Písemka z matematické analýzy pro učitele (NMTM101)
1. ročník, zimní semestr – 5. termín dne 12. února 2024

Početní část

Příklad 1. Spočtěte (pokud existuje) limitu posloupnosti [**10** bodů]

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg}(-n)\cdot\left(\sqrt{n^4+n^2\ln(\ln n)}-\sqrt{n^4-n\sin n}\right).$$

Příklad 2. Spočtěte (pokud existuje) limitu funkce [**10** bodů]

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{\frac{5x+4}{5x-3}}\right)^{\frac{x^2+1}{x+1}}.$$

Příklad 3. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady [**10** bodů]

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^n\cdot\sin\left(\frac{4^n}{3^{2n}\cdot n!}\right).$$

Příklad 4. Vyšetřete průběh funkce zadané předpisem [**20** bodů]

$$f(x)=x\cdot e^{-x^2}.$$

Součástí řešení je náčrt grafu, který souhlasí s vašimi výpočty a závěry.
Nezapomeňte vyšetřit též: limity v krajních bodech a bodech nespojitosti, jednostrannou spojitost a derivace, lokální extrémy, intervaly monotonie a konvexity, inflexní body, obor hodnot, asymptoty.

Hodnocení:

Nutné podmínky na hodnocení **dobře**:

- dosažení aspoň **10** bodů z *Úloh A a B* teoretické části;
- dosažení aspoň **16** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **42** bodů.

Nutné podmínky na hodnocení **velmi dobře**:

- dosažení aspoň **14** bodů z *Úloh A a B* teoretické části;
- dosažení aspoň **21** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **56** bodů.

Nutné podmínky na hodnocení **výborně**:

- dosažení aspoň **30** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **70** bodů.

Písemka z matematické analýzy pro učitele (NMTM101)
1. ročník, zimní semestr – 5. termín dne 12. února 2024

Teoretická část

Úloha A.

(a) Napište definici zápisu $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Používáte-li okolí nekonečna, definujte jej. [**2** body]

(b) Napište definici derivace funkce v bodě. [**2** body]

(c) Napište, co se myslí výrokem, že „funkce f je rostoucí v bodě a“. [**2** body]

(d) Zformulujte Heineho větu. [**2** body]

(e) Zformulujte Bolzanovu větu. [**2** body]

Úloha B.

(a) Dokažte, že limita součtu dvou posloupností je součet jejich limit...

(i) za předpokladu, že obě limity jsou vlastní; [**5** bodů]

(ii) za předpokladu, že obě limity jsou ∞. [**2** body]

(b) Dokažte, že pokud existuje vlastní derivace $f'(a)$, pak je funkce f v bodě a spojitá. [**4** body]

(c) Zformulujte Fermatovu větu o extrému funkce, příslušný typ extrému definujte a větu dokažte. [**6** bodů]

Úloha C.

(a) Rozhodněte o platnosti následujících výroků a své odpovědi stručně zdůvodněte.

(i) Mezi každými dvěma různými reálnými čísly existuje nějaké číslo racionální. [**1** bod]

(ii) Je-li $A \subseteq \mathbb{R}$ a $c = \inf A$, potom $-c = \sup(-A)$. (Kde $-A = \{-x\colon x \in A\}$.) [**1** bod]

(iii) Pokud posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ není omezená zdola ani shora, pak nemá limitu. [**1** bod]

(iv) Je-li funkce f aspoň v jednom bodě rostoucí, potom f není nerostoucí. [**1** bod]

(v) Buď f funkce splňující $f'(a) = \infty$. Potom f není spojitá v bodě a. [**1** bod]

(vi) Rostoucí funkce má ve všech bodech kladnou derivaci. [**1** bod]

(b) Nechť jsou všechny členy posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ obsaženy v intervalu $I = [a, b]$, kde a, b jsou kladná reálná čísla. Dokažte, že [**3** body]

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1.$$

Úloha D. Vyberte si **jednu** z následujících dvou možností.

(a) Zformulujte a dokažte Weierstrassovu větu. [**12** bodů]

Nebo:

(b) Zformulujte a přesně dokažte vzorec pro derivaci složené funkce. [**14** bodů]

Pokud používáte nějaká pomocná tvrzení, musí být jasně patrné, že znáte jejich znění.