1) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+\ln(n^2+1)} - \sqrt{n+\ln(n^2)}}{1-\cos\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{1-\cos\frac{1}{n}} \cdot \frac{n+\ln(n^2+1) - (n+\ln(n^2))}{\frac{1}{n^2}\cdot\left(\sqrt{n+\ln(n^2+1)} + \sqrt{n+\ln n^2}\right)}$$

$$\overset{\text{VOAL}}{=} \left(\lim \frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}\right)^{-1} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\frac{n^2+1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}\cdot\left(\sqrt{\dots} + \sqrt{\dots}\right)}$$

$$\overset{\text{H.V.}}{=} \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}} \cdot \lim \frac{1}{\sqrt{\dots} + \sqrt{\dots}}$$

$$\overset{\text{H.V.}}{=} 2\cdot 1\cdot \frac{1}{\infty+\infty} = \frac{2}{\infty} = 0.$$

Heineho věta: $f(y) = \frac{\ln(1+y)}{y}$, $\lim_{y\to 0} f(y) = 1$

$x_n = \frac{1}{n^2}$; (H1) $\lim x_n = 0$

(H2) $\forall n \in \mathbb{N}: x_n \neq 0$

Tedy:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{y\to 0} f(y) \overset{\text{známá}}{=} 1.$$

Podobně: $$\lim \frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}$$

2) $$\lim_{x \to 1} \frac{\sin(x^4 - x^2 - 2x + 2)}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} \cdot \ln x =$$

- $x^3 - 3x^2 + 3x + 1 = (x-1)^3$
- $(x^4 - x^2 - 2x + 2) : (x-1) = \underbrace{x^3 + x^2 - 2}$

stále má kořen 1

$$\begin{array}{l} -(x^4 - x^3) \\ \hline x^3 - x^2 - 2x + 2 \\ -(x^3 - x^2) \\ \hline -2x + 2 \end{array}$$

- $(x^3 + x^2 - 2) : (x-1) = x^2 + 2x + 2$

$$\begin{array}{l} -(x^3 - x^2) \\ \hline 2x^2 - 2 = 2 \cdot (x-1)(x+1) \end{array}$$

$$\overset{\text{VOAL}}{=} \lim_{x \to 1} \frac{\sin(x^4 - x^2 - 2x + 2)}{x^4 - x^2 - 2x + 2} \cdot \lim_{x \to 1} \frac{(x^4 - x^2 - 2x + 2)\ln x}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}$$

$$\overset{\text{VOLSF}}{=} 1 \cdot \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)^2 (x^2 + 2x + 2) \cdot \ln x}{(x-1)^3} =$$

$$= \lim_{x \to 1} (x^2 + 2x + 2) \cdot \lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} =$$

$$= (1^2 + 2 \cdot 1 + 2) \cdot 1 = 5$$

VOLSF: Vnější fce $f(y) = \frac{\sin y}{y}$, $\lim_{y \to 0} f(y) = 1$

Vnitřní fce $g(x) = x^4 - x^2 - 2x + 2$

$\lim_{x \to 1} g(x) = 0$.

(P) g je polynom, má tedy pouze konečně mnoho nulových bodů (kořenů). Proto

$\exists \delta > 0 \ \forall x \in P(1, \delta) : g(x) \neq 0$.

Celkem: $\lim_{x \to 1} f(g(x)) = \lim_{x \to 1} \frac{\sin(x^4 - x^2 - 2x + 2)}{x^4 - x^2 + 2x + 2} = 1$

3) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^3+2n^2)^n \cdot \left(\frac{3n+9}{n+1}\right)^{n^2}}{n^{3n} \cdot \left(\frac{3n}{n+1}\right)^{n^2+2n}} =: \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Použijeme limitní odmocninové kritérium.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n^3+2n^2)\cdot\left(\frac{3n+9}{n+1}\right)^n}{n^3 \cdot \left(\frac{3n}{n+1}\right)^{n+2}} \overset{\text{VOAL}}{=}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^3}\left(1+\frac{2}{n}\right)}{\cancel{n^3}} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{3n}{n+1}\right)^2} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{3n+9}{n+1}\right)^n}{\left(\frac{3n}{n+1}\right)^n}$$

$$\overset{\text{VOAL}}{=} (1+0)\cdot\left(\lim_{n\to\infty} \frac{3n}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right)^{-2} \cdot \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+9}{3n}\right)^n =$$

$$= 3^{-2} \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{9}{3n}\right)^n = \frac{1}{9}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n$$

$$= \frac{1}{9}\cdot e^3 > 1. \quad \text{Tedy } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \text{D.}$$

Poznámky: • $e^3 > 2{,}5^3 = 6{,}25 \cdot 2{,}5 > 9$.

• nemuseli jste zdůvodňovat, že

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n = e^3.$$

Ale pro úplnost: Pomocí Heineho V.:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n \overset{\text{H.V.}}{=} \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \exp\left(x \ln\left(1+\frac{3}{x}\right)\right) \overset{\text{VOLSF (S)}}{=}$$

$$= \exp\left(\lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}{\frac{3}{x}}\cdot 3\right) \overset{\text{VOLSF (P)}}{=}$$

$$= \exp(3) = e^3$$

VOLSF: Vnější: $f(y) = \frac{\ln(1+y)}{y}$, $\lim_{y\to 0} f(y) = 1$

Vnitřní: $g(x) = \frac{3}{x}$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$.

(P) Platí z triviálních důvodů, $0 \notin H_g$.

Tedy např. $\forall x \in P(\infty,1): g(x) \neq 1$. ✓

Celkem: $$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}{\frac{3}{x}} = \lim_{x\to\infty} f(g(x)) = \underline{\underline{1}}$$

4) $f(x) = \operatorname{arccotg}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)$, $f(-1) := \pi$

- $D_f = \mathbb{R}$: skutečně, $D_{\operatorname{arccotg}} = \mathbb{R}$ a

1b

zlomek uvnitř je nedef. pouze pro $x=-1$.

Máme ovšem $f(-1) = \pi$.

- Spojitost: vnější fce arccotg je spoj.

1b

na $\mathbb{R}$, vnitřní fce spoj. na $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Funkce je tedy spoj. nejméně na ↑.

- Limity: V bodě -1: 1b

„$1+\frac{1}{0_-}$"

$$\lim_{x\to -1_-} \frac{x+2}{x+1} = \lim_{x\to -1_-}\left(1+\frac{1}{x+1}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to -1_+} \frac{x+2}{x+1} = \infty. \quad \text{Přitom}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arccotg} x = \pi, \quad \lim_{x\to\infty} \operatorname{arccotg} x = 0.$$

Tedy VOLSF $\Rightarrow$ $\lim_{x\to -1_-} f(x) = \pi$

$\lim_{x\to -1_+} f(x) = 0$.

1b Tedy f je v bodě -1 spojitá zleva, není spojitá.

1b $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \operatorname{arccotg}\left(\frac{x+2}{x+1}\right) =$

$= \operatorname{arccotg} 1 = \frac{\pi}{4}$.

$\left[\operatorname{cotg} x = 1 \Leftrightarrow \cos x = \sin x \overset{x\in(0,\pi)}{\Longleftrightarrow} x = \frac{\pi}{4}.\right]$

- Asymptota v $\pm\infty$: $y = \frac{\pi}{4}$.

$\frac{1}{2}$b

- není sudá, lichá ani periodická.

• $f'(x) = \left(\operatorname{arccotg}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)\right)' = \quad [x \neq -1]$

2b

$= \frac{-1}{1+\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^2} \cdot \frac{x+1-(x+2)}{(x+1)^2} =$

$= \frac{\cancel{(x+1)^2}}{(x+1)^2+(x+2)^2} \cdot \frac{1}{\cancel{(x+1)^2}} = \frac{1}{2x^2+6x+5}$

Tedy: $f' > 0$ na $\mathbb{R} \setminus \{-1\} \Rightarrow$

1b f rostoucí na $(-\infty,-1)$ a na $(-1,\infty)$.

Díky spojitosti zleva v bodě $x=-1$ je f rostoucí dokonce na $(-\infty,-1]$.

• Maximum: $f(-1) = \pi$

1b

• minimum: nenabývá se („bylo by v -1")

1b • $H_f = (0,\frac{\pi}{4}) \cup (\frac{\pi}{4},\pi] = (0,\pi] \setminus \{\frac{\pi}{4}\}$.

• Podle V. o limitě derivace jest

1b $f'_-(-1) = \lim_{x\to -1_-} f'(x) = \lim_{x\to -1_-} \frac{1}{2x^2+6x+5} = \underline{\underline{1}}$,

protože fce je v -1 zleva spojitá.

• $f''(x) \overset{[x\neq -1]}{=} \left(\frac{1}{2x^2+6x+5}\right)' = \underbrace{\frac{-1}{(2x^2+6x+5)^2}}_{<0 \text{ na } \mathbb{R}} \cdot (4x+6)$

2b

nulový bod: $4x+6=0$, $x=-\frac{3}{2}$.

1b

$x \in$	$(-\infty,-\frac{3}{2})$	$(-\frac{3}{2},-1)$	$(-1,\infty)$
f''	+	−	−
f	KONVEXNÍ	KONKÁVNÍ	KONKÁVNÍ

$\frac{1}{2}$b • Inflexní bod: $x = -\frac{3}{2}$

$\left(f(-\frac{3}{2}) = \operatorname{arccotg}\left(\frac{2-\frac{3}{2}}{1-\frac{3}{2}}\right) = \operatorname{arccotg}(-1) = \frac{3\pi}{4}. \right)$

5b