Písemka z matematické analýzy pro učitele (NMTM101)
1. ročník, zimní semestr – 4. termín dne 10.2.2020

Početní část

Příklad 1. Spočtěte (pokud existuje) limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n n^8 + 8^n + n! + \ln(8n)}{\ln(8^n) + (n+1)! + 9n^9 + \sin(n^n)} \cdot \operatorname{arctg} n \cdot \ln(e^n + 1). \qquad [\mathbf{10}\text{ bodů}]$$

Příklad 2. Spočtěte (pokud existuje) limitu funkce

$$\lim_{x\to 4} \frac{\arcsin(x-4)}{\sqrt{x^2+20} - \sqrt{4x+20}}. \qquad [\mathbf{10}\text{ bodů}]$$

Příklad 3. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n^3 + 1 + \sqrt{n}) - \ln(n^3+1)}{\sin\frac{1}{n^2}}. \qquad [\mathbf{10}\text{ bodů}]$$

Příklad 4. Vyšetřete průběh funkce zadané předpisem

$$f(x) = |x-2| - 2\operatorname{arctg} x. \qquad [\mathbf{20}\text{ bodů}]$$

Součástí řešení je také náčrt grafu, který souhlasí s vašimi výpočty a závěry.
Nezapomeňte vyšetřit též: limity v krajních bodech a bodech nespojitosti, jednostrannou spojitost a derivace, lokální extrémy, intervaly monotonie a konvexity, obor hodnot, asymptoty.

Hodnocení:

Nutné podmínky na hodnocení **dobře**:

- dosažení aspoň **16** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **42** bodů.

Nutné podmínky na hodnocení **velmi dobře**:

- dosažení aspoň **21** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **56** bodů.

Nutné podmínky na hodnocení **výborně**:

- dosažení aspoň **26** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **70** bodů.

Písemka z matematické analýzy pro učitele (NMTM101)
1. ročník, zimní semestr – 4. termín dne 10.2.2020

Teoretická část

Úloha A.

(a) Napište definici vlastní limity posloupnosti. [**2** body]

(b) Definujte součet řady, absolutní a relativní konvergenci řady. [**2** body]

(c) Definujte spojitost funkce v bodě a na intervalu. [**2** body]

(d) Zformulujte Cantorův princip vnořených intervalů. [**2** body]

(e) Zformulujte Heineho větu. [**2** body]

Úloha B.

(a) Z definice dokažte, že konstantní funkce má nulovou derivaci. [**2** body]

(b) Dokažte, že (vlastní) limita posloupnosti je jednoznačně určená. [**5** bodů]

(c) Zformulujte a dokažte Leibnizovo kritérium konvergence nekonečných řad. [**7** bodů]

Úloha C. Rozhodněte o platnosti následujících výroků a své odpovědi stručně zdůvodněte.

(a) Mezi každými dvěma různými reálnými čísly existuje nějaké číslo racionální. [**2** body]

(b) Je-li $A \subseteq \mathbb{R}$ a $s = \sup A$, potom $-s = \sup(-A)$. (Kde $-A = \{-x \colon x \in A\}$.) [**2** body]

(c) Je-li funkce f nerostoucí, potom f není neklesající. [**2** body]

(d) Pokud posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ není omezená zdola ani shora, pak nemá limitu. [**2** body]

(e) Rostoucí funkce má ve všech bodech kladnou derivaci. [**2** body]

Úloha D. Vyberte si **jednu** z následujících dvou možností.

(a) Zformulujte a dokažte Weierstrassovu větu. [**12** bodů]

Nebo:

(b) Zformulujte a dokažte L'Hospitalovo pravidlo „typu $\frac{0}{0}$“. [**16** bodů]

Pokud používáte nějaká pomocná tvrzení, musí být jasně patrné, že znáte jejich znění.