Písemka z matematické analýzy pro učitele (NMTM101)
1. ročník, zimní semestr – 3. termín dne 29. ledna 2024

Početní část

Příklad 1. Spočtěte (pokud existuje) limitu posloupnosti [**10** bodů]

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+\ln(n^2+1)} - \sqrt{n+\ln(n^2)}}{1-\cos\frac{1}{n}}.$$

Příklad 2. Spočtěte (pokud existuje) limitu funkce [**10** bodů]

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x^4-x^2-2x+2)\cdot \ln x}{x^3-3x^2+3x-1}.$$

Příklad 3. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci následující řady. [**10** bodů]
Známou limitu vedoucí na Eulerovo číslo můžete použít v obecném tvaru.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(n^3+2n^2\right)^n \cdot \left(\frac{3n+9}{n+1}\right)^{n^2}}{n^{3n}\cdot \left(\frac{3n}{n+1}\right)^{n^2+2n}}$$

Příklad 4. Vyšetřete průběh funkce zadané předpisem [**20** bodů]

$$f(x) = \operatorname{arccotg}\left(\frac{x+2}{x+1}\right) \quad \text{pro } x \neq -1 \quad \text{a} \quad f(-1) = \pi.$$

Součástí řešení je náčrt grafu, který souhlasí s vašimi výpočty a závěry.
Nezapomeňte vyšetřit též: limity v krajních bodech a bodech nespojitosti, jednostrannou spojitost a derivace, lokální extrémy, intervaly monotonie a konvexity, inflexní body, obor hodnot, asymptoty.

Hodnocení:

Nutné podmínky na hodnocení **dobře**:

- dosažení aspoň **10** bodů z *Úloh A a B* teoretické části;
- dosažení aspoň **16** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **42** bodů.

Nutné podmínky na hodnocení **velmi dobře**:

- dosažení aspoň **14** bodů z *Úloh A a B* teoretické části;
- dosažení aspoň **21** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **56** bodů.

Nutné podmínky na hodnocení **výborně**:

- dosažení aspoň **30** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **70** bodů.

Písemka z matematické analýzy pro učitele (NMTM101)
1. ročník, zimní semestr – 3. termín dne 29. ledna 2024

Teoretická část

Úloha A.

(a) Napište definici vlastní limity posloupnosti. [**2** body]

(b) Napište definici derivace funkce v bodě. [**2** body]

(c) Napište definici asymptoty funkce v ∞. [**2** body]

(d) Zformulujte Weierstrassovu větu. [**2** body]

(e) Zformulujte Riemannovu větu o přerovnání řad. [**2** body]

Úloha B.

(a) Zformulujte a dokažte Lemma o dvou policajtech pro posloupnosti. [**5** bodů]

(b) Dokažte vzorec pro derivaci součinu dvou funkcí. [**5** bodů]

(c) Zformulujte a dokažte Leibnizovo kritérium konvergence nekonečných řad. [**6** bodů]

Úloha C. Rozhodněte o platnosti následujících výroků a své odpovědi stručně zdůvodněte.

(a) Existuje přerovnání řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ se součtem 1. *(Platí: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.)* [**2** body]

(b) Nechť je funkce f klesající na $\mathbb{R}$. Potom f není na $\mathbb{R}$ neklesající. [**2** body]

(c) Nechť je funkce f nerostoucí na $\mathbb{R}$. Potom f není na $\mathbb{R}$ neklesající. [**2** body]

(d) Nechť je funkce f spojitá v bodě a. Potom existuje derivace $f'(a)$. [**2** body]

(e) Každá omezená posloupnost má všechny vybrané posloupnosti konvergentní. [**2** body]

Úloha D. Vyberte si **jednu** z následujících dvou možností.

(a) Zformulujte a přesně dokažte vzorec pro derivaci složené funkce. [**12** bodů]

Nebo:

(b) Zformulujte a dokažte Heineho větu. [**14** bodů]

Pokud používáte nějaká pomocná tvrzení, musí být jasně patrné, že znáte jejich znění.