Písemka z matematické analýzy pro učitele (NMTM101)
1. ročník, zimní semestr – 4. termín dne 5. února 2024

Početní část

Příklad 1. Spočtěte (pokud existuje) limitu posloupnosti [**10** bodů]

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(3^n+1)}{\sqrt[3]{n^3+2n^2} - \sqrt[3]{n^2+2n}}.$$

Příklad 2. Spočtěte (pokud existuje) limitu funkce [**10** bodů]

$$\lim_{x\to 0} \left(\cos x\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}.$$

Příklad 3. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady [**10** bodů]

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \ln\left(\frac{1+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\right).$$

Příklad 4. Vyšetřete průběh funkce zadané předpisem [**20** bodů]

$$f(x) = |x| + \operatorname{arctg} |x-1|\,.$$

Součástí řešení je náčrt grafu, který souhlasí s vašimi výpočty a závěry.
Nezapomeňte vyšetřit též: limity v krajních bodech a bodech nespojitosti, jednostrannou spojitost a derivace, lokální extrémy, intervaly monotonie a konvexity, inflexní body, obor hodnot, asymptoty.

Hodnocení:

Nutné podmínky na hodnocení **dobře**:

- dosažení aspoň **10** bodů z *Úloh A a B* teoretické části;
- dosažení aspoň **16** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **42** bodů.

Nutné podmínky na hodnocení **velmi dobře**:

- dosažení aspoň **14** bodů z *Úloh A a B* teoretické části;
- dosažení aspoň **21** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **56** bodů.

Nutné podmínky na hodnocení **výborně**:

- dosažení aspoň **30** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **70** bodů.

Písemka z matematické analýzy pro učitele (NMTM101)
1. ročník, zimní semestr – 4. termín dne 5. února 2024

Teoretická část

Úloha A.

(a) Napište definici vlastní limity posloupnosti. [**2** body]

(b) Definujte spojitost funkce v bodě a spojitost funkce na intervalu. [**2** body]

(c) Definujte lokální maximum funkce. [**2** body]

(d) Definujte součet řady, absolutní a relativní konvergenci řady. [**2** body]

(e) Zformulujte větu o limitě derivace. [**2** body]

Úloha B.

(a) Zformulujte a dokažte Lemma o dvou policajtech pro posloupnosti. [**5** bodů]

(b) Zformulujte a dokažte větu o existenci limity monotónní posloupnosti. [**6** bodů]

(c) Dokažte, že každá absolutně konvergentní řada je konvergentní. [**5** bodů]

Úloha C.

(a) Pomocí „teleskopického součtu“ určete součet řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. [**3** body]

(b) Naznačte myšlenku důkazu skutečnosti, že harmonická řada diverguje. [**4** body]

(c) Na (proti)příkladech vysvětlete, proč o konvergenci řady s nezápornými členy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nelze rozhodnout pouze na základě informace, že $\forall n \in \mathbb{N}\colon \ \sqrt[n]{a_n} < 1$. [**3** body]

Úloha D. Vyberte si **jednu** z následujících dvou možností.

(a) Zformulujte a dokažte Bolzanovu-Weierstrassovu větu. [**14** bodů]

Nebo:

(b) Zformulujte a dokažte l’Hospitalovo pravidlo „typu $\frac{0}{0}$“. [**14** bodů]

Pokud používáte nějaká pomocná tvrzení, musí být jasně patrné, že znáte jejich znění.