Písemka z matematické analýzy pro učitele (NMTM101)
1. ročník, zimní semestr – 2. termín dne 22. ledna 2024

Početní část

Příklad 1. Spočtěte (pokud existuje) limitu posloupnosti [**10** bodů]

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{120} - \left(1+\frac{2}{n}\right)^{80}}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{100} + \left(1+\frac{3}{n}\right)^{100} - 2}.$$

Příklad 2. Spočtěte (pokud existuje) limitu funkce [**10** bodů]

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos(x^2)}}{x\sin x}.$$

Příklad 3. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci řady [**10** bodů]

$$\sum_{n=5}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\sqrt{n-5} - \sqrt{n-4}\right) \cdot \sin\frac{1}{n^{2/3}}$$

Příklad 4. Vyšetřete průběh funkce zadané předpisem [**20** bodů]

$$f(x) = (x^2+5x+6)\cdot \exp\big(|x-2|-3\big).$$

Součástí řešení je náčrt grafu, který souhlasí s vašimi výpočty a závěry.
Nezapomeňte vyšetřit též: limity v krajních bodech a bodech nespojitosti, jednostrannou spojitost a derivace, lokální extrémy, intervaly monotonie a konvexity, inflexní body, obor hodnot, asymptoty.

Hodnocení:

Nutné podmínky na hodnocení **dobře**:

- dosažení aspoň **10** bodů z *Úloh A a B* teoretické části;
- dosažení aspoň **16** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **42** bodů.

Nutné podmínky na hodnocení **velmi dobře**:

- dosažení aspoň **14** bodů z *Úloh A a B* teoretické části;
- dosažení aspoň **21** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **56** bodů.

Nutné podmínky na hodnocení **výborně**:

- dosažení aspoň **30** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **70** bodů.

Písemka z matematické analýzy pro učitele (NMTM101)
1. ročník, zimní semestr – 2. termín dne 22. ledna 2024

Teoretická část

Úloha A.

(a) Napište definici vlastní limity funkce ve vlastním bodě. [**2** body]

(b) Definujte lokální minimum funkce. [**2** body]

(c) Zformulujte větu o derivaci inverzní funkce. [**2** body]

(d) Zformulujte Cauchyovu větu o střední hodnotě. [**2** body]

(e) Zformulujte Weierstrassovu větu. [**2** body]

Úloha B.

(a) Dokažte, že vlastní limita posloupnosti je jednoznačně určená, pokud existuje. [**5** bodů]

(b) Dokažte, že limita součinu dvou posloupností je součin jejich limit. [**6** bodů]
Uvažujte pouze situaci, kdy limity obou posloupností jsou vlastní.

(c) Zformulujte a dokažte Rolleovu větu. Pomocná tvrzení zformulujte bez důkazu. [**6** bodů]

Úloha C.

(a) Rozhodněte o platnosti následujících výroků o reálných funkcích reálné proměnné:

  (i) Funkce arcsin má v některém bodě lokální extrém. [**1** bod]

  (ii) Funkce arccos má v některém bodě globální extrém. [**1** bod]

  (iii) Konstantní funkce má v každém bodě extrém. [**1** bod]

  (iv) Funkce $f(x) = \sqrt{-1 - x^2}$ má extrém v některém bodě svého definičního oboru. [**1** bod]

  (v) Funkce $f(x) = \sqrt{-1 - x^2}$ má extrém v každém bodě svého definičního oboru. [**1** bod]

(b) Zformulujte a dokažte Lemma o dvou policajtech *pro funkce.* Můžete bez důkazu použít Heineho větu a Lemma o dvou policajtech pro posloupnosti (v tom případě Heineho větu zformulujte) nebo tvrzení můžete dokázat přímo z definice limity funkce. [**4** body]

Úloha D. Vyberte si **jednu** z následujících dvou možností.

(a) Zformulujte a dokažte Bolzanovu větu. [**12** bodů]

Nebo:

(b) Zformulujte a dokažte l'Hospitalovo pravidlo „typu $\frac{0}{0}$“. [**14** bodů]

Pokud používáte nějaká pomocná tvrzení, musí být jasně patrné, že znáte jejich znění.