písemky za 7.1.2022), pak tento bod už patří do definičního oboru (často jste ho vyřazovali).

• Nezpomínejte, že definiční obor „lichých odmocnin“ je celá množina $\mathbb{R}$. Například tedy $\mathbb{D}_{\sqrt[3]{\cdot}} = \mathbb{R}$.

Různé:

• Na chybějící závorky jsem vás už upozorňoval v hromadném e-mailu. Prosím, dávejte si na to pozor. Pro leckoho není problém napsat třeba něco jako

$$\frac{a^2 - b^2}{x} = \frac{a - b}{x} a + b.$$

Bylo by pěkné, kdyby všichni chápali, že výše uvedená rovnost neplatí.

• „$\arcsin x = \frac{1}{\sin x}$“ apod.: To je samozřejmě nesmysl a v některých případech jde možná o nedorozumění plynoucí z toho, že inverzní funkce a převrácená hodnota funkce f mají stejné značení (a jde tedy vlastně o kolizi značení, která se však z důvodů tradice zachovává): obojí lze značit f^{-1}.

• Měli byste být schopni okamžitě načrtnout grafy základních funkcí jako

$$x^2, 1/x, 1/x^2, \sqrt{x}, \sqrt[3]{x}, \sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{cotg} x, e^x, \ln x, \arcsin x, \arccos x, \operatorname{arctg} x, \operatorname{arccotg} x.$$

Ujistěte se, že to umíte, jde opravdu o základ.

• V důkazech zapomínáte předem zvolit $\varepsilon > 0$ (dané „nepřítelem“). Místo toho konstatujete, že třeba nějaké n_1 existuje pro každé $\varepsilon > 0$ a pak n_1 používáte, jako by už bylo nějaké n_1 pevně zvoleno (například v definici $n_0 = \max\{n_1, \ldots\}$ apod.). To je striktně vzato špatně, vlastně to vůbec nedává smysl; v jistý moment důkazu je nutné explicitně zvolit konkrétní (ale zcela libovolné) ε a s ním nadále pracovat jako s pevným číslem. Pokusím se to vysvětlit, i když to v psané formě vůbec není snadné.

Jak vůbec funguje důkaz výroku typu „$\forall \varepsilon > 0 \ \ldots$“? Ony tři tečky zde mohou zastupovat leccos; bavíme-li se o limitě posloupnosti, pak je to běžně třeba „$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant n_0\colon |a_n - A| < \varepsilon$“ apod. Zde pro mě není podstatné, co přesně následuje za kvantifikátorem $\forall \varepsilon > 0$, stačí si všimnout, že v tom jistě bude obsaženo ε (jinak by tam ten kvantifikátor $\forall \varepsilon > 0$ byl zbytečně). To, co po kvantifikátoru následuje, si tedy můžeme označit $V(\varepsilon)$.[1] Jde nám o to dokázat výrok

$$\forall \varepsilon > 0\colon V(\varepsilon), \tag{1}$$

tedy slovy, že výrok $V(\varepsilon)$ platí pro každé (konkrétní) kladné ε. Jak to uděláme? Existuje nekonečně mnoho kladných čísel ε a my chceme platnost výroku $V(\varepsilon)$ ověřit pro jedno každé z nich; je jasné, že není prakticky proveditelné provést důkaz zvlášť pro každé takové ε (prostě proto, že by ten důkaz byl nekonečně dlouhý).

Logický princip, s jehož pomocí lze obejít tento problém, se nazývá *univerzální generalizace*.[2] Nenechte se odstrašit učeně znějícím názvem: jedná se o přirozenou věc a intuitivně ji používáme od začátku prvního semestru. Univerzální generalizace říká, že pokud jsme schopni dokázat výrok $V(\varepsilon)$ pro libovolné $\varepsilon > 0$, pak platí i výrok (1). To je natolik intuitivní postřeh, že se může zdát až triviální. Pro nás má ale důležitý důsledek: nemusíme se snažit dokázat výrok (1) i s kvantifikátorem nějak přímo, stačí podat důkaz $V(\varepsilon)$, který funguje pro jakékoliv předem dané pevné $\varepsilon > 0$. Pokud se to podaří, podle univerzální generalizace víme, že platí (1).

V praxi to znamená, že na začátku důkazu „nám nepřítel zadá jakékoliv“ $\varepsilon > 0$ a my musíme dokázat $V(\varepsilon)$. Ve výše uvažovaném případě s posloupnostmi to znamená najít příslušné $n_0 \in \mathbb{N}$ atd. Je přitom důležité si uvědomit, že toto n_0 obvykle závisí na ε (a na nás je tuto závislost popsat, což v důkazech tím či oním způsobem vlastně provádíme).

• Měli byste dbát na skutečně (a nikoliv pouze přibližně) správné používání odborných (jakož i ostatních) slov a celkově smysluplné vyjadřování. Detaily hrají roli, nejde o slovíčkaření, definice musí být jasná a přesná (když toho nedocílíme ani v matematice, můžeme rovnou vzdát snahu o prorozumění čemukoliv). Například následující vyjádření, volně prevzaté z jedné písemky, obsahuje hned několik problémů:

> *Řada má součet, když konverguje limita částečných součtů řady. Absolutní konvergence je, když konvergují částečné součty v absolutní hodnotě. Když ne, tak je relativně konvergentní.*

[1] Formálně vzato je V výroková forma s proměnnou ε (nebo též formule o jedné volné proměnné): po dosazení konkrétního ε dostaneme výrok $V(\varepsilon)$, který je buďto pravdivý, nebo nepravdivý.

[2] Viz `https://en.wikipedia.org/wiki/Universal_generalization`

Postupně proberu všechny chyby, které tato „definice“ obsahuje, nejprve se ale zkuste zamyslet a najít jich co nejvíc sami. Zde je jejich výčet:

„*má součet, když*“ Konvergence posloupnosti znamená konečnou limitu; řada ale může mít i nekonečný součet. Správná definice: součet řady je limita příslušných částečných součtů (ať už je tato limita vlastní, nebo nevlastní). Součet tedy existuje například i tehdy, když jdou částečné součty do nekonečna.

„*konverguje limita*“ Striktně vzato je nesmysl tvrdit, že limita „konverguje“: limita je totiž (jediné) číslo a u samostatných čísel jsme nic takového jako konvergence nezaváděli. Smysluplné by bylo napsat, že konverguje nějaká posloupnost.

„*konvergují č. součty*“ Částečné součty (jejichž definice mimochodem nebyla uvedena) jsou také čísla, striktně vzato tedy nemohou konvergovat. Opět: smysl by dávalo tvrdit, že *posloupnost* částečných součtů konverguje.

„*Absolutní konvergence je, když ...*“ Doufal bych, že tento způsob vyjadřování studenti UK už překonali. Bohužel zdaleka ne všichni.

„*částečné součty v abs. hodnotě*“ Pokud máme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, její částečné součty jsou definovány (pro $N \in \mathbb{N}$) jako $\sum_{n=1}^{N} a_n$. Dát je do absolutní hodnoty znamená uvažovat čísla $|S_N| = \left|\sum_{n=1}^{N} a_n\right|$, která s absolutní konvergencí řady, tj. s konvergencí řady $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ nijak nesouvisí. Správné samozřejmě bylo uvažovat (volně řečeno) částečné součty absolutních hodnot, neboli čísla $\sum_{n=1}^{N} |a_n|$, což je obecně něco docela jiného.

„*Když ne, tak ...*“ Není vůbec jasné, co tím autor výroku myslí. Nejpravděpodobněji se to však vztahuje k předchozímu pokusu o definici absolutní konvergence řady. Jinými slovy se zde definuje relativní konvergence absencí konvergence absolutní, což je samozřejmě také špatně.

Struktura definice: Kromě uvedených objektivních chyb v uvedeném citátu, je ještě dobré si uvědomit, že je nesmyslná struktura. Proč bychom měli definovat, co to znamená, že „řada má součet“? I kdyby uvedená definice této situace (totiž, že řada má součet) byla správně, což není, stále bychom se museli ptát, co to ten součet vlastně je. Je proto rozumnější rovnou definovat součet řady – jako limitu posloupnosti částečných součtů (ty se sluší definovat jednoduchým vzorcem); z toho pak okamžitě plyne, že řada má součet, právě když ona limita existuje.

• I v matematice používáme k vyjadřování věty běžného jazyka (v našem případě je to čeština). Byl bych tedy rád, kdyby věty, které píšete, měly aspoň základní gramatickou strukturu a celkově dávaly smysl. Není výjimečné, že mi píšete „věty“ bez sloves, špatně skloňovaná slova, špatně použité předložky, chybějící čárky (na zcela jasných místech) apod. Obecně bych byl rád, aby se všichni naši studenti nejprve naučili česky, to už zde ale asi nedoženeme (a odbourali aspoň hrubé pravopisné chyby).

• Byl bych rád, aby všichni psali „Y“ ve vyjádřeních jako „podle BolzanovY věty“ apod. Např.: *Pokud byste chtěli napsat o Bolzanovi a jeho matematické práci, jistě se to neobejde* *bez Bolzanovy věty.* (V souvislosti s tím by také bylo pěkné, kdyby všichni chápali, že se píše: „V neděli jdeme navštívit Novákovy.“)

- V obecnější rovině bych dodal, že jste studenti naší nejprestižnější univerzity, a měli byste se tedy vyjadřovat a celkově projevovat jako gramotní lidé. To zahrnuje i čitelný a přehledný zápis všeho, co píšete s tím, že to bude po vás někdo číst.